Ανάλυση Fourier & Ολοκλήρωμα Lebesgue
Μάθημα 9ο (24-03-2015)

Ολοκλήρωμα Lebesgue

(1) Αν $f:\mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ μετρήσιμη, ορίσαμε:

$$\int f\,d\lambda = \sup\left\{\int \phi\,d\lambda : 0 \le \phi \le f,\ \phi \text{ απλή ολοκληρώσιμη}\right\}.$$

(2) Γραμμικότητα: $\int (af+bg)\,d\lambda = a\int f\,d\lambda + b\int g\,d\lambda$.

(3) Θεώρημα μονότονης σύγκλισης:
Αν $0 \le f_n \uparrow f$, τότε $\int f_n \uparrow \int f$.

(4) Beppo-Levi:
$\int \sum f_n = \sum \int f_n$

(5) Λήμμα Fatou:
$f_n \ge 0$ μετρήσιμες / $\int \liminf f_n \le \liminf \int f_n$.

(6) Προσθετικότητα:
Αν E_n ξένα, $\int_{\cup E_n} f = \sum \int_{E_n} f$

(7) Αν $\lambda(E)=0$, τότε $\int_E f\,d\lambda = 0$

Η γενική περίπτωση:

Έστω $f:\mathbb{R}^d \to [-\infty,\infty]$ μετρήσιμη.
Θεωρούμε τις $f^+ = \max\{f,0\}$, $f^- = -\min\{f,0\}$ $(=\max\{-f,0\} = (-f)^+)$.
Τότε, $f = f^+ - f^-$ και $|f| = f^+ + f^-$

⊙ Λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν $\int f^+\,d\lambda < \infty$ και $\int f^-\,d\lambda < \infty$.
Τότε, ορίζουμε $\int f = \int f^+ - \int f^-$.

• <u>Παρατήρηση:</u> Αν η f είναι ολοκληρώσιμη τότε
$\int |f| = \int (f^+ + f^-) = \int f^+ + \int f^- < \infty$, άρα η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη.
Αν η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε:
$\int |f| d\lambda < \infty \Rightarrow \int (f^+ + f^-) d\lambda < \infty \Rightarrow \int f^+, \int f^- < \infty \Rightarrow f$ ολοκληρώσιμη.

<u>Δηλαδή:</u> (α) f ολοκληρώσιμη $\Leftrightarrow$ $|f|$ ολοκληρώσιμη.

<u>Σημείωση:</u> Αυτό δεν ισχύει για το Riemann:
η $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ <u>δεν</u> είναι R-ολοκληρώσιμη, ενώ $|f| \equiv 1$.
Με βάση αυτά που είπαμε, η f <u>είναι</u> Lebesgue ολοκληρώσιμη

$$f = \underbrace{\mathcal{X}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} - \mathcal{X}_{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]}}_{\text{μετρήσιμα με πεπερασμένο μέτρο.}}$$

<u>Θεώρημα</u>
Μια φραγμένη $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν $\lambda(\{x \in [a,b] : \text{η } f \text{ είναι ασυνεχής στο } x\}) = 0$.

(β) Ισχύει: αν f ολοκληρώσιμη, τότε: $\left|\int f\right| \leq \int |f|$
<u>Απόδειξη:</u>
$\left|\int f\right| = \left|\int f^+ - \int f^-\right| \leq \int f^+ + \int f^- = \int |f|$. ∎

(γ) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε $|f(x)| < \infty$ σχεδόν παντού.
<u>Απόδειξη</u>
• $\{f = +\infty\} = \{f^+ = +\infty\}$ και f^+ ολοκληρώσιμη $\Rightarrow \lambda(\{f^+ = +\infty\}) = 0$.
• $\{f = -\infty\} = \{f^- = +\infty\}$ και f^- ολοκληρώσιμη $\Rightarrow \lambda(\{f^- = +\infty\}) = 0$. ∎

(δ) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη και αν τη γράψουμε ως διαφορά $f = f_1 - f_2$, όπου f_1, f_2 μη αρνητικές ολοκληρώσιμες, τότε $\int f = \int f_1 - \int f_2$.

