Ανάλυση Fourier & Ολοκλήρωμα Lebesgue

Μάθημα 4ο (05-03-2015)

(1) Εξωτερικό μέτρο Lebesgue:

$\forall E \subseteq \mathbb{R}^d \quad \lambda^*(E) \underset{\text{ορ}}{=} \inf\{\sum_n \ell(I_n) : E \subseteq \bigcup_n I_n\}$

(2) Lebesgue μετρήσιμα σύνολα:

ένα $E \subseteq \mathbb{R}^d$: $\forall X \subseteq \mathbb{R}^d \quad \lambda^*(X) = \lambda^*(X \cap E) + \lambda^*(X \setminus E)$.

Η κλάση $\mathcal{M}$ των Lebesgue μετρήσιμων $\subseteq \mathbb{R}^d$ είναι σ-άλγεβρα, περιέχει τα $E \subseteq \mathbb{R}^d$ που έχουν εξωτερικό μέτρο $\lambda^*(E) = 0$ και η $\lambda = \lambda^*_{|\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) Αν $E_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$, ξένα ανά δύο, τότε:

$$\lambda(\bigcup_n E_n) = \sum_n \lambda(E_n) \quad \text{(αριθμήσιμη προσθετικότητα)}$$

(ii) Αν $E \in \mathcal{M}$, $x \in \mathbb{R}^d$, τότε: $E + x \in \mathcal{M}$ και $\lambda(E+x) = \lambda(E)$.

(3) **Πρόταση**

Αν $I \subseteq \mathbb{R}^d$ διάστημα, τότε $I \in \mathcal{M}$.

(Έπεται ότι $\lambda(I) \underset{\text{ορ.}}{=} \lambda^*(I) \xlongequal[\text{αποδειχθεί}]{\text{έχει}} \ell(I)$).

Απόδειξη:

Για $d = 1$:

Δείχνουμε πρώτα ότι κάθε ημιευθεία $[a, +\infty) \in \mathcal{M}$.

Παίρνουμε $X \subseteq \mathbb{R}$ και πρέπει ν.δ.ο. :

$$\lambda^*(X) \geq \lambda^*(X \cap [a, +\infty)) + \lambda^*(X \setminus [a, +\infty)).$$

Αρκεί να δείξουμε ότι: αν $X \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και αν $\varepsilon > 0$ τυχόν, τότε:

$$\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \geq \lambda^*(X \cap [a, +\infty)) + \lambda^*(X \setminus [a, +\infty))$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε: $I_n' = I_n \cap (-\infty, a)$

$I_n'' = I_n \cap (a, +\infty)$.

Σε κάθε περίπτωση, $\ell(I_n) = \ell(I_n') + \ell(I_n'')$ και $I_n' \cup I_n'' \supseteq I_n \setminus \{a\}$.
Ορίζουμε τώρα $I_0 = (a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2})$

Ισχυρισμός: (1) $X \setminus [a, +\infty) = X \cap (-\infty, a) \subseteq \bigcup_n I_n' \Rightarrow \lambda^*(X \cap (-\infty, a)) \leq \sum_n \ell(I_n')$

(2) $X \cap [a, +\infty) \subseteq (\bigcup_n I_n'') \cup I_0 \Rightarrow \lambda^*(X \cap [a, +\infty)) \leq \ell(I_0) + \sum_n \ell(I_n'') =$
$= \varepsilon + \sum_n \ell(I_n'')$.

Άρα, $\lambda^*(X \cap [a, +\infty)) + \lambda^*(X \setminus [a, +\infty)) \leq \varepsilon + \sum_n \ell(I_n'') + \sum_n \ell(I_n') =$
$= \varepsilon + \sum_n (\ell(I_n') + \ell(I_n'')) =$
$= \varepsilon + \sum_n \ell(I_n)$.

Αφού ε τυχόν έχουμε το ζητούμενο.

Τώρα: $(-\infty, a) = \mathbb{R} \setminus [a, +\infty) \in \mathcal{M}$

$(-\infty, a] = (-\infty, a) \cup \{a\} \in \mathcal{M}$

$[a, b] = \mathbb{R} \setminus ((-\infty, a) \cup (b, +\infty)) \in \mathcal{M}$

$(a, b) = [a, b] \setminus \{a, b\} \in \mathcal{M}$

κλπ. ∎

Πόρισμα

(α) Κάθε ανοιχτό και κάθε κλειστό $\subseteq \mathbb{R}$ (ή του $\mathbb{R}^d$) είναι μετρήσιμο.

(β) Κάθε G_δ, F_σ σύνολο, είναι μετρήσιμο.

