Ανάλυση Fourier & Ολοκλήρωμα Lebesgue

Μάθημα 11ο (31-03-2015)

Το Θεώρημα παραγώγισης (του Lebesgue)

(α) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη.
Ορίζουμε $F(x)=\int_a^x f(y)\,d\lambda(y)$
Είναι σωστό ότι $\exists F'(x)(=f(x))$ σχεδόν παντού;

(β) Ποιές είναι οι $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμες σχεδόν παντού και ικανοποιούν την $F(x)-F(a)=\int_a^x F'(y)\,d\lambda(y)$, $a\le x\le b$;

Θα ασχοληθούμε με το (α):
Θέλουμε $\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(y)\,d\lambda(y)=f(x)$ σ.π. στο $[a,b]$

Το αντίστοιχο πρόβλημα στον $\mathbb{R}^d$:
Έστω $f\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d)$
Για κάθε x και για κάθε ανοιχτή μπάλα B με $x\in B$ θεωρούμε το $\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)\,d\lambda(y)$

Θεώρημα (Lebesgue)

$$\lim_{B\downarrow x}\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)\,d\lambda(y)\overset{\circledast}{=}f(x)\quad \text{σχεδόν παντού}$$

[Τι σημαίνει αυτό: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: αν $x\in B$ και $\lambda(B)<\delta$, τότε:
$$\left|\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)\,d\lambda(y)-f(x)\right|<\varepsilon$$]

"Προαπαιτούμενα" απόδειξης

① Αν η f είναι συνεχής στο x, τότε η ⊛ ισχύει για το x.

→ Έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχει $\eta>0$: αν $y\in\mathbb{R}^d$ και $|y-x|<\eta$, τότε $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$.

Παρατηρούμε ότι αν $r<\frac{\eta}{2}$ και $x\in B(y,r)$, τότε $B(y,r)\subseteq B(x,\eta)$: αν $z\in B(y,r)$, τότε $|x-z|\leq|x-y|+|y-z|<r+r=$
$=2r<\eta$

Αν $\lambda(B)<\underbrace{\lambda(B(0,\eta/2))}_{\delta}$ και $x\in B$, τότε $B\subseteq B(x,\eta)$.

Τότε, αν $\lambda(B)<\delta$ με $x\in B$, $\left|\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)\,d\lambda(y)-f(x)\right|=$

$$=\left|\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)\,d\lambda(y)-\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(x)\,d\lambda(y)\right|\leq\frac{1}{\lambda(B)}\int_B \underbrace{|f(y)-f(x)|}_{<\varepsilon}\,d\lambda(y)\leq\varepsilon \quad \square$$

② Προσέγγιση: Έστω $f\in L_1(\mathbb{R}^d)$. Για κάθε $\varepsilon>0$:

(i) $\exists\,\phi$ απλή ολοκληρώσιμη με $\|f-\phi\|_1=\int_{\mathbb{R}^d}|f-\phi|\,d\lambda<\varepsilon$.

(ii) $\exists\,g$ συνεχής, με συμπαγή φορέα, ώστε $\|f-g\|_1<\varepsilon$.

(Ο φορέας της $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ είναι το $\overline{\{x: f(x)\neq 0\}}$.
Η g είναι συνεχής και μηδενίζεται έξω από ένα συμπαγές $\subseteq\mathbb{R}^d$).

③ Η μεγιστική συνάρτηση των Hardy-Littlewood

Έστω $f\in L_1(\mathbb{R}^d)$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}^d$, ορίζουμε:

$$(\mathcal{M}f)(x)=f^*(x)=\sup_{x\in B}\frac{1}{\lambda(B)}\int_B|f(y)|\,d\lambda(y)$$

Θεώρημα

(i) Η f^* είναι μετρήσιμη.

(ii) $f^*(x)<\infty$ σχεδόν παντού.

(iii) $\forall a>0$, $\lambda(\{x: f^*(x)>a\})\leq\frac{3^d}{a}\|f\|_1=\frac{3^d}{a}\int_{\mathbb{R}^d}|f|\,d\lambda$

<u>Παρατήρηση</u>: Αν $f \neq 0$, τότε η f^* <u>δεν</u> είναι ολοκληρώσιμη.
<u>Αν ήταν</u> και <u>αν ίσχυε</u> $\|f^*\|_1 \leq \Delta \|f\|_1$, τότε από την ανισότητα Markov θα είχαμε:

$$\lambda(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha}\|f^*\|_1 \leq \frac{\Delta}{\alpha}\|f\|_1$$

4 <u>Λήμμα (κάλυψης) του Vitali</u>

Έστω $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_N\}$ πεπερασμένη οικογένεια από ανοιχτές μπάλες στον $\mathbb{R}^d$.