Απόδειξη:

Ξέρουμε ότι $\left.\begin{matrix} f = f^+ - f^- \\ f = f_1 - f_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f^+ + f_2 = f^- + f_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int (f^+ + f_2) = \int (f^- + f_1) \xRightarrow[\text{για } \geq 0]{\text{γραμμ.}} \int f^+ + \int f_2 = \int f^- + \int f_1 \Rightarrow \int f^+ - \int f^- = \int f_1 - \int f_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int f = \int f_1 - \int f_2$ ■

Ιδιότητες του ολοκληρώματος

(α) Γραμμικότητα: $\int (f+g) = \int f + \int g$, όπου f, g ολοκληρώσιμες.

Απόδειξη:

$f+g = (f+g)^+ - (f+g)^-$.

Για να δείξουμε ότι η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη, αρκεί:

$\int (f+g)^+ < \infty$ και $\int (f+g)^- < \infty$

Ισχύει $(f+g)^+ \leq f^+ + g^+$ (γιατί $\max\{a+b, 0\} \leq \max\{a,0\} + \max\{b,0\}$ αφού $a \leq \max\{a,0\}$ και $b \leq \max\{b,0\} \Rightarrow a+b \leq \max\{a,0\} + \max\{b,0\}$).

$(f+g)^- = ((-f)+(-g))^+ \leq (-f)^+ + (-g)^+ = f^- + g^-$.

Τότε:

$\int (f+g)^+ \leq \int f^+ + \int g^+ < \infty$, γιατί $\int f^+ < \infty$, $\int g^+ < \infty$

και $\int (f+g)^- \leq \int f^- + \int g^- < \infty$, —— ομοίως ——

Για την ισότητα, γράφουμε:

$f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^- = \underbrace{(f^+ + g^+)}_{f_1} - \underbrace{(f^- + g^-)}_{f_2}$

Από την παρατήρηση (δ)

$\int (f+g) = \int f_1 - \int f_2 = \int f^+ + \int g^+ - \int f^- - \int g^- = \int f + \int g$. ■

(β) $(tf)^+ = \begin{cases} tf^+, & \text{αν } t>0 \\ -tf^-, & \text{αν } t<0 \end{cases}$

$(tf)^- = \begin{cases} tf^-, & \text{αν } t>0 \\ -tf^+, & \text{αν } t<0. \end{cases}$

Άρα: ⊙ αν $t>0$ $\int tf = \int (tf^+ - tf^-) = t\int f^+ - t\int f^- = t(\int f^+ - \int f^-) = t\int f.$

⊙ αν $t<0$ $\int tf = \int (-tf^- + tf^+) = \ldots = t\int f.$

(γ) Μονοτονία:

Αν $f \le g$ ολοκληρώσιμες, έχουμε: $\int g - \int f = \int \underbrace{(g-f)}_{\ge 0} \ge 0.$

(δ) Αν A, B ξένα και f ολοκληρώσιμη, τότε:

$\int_{A\cup B} f = \int f\cdot \chi_{A\cup B} = \int (f\chi_A + f\chi_B) = \int f\chi_A + \int f\chi_B = \int_A f + \int_B f.$

Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης

Έστω $f_n, f : E \to [-\infty, +\infty]$.

Αν $f_n(x) \to f(x)$ σχεδόν παντού στο E και αν

υπάρχει $g: E \to [-\infty, +\infty]$ ολοκληρώσιμη ώστε:

$\forall n \quad |f_n| \le g$ σχεδόν παντού στο E,

τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_E f_n \, d\lambda \longrightarrow \int_E f \, d\lambda$.

Απόδειξη:

Ορίζω $Z_0 = \{x\in E : f_n(x) \not\to f(x)\}$ $(\lambda(Z_0)=0)$ και

για κάθε n, $Z_n = \{x\in E : |f_n(x)| > g(x)\}$ $(\lambda(Z_n)=0)$.

Θέτω $Z = \bigcup_{n=0}^{\infty} Z_n$ $(\lambda(Z) \le \sum_n \lambda(Z_n) = 0 \Rightarrow \lambda(Z)=0)$.

Δουλεύουμε στο $E' = E\setminus Z$.

Έχουμε $-g \le f_n \le g$ στο $E' \Rightarrow g - f_n \ge 0$ και $g + f_n \ge 0$ στο E'.

Από το λήμμα του Fatou έχουμε:

$\int \underbrace{\liminf (g-f_n)}_{\text{''}g-f\text{'' (διότι } f_n\to f)} \le \liminf \int (g-f_n)$

Άρα: $\int (g-f) \leq \liminf \int (g-f_n)$

Η f είναι ολοκληρώσιμη στο E': $\forall x \in E'$ $\quad |f_n(x)| \leq g(x)$.
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\downarrow$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad |f(x)|$

Άρα, $|f| \leq g$ στο $E' \Rightarrow \int_{E'} |f| \leq \int_{E'} g < \infty$.

