Το θεώρημα του Wiener

Αργύριος Πετρόπουλος και Αργύρης Πετρόπουλος

1 Εισαγωγή

Σε αυτήν την εργασία μελετάμε το θεώρημα του Wiener στην κλασσική του μορφή: Αν μια περιοδική συνάρτηση f με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{T}$ έχει απολύτως συγκλίνουσα σειρά Fourier, τότε και η $\frac{1}{f}$ έχει την ίδια ιδιότητα.

Το μεγαλύτερο μέρος της εργασίας αφιερώνεται στην σύντομη και κομψή απόδειξη του Gelfand που χρησιμοποιεί αλγεβρικές τεχνικές, μέσω της θεωρίας αλγεβρών Banach. Στη συνέχεια, θα δούμε μια απόδειξη του Newmann και κάποιες παραλλαγές του θεωρήματος.

Ειδικότερα:

- Στην Παράγραφο 2 παραθέτουμε κάποια βασικά αποτελέσματα της θεωρίας αλγεβρών Banach, που θα μας χρειαστούν. Στόχος μας είναι να εξετάσουμε το πρόβλημα της αντιστρεψιμότητας ενός στοιχείου μιας άλγεβρας Banach μέσω της μελέτης των ιδεωδών και των γραμμικών πολλαπλασιαστικών συναρτησοειδών της.
- Στην Παράγραφο 3 αποδεικνύουμε ότι ο χώρος μεστοιχεία τις περιοδικές συναρτήσεις με απολύτως συγκλίνουσα σειρά Fourier είναι άλγεβρα Banach με μια κατάλληλη νόρμα. Έπειτα, μέσω της θεωρίας που αναπτύξαμε στην Παράγραφο 2 αποδεικνύουμε το θεώρημα του Wiener.
- Στην Παράγραφο 4 παραθέτουμε την απόδειξη του Newmann που χρησιμοποιεί στοιχειώδεις αναλυτικές μεθόδους.
- Στην Παράγραφο 5 δίνουμε κάποιες παραλλαγές και γενικεύσεις.

2 Γενικά στοιχεία Αλγεβρών Banach

Ορισμός 2.1. (α) Ένας γραμμικός χώρος $\mathcal{A}$ πάνω από το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, καλείται *μιγαδική άλγεβρα* αν είναι εφοδιασμένος με μια διμελή πράξη

$$(x,y) \mapsto xy : \quad \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \tag{2.1}$$

που την καλούμε πολλαπλασιασμό, έτσι ώστε:

- $x(yz) = (xy)z$ (προσεταιριστική ιδιότητα)
- $x(y+z) = xy + xz, \quad (y+z)x = yx + zx$ (επιμεριστική ιδιότητα)
- $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$

για κάθε $x, y, z \in \mathcal{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$.

(β) Μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ καλείται *μεταθετική* αν

$$xy = yx \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathcal{A}. \tag{2.2}$$

(γ) Μια άλγεβρα με *μονάδα* είναι μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ στην οποία υπάρχει ένα μη-μηδενικό στοιχείο e, ώστε

$$ex = x = xe \quad \text{για κάθε } x \in \mathcal{A}. \tag{2.3}$$

(δ) Μια *υποάλγεβρα* μιας άλγεβρας είναι ένας γραμμικός υπόχωρος που είναι κλειστός ως προς τον πολλαπλασιασμό, δηλαδή περιέχει το γινόμενο κάθε ζεύγους στοιχείων του.

Ορισμός 2.2. Μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ καλείται *νορμαρισμένη άλγεβρα* αν είναι εφοδιασμένη με μια νόρμα, δηλαδή μια απεικόνιση

$$\|\cdot\| : \mathcal{A} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \|x\| \tag{2.4}$$

με τις ιδιότητες

- $\|x\| \geqslant 0$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$ και $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$.
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ και $x \in \mathcal{A}$.
- $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x, y \in \mathcal{A}$.

