Ανάλυση Fourier & Ολοκλήρωμα Lebesgue
Μάθημα 1ο (25-02-2015)

1) Σειρές Fourier

$f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ Riemann ολοκληρώσιμη

($f=g+ih$, $g,h:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ R-ολοκληρώσιμες και ορίζουμε $\int f := \int g + i\int h$).

Fourier: $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\cdot e^{inx}$. (*)

$S_N(f,x)=\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}$ ⤳ τριγωνομετρικό πολυώνυμο.

$S_N(f,x)\xrightarrow[N\to\infty]{} f(x)$.

Ποιοι θα είναι οι a_n;

Αν ισχύει η (*) $\forall k\in\mathbb{Z}$, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_n a_n e^{inx}\right)e^{-ikx}dx=$

$$=\sum_n a_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x}dx = a_k$$

0, αν $n\neq k$ 1, αν $n=k$

Άρα τα σωστά a_k: $\boxed{a_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx}$

Ρωτάμε αν $S_N(f,x)\xrightarrow[N\to\infty]{} f(x)$ $\forall x$

ΟΧΙ γενικά, ακόμα κι αν f συνεχής.

Ένα θετικό αποτέλεσμα:

Πάντα έχουμε: $\|f-S_N(f)\|_2=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_N(f,x)|^2dx\right)^{1/2}\xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

Μάλιστα, $\|f\|_2^2=\underbrace{\|f-S_N(f)\|_2^2}_{\to 0}+\underbrace{\|S_N(f)\|_2^2}_{=\sum_{n=-N}^{N}|a_n|^2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2=\|f\|_2^2}$ (Ταυτότητα Parseval)

Δηλαδή η $\underset{R([-\pi,\pi])}{f} \longmapsto \underset{\ell^2(\mathbb{Z})}{\{a_n(f)\}_{n=-\infty}^{\infty}}$ είναι ισομετρία.

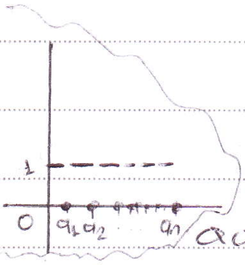
Είναι επί;
Αν $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|a_n|^2<\infty$ υπάρχει f: $\forall n$ $a_n=a_n(f)$;

ΟΧΙ

2) Ολοκλήρωμα Riemann και σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων.

Έστω $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ R-ολοκληρώσιμες.
Υποθέτουμε ότι $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$.
Είναι η f ολοκληρώσιμη;

ΟΧΙ: Έστω $\{q_k : k\in\mathbb{N}\}$ αρίθμηση των ρητών του $[0,1]$.
Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε: $f_n(x)=\begin{cases}1, & \text{αλλιώς}\\ 0, & x=q_1 \text{ ή } q_2 \text{ ή } \dots \text{ ή } q_n\end{cases}$



Η f_n είναι ολοκληρώσιμη (πεπερασμένα σημεία ασυνέχειας)

$0\le f_n\le 1$, $f_n \ge f_{n+1}$

Έχουμε $f_n(x)\longrightarrow f(x)=\begin{cases}1, & x\notin\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$ (Δεν είναι R-ολοκληρώσιμη)

Άσκηση

Έστω $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής.
Υποθέτουμε ότι (a) $\forall x\in[0,1]$ και $\forall n$ $0\le f_n(x)\le 1$
(b) $\forall x$ $\forall n$ $f_n(x)\ge f_{n+1}(x)$
Τότε $\forall x$ υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} f(x) =: f(x)$.
Είναι η f ολοκληρώσιμη; Ισχύει ότι $\int f_n \xrightarrow{n\to\infty} \int f$;

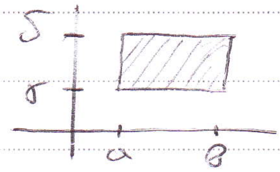
ΟΧΙ

1872 – Weierstrass
1881 – Jordan
1883 – Cantor
1890 – Peano
1898 – Borel
1902 – Lebesgue
1905 – Vitali

3) Μέτρο Lebesgue

• Στο $\mathbb{R}$: Διάστημα: $[\alpha,\beta]$ ή $[\alpha,\beta)$ ή $(\alpha,\beta]$ ή (α,β).
Μήκος: $\ell([\alpha,\beta]) = \beta-\alpha$.

• Στο $\mathbb{R}^2$: Ορθογώνιο: $[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]$
Εμβαδόν: $E(I) = (\beta-\alpha)(\delta-\gamma)$

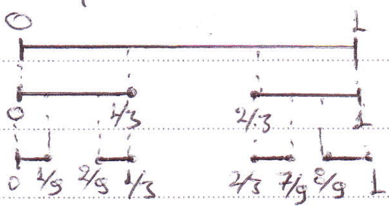


Θα θέλαμε να ορίσουμε $\lambda : P(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,+\infty]$ (όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$) έτσι ώστε:

• $\forall \alpha<\beta$ $\lambda([\alpha,\beta]) = \beta-\alpha$
• Το λ να είναι αριθμήσιμα προσθετικό.
Αν $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$.
• $\forall E\subseteq\mathbb{R}$ $\forall t\in\mathbb{R}$ $\lambda(E+t) = \lambda(E)$ (αναλλοίωτο ως προς τις μεταφορές).