Τότε, υπάρχουν $i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, N\}$, ώστε οι $B_{i_1}, \dots, B_{i_k}$ να είναι ξένες και $\lambda\left(\bigcup_{l=1}^{N} B_l\right) \leq 3^d \sum_{j=1}^{k} \lambda(B_{i_j})$

[<u>Γεωμετρική παρατήρηση</u>: Αν B, B' είναι δύο μπάλες που έχουν κοινό σημείο και αν $r(B) \geq r(B')$, τότε $B' \subseteq \widetilde{B}$, όπου $\widetilde{B}$ είναι η μπάλα με το κέντρο της B και $r(\widetilde{B}) = 3 \cdot r(B)$]

<u>Απόδειξη (λήμματος)</u>

Παίρνουμε B_{i_1} κάποια από τις B_l, $1 \leq l \leq N$ που έχει τη μεγαλύτερη ακτίνα.

Θεωρούμε την B_{i_1} και διαγράφουμε όσες B_l την τέμνουν και θεωρούμε την $\mathcal{B}_2$ των B_l που δεν τέμνουν την B_{i_1} (παρατηρώ ότι όσες διαγράφηκαν, τέμνουν την B_{i_1} και έχουν μικρότερη ακτίνα απ' αυτή οπότε, από γεωμετρική παρατήρηση, περιέχονται στην $\widetilde{B_{i_1}}$)

Θεωρούμε ως B_{i_2} την μπάλα από την $\mathcal{B}$ που έχει την μεγαλύτερη ακτίνα και διαγράφουμε όσες $B_l \in \mathcal{B}_2$ και τέμνουν την B_{i_2} (αυτές $\subseteq \widetilde{B_{i_2}}$). Ορίζουμε $\mathcal{B}_3$ τις υπόλοιπες και συνεχίζουμε έτσι.

Κάποια στιγμή η διαδικασία τελειώνει: έχουμε πάρει ξένες $B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_k}$ και $\bigcup_{l=1}^{N} B_l \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \widetilde{B_{i_j}} \Rightarrow \lambda\left(\bigcup_{l=1}^{N} B_l\right) \leq \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{k} \widetilde{B_{i_j}}\right) \leq \sum_{j=1}^{k} \lambda(\widetilde{B_{i_j}}) = 3^d \sum_{j=1}^{k} \lambda(B_{i_j})$ ■

Απόδειξη (για το Θεώρημα για την f^*)

(i) $\forall a \in \mathbb{R}$ το $\{x : f^*(x) > a\}$ είναι ανοιχτό (άρα, f^* μετρήσιμη)

Έστω $x \in \mathbb{R}^d$ με $f^*(x) > a \Rightarrow$ υπάρχει μπάλα B με $x \in B$ και $\frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f| d\lambda > a$

Τότε $B \subseteq \{y : f^*(y) > a\}$.

Αν $y \in B$, τότε έχουμε $f^*(y) \overset{y \in B}{\geq} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f| d\lambda > a \Rightarrow y \in \{f^* > a\} \Rightarrow$
$\Rightarrow B \subseteq \{f^* > a\}$.

(ii) Έπεται από το (iii).

$$\forall a > 0 \quad \{f^* = +\infty\} \subseteq \{f^* > a\} \Rightarrow \underbrace{\lambda(\{f^* = +\infty\}) \leq \lambda(\{f^* > a\}) \leq \frac{3^d \|f\|_1}{a}}_{\forall a > 0}$$

Αφήνοντας το $a \to +\infty$ παίρνουμε: $\lambda(\{f^* = +\infty\}) = 0$.

(iii) Θέτουμε $E_a = \{x : f^*(x) > a\}$.

Ισχύει $\lambda(E_a) = \sup\{\lambda(K) : K \subseteq E_a,\ K \text{ συμπαγές}\}$ (Άσκηση)

Αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda(K) \leq \frac{3^d}{a} \|f\|_1$ $\forall$ συμπαγές $K \subseteq E_a$.