Επιπλέον, πρέπει η νόρμα αυτή να είναι *υποπολλαπλασιαστική*, δηλαδή

$$\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathcal{A}. \tag{2.5}$$

Σχόλιο 2.3. Λόγω της υποπολλαπλασιαστικότητας, αν μια νορμαρισμένη άλγεβρα έχει ταυτοτικό στοιχείο e, τότε $\|e\|_{\mathcal{A}} \geqslant 1$. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει πάντα μια νόρμα $\|\cdot\|_0$, ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$, ώστε $\|e\|_0 = 1$.

Οπότε σε αυτήν την εργασία θα θεωρούμε ότι $\|e\|_{\mathcal{A}} = 1$.

Ορισμός 2.4. Μια νορμαρισμένη άλγεβρα $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ καλείται *άλγεβρα Banach* αν ο χώρος με νόρμα $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ είναι πλήρης, δηλαδή χώρος Banach.

Σχόλια 2.5. Η υποπολλαπλασιαστικότητα της νόρμας είναι κάτι περισσότερο απ¨ ότι χρειάζεται στον ορισμό μιας άλγεβρας Banach. Σύμφωνα με τον Gelfand, η συνθήκη αυτή μπορεί να αντικατασταθεί από την ασθενέστερη συνθήκη της *χωριστής συνέχειας* του πολλαπλασιασμού, δηλαδή την απαίτηση ότι η διγραμμική απεικόνιση

$$(x, y) \mapsto xy : \quad \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \tag{2.6}$$

είναι συνεχής ως προς καθεμία από τις μεταβλητές x και y.

Ο λόγος γι¨ αυτήν την αλλαγή είναι ότι η υποπολλαπλασιαστικότητα δεν παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τοπολογικούς ισομορφισμούς. Εμείς όμως θα χρησιμοποιούμε στην εργασία αυτή τον ορισμό με την υποπολλαπλασιαστικότητα.

Ορίσαμε λοιπόν αυτήν την σπουδαία κλάση αλγεβρών, τις άλγεβρες Banach. Η σπουδαιότητά τους οφείλεται στο γεγονός ότι πολλές κλασσικές άλγεβρες που εμφανίζονται στις εφαρμογές, είναι τέτοιου τύπου. Η έννοια μιας αφηρημένης άλγεβρας Banach εισήχθη για πρώτη φορά από τον M. Nagumo το 1936, ο οποίος χρησιμοποιούσε τον όρο «γραμμικός μετρικός δακτύλιος». Ο Gelfand ονόμαζε τις άλγεβρες Banach «νορμαρισμένους δακτυλίους», ενώ ο Naimark «δακτυλίους Banach». Ο όρος «άλγεβρα Banach» που έχει επικρατήσει τα τελευταία χρόνια, χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον W. Ambrose το 1945.

Θα δώσουμε τώρα κάποια (τρία) παραδείγματα αλγεβρών Banach. Εκείνο που διαφοροποιεί κάθε ένα από αυτά τα παραδείγματα είναι ο πολλαπλασιασμός. Τα παραδείγματα αυτά ταξινομούνται σε *άλγεβρες συναρτήσεων*, *άλγεβρες τελεστών* ή *άλγεβρες ομάδων*, αναλόγως αν ο πολλαπλασιασμός ορίζεται *κατά σημείο*, ως *σύνθεση* ή από την *συνέλιξη* αντίστοιχα.

Παραδείγματα 2.6. (1) (*Άλγεβρα συναρτήσεων*) Έστω Ω ένας συμπαγής χώρος Hausdorff. Έστω $C(\Omega)$ ο χώρος όλων των συναρτήσεων με μιγαδικές τιμές, που είναι ορισμένες στο Ω. Ο $C(\Omega)$ είναι χώρος Banach με τη νόρμα

$$\|x\| = \max_{t\in\Omega} |x(t)|.$$

Επίσης, εύκολα βλέπουμε ότι $\|xy\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$, οπότε ο χώρος $C(\Omega)$ είναι άλγεβρα Banach με τον πολλαπλασιασμό κατά σημείο. Μάλιστα, είναι μεταθετική άλγεβρα με μονάδα.

