Ανάλυση Fourier & Ολοκλήρωμα Lebesgue
Μάθημα 5ο (10-03-2015)

Το λήμμα του Steinhaus και μη μετρήσιμα σύνολα

Λήμμα

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$

Τότε υπάρχει $t > 0$: $(-t, t) \subseteq A - A = \{x - y : x, y \in A\}$.

Απόδειξη

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 < \lambda(A) < \infty$. (αν $\lambda(A) = +\infty$, τότε μπορούμε να βρούμε $B \subseteq A$ με $0 < \lambda(B) < \infty$: $B_n = A \cap (-n, n) \uparrow A$
$\Rightarrow \lambda(B_n) \to \lambda(A) \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\lambda(B_{n_0}) > 0$ και $\lambda(B_{n_0}) \leq 2n_0$ διότι $B_{n_0} \subseteq (-n_0, n_0)$. Τότε, $\exists t > 0$: $(-t, t) \subseteq B - B \subseteq A - A$)

Παίρνουμε $\varepsilon > 0$.

Υπάρχει κάλυψη $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ του A από ανοιχτά διαστήματα, ώστε: $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) < \lambda(A)(1+\varepsilon)$ (1) $(\varepsilon \cdot \lambda(A) > 0)$.

Έχουμε $A \subseteq \bigcup_k I_k \Rightarrow A = \bigcup_k (A \cap I_k) \Rightarrow \lambda(A) \leq \sum_k \lambda(A \cap I_k)$ (2)

Από (1) και (2), $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (1+\varepsilon)\lambda(A \cap I_k) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists k$: $\ell(I_k) \leq (1+\varepsilon) \cdot \lambda(A \cap I_k)$

Δηλαδή, $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει διάστημα I: $\ell(I) \leq (1+\varepsilon) \cdot \lambda(A \cap I)$.

Εφαρμόζουμε αυτό με $\varepsilon = \frac{1}{3}$ και βρίσκουμε διάστημα I: $\lambda(A \cap I) \geq \frac{3}{4} \ell(I_k)$. (*)

Θα δείξουμε ότι για $t = \frac{1}{2}\ell(I)$ ισχύει:

$$(-t, t) \subseteq A \cap I - A \cap I \subseteq A - A$$

Γιατί: ας υποθέσουμε ότι για κάποιον $\begin{Bmatrix} s < \ell(I) \\ s > 0 \end{Bmatrix}$ ισχύει
$s \notin A \cap I - A \cap I \Rightarrow (A \cap I) \cap (A \cap I + s) = \emptyset$

Τα δύο αυτά σύνολα περιέχονται σε ένα διάστημα μήκους $\ell(I) + s$. Άρα, $\ell(I) + s \geq \lambda((A \cap I) \cup (A \cap I + s)) = \lambda(A \cap I) + \lambda(A \cap I + s) = 2\lambda(A \cap I)$

Άρα, $\ell(I)+s \geq 2\lambda(A\cap I) \underset{\circledast}{\geq} \frac{3}{2}\ell(I) \Rightarrow s \geq \frac{1}{2}\ell(I)$

Άρα, αν $s < \frac{\ell(I)}{2}$ έχουμε $s \in A\cap I - A\cap I$ και λόγω συμμετρίας, $(-\frac{\ell(I)}{2}, \underbrace{\frac{\ell(I)}{2}}_{=t}) \subseteq A\cap I - A\cap I$. ∎

<u>Άσκηση</u>

Αν $\lambda(A)>0$ και $\lambda(B)>0$, τότε το $A-B$ περιέχει διάστημα.

<u>Κατασκευή μη μετρήσιμου συνόλου</u>

Θεωρούμε $\sim$ στο $\mathbb{R}$: $x\sim y \Leftrightarrow x-y\in\mathbb{Q}$.

Θεωρούμε τις κλάσεις ισοδυναμίας E_a, $a\in A$ (κάθε E_a είναι αριθμήσιμο $\Rightarrow$ A υπεραριθμήσιμο) και ένα σύνολο N που έχει ακριβώς ένα στοιχείο x_a από κάθε κλάση E_a.

Για κάθε $q\in N$ ορίζουμε $N_q = N+q$.

Τότε: (1) $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} N_q = \mathbb{R}$ (Έστω $x\in\mathbb{R} \Rightarrow \exists a\in A: x\sim x_a \Rightarrow \exists q\in\mathbb{Q}: x=x_a+q\in N+q=N_q$).

(2) Αν $q\neq r$ στο $\mathbb{Q}$ τότε $N_q\cap N_r=\emptyset$.

Έστω ότι το N είναι μετρήσιμο.

