Ανάλυση Fourier & Ολοκλήρωμα Lebesgue

Μάθημα 6ο (12-03-2015)

Μετρήσιμες συναρτήσεις

- $E \subseteq \mathbb{R}^d$ μετρήσιμο, $f: E \to \mathbb{R}$. Η f λέγεται μετρήσιμη αν $\forall a \in \mathbb{R}$ το $\{x \in E : f(x) > a\} \in \mathcal{M}$

(1) Έπεται ότι $\forall I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα το $f^{-1}(I) \in \mathcal{M}$.

(2) Οι συνεχείς $f: E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες.

(3) Αν $f, g: E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε $\lambda f + \mu g$, $f \cdot g$, $|f|$ είναι μετρήσιμες.

(4) Αν $f_n: E \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμες, τότε οι $\limsup f_n$, $\liminf f_n$ είναι μετρήσιμες (και αν $f_n \xrightarrow{\kappa\sigma} f$, τότε η f είναι μετρήσιμη).

- Δύο ορισμοί:

(α) Η $f: E \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ λέγεται μετρήσιμη αν $\forall a \in \mathbb{R}$ έχουμε: $\{x \in E : f(x) > a\} \in \mathcal{M}$.

Τότε, αναγκαστικά, $\{x \in E : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E : f(x) > n\} \in \mathcal{M}$

και $\{x \in E : f(x) = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E : f(x) < -n\} \in \mathcal{M}$.

(β) Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^d$ Borel, $f: E \to \mathbb{R}$.

Η f λέγεται Borel μετρήσιμη αν $\forall \in \mathbb{R}$ $\{x \in E : f(x) > a\} \in \mathcal{B}$.

Τα (1)-(4) "ισχύουν" και για Borel μετρήσιμες.

(γ) Η έννοια του "σχεδόν παντού"

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^d$ μετρήσιμο.

Λέμε ότι "η $P(x)$ ισχύει σχεδόν παντού στο E" αν το σύνολο $Z = \{x \in E : \text{δεν ισχύει η } P(x)\}$ έχει μέτρο 0.

<u>Παραδείγματα</u>

(1) Έστω $f: E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη και έστω $g: E \to \mathbb{R}$ με "$f(x)=g(x)$ σχεδόν παντού".
Τότε η g είναι μετρήσιμη.

<u>Λύση - Απόδειξη:</u>

$B=\{x\in E: f(x)=g(x)\}$ και $Z=\{x\in E: f(x)\neq g(x)\}$

$E=\underbrace{B\cup Z}_{\text{ξένα}}$

Αφού $f=g$ σχεδόν παντού στο E, έχουμε $\lambda(Z)=0$

Ειδικότερα, $Z\in\mathcal{M} \Rightarrow B=E\setminus Z\in\mathcal{M}$

• Η g είναι μετρήσιμη:

Έστω $a\in\mathbb{R}$

Γράφουμε, $\{x\in E: g(x)>a\}=\{x\in B: g(x)>a\}\cup\{x\in Z: g(x)>a\}=$

$=\{x\in B: f(x)>a\}\cup\{x\in Z: g(x)>a\}=$

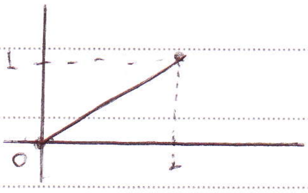
$=(\underset{\in\mathcal{M}}{B}\cap\underbrace{\{x\in E: f(x)>a\}}_{\substack{\in\mathcal{M}\\ \text{γιατί } f \text{ μετρήσιμη}}})\cup\underbrace{\{x\in Z: g(x)>a\}}_{\substack{\in\mathcal{M} \text{ ως υποσύνολο}\\ \text{μηδενικού συνόλου}}}\in\mathcal{M}.$

$\square$

(2) Αν $f_n: E\to\mathbb{R}$ μετρήσιμες $f_n(x)\longrightarrow f(x)$ σχεδόν παντού στο E, τότε f μετρήσιμη. (Άσκηση)