(2) (*Άλγεβρα τελεστών*) Αν ο E είναι χώρος Banach, τότε το σύνολο $B(E)$ των φραγμένων γραμμικών τελεστών $T : E \to E$ είναι *άλγεβρα Banach*:

- Είναι άλγεβρα ως προς τις γραμμικές πράξεις κατά σημείο και *με πολλαπλασιασμό την σύνθεση*.
- Είναι χώρος Banach ως προς τη νόρμα

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_E : x \in E, \|x\|_E \leqslant 1\}.$$

- Ισχύει η $\|TS\| \leqslant \|T\| \cdot \|S\|$ για κάθε $T, S \in B(E)$.

Αυτή η άλγεβρα Banach είναι πολύ σημαντική. Ισχύει το εξής θεώρημα:

> «Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα Banach. Τότε, υπάρχει ένας χώρος Banach E ώστε η $\mathcal{A}$ να είναι ισόμορφη με μια υποάλγεβρα του $B(E)$.»

(3) (*Άλγεβρα ομάδων*) Έστω $L_1(\mathbb{R})$ ο χώρος Banach που έχει στοιχεία τις απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, και νόρμα την

$$\|x\| = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|\,dt, \qquad x \in L_1(\mathbb{R}).$$

Ο πολλαπλασιασμός στον $L_1(\mathbb{R})$ ορίζεται ως η *συνέλιξη*

$$x * y = \int_{\mathbb{R}} x(t-\tau)y(\tau)\,d\tau.$$

Η συνέλιξη είναι μεταθετική και προσεταιριστική, και

$$\begin{aligned}\|x * y\| &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} x(t-\tau)y(\tau)\,d\tau \right| dt \leqslant \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |x(t-\tau)|\,|y(\tau)|\,d\tau\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |x(t-\tau)|\,dt \right) d\tau = \|x\| \cdot \|y\|.\end{aligned}$$

Η άλγεβρα αυτή *δεν* έχει μονάδα.

Συνεχίζουμε τώρα την γενική θεωρία με τη μελέτη της αντιστρεψιμότητας και του φάσματος ενός στοιχείου σε μια άλγεβρα Banach, με στόχο τελικά να αποδείξουμε το περίφημο θεώρημα Gelfand-Mazur.

Πριν τους ορισμούς μια παρατήρηση:

Παρατήρηση 2.7. Αποδεικνύεται σχετικά εύκολα (αλλά θέλει κάποια δουλειά) ότι κάθε άλγεβρα Banach χωρίς μονάδα μπορεί να επεκταθεί σε μια άλγεβρα Banach *με μονάδα*.

Ορισμός 2.8. Έστω $\mathcal{A}$ μια μιγαδική άλγεβρα με μονάδα e. Ένα στοιχείο $x \in \mathcal{A}$ λέγεται *αντιστρέψιμο* αν υπάρχει $y \in \mathcal{A}$ ώστε

$$xy = yx = e. \tag{2.7}$$

Αν υπάρχει τέτοιο y, είναι μοναδικό και συμβολίζεται με x^{-1}.

Θα συμβολίζουμε με $G(\mathcal{A})$ το σύνολο των αντιστρέψιμων στοιχείων της $\mathcal{A}$, το οποίο μάλιστα είναι *ομάδα* ως προς τον πολλαπλασιασμό.