Άρα: $\cancel{\int g} - \int f = \int (g-f) \leq \liminf \int (g-f_n) = \liminf \left(\int g - \int f_n\right) =$

$$= \int g + \liminf\left(-\int f_n\right) =$$

$$= \cancel{\int g} - \limsup \underbrace{\int f_n}_{\text{φραγμ. ακολουθία}} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\limsup \int f_n \leq \int f}$$

Από το λήμμα του Fatou για τις $g + f_n \geq 0$,

$\cancel{\int g} + \int f = \int \underbrace{\liminf (g+f_n)}_{g+f} \leq \liminf \int (g+f_n) = \liminf \left(\int g + \int f_n\right) =$

$$= \cancel{\int g} + \liminf \int f_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\int f \leq \liminf \int f_n}$$

Άρα $\limsup \int f_n \leq \int f \leq \liminf \int f_n \leq \limsup \int f_n$ έχουμε ισότητα παντού.

Άρα $\exists \lim \int f_n = \int f$.

Η f είναι ολοκληρώσιμη στο E', άρα και στο $E = E' \cup Z$

διότι $\lambda(Z) = 0$: $\quad \int_E f = \underbrace{\int_{E'} f}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\int_Z f}_{=0}$

Τα ίδια ισχύουν για τις f_n, άρα:

$$\int_E f_n = \int_{E'} f_n + \cancel{\int_Z f_n}^{\,0} \rightarrow \int_{E'} f = \int_E f . \qquad ■$$

<u>Πόρισμα</u> (<u>Θεώρημα φραγμένης σύγκλισης</u>)

Έστω ότι $\lambda(E) < \infty$, $f, f_n : E \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμες, $f_n \to f$ σχεδόν παντού και $\exists M > 0 : \forall n \quad |f_n| \leq M$ σχεδόν παντού.

Τότε, $\int f_n \longrightarrow \int f$.

Απόδειξη:

Θεωρούμε την $g(x)=M$ στο E.

Έχουμε $\int_E g\,d\lambda = M\cdot\lambda(E)<\infty$, δηλαδή g ολοκληρώσιμη.

Από το Θ.Κ.Σ, $\int_E f_n \to \int_E f$. ■

Ολοκλήρωμα Riemann και ολοκλήρωμα Lebesgue

Θεώρημα 1

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη κατά Riemann.
Τότε, η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και

$$(R)\int_a^b f = (\mathcal{L})\int_a^b f\,d\lambda$$

Απόδειξη

Μπορούμε να βρούμε ακολουθία διαμερίσεων (P_n) του $[a,b]$ με $P_n \subseteq P_{n+1}$, $\|P_n\|\to 0$ (αν $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_k=b\}$, είτε $\|P\| = \max\limits_{0\le i\le k-1}(x_{i+1}-x_i)$) και $L(f,P_n)\to (R)\int_a^b f$, $U(f,P_n)\to(R)\int_a^b f$.

[Αν θεωρήσουμε την $g(x)=\sum_{i=0}^{k-1} m_i \chi_{[x_i,x_{i+1})}$, τότε η g είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και $\int_a^b g\,d\lambda = \sum_{i=0}^{k-1} m_i \underbrace{\lambda([x_i,x_{i+1}))}_{x_{i+1}-x_i} = L(f,P)$.]

Ορίζουμε απλές ολοκληρώσιμες $l_n, u_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ με:

$$(\mathcal{L})\int l_n = L(f,P_n) \quad \text{και} \quad (\mathcal{L})\int u_n = U(f,P_n).$$

Από την $P_n\subseteq P_{n+1}$, παίρνουμε ότι $(l_n)\nearrow$ και $(u_n)\searrow$

Επίσης, $l_n\le f\le u_n$.

Ορίζουμε, $l(x)=\lim l_n(x)$ και $u(x)=\lim u_n(x)$.

Οι l,u είναι μετρήσιμες και $l\le f\le u$

Η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένη (ως R-ολοκληρώσιμη) $\Rightarrow \exists M>0: \forall x\ |f(x)|\le M$.

