Ανάλυση Fourier & Ολοκλήρωμα Lebesgue
Μάθημα 12ο (02-04-2015)

Θεώρημα παραγώγισης (Lebesgue)

Έστω $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$.
Τότε, $\lim_{B \downarrow x} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)\, d\lambda(y) = f(x)$ σ.π.

Ορισμός

Μια συνάρτηση $(f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R})$ λέγεται τοπικά ολοκληρώσιμη (γράφουμε $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^d)$) αν είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε $B \subseteq \mathbb{R}^d$: $\forall$ ανοιχτή μπάλα B, η $f \cdot \chi_B \in L_1(\mathbb{R}^d)$.

Πρόταση 1

Αν $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^d)$, τότε $\lim_{B \downarrow x} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)\, d\lambda(y) = f(x)$ σ.π.

Απόδειξη

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $B_n = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < n\}$
Αφού $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^d)$, η $f \cdot \chi_{B_n} \in L_1(\mathbb{R}^d)$
Έχουμε $\lim_{B \downarrow x} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y) \chi_{B_n}(y)\, d\lambda(y) = f(x)$ σ.π. στον $\mathbb{R}^d$
Αν $x \in B_n$ καθώς $B \downarrow x$ έχουμε $B \subseteq B_n$, επομένως
$\frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y) \cancel{\chi_{B_n}(y)}^{1}\, d\lambda(y) = \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)\, d\lambda(y)$
Άρα, $\lim_{B \downarrow x} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)\, d\lambda(y) \overset{*}{=} f(x)$ σ.π. στις B_n
Ορίζουμε Z_n το σύνολο των $x \in B_n$, για τα οποία δεν ισχύει η (*) και $Z = \bigcup Z_n$.
Τότε, $\lambda(Z) = 0$ και $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus Z$ ισχύει η (*) ∎

Πρόταση 2 (Θεώρημα πυκνότητας Lebesgue)
Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.
Τότε, $\lim\limits_{B\downarrow x} \frac{\lambda(E\cap B)}{\lambda(B)} = 1$ σ.π. στο E και $\lim\limits_{B\downarrow x} \frac{\lambda(E\cap B)}{\lambda(B)} = 0$ σ.π. στο $\mathbb{R}^d \setminus E$.

Απόδειξη
Η $\chi_E : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη:
$$\forall B \subseteq \mathbb{R}^d \quad \int_B \chi_E \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_B \cdot \chi_E \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{E\cap B} \, d\lambda = \lambda(E\cap B) \le \lambda(B) < \infty$$
Από Πρόταση 1 έχουμε ότι
$$\lim_{B\downarrow x} \frac{\lambda(E\cap B)}{\lambda(B)} = \lim_{B\downarrow x} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B \chi_E \, d\lambda = \chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x\in E \\ 0, & \text{αν } x\notin E \end{cases} \quad \text{σ.π.} \quad \blacksquare$$

Ορισμός
Έστω $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^d)$.
Λέμε ότι το $x\in\mathbb{R}^d$ είναι __σημείο Lebesgue__ της f αν
$\frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y) - f(x)| \, d\lambda(y) \xrightarrow[B\downarrow x]{} 0$ και $|f(x)| < +\infty$.
Το σύνολο των σημείων Lebesgue της f το συμβολίζουμε με $\mathcal{L}eb(f)$.

Παρατήρηση
Αν $x\in \mathcal{L}eb(f)$, τότε: $\left| \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)\, d\lambda(y) - f(x) \right| =$
$$= \left| \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)\, d\lambda(y) - \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(x)\, d\lambda(y) \right| \le \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y) - f(x)|\, d\lambda(y) \xrightarrow[B\downarrow x]{} 0$$
Άρα, $\lim\limits_{B\downarrow x} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)\, d\lambda(y) = f(x)$.

Πρόταση 3
Έστω $f\in L_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Τότε, σχεδόν όλα τα $x\in\mathbb{R}^d$ είναι σημεία Lebesgue της f: $\lambda(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{L}eb(f)) = 0$.

Απόδειξη

Θεωρούμε μια αρίθμηση των ρητών $\mathbb{Q}=\{r_n : n\in\mathbb{N}\}$.
και $\forall n\in\mathbb{N}$ θεωρούμε τη συνάρτηση $g_n(x)=|f(x)-r_n|$.

Η g_n είναι τοπικά ολοκληρώσιμη:
$$\int_B g_n=\int_B |f-r_n|\le\int_B|f|+\int_B r_n=\int_B|f|+r_n\cdot\lambda(B)<\infty$$

Άρα, υπάρχει $Z_n\subseteq\mathbb{R}^d$ με $\lambda(Z_n)=0$ ώστε:
$$\forall x\notin Z_n \quad \lim_{B\downarrow x}\frac{1}{\lambda(B)}\int_B|f(y)-r_n|\,d\lambda(y)=|f(x)-r_n|$$

Ορίζουμε $Z=\bigcup_n Z_n \Rightarrow \lambda(Z)=0$ και αν $A=\{f=\pm\infty\}\Rightarrow\lambda(A)=0$ (γιατί $f\in L_{loc}(\mathbb{R}^d)$).