Ορισμός 2.9. (α) Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ άλγεβρες. Ένας *ομομορφισμός* είναι μια απεικόνιση $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ τέτοια ώστε, για κάθε $x, y \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}\varphi(x+y) &= \varphi(x) + \varphi(y)\\ \varphi(x \cdot y) &= \varphi(x) \cdot \varphi(y).\end{aligned}$$

Αν επιπλέον η φ είναι $1-1$ και επί, τότε η φ λέγεται *ισομορφισμός*.
(β) Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ νορμαρισμένες άλγεβρες και $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Αν

$$\|\varphi(f)\|_{\mathcal{B}} = \|f\|_{\mathcal{A}} \tag{2.8}$$

για κάθε $f \in \mathcal{A}$ τότε λέμε ότι η απεικόνιση φ είναι *ισομετρία*.

Ορισμός 2.10. (α) Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα με μονάδα e. Το *φάσμα* ενός $x \in \mathcal{A}$ είναι το σύνολο

$$\sigma_{\mathcal{A}}(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \notin G(\mathcal{A})\}. \tag{2.9}$$

(β) Η *επιλύουσα* του x είναι το σύνολο

$$\rho_{\mathcal{A}}(x) = \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(x). \tag{2.10}$$

(γ) Η *φασματική ακτίνα* του x σε μια νορμαρισμένη άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι η ποσότητα

$$r_{\mathcal{A}}(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(x)\}. \tag{2.11}$$

Ο όρος «φάσμα» χρησιμοποιήθηκε από τον D. Hilbert στη φασματική θεωρία του το 1906. Όμως, ο όρος αυτός εισήχθη για πρώτη φορά το 1897 από τον Wirtinger, όταν μελετώντας τις λύσεις κάποιων διαφορικών εξισώσεων ειδικής μορφής, διεπίστωσε ότι υπήρχαν ομοιότητες με το οπτικό φάσμα των μορίων.

Σχόλια 2.11. (α) Αποδεικνύεται ότι το φάσμα $\sigma_{\mathcal{A}}(x)$ ενός στοιχείου μιας άλγεβρας Banach με μονάδα είναι μη-κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$.
(β) Αποδεικνύεται ότι, για κάθε $x \in \mathcal{A}$,

$$r_{\mathcal{A}}(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|_{\mathcal{A}}^{1/n} \tag{2.12}$$

(θεώρημα Beurling-Gelfand).

Πρόταση 2.12. *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα Banach με μονάδα e. Αν $x \in \mathcal{A}$ ώστε $r_{\mathcal{A}}(x) < 1$ τότε το $(e-x)$ είναι αντιστρέψιμο, και*

$$(e-x)^{-1} = e + \sum_{n=1}^{\infty} x^n. \tag{2.13}$$

Επιπλέον, αν $\|x\|_{\mathcal{A}} < 1$ έχουμε

$$\|(e-x)^{-1}\|_{\mathcal{A}} \leqslant \frac{1}{1-\|x\|_{\mathcal{A}}}. \tag{2.14}$$

Απόδειξη. Από το (β) του προηγούμενου σχολίου, για ένα σταθερό ξ ώστε $r_{\mathcal{A}}(x) < \xi < 1$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\|x^n\|_{\mathcal{A}}^{1/n} \leqslant \xi$ όταν $n \geqslant N$, δηλαδή

$$\|x^n\|_{\mathcal{A}} \leqslant \xi^n \tag{2.15}$$

όταν $n \geqslant N$. Αφού $\xi < 1$, έπεται ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x^n\|_{\mathcal{A}} < +\infty. \tag{2.16}$$

Επιπλέον, το μερικό άθροισμα $y_m = e + \sum_{n=1}^{m} x^n$ συγκλίνει ως προς την $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ στο

$$y = e + \sum_{n=1}^{\infty} x^n. \tag{2.17}$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}(e-x)y_m = y_m(e-x) &= \left(e + \sum_{n=1}^{m} x^n\right)(e-x)\\ &= e - x + \sum_{n=1}^{m} x^n - \sum_{n=1}^{m} x^{n+1}\\ &= e - x^{m+1}.\end{aligned}$$