Τότε, κάθε N_q είναι μετρήσιμο και $\lambda(N_q)=\lambda(N)$

Γράφουμε $+\infty=\lambda(\mathbb{R}) \overset{(1)}{=} \lambda(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} N_q) \overset{(2)}{=} \sum_{q\in\mathbb{Q}} \lambda(N_q) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} \lambda(N) \Rightarrow \lambda(N)>0 \Rightarrow$

$\xRightarrow[\text{Steinhaus}]{\text{Λήμμα}} \exists t>0: (-t,t)\subseteq N-N$

Αυτό είναι άτοπο: αν πάρουμε $x\neq y$ στο N, τότε:

$\exists a\neq b\in A$ ώστε $x=x_a$ και $y=x_b$ και $x_a \not\sim x_b$ (γιατί στο N έχουμε ακριβώς ένα στοιχείο κάθε κλάσης E_a) $\Rightarrow$

$\Rightarrow x-y = x_a-x_b\notin\mathbb{Q}$

Δηλαδή, ο μοναδικός ρητός που περιέχει το $N-N$ είναι ο 0.

Άρα, το $N-N$ δεν μπορεί να περιέχει διάστημα.

Πόρισμα

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$.

Τότε, υπάρχει μη μετρήσιμο $E \subseteq A$.

Απόδειξη

$A = A \cap \mathbb{R} = A \cap \left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} N_q\right) = \underset{\text{ξένα}}{\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (A \cap N_q)}$, όπου N το σύνολο που ορίσαμε πριν και $N_q = N + q$.

$$\xRightarrow[\text{όλα τα } A \cap N_q]{\text{αν υποθέσουμε ότι είναι μετρήσιμα}} \quad 0 < \lambda(A) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda(A \cap N_q)$$

Άρα, υπάρχει $q_0 \in \mathbb{Q} : \lambda(A \cap N_{q_0}) > 0 \xRightarrow{\text{Steinhaus}}$

$\Rightarrow \exists\, t > 0 : (-t, t) \subseteq (A \cap N_q) - (A \cap N_q) \subseteq N_q - N_q = (N+q) - (N-q) = N - N$, άτοπο ■

Μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ Lebesgue μετρήσιμο και έστω $f : A \to \mathbb{R}$.

Λέμε ότι η f είναι <u>μετρήσιμη</u> αν:

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \{x \in A : f(x) > a\} = f^{-1}((a, +\infty)) \in \mathcal{M}$$

Παρατηρήσεις

(α) Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(1) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \{x \in A : f(x) > a\} \in \mathcal{M}$

(2) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \{x \in A : f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}$

(3) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \{x \in A : f(x) < a\} \in \mathcal{M}$

(4) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \{x \in A : f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}$.

Απόδειξη:

(1) ⇒ (2)

$$\{x \in A : f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left\{x \in A : f(x) > a - \frac{1}{n}\right\}}_{\in \mathcal{M}} \in \mathcal{M}$$

(2) ⇒ (3)

$$\{x\in A: f(x)<a\} = \underset{\in\mathcal{M}}{A} \setminus \underbrace{\{x\in A: f(x)\geq a\}}_{\in\mathcal{M}} \in \mathcal{M}$$

(3) ⇒ (4)

$$\{x\in A: f(x)\leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x\in A: f(x)<a+\tfrac{1}{n}\}}_{\in\mathcal{M}} \in \mathcal{M}.$$

(4) ⇒ (1)

$$\{x\in A: f(x)>a\} = \underset{\in\mathcal{M}}{A} \setminus \underbrace{\{x\in A: f(x)\leq a\}}_{\in\mathcal{M}} \in \mathcal{M}.$$ ∎

(β) Τώρα, έπεται ότι αν η $f: A\to\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη τότε

$$\{x\in A: a<f(x)<b\} = \underset{\in\mathcal{M}}{\{f>a\}} \cap \underset{\in\mathcal{M}}{\{f<b\}} \in \mathcal{M}$$

$$\{x\in A: f(x)=t\} = \underset{\in\mathcal{M}}{\{f\geq t\}} \cap \underset{\in\mathcal{M}}{\{f\leq t\}} \in \mathcal{M}. \quad \text{κτλ.}$$

• Πόσο πλούσια είναι η κλάση των μετρήσιμων $f: A\to\mathbb{R}$;

Πρόταση 1

Αν η $f: A\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε είναι μετρήσιμη.

Απόδειξη

Το $\{x\in A: f(x)>a\} = f^{-1}(\underset{\text{ανοιχτό}}{(a,+\infty)})$ είναι ανοιχτό στο A.

Δηλαδή, υπάρχει $G\subseteq\mathbb{R}^d$ ανοιχτό ώστε

$$\{x\in A: f(x)>a\} = \underset{\in\mathcal{M}}{A} \cap \underset{\substack{\in\mathcal{M} \\ \text{(ως ανοιχτό)}}}{G} \in \mathcal{M}$$ ∎

Πρόταση 2

Έστω $f,g: A\to\mathbb{R}$ μετρήσιμες και έστω $\lambda\in\mathbb{R}$.