Απόδειξη:

- Αν G ανοιχτό $\subseteq \mathbb{R}$, τότε $G = \bigcup_n \underbrace{(a_n, b_n)}_{\in \mathcal{M}} \in \mathcal{M}$ (μάλιστα, μπορώ να τα πάρω ξένα).
- Αν F κλειστό: $F = \mathbb{R} \setminus \underbrace{G}_{\in \mathcal{M}\,(\text{ανοιχτό})} \in \mathcal{M}$
- Αν H G_δ: $H = \bigcap_n G_n \in \mathcal{M}$
- Αν U F_σ: $U = \bigcup_n F_n \in \mathcal{M}$. ∎

Άσκηση

Κάθε ανοιχτό $G \subseteq \mathbb{R}^d$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση ανοιχτών κύβων.

Ορισμός (Borel σ-άλγεβρα)

Η σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$ που περιέχει όλα τα ανοιχτά $\subseteq \mathbb{R}^d$.

Ορίζεται ως εξής: $\mathcal{B} = \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{A}$ σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοιχτά$\}$
(↳ υπάρχουν τέτοιες: $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{M}$).

Η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα (απλό) και περιέχει τα ανοιχτά (απλό).
Σίγουρα τα ανοιχτά, κλειστά, G_δ, F_σ, κλπ, είναι σύνολα Borel.

Πρόταση

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d).$$

Απόδειξη

Η $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει τα ανοιχτά $\subseteq \mathbb{R}^d$ και η $\mathcal{B}$ είναι η μικρότερη τέτοια σ-άλγεβρα, άρα $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$. ■

Δύο ερωτήσεις:

(I) Υπάρχει $N \subseteq \mathbb{R}^d$ με $N \notin \mathcal{M}$; (ΝΑΙ, το σύνολο του Vitali)

(II) Υπάρχει $E \in \mathcal{M}$ με $E \notin \mathcal{B}$; (ΝΑΙ, κατάλληλο υποσύνολο του συνόλου του Cantor).

(4) Συμπληρώματα

(α) Χαρακτηρισμός των μετρήσιμων συνόλων
(β) Συνέχεια του μέτρου Lebesgue
(γ) Περισσότερα για το C
(δ) Μη μετρήσιμα σύνολα

Πρόταση (χαρακτηρισμός μετρήσιμων συνόλων)

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^d$.
Τα εξής είναι ισοδύναμα:
(α) $E \in \mathcal{M}$
(β) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists G \supseteq E$ ανοιχτό : $\lambda^*(G \setminus E) < \varepsilon$
(γ) $\exists$ G_δ σύνολο H: $E \subseteq H$ και $\lambda^*(H \setminus E) = 0$.

Απόδειξη:

(α) ⇒ (β)

Υποθέτουμε επιπλέον $\lambda(E) < \infty$.
Έστω $\varepsilon > 0$.
Ξέρουμε ότι $\lambda(E) = \lambda^*(E) = \inf\left\{ \sum_n \ell(I_n) : E \subseteq \bigcup_n I_n \right\}$.
Άρα, υπάρχουν ανοιχτά διαστήματα I_n : $E \subseteq \bigcup_n I_n$ και
$$\sum_n \ell(I_n) < \lambda(E) + \varepsilon$$
Ορίζουμε $G := \bigcup_n I_n$.
Το G είναι ανοιχτό και $G \supseteq E$.
Επιπλέον, $\lambda(G) = \lambda\left(\bigcup_n I_n\right) \leq \sum_n \lambda(I_n) = \sum_n \ell(I_n) < \lambda(E) + \varepsilon$
Τότε, $\lambda(G) = \lambda(E) + \lambda(G \setminus E) \underset{\lambda(E)<\infty}{\Longrightarrow} \lambda(G \setminus E) = \lambda(G) - \lambda(E) < \varepsilon$
Στην γενική περίπτωση:
Έστω $E \in \mathcal{M}$
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε: $E_n := E \cap (-n, n)^d$
Τότε, $E = \bigcup_n E_n$ και $\lambda(E_n) < \infty$.

Από αυτό που κάναμε, υπάρχει ανοιχτό $G_n \supseteq E_n$, ώστε:
$$\lambda(G_n \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}$$
Θέτουμε $G = \bigcup_n G_n =$ ανοιχτό $\supseteq \bigcup_n E_n = E$.
Έχουμε $\lambda(G \setminus E) = \lambda(\underbrace{\bigcup_n G_n \setminus \bigcup_n E_n}) \leq \lambda(\underbrace{\bigcup_n (G_n \setminus E_n)}) \leq$
$$\leq \sum_n \lambda(G_n \setminus E_n) \leq \sum_n \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} = \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

(β) ⇒ (γ)

Εφαρμόζοντας το (β) για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε:
ανοιχτό $G_n \supseteq E$ ώστε $\lambda^*(G_n \setminus E) < \frac{1}{n}$
Ορίζουμε $H = \bigcap_n G_n$.
Το H είναι G_δ-σύνολο και $H \supseteq E$.
Τέλος, $\forall n$ έχουμε: $H \setminus E \subseteq G_n \setminus E \Rightarrow 0 \leq \lambda^*(H \setminus E) \leq \lambda^*(G_n \setminus E) < \frac{1}{n}$
Άρα, $\lambda^*(H \setminus E) = 0$.