Τώρα, $y_m \to y$ και $x^{m+1} \to 0$ καθώς $m \to \infty$. Έτσι οδηγούμαστε στην

$$(e-x)y = y(e-x) = e. \tag{2.18}$$

Άρα,

$$(e-x)^{-1} = y = e + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \tag{2.19}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}\|(e-x)^{-1}\|_{\mathcal{A}} &\leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \|x^n\|_{\mathcal{A}} \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \|x\|_{\mathcal{A}}^n\\ &= \frac{1}{1-\|x\|_{\mathcal{A}}}.\end{aligned}$$

□

Πρόταση 2.13. *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα Banach με μονάδα. Το σύνολο $G(\mathcal{A})$ είναι ανοικτό.*

Απόδειξη. Έστω $x \in G(\mathcal{A})$. Θα δείξουμε ότι η μπάλα $B(x, \|x^{-1}\|_{\mathcal{A}}^{-1})$ περιέχεται στο $G(\mathcal{A})$. Θεωρούμε $y \in \mathcal{A}$ ώστε

$$\|x - y\|_{\mathcal{A}} < \|x^{-1}\|_{\mathcal{A}}^{-1}. \tag{2.20}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\|e - x^{-1}y\|_{\mathcal{A}} = \|x^{-1}(x-y)\|_{\mathcal{A}} \leqslant \|x^{-1}\|_{\mathcal{A}} \|x-y\|_{\mathcal{A}} < 1, \tag{2.21}$$

άρα το $x^{-1}y \in G(\mathcal{A})$, αφού $x^{-1}y = e - (e - x^{-1}y)$. Αφού το $G(\mathcal{A})$ είναι ομάδα, έπεται ότι $y \in G(\mathcal{A})$. □

Πρόταση 2.14. *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα Banach με μονάδα e. Τότε,*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(x) \neq \emptyset \tag{2.22}$$

για κάθε $x \in \mathcal{A}$.

Απόδειξη. Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι υπάρχει $x \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $\sigma_{\mathcal{A}}(x) = \emptyset$. Τότε,

$$\rho_{\mathcal{A}}(x) = \mathbb{C}. \tag{2.23}$$

Έστω $x \in \mathcal{A}$. Ορίζουμε $f : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ με

$$f(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}. \tag{2.24}$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $x^{-1} - y^{-1} = x^{-1}(y - x)y^{-1}$ γράφουμε

$$\begin{aligned} \frac{f(\lambda + h) - f(\lambda)}{h} &= \frac{((\lambda + h)e - x)^{-1} - (\lambda e - x)^{-1}}{h} \\ &= \frac{((\lambda + h)e - x)^{-1}(he)(\lambda e - x)^{-1}}{h} \\ &= ((\lambda + h)e - x)^{-1}(\lambda e - x)^{-1} \to (\lambda e - x)^{-2} \end{aligned}$$

καθώς το $h \to 0$. Συνεπώς, η f είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} = \rho_{\mathcal{A}}(x)$.

Υπολογίζουμε τώρα την f για «μεγάλα» λ. Αν $|\lambda| > \|x\|_{\mathcal{A}}$, από την Πρόταση 2.12 βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \|f(\lambda)\|_{\mathcal{A}} = \|(\lambda e - x)^{-1}\|_{\mathcal{A}} &\leqslant \frac{1}{|\lambda|(1 - \|x\|_{\mathcal{A}}/|\lambda|)} \\ &= \frac{1}{|\lambda| - \|x\|_{\mathcal{A}}} \to 0 \end{aligned}$$

όταν $|\lambda| \to \infty$.

Δηλαδή, η f είναι ακεραία και φραγμένη, άρα από το θεώρημα του Liouville η f είναι σταθερή και ίση με 0. Ειδικότερα, $f(0) = 0$, το οποίο μας δίνει $x^{-1} = 0$. Αυτό είναι άτοπο, αφού $xx^{-1} = e \neq 0$. □

Τώρα είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε το θεώρημα Gelfand-Mazur.