Το σύνολο του Cantor

Ξεκινάμε από το $[0,1]$



$C_0=[0,1]$

$C_1=[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$

$C_2=[0,\frac{1}{9}]\cup[\frac{2}{9},\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]\cup[\frac{8}{9},1]$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε μια φθίνουσα ακολουθία $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ κλειστών υποσυνόλων του $[0,1]$.
Κάθε C_n είναι η ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων μήκους $\frac{1}{3^n}$.
Ορίζουμε $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$

Έχουμε $C \neq \emptyset$ ως τομή φθίνουσας ακολουθίας μη κενών συμπαγών συνόλων.

Επιπλέον, περιέχει όλα τα άκρα των διαστημάτων που απαρτίζουν κάθε C_n $\xrightarrow{(\text{Άπειρα})}$ το C είναι άπειρο σύνολο.

Μάλιστα θα δούμε ότι το C είναι υπεραριθμήσιμο (και μάλιστα ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$)

• Το C δεν περιέχει κανένα διάστημα.

Αν είχαμε $J=[\alpha,\beta]\subseteq C$ τότε $\forall n$ θα είχαμε:

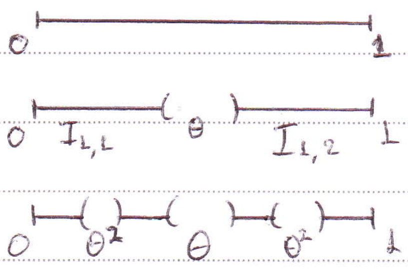
$J \subseteq C_n \Rightarrow J \subseteq I_n$, όπου I_n κάποιο από τα 2^n υποδιαστήματα του C_n.

Τότε $\ell(J) \leq \ell(I_n) = \frac{1}{3^n}$ και αφήνοντας $n \to \infty$ $\ell(J)=0$, άτοπο.

• $\forall n$ $\lambda(C) \leq \lambda(C_n) = 2^n \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0 \Rightarrow \lambda(C)=0$.

Παραλλαγή της κατασκευής:

Παίρνουμε: $0<\theta<\frac{1}{3}$



$A_0 = [0,1]$

$A_1 = I_{1,1} \cup I_{1,2}$

$A_2 = I_{2,1} \cup I_{2,2} \cup I_{2,3} \cup I_{2,4}$

Συνεχίζουμε έτσι:

Στο n-οστό βήμα, το A_n είναι ξένη ένωση 2^n διαστημάτων $I_{n,k}$, $k=1,\dots,2^n$ και το $\lambda([0,1]\setminus A_n) = \theta + 2\theta^2 + 2^2\theta^3 + \dots + 2^{n-1}\theta^n =$

$$= \theta(1 + 2\theta + (2\theta)^2 + \dots + (2\theta)^{n-1}) = \theta \frac{1-(2\theta)^n}{1-2\theta}$$

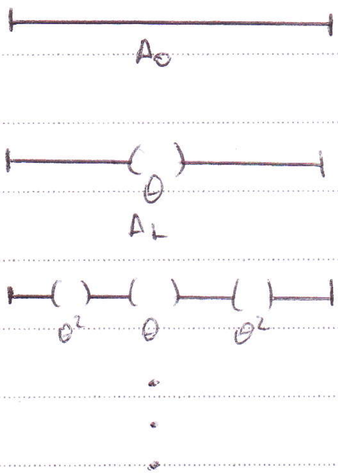
Τα $\underbrace{[0,1]\setminus A_n \nearrow [0,1]\setminus A}$, όπου $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

$$\Downarrow$$

$$\lambda([0,1]\setminus A_n) \longrightarrow \lambda([0,1]\setminus A)$$

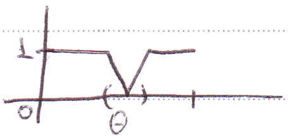
Άρα $\lambda(A) = 1 - \frac{\theta}{1-2\theta} = \frac{1-3\theta}{1-2\theta} \underline{\underline{> 0}}$

<u>Η άσκηση:</u>



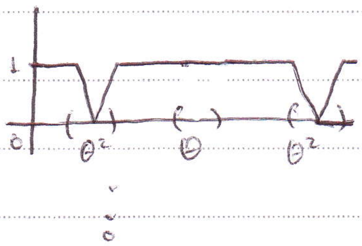
$F_0 \equiv 1$

$F_1 \rightsquigarrow$



$f_1 \equiv F_1$

$F_2 \rightsquigarrow$



$f_2 = F_1 \cdot F_2 \leq F_1 = f_1$

$\vdots$

$f_n = F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \cdot F_n$

Η (f_n) είναι φθίνουσα ακολουθία συνεχών συναρτήσεων.

Αν $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$, τότε $\forall x \in A$. $\forall n$ $F_n(x) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n$ $f_n(x) = F_1(x) \cdot F_2(x) \cdot \dots \cdot F_n(x) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$.

Έπεται ότι:

αν $x \in A$, τότε η $f = \lim f_n$ είναι ασυνεχής στο x.

(γιατί μπορώ να βρω $x_n \to x$ με $f_n(x_n) = 0 \Rightarrow f(x_n) = 0$).

Δηλαδή, η f είναι ασυνεχής σε ένα $A \subseteq [0,1]$ με $\lambda(A) > 0$.

Θεώρημα:

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι R-ολοκλ. $\Leftrightarrow$ το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f έχει μέτρο 0.