Τότε, (i) $f+g$ μετρήσιμη (iii) $f\cdot g$ μετρήσιμη

(ii) λf μετρήσιμη (iv) Αν $f\neq 0$ στο A τότε η $\frac{1}{f}$ μετρήσιμη.

(v) $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$, $|f|$ μετρήσιμη.

Απόδειξη

(i) Έστω $a \in \mathbb{R}$.

Θέλουμε ν.δ.ο. το $\{x \in A : f(x)+g(x)>a\} \in \mathcal{M}$.

Παρατηρούμε ότι $f(x)+g(x)>a \iff f(x)>a-g(x) \iff$

$\iff \exists q \in \mathbb{Q} : f(x)>q>a-g(x) \iff$

$\iff \exists q \in \mathbb{Q} : f(x)>q$ και $g(x)>a-q$.

Άρα, $\{x \in A : f(x)+g(x)>a\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \left(\underbrace{\{x \in A : f(x)>q\}}_{\in \mathcal{M}} \cap \underbrace{\{x \in A : g(x)>a-q\}}_{\in \mathcal{M}} \right) \in \mathcal{M}$.

(ii) Αν $\lambda>0$, τότε $\{x \in A : \lambda f(x)>a\} = \{x \in A : f(x) > \frac{a}{\lambda}\} \in \mathcal{M}$

Αν $\lambda<0$, τότε $\{x \in A : \lambda f(x)>a\} = \{x \in A : f(x) < \frac{a}{\lambda}\} \in \mathcal{M}$.

(iii) $fg = \dfrac{(f+g)^2-(f-g)^2}{4}$

Αρκεί ν.δ.ο. h μετρήσιμη $\Rightarrow h^2$ μετρήσιμη.

Έστω $a \in \mathbb{R}$

- Αν $a<0$, τότε $\{x \in A : h^2(x)>a\} = A \in \mathcal{M}$
- Αν $a \geq 0$, τότε $\{x \in A : h^2(x)>a\} = \underbrace{\{h>\sqrt{a}\}}_{\in \mathcal{M}} \cup \underbrace{\{h<-\sqrt{a}\}}_{\in \mathcal{M}} \in \mathcal{M}$

(v) $\{x \in A : \max\{f(x), g(x)\} < a\} = \underbrace{\{x \in A : f(x)<a\}}_{\in \mathcal{M}} \cap \underbrace{\{x \in A : g(x)<a\}}_{\in \mathcal{M}} \in \mathcal{M}$

$\{x \in A : \min\{f(x), g(x)\} < a\} = \{\underbrace{f<a}_{\in \mathcal{M}}\} \cup \{\underbrace{g<a}_{\in \mathcal{M}}\} \in \mathcal{M}$

$\{x \in A : |f|<a\} = \{x \in A : \max\{f, -f\} < a\} \in \mathcal{M}$, από πριν. ∎

Πρόταση 3 (ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων)

(a) Έστω $f_n : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες.

Τότε, οι $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$ μετρήσιμες. $\left((\sup_n f_n)(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \right)$

(Απόδειξη: $\{x \in A : \sup_n f_n(x) > a\} = \bigcup_n \{x \in A : \underbrace{f_n(x)>a}_{\in \mathcal{M}}\} \in \mathcal{M}$

$\{x \in A : \inf_n f_n(x) < a\} = \bigcup_n \{x \in A : \underbrace{f_n(x)<a}_{\in \mathcal{M}}\} \in \mathcal{M}$ ∎).

Υπενθύμιση

Αν (a_n) είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών, τότε $\limsup\limits_n a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\underbrace{\sup\{a_k : k\geq n\}}_{\beta_n \downarrow})$ και

$$\liminf\limits_n a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\underbrace{\inf\{a_k : k\geq n\}}_{\gamma_n \uparrow})$$

(β) Κατ' αναλογία, αν $f_n : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη, οι $(\limsup\limits_n f_n)(x) = \limsup\limits_n f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n(x)$, όπου $\beta_n(x) = \sup\{f_k(x) : k\geq n\}$, και $(\liminf\limits_n f_n)(x) = \liminf\limits_n f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n(x)$, όπου $\gamma_n(x) = \inf\{f_k(x) : k \geq n\}$ είναι μετρήσιμες.

(γ) Αν $f_n \to f$ κατά σημείο και κάθε f_n είναι μετρήσιμη, τότε η f είναι μετρήσιμη.
(Αφού $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$, $f = \limsup\limits_n f_n = \liminf\limits_n f_n$ που είναι μετρήσιμες).