Θεώρημα 2.15. *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα Banach με μονάδα e, η οποία είναι επιπλέον σώμα. Τότε, η $\mathcal{A}$ είναι ισόμορφη με το $\mathbb{C}$. Επίσης, αν $\|e\|_{\mathcal{A}} = 1$ τότε η $\mathcal{A}$ είναι ισομετρικά ισόμορφη με το $\mathbb{C}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση $\theta : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ με $z \mapsto ze$. Προφανώς η θ είναι $1-1$. Έστω $a \in \mathcal{A}$. Από την Πρόταση 2.14 έχουμε $\sigma_{\mathcal{A}}(a) \neq \emptyset$, άρα υπάρχει $z \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $z \notin G(\mathcal{A})$. Αφού η $\mathcal{A}$ είναι σώμα, έχουμε $G(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \setminus \{0\}$. Έτσι, $ze = a$, δηλαδή $\theta(z) = a$. Αυτό αποδεικνύει ότι η θ είναι και επί.

Αν $\|e\|_{\mathcal{A}} = 1$ τότε

$$\|x\|_{\mathcal{A}} = \|ze\|_{\mathcal{A}} = |z| \cdot \|e\|_{\mathcal{A}} = |z| \tag{2.25}$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$. □

Το Θεώρημα 2.15 δημοσιεύτηκε πρώτα από τον Mazur, ο οποίος το απέδειξε για άλγεβρες πάνω από το σώμα των πραγματικών αριθμών, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Frobenius για πεπερασμένα σώματα. Η πρώτη απόδειξη για τη μιγαδική περίπτωση δόθηκε από τον Gelfand το 1941, στην εργασία του για τη θεωρία αλγεβρών Banach. Η απόδειξη που περιγράψαμε, που χρησιμοποιεί θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων, οφείλεται στον Arens.

2.1 Ιδεώδη και χώροι πηλίκο

Υπενθυμίζουμε ότι μια άλγεβρα είναι πάντα δακτύλιος. Οπότε, αυτά που θα οριστούν παρακάτω για δακτυλίους, ισχύουν και για άλγεβρες.

Ορισμός 2.16. (α) *Αριστερό ιδεώδες* I ενός δακτυλίου R είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του R με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in R$ και $y \in I$ ισχύει $yx \in I$. Αντίστοιχα ορίζουμε και το *δεξί ιδεώδες*.

(β) Λέμε ότι το I είναι *ιδεώδες* του R αν είναι και δεξί και αριστερό ιδεώδες.

(γ) Κάθε δακτύλιος R έχει δύο τετριμμένα ιδεώδη, τα $I = R$ και $I = \{0\}$. Κάθε μη-τετριμμένο ιδεώδες του R το λέμε *γνήσιο* ιδεωδες του R.

(δ) *Μεγιστικό* ιδεώδες του R λέμε ένα μη-τετριμμένο ιδεώδες I για το οποίο δεν υπάρχει κανένα γνήσιο ιδεώδες J το οποίο να περιέχει γνήσια το I.

Πρόταση 2.17. *Έστω R ένας δακτύλιος με μονάδα e, και έστω I ένα ιδεώδες του R. Αν το I περιέχει ένα αντιστρέψιμο στοιχείο, τότε $I = R$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in I$, αντιστρέψιμο. Τότε, υπάρχει το $x^{-1} \in R$, άρα $e = xx^{-1} \in I$. Αφού $e \in I$, για κάθε $y \in R$ ισχύει $y = ey \in I$. Έτσι, $I = R$. □

Πρόταση 2.18. *Κάθε γνήσιο ιδεώδες I ενός δακτυλίου R με μονάδα, περιέχεται σε ένα μεγιστικό ιδεώδες.*

Για την απόδειξη αυτής της πρότασης θα χρησιμοποιήσουμε το *λήμμα του Zorn*: Αν σε ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο, κάθε αλυσίδα (ολικά διατεταγμένο υποσύνολο) έχει άνω φράγμα στο S, τότε το S έχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό στοιχείο.