Για κάθε $x \in K$ έχουμε $f^*(x) > a \Rightarrow \exists B_x$ με $x \in B_x$: $\frac{1}{\lambda(B_x)} \int_{B_x} |f| d\lambda > a$

$\Rightarrow \lambda(B_x) < \frac{1}{a} \int_{B_x} |f| d\lambda$

Τότε, $K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_x \xrightarrow{K: \text{συμπαγές}} \exists x_1, \dots, x_m \in K : K \subseteq B_{x_1} \cup B_{x_2} \cup \dots \cup B_{x_m}$

Από το λήμμα του Vitali, υπάρχουν $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$ ώστε οι $B_{x_{i_1}}, \dots, B_{x_{i_k}}$ να είναι ξένες και

$$\lambda(K) \leq \lambda\left(\bigcup_{s=1}^m B_{x_s}\right) \leq 3^d \sum_{j=1}^k \lambda(B_{i_j}) \leq 3^d \sum_{j=1}^k \frac{1}{a} \int_{B_{x_{i_j}}} |f| d\lambda = \frac{3^d}{a} \int_{B_{x_{i_1}} \cup \dots \cup B_{x_{i_k}}} |f| d\lambda \leq$$

$$\leq \frac{3^d}{a} \int_{\mathbb{R}^d} |f| d\lambda. \quad \blacksquare$$

Ορισμός

$$\limsup_{y \to x} f(y) = \lim_{\delta \to 0^+} \left(\sup_{y \in B(x, \delta)} f(y) \right).$$

$$\limsup_{B \downarrow x} G(B) = \lim_{\delta \to 0^+} \left(\sup_{\substack{x \in B \\ \lambda(B) < \delta}} G(B) \right)$$

Απόδειξη του Θεωρήματος παραγώγισης

Έστω $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$.

Για $a>0$ ορίζουμε $E_a = \{x : \limsup\limits_{B \downarrow x} \left| \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)\, d\lambda(y) - f(x) \right| \geq 2a\}$.

Θα δείξουμε ότι $\lambda(E_a)=0$.

Τότε, $\lambda(\bigcup_n E_{1/n})=0$ και αν $x \notin \bigcup_n E_{1/n}$ έχουμε ότι:

$$\limsup_{B\downarrow x} \left| \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)\, d\lambda(y) - f(x) \right| \leq \frac{2}{n} \quad \forall n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x \notin \bigcup_n E_{1/n} \quad \limsup_{B\downarrow x} |\dots| = 0 \Rightarrow \lim |\dots| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)\, d\lambda(y) \xrightarrow{B\downarrow x} f(x).$$

Σταθεροποιούμε ένα $a>0$ και θεωρούμε τυχόν $\varepsilon>0$.

Από Προσέγγιση, υπάρχει g συνεχής με συμπαγή φορέα ώστε $\|f-g\|_1 < \varepsilon$.

Τώρα, γράφουμε

$$\left| \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y) - f(x) \right| \leq \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y)-g(y)| + \underbrace{\left| \frac{1}{\lambda(B)} \int_B g(y) - g(x) \right|}_{\to 0} + |g(x)-f(x)|.$$

$$\overset{①}{\underset{\text{για την } g}{\Longrightarrow}} \limsup_{B\downarrow x} \left| \frac{1}{\lambda(B)} \int f(y)\, d\lambda(y) - f(x) \right| \leq \limsup_{B\downarrow x} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f-g| + 0 + |g(x)-f(x)| \leq$$

$$\leq \sup_{x\in B} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f-g| + |g(x)-f(x)| =$$

$$= (f-g)^*(x) + |g(x)-f(x)|.$$

Ορίζουμε $F_a = F_{a,\varepsilon,g} = \{x : (f-g)^*(x) > a\}$ και $G_{a,\varepsilon,g} = \{x : |f(x)-g(x)| > a\}$.

Παρατηρούμε ότι $E_a \subseteq F_a \cup G_a \Rightarrow \lambda(E_a) \leq \lambda(F_a) + \lambda(G_a) =$

$$= \lambda(\{(f-g)^* > a\}) + \lambda(\{|g-f|>a\}) \underset{③}{\leq} \frac{3^d}{a}\|g-f\|_1 + \frac{1}{a}\|g-f\|_1 < \frac{3^d+1}{a}\cdot\varepsilon.$$

Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ έχουμε ότι $\lambda(E_a)=0$. ■