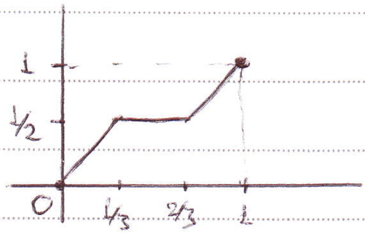
<u>Η συνάρτηση Cantor-Lebesgue</u>

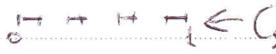
f_0: $[0, 1] \leftarrow C_0$

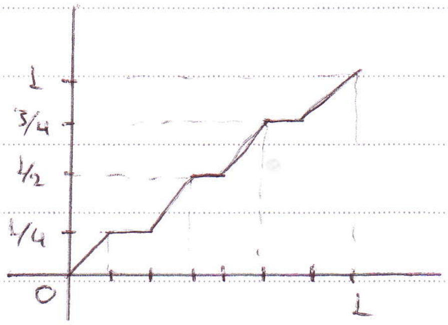


$f_0(x)=x$

f_1: $[0, 1/3]$ $[2/3, 1] \leftarrow C_1$



f_2:  $\leftarrow C_2$



Επαγωγικά ορίζουμε μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to [0,1]$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) $f_n(0)=0$, $f_n(1)=1$, η f_n είναι αύξουσα $\forall n \in \mathbb{N}$.

(β) Έστω $x \in [0,1]$ το οποίο ανήκει σε κάποιο από τα ανοιχτά διαστήματα που "αφαιρέθηκαν" στο n-οστό βήμα της κατασκευής του C.

Τότε $f_n(x) = f_{n+1}(x) = f_{n+2}(x) = \dots$

(γ) $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty = \max\{|f_{n+1}(x) - f_n(x)| : 0 \le x \le 1\} \le \frac{1}{2^n}$

Έπεται ότι η (f_n) είναι βασική ως προς την $\|\cdot\|_\infty$ (στον $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$)

• Αν $m > n$, τότε:

$$\|f_n - f_m\|_\infty \le \|f_m - f_{m-1}\|_\infty + \dots + \|f_{n+1} - f_n\|_\infty \le$$

$$\le \frac{1}{2^{m-1}} + \dots + \frac{1}{2^n} \le \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} \infty$$

Ο $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης, επομένως υπάρχει συνεχής $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, δηλαδή $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο $[0,1]$.

Αυτή η f είναι η <u>συνάρτηση Cantor-Lebesgue</u>

<u>Ιδιότητες της f</u>

(1) f συνεχής, $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f\uparrow$.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $x<y$. Τότε $\forall n$ $f_n(x) \le f_n(y)$, διότι $f_n \uparrow \Rightarrow f(x) \le f(y)$.

$f(0) = \lim f_n(0) = 0$, όμοια το $f(1) = \lim f_n(1) = 1$. ■

(2) Αν $[0,1]\setminus C = \bigcup I_k$, I_k είναι τα ανοικτά διαστήματα που αφαιρέθηκαν κατά την κατασκευή του C, τότε η f είναι σταθερή στο I_k.

Απόδειξη:

Αν το I_k αφαιρέθηκε στο n-οστό βήμα, τότε η f_n είναι σταθερή στο I_k όμως $f_n = f_{n+1} = \underset{\downarrow f}{f_{n+2}} = \ldots$ στο I_k. ■

(3) Σε κάθε I_k η f είναι σταθερή: $f(I_k)=\{a_k\} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(\bigcup_k I_k) = \{a_k : k\in\mathbb{N}\}$ = αριθμήσιμο σύνολο.

Όμως $f([0,1])=[0,1]$

Αυτό σημαίνει ότι $f(C) \supseteq [0,1]\setminus\{a_k : k\in\mathbb{N}\}$.

Για την ακρίβεια, $f(C)=[0,1]$ (γιατί τα άκρα του I_k ανήκουν στο C και η τιμή της f σε αυτά είναι a_k, λόγω συνέχειας της f).

Πόρισμα

Υπάρχει υποσύνολο του C που η εικόνα του είναι μη μετρήσιμο σύνολο (γιατί το $[0,1]$ έχει μη μετρήσιμα υποσύνολα).

Θεώρημα

$\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{M}$: Υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα που δεν είναι Borel.

Λήμμα

Έστω $f: E\to\mathbb{R}$, f συνεχής, E Borel.
Τότε, για κάθε Borel σύνολο $A\subseteq\mathbb{R}$ το $f^{-1}(A)$ είναι σύνολο Borel.