Απόδειξη της Πρότασης (2.18). Έστω R δακτύλιος με μονάδα e. Έστω S το σύνολο των γνησίων ιδεωδών του R που περιέχουν το I. Το S είναι μερικώς διατεταγμένο σύνολο με τη σχέση του περιέχεσθαι.

Ισχυριζόμαστε ότι κάθε αλυσίδα, δηλαδή κάθε ολικά διατεταγμένο υποσύνολο $\mathcal{U}$ του S, έχει άνω φράγμα στο S. Πράγματι, το

$$K_0 = \bigcup_{K \in \mathcal{U}} K \tag{2.26}$$

είναι ιδεώδες του R και μάλιστα γνήσιο, αφού $e \notin K_0$. Έτσι, $K_0 \in S$ και προφανώς είναι άνω φράγμα της $\mathcal{U}$. Από το λήμμα του Zorn, το S έχει μεγιστικό στοιχείο, έστω M. Το M είναι μεγιστικό ιδεώδες του R, αφού αν I' είναι ένα γνήσιο ιδεώδες του R με $M \subseteq I'$, τότε $I \subseteq I'$ και συνεπώς $I' \in S$. Εφόσον το ιδεώδες M είναι μεγιστικό στοιχείο του S, έχουμε $I' = M$. □

Η επόμενη πρόταση είναι πολύ χρήσιμη, καθώς δίνει ένα κριτήριο αντιστρεψιμότητας που θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη του θεωρήματος του Wiener.

Πρόταση 2.19. *Ένα στοιχείο x σε ένα μεταθετικό δακτύλιο R με μονάδα e είναι αντιστρέψιμο αν και μόνο αν το x δεν περιέχεται σε κανένα μεγιστικό ιδεώδες του R.*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) Έστω $x \in R$ αντιστρέψιμο, και έστω $x \in I$ για κάποιο ιδεώδες I του R. Θα δείξουμε ότι το I δεν είναι μεγιστικό. Πράγματι, από την Πρόταση 2.17 έχουμε $I = R$. Άρα, το I δεν είναι μεγιστικό.

($\Longleftarrow$) Έστω ότι το x δεν περιέχεται σε κανένα μεγιστικό ιδεώδες. Θεωρούμε το σύνολο

$$xR = \{xy : y \in R\}. \tag{2.27}$$

Προφανώς το xR είναι ιδεώδες του R. Από την Πρόταση 2.18 το ιδεώδες $I = xR$ περιέχεται σε κάποιο μεγιστικό ιδεώδες του R. Αυτό είναι άτοπο, αφού το x δεν περιέχεται σε κανένα μεγιστικό ιδεώδες.

Συνεπώς, $I = R$. Τώρα, αφού το I είναι «μεταθετικό» και $e \in R = I$, έχουμε ότι υπάρχει ένα στοιχείο $y \in I$ τέτοιο ώστε $xy = yx = e$. Άρα, $y = x^{-1}$, δηλαδή το x είναι αντιστρέψιμο. □

Στα επόμενα θεωρούμε γνωστό τον τρόπο με τον οποίο ορίζεται ο *δακτύλιος πηλίκο* R/I, όπου R είναι ένας δακτύλιος και I ένα ιδεώδες του R. Θυμίζουμε τις πράξεις με τις οποίες γίνεται δακτύλιος ο R/I:

- $(x+I)(y+I) = xy + I$.
- $(x+I) + (y+I) = (x+y) + I$.
- $a(x+I) = ax + I$.

Ορισμός 2.20. Ένα ιδεώδες I σε έναν δακτύλιο R λέγεται *κανονικό* αν υπάρχει ένα στοιχείο $y \in R$ ώστε

$$xy \equiv yx \equiv x \pmod{I}. \tag{2.28}$$

Αν υπάρχει τέτοιο στοιχείο, το λέμε *μονάδα* mod I.