(γ) ⇒ (α)

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^d$ και έστω ότι $\exists\, G_\delta$-σύνολο $H \supseteq E$ με $\lambda^*(H \setminus E) = 0$.
Τότε $H \setminus E \in \mathcal{M}$ και $\lambda(H \setminus E) = \lambda^*(H \setminus E) = 0$
Άρα, $E = H \setminus (H \setminus E) \in \mathcal{M}$, αφού $H, H \setminus E \in \mathcal{M}$. ■

Πρόταση (συνέχεια του μέτρου)

(α) Έστω (E_n) αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων:
$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \subseteq E_n \subseteq E_{n+1} \subseteq \ldots$$
Αν $E = \bigcup_n E_n$ τότε $\lambda(E_n) \to \lambda(E)$

(β) Έστω (E_n) φθίνουσα ακολουθία στην $\mathcal{M}$ με $\lambda(E_1) < \infty$
Αν $E = \bigcap_n E_n$, τότε $\lambda(E_n) \to \lambda(E)$.

Απόδειξη

(α) Ορίζουμε $A_1 = E_1$

$A_2 = E_2 \setminus E_1$

$A_3 = E_3 \setminus E_2$

$\vdots$

Τότε $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$E_n = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = \underbrace{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}_{\text{ξένα}}$$

Έπεται, ότι $E = \bigcup_n E_n = \bigcup_n A_n \Rightarrow \lambda(E) = \lambda(\bigcup_n A_n) = \sum_n \lambda(A_n) =$

$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \lambda(A_n) = \lim_{N\to\infty} \lambda(\bigcup_N A_N) = \lim_{N\to\infty} \lambda(E_n)$.

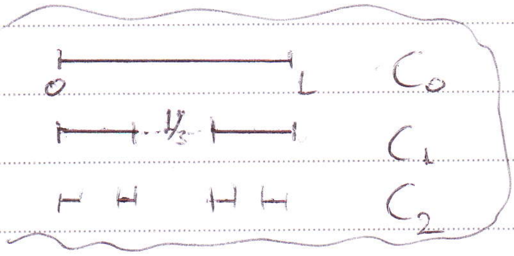
(β) Ορίζουμε $B_n := E_1 \setminus E_n$ που $(B_n)\uparrow$ και $\bigcup B_n = \bigcup(E_1\setminus E_n) = E_1 \setminus \bigcap E_n = E_1 \setminus E$.

Από το (α) $\underset{\substack{\| \\ \lambda(E_1\setminus E_n)}}{\lambda(B_n)} \longrightarrow \lambda(\bigcup_n B_n) = \lambda(E_1 \setminus E) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda(E_1) - \lambda(E_n) = \lambda(E_1 \setminus E_n) \longrightarrow \lambda(E_1\setminus E) = \lambda(E_1) - \lambda(E) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda(E_n) \longrightarrow \lambda(E)$. ■

Το σύνολο του Cantor



- Κάθε C_n είναι ένωση 2^n ξένων κλειστών διαστημάτων μήκους $1/3^n$.
- Ορίζουμε $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$.

Το C είναι συμπαγές $\Rightarrow C \in \mathcal{M}$

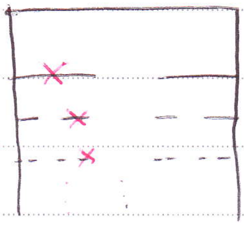
Έχουμε: $\lambda(C) = \lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} 2^n \cdot \frac{1}{3^n} = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda(C)=0}$

- Το C δεν περιέχει διάστημα.
- Το C είναι υπεραριθμήσιμο και μάλιστα έχει πληθάριθμο τον ίδιο με το $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$

Απόδειξη:

Ορίζουμε $\Phi: C \to \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ και θα δείξουμε ότι είναι 1-1 και επί.

$$\left.\begin{aligned} &\Phi(x) = (0,2,2,\dots) \\ &\quad\, \parallel \\ &\Phi(n) = (0,2,2,\dots) \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} x=n \text{ γιατί θα} \\ \text{"φτάσουμε" στο ίδιο σημείο.} \end{array}$$



Για το επί:

$$x = \sum \frac{x_n}{3^n} \quad \forall n \ x_n = 0 \text{ ή } 2.$$