Απόδειξη του λήμματος

$\mathcal{B} = \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{A}$ σ-άλγεβρα και κάθε ανοιχτό $A \subseteq \mathbb{R}$ ανήκει στην $\mathcal{A}\}$.

Αν δείξω ότι η κλάση των συνόλων $A \subseteq \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την "P" είναι σ-άλγεβρα και κάθε ανοιχτό ικανοποιεί την "P", τότε έχω δείξει ότι κάθε Borel ικανοποιεί την "P".
[Διότι: $\mathcal{A} = \{$τα σύνολα που ικανοποιούν την P$\}$ $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα, ανοιχτά $\in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow$ κάθε $B \in \mathcal{B}$ είναι στην $\mathcal{A}$, άρα ικανοποιεί την P]

Ορίζουμε $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} :$ το $f^{-1}(A)$ είναι Borel σύνολο$\}$

- Η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα:
  - (i) $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$: $f^{-1}(\mathbb{R}) = E \in \mathcal{B}$
  - (ii) Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $\mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{A}$: $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus A) = \underset{\text{Borel}}{E} \setminus \underset{\text{Borel}}{f^{-1}(A)} \in \mathcal{B}$
  - (iii) Έστω $(A_n)_{n \geq 1}$ σύνολα από την $\mathcal{A}$.
    Τότε, $f^{-1}(\bigcup_n A_n) = \bigcup_n \underbrace{f^{-1}(A_n)}_{\substack{\text{Borel} \\ \text{γιατί } A_n \in \mathcal{A}}} \in \mathcal{B}$
- Κάθε ανοιχτό $A \subseteq \mathbb{R}$ ανήκει στην $\mathcal{A}$:
  $f^{-1}(A) \underset{f \text{ συνεχής}}{=\!=\!=}$ ανοιχτό στο $E = E \cap G \in \mathcal{B}$.
  Τότε, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Δηλαδή, αν το A είναι Borel, τότε $A \in \mathcal{A} \xRightarrow[\mathcal{A}]{\text{ορισμός της}}$
  $\Rightarrow$ το $f^{-1}(A)$ είναι Borel ∎

Απόδειξη του Θεωρήματος

Θεωρούμε τη συνάρτηση Cantor-Lebesgue $f : [0,1] \to [0,1]$ και ορίζουμε $g : [0,1] \to [0,2]$ με $g(x) = f(x) + x$.
Η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα (αν $x<y$ τότε $f(x) \leq f(y)$ και $x<y \Rightarrow g(x) = f(x)+x < f(y)+y = g(y)$) και επί του $[0,2]$ διότι $g(0) = 0+0 = 0$
$g(1) = 1+1 = 2$.

Γι' αυτήν ορίζεται και η $h = g^{-1} : [0,2] \to [0,1]$ και είναι συνεχής.

• Τι μπορούμε να πούμε για το $g(C)$;

Αν $[0,1] \setminus C = \bigcup_k I_k$, τότε $g(I_k) = \{f(x)+x : x \in I_k\} = \{a_k + x : x \in I_k\} =$

$= a_k + I_k =$ διάστημα μέτρου $\lambda(I_k)$.

Άρα, $\lambda(g([0,1]\setminus C)) = \lambda(g(\bigcup_k I_k)) = \lambda(\bigcup_k g(I_k)) = \sum_k \lambda(\underbrace{g(I_k)}_{a_k+I_k}) = \sum_k \lambda(I_k) =$

$= \lambda([0,1]\setminus C) = 1$.

Όμως, τότε, $\lambda(g(C)) = \lambda([0,2] \setminus g(C^c)) = 2-1 = 1$.

Έπεται ότι υπάρχει $N \subseteq g(C)$, N μη μετρήσιμο (κάθε σύνολο που έχει θετικό μέτρο έχει μη μετρήσιμο υποσύνολο).

Ορίζουμε $A = g^{-1}(N)$

Έχουμε $A \subseteq C$

Αφού $\lambda(C) = 0 \Rightarrow A$ μετρήσιμο $(\lambda(A) = 0)$.

Ας υποθέσουμε ότι το A είναι Borel.

Τότε, απ' το λήμμα, και αφού $h = g^{-1}$ συνεχής, $h^{-1}(A)$ Borel $\Rightarrow$

$\Rightarrow (g^{-1})^{-1}(A) = g(A) = N$ Borel.

Άτοπο, αφού N μη μετρήσιμο. ∎