Τότε, όλα τα $m_i, M_i\in[-M,M] \Rightarrow |u_n|,|l_n|\le M$.

① $$l_n\to l \xRightarrow{\Theta.\Phi.\Sigma} \left.\begin{array}{l} (\mathcal{L})\int l_n \to (\mathcal{L})\int l \\ \quad \| \\ L(f,P_n) \to (R)\int f \end{array}\right\} \quad (\mathcal{L})\int l = (R)\int f.$$

Άρα: $\int (g-f) \le \liminf \int (g-f_n)$

Η f είναι ολοκληρώσιμη στο E': $\forall x \in E'$ $|f_n(x)| \le g(x)$

$$\underset{|f(x)|}{\downarrow}$$

Άρα, $|f| \le g$ στο $E' \Rightarrow \int_{E'} |f| \le \int_{E'} g < \infty$

Άρα: $\cancel{\int g} - \int f = \int (g-f) \le \liminf \int (g-f_n) = \liminf \left(\int g - \int f_n\right) =$

$= \int g + \liminf \left(-\int f_n\right) =$

$= \cancel{\int g} - \limsup \underbrace{\int f_n}_{\text{φραγμ. ακολουθία}} \Longrightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\limsup \int f_n \le \int f}$$

Από το λήμμα του Fatou για τις $g + f_n \ge 0$,

$\cancel{\int g} + \int f = \int \underbrace{\liminf (g+f_n)}_{g+f} \le \liminf \int (g+f_n) = \liminf \left(\int g + \int f_n\right) =$

$= \cancel{\int g} + \liminf \int f_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\int f \le \liminf \int f_n}$$

Άρα $\limsup \int f_n \le \int f \le \liminf \int f_n \le \limsup \int f_n$ έχουμε ισότητα παντού.

Άρα $\exists \lim \int f_n = \int f$.

Η f είναι ολοκληρώσιμη στο E', άρα και στο $E = E' \cup Z$ διότι $\lambda(Z) = 0$: $\int_E f = \underbrace{\int_{E'} f}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\int_Z f}_{=0}$

Τα ίδια ισχύουν για τις f_n, άρα:

$\int_E f_n = \int_{E'} f_n + \cancel{\int_Z f_n}^{=0} \to \int_{E'} f = \int_E f$. ■

<u>Πόρισμα</u> (Θεώρημα φραγμένης σύγκλισης)

Έστω ότι $\lambda(E) < \infty$, $f, f_n : E \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμες, $f_n \to f$ σχεδόν παντού και $\exists M > 0 : \forall n$ $|f_n| \le M$ σχεδόν παντού.

Τότε, $\int f_n \to \int f$.

② $u_n \to u \xRightarrow{\Theta.\Phi.\Sigma} \left.\begin{array}{l}(\mathcal{L})\int u_n \to (\mathcal{L})\int u \\ \overset{\shortparallel}{U(f,P_n)} \to (R)\int f\end{array}\right\}$ $(\mathcal{L})\int u = (R)\int f$.

③ Έχουμε $u - \ell \geq 0$ και $(\mathcal{L})\int (u-\ell) = (\mathcal{L})\int u - (\mathcal{L})\int \ell = 0 \Rightarrow$

$\overset{\circledast}{\Rightarrow} u - \ell = 0$ σ.π. $\Rightarrow u = \ell$ σ.π.

④ Αφού $\ell \leq f \leq u$ και $u = \ell$ σ.π. έχουμε $f = \ell = u$ σ.π.

Ειδικότερα, η f είναι μετρήσιμη.

Επίσης, $(\mathcal{L})\int f = (\mathcal{L})\int u = (\mathcal{L})\int \ell = (R)\int f$. ■

<u>Άσκηση</u> (για το ⊛)

Αν $\int_E f = 0$ και $f \geq 0$, τότε $f = 0$ σ.π. στο E.

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε το $U = \{x \in E : f(x) > 0\}$ και θα δείξουμε ότι $\lambda(U) = 0$.

$U = \bigcup_{n=1} \{x \in E : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$.

Για κάθε n, $0 = \int_E f \geq \int_{\{f \geq \frac{1}{n}\}} f \geq \frac{1}{n} \lambda(\{f \geq \frac{1}{n}\})$.

Άρα $\lambda(\{f \geq \frac{1}{n}\}) = 0 \Rightarrow \lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{f \geq \frac{1}{n}\}) = 0 \Rightarrow \lambda(U) = 0$. ■