Ισχυρισμός: $\mathbb{R}^d\setminus(Z\cup A)\subseteq Leb(f)$.

Έστω $x\notin Z$ και $\varepsilon>0$.

Υπάρχει $n\in\mathbb{N}$: $|f(x)-r_n|<\varepsilon$

Γράφουμε:
$$\frac{1}{\lambda(B)}\int_B|f(y)-f(x)|\,d\lambda(y)\le\frac{1}{\lambda(B)}\int_B|f(y)-r_n|\,d\lambda(y)+|r_n-f(x)|$$
$\downarrow$ $|f(x)-r_n|$ (γιατί $x\notin Z\Rightarrow x\notin Z_n$)

$$\Rightarrow \limsup_{B\downarrow x}\frac{1}{\lambda(B)}\int_B|f(y)-f(x)|\,d\lambda(y)\le|f(x)-r_n|+|r_n-f(x)|<2\varepsilon$$

Αφού ε τυχόν, $\lim_{B\downarrow x}\frac{1}{\lambda(B)}\int_B|f(y)-f(x)|\,d\lambda(y)=0\Rightarrow x\in Leb(f)$. ■

Θεώρημα Fubini - Συνέχεια

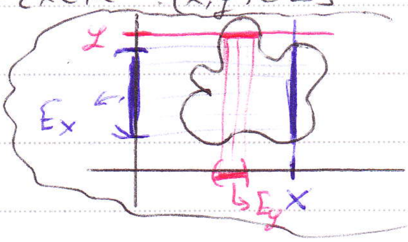
Έστω $f:\mathbb{R}^d=\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}\longrightarrow\mathbb{R}$.

Εδώ, $d_1+d_2=d$ και γράφουμε (x,y) για τα σημεία του $\mathbb{R}^d$, όπου $x\in\mathbb{R}^{d_1}$, $y\in\mathbb{R}^{d_2}$.

Για κάθε $y\in\mathbb{R}^{d_2}$ ορίζουμε $f^y:\mathbb{R}^{d_1}\to\mathbb{R}$ με $f^y(x)=f(x,y)$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}^{d_1}$ ορίζουμε $f_x:\mathbb{R}^{d_2}\to\mathbb{R}$ με $f_x(y)=f(x,y)$

Ανάλογα, αν $E\subseteq\mathbb{R}^d$, τότε $\forall y\in\mathbb{R}^{d_2}$ ορίζουμε $E^y=\{x\in\mathbb{R}^{d_1}:(x,y)\in E\}$
και $\forall x\in\mathbb{R}^{d_1}$ ορίζουμε $E_x=\{y\in\mathbb{R}^{d_2}:(x,y)\in E\}$



Θεώρημα (Fubini)

Έστω $f:\underbrace{\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}}_{\mathbb{R}^d}\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη.

Τότε: (α) Η $f^y:\mathbb{R}^{d_1}\to\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη σχεδόν $\forall y\in\mathbb{R}^{d_2}$ και ολοκληρώσιμη.
(β) Η $y\longmapsto\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f^y\,d\lambda_{d_1}$ είναι ολοκληρώσιμη στον $\mathbb{R}^{d_2}$ ($G:\mathbb{R}^{d_2}\to\mathbb{R}$, $G(y)=\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f^y\,d\lambda_{d_1}$)
(γ) $\int_{\mathbb{R}^d}f\,d\lambda_d=\int_{\mathbb{R}^{d_2}}G\,d\lambda_{d_2}=\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f^y\,d\lambda_{d_1}\right)d\lambda_{d_2}$.

<u>Παρατήρηση</u>

Λόγω συμμετρίας (στο επιχείρημα) μπορούμε να αλλάξουμε τους ρόλους των x και y.

Άρα, $\int_{\mathbb{R}^d} f\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y \right) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f_x \right)$.

<u>Διαδικασία της απόδειξης</u>

Ονομάζουμε $\mathcal{F}$ την οικογένεια όλων των ολοκληρώσιμων $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν τα (α), (β), (γ).

Θα δείξουμε ότι $L_1(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{F}$.

1. Η $\mathcal{F}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένους γρ. συνδυασμούς.

Απόδ. $\Rightarrow$ Δείχνουμε ότι αν $f, g \in \mathcal{F}$, τότε $f+g \in \mathcal{F}$.

(α) $(f+g)^y = f^y + g^y$ (γιατί $(f+g)^y(x) = (f+g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y) =$
$= f^y(x) + g^y(x) = (f^y + g^y)(x)$.)

Υπάρχουν $Z_1, Z_2 \subseteq \mathbb{R}^{d_2}$ με $\lambda(Z_1) = \lambda(Z_2)$:

- Αν $y \notin Z_1$, η f^y ολοκληρώσιμη
- Αν $y \notin Z_2$, η g^y ολοκληρώσιμη.

Τότε, $\lambda(Z_1 \cup Z_2) = 0$ και αν $y \notin Z_1 \cup Z_2$, f^y, g^y ολοκληρώσιμες

$\Rightarrow (f+g)^y = f^y + g^y$ ολοκληρώσιμη.

(β) Η $G(y) = \int f^y$ και η $H(y) = \int g^y$ είναι ολοκληρώσιμες

($f, g \in \mathcal{F}$) $\Rightarrow (G+H)(y) = \int f^y + \int g^y = \int (f^y + g^y) = \int (f+g)^y$ είναι ολοκληρώσιμη.

(γ) $\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} (f+g)^y \right) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\underbrace{\int f^y}_{} + \underbrace{\int g^y}_{} \right) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} G + \int_{\mathbb{R}^{d_2}} H = \int_{\mathbb{R}^d} f + \int_{\mathbb{R}^d} g = \int_{\mathbb{R}^d} (f+g)$.

2. Αν $f_k, f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ και $f_k \in \mathcal{F}$ και $f_k \nearrow f$ ή $f_k \searrow f$, τότε $f \in \mathcal{F}$.

<u>Σημείωση</u>: Αν $f_k \searrow f$, τότε $-f_k \nearrow -f$ άρα αναγόμαστε σε αύξουσες.

Αν $f_k \nearrow f$, τότε $\underbrace{f_k - f_1}_{0 \le g_k \in \mathcal{F}} \nearrow \underbrace{f_k - f_1}_{\in L_1}$, άρα αναγόμαστε σε αύξουσες ακολ. μη-αρνητικών συναρτήσεων και μετά ΘΜΣ.

(3) Έστω $f\in L_1(\mathbb{R}^d)$

Γράφουμε $f=f^+-f^-$

Αν δείξουμε ότι $f^+, f^- \in \mathcal{F} \overset{(1)}{\Longrightarrow} f\in\mathcal{F}$

⇒ Άρα, μπορώ να υποθέσω ότι $f\in L_1(\mathbb{R}^d)$ και $f\ge 0$.

⇒ Ξέρουμε ότι υπάρχουν απλές ολοκληρώσιμες:

$$0\le \phi_1\le\phi_2\le\dots\le\phi_k\le\phi_{k+1}\le\dots\le f$$

με $\phi_k \nearrow f$.

Αν δείξουμε ότι κάθε απλή ολοκληρώσιμη $\phi\in\mathcal{F}$, τότε από το (2), $f\in\mathcal{F}$.

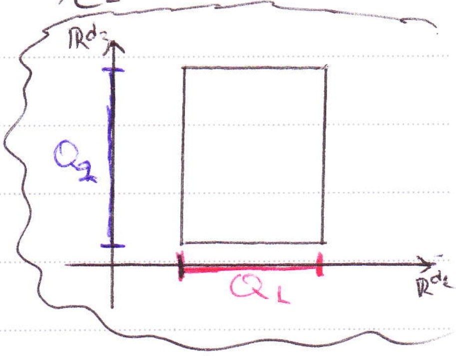
⇒ Έστω $\phi=\sum_{i=1}^{n} t_i\chi_{E_i}$, E_i μετρήσιμα, $\lambda(E_i)<\infty$, μια απλή ολοκληρώσιμη.

Από το (1) αρκεί να δείξουμε ότι όλες οι $\chi_{E_i}\in\mathcal{F}$.

Μένει να δείξουμε το εξής:

(a) αν $E\subseteq\mathbb{R}^d$ μετρήσιμο και $\lambda(E)<\infty$, τότε $\chi_E\in\mathcal{F}$.

(α) $E=Q=Q_1\times Q_2$.



$(\chi_E)^y(x)=\chi_E(x,y)=1 \iff (x,y)\in E \iff$

$\iff x\in E^y$. Άρα $(\chi_E)^y=\chi_{E^y}$

Αν $y\notin Q_2$, τότε $E^y=\emptyset$

Αν $y\in Q_2$, τότε $E^y=Q_1$

Άρα $(\chi_E)^y=0$ ή χ_{Q_1}.

(β) $\int_{\mathbb{R}^{d_1}}(\chi_E)^y = \begin{cases} 0, & \text{αν } y\notin Q_2 \\ \lambda(Q_1), & \text{αν } y\in Q_2 \end{cases}$

Άρα $\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}}(\chi_E)^y\right)=\int_{Q_2}\lambda(Q_1)=\lambda(Q_1)\cdot\lambda(Q_2)$.

(γ) $\int\chi_E=\int\chi_Q=\lambda(Q)\overset{\checkmark}{=}\lambda(Q_1)\cdot\lambda(Q_2)=\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}}(\chi_E)^y\right)$

(β) Αν $E \subseteq$ στο σύνορο κύβων, τότε $\chi_E \in \mathcal{R}$

(γ) Αν $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ μη επικαλυπτόμενοι κύβοι, τότε: $\chi_{Q_1 \cup \dots \cup Q_k} \in \mathcal{R}$.

(δ) Αν E ανοιχτό, $\lambda(E) < \infty$, τότε $\chi_E \in \mathcal{R}$.

(οι λεπτομέρειες στις σημειώσεις του μαθήματος)