Υπενθυμίζουμε ότι όλα τα παραπάνω ισχύουν και για άλγεβρες.

Πρόταση 2.21. *Έστω $\mathcal{A}$ μια νορμαρισμένη άλγεβρα. Τότε:*

(α) *Η κλειστή θήκη $\overline{I}$ ενός ιδεώδους I είναι ιδεώδες.*

(β) *Κάθε μεγιστικό ιδεώδες είναι κλειστό σύνολο.*

Απόδειξη. (α) Θα δείξουμε ότι αν $x \in \overline{I}$ τότε για κάθε $y \in \mathcal{A}$ έχουμε $yx = xy \in \overline{I}$ (με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι το $\overline{I}$ είναι γραμμικός υπόχωρος).

Έστω $x \in \overline{I}$ και έστω $y \in \mathcal{A}$ αυθαίρετο. Υπάρχει ακολουθία (x_n) στο I με $\|x_n - x\|_{\mathcal{A}} \to 0$. Τότε,

$$\|x_n y - xy\|_{\mathcal{A}} = \|(x_n - x)y\|_{\mathcal{A}} \leqslant \|x_n - x\|_{\mathcal{A}} \|y\|_{\mathcal{A}} \to 0. \tag{2.29}$$

Δηλαδή $x_n y \to xy$ όταν $n \to \infty$. Αφού $x_n y \in I$ συμπεραίνουμε ότι $xy \in \overline{I}$.

(β) Έστω ότι το I είναι μεγιστικό ιδεώδες. Από το (α) το $\overline{I}$ είναι ιδεώδες και περιέχει το I. Αφού το I είναι μεγιστικό, έχουμε $I = \overline{I}$, άρα το I είναι κλειστό σύνολο. □

Πρόταση 2.22. *Έστω $\mathcal{A}$ μια νορμαρισμένη άλγεβρα και I ένα μεγιστικό ιδεώδες της $\mathcal{A}$. Τότε, ο χώρος $\mathcal{A}/I$ είναι νορμαρισμένη άλγεβρα με τη νόρμα πηλίκο*

$$\|x + I\|_{\mathcal{A}/I} := \inf_{y \in x+I} \|y\|_{\mathcal{A}} = \inf\{\|x - i\| : i \in I\}. \tag{2.30}$$

Επίσης, αν η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα Banach, τότε η $\mathcal{A}/I$ είναι επίσης άλγεβρα Banach.

Απόδειξη. Θα ελέγξουμε τα αξιώματα της νόρμασ:

- Αν $x + I \in \mathcal{A}/I$ τότε προφανώς $\|x + I\|_{\mathcal{A}/I} \geqslant 0$ και ισχύει ισότητα αν και μόνο αν

  $$\inf\{\|x - i\| : i \in I\} = 0 \iff x \in \overline{I} = I \iff x + I = 0 + I. \tag{2.31}$$

  Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $I = \overline{I}$, αφού το I είναι μεγιστικό ιδεώδες.

- Έστω $x + I \in \mathcal{A}/I$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Τότε,

  $$\begin{aligned} \|\lambda(x+I)\|_{\mathcal{A}/I} &= \|\lambda x + I\|_{\mathcal{A}/I} = \inf\{\|\lambda x - i\| : i \in I\} \\ &= \inf\{\|\lambda x - \lambda i\| : i \in I\} = |\lambda| \cdot \inf\{\|x - i\| : i \in I\} \\ &= |\lambda| \cdot \|x + I\|_{\mathcal{A}/I}. \end{aligned}$$

- Έστω $x + I, y + I \in \mathcal{A}/I$. Τότε,

  $$\begin{aligned} \|(x+I) + (y+I)\|_{\mathcal{A}/I} &= \|(x+y) + I\|_{\mathcal{I}/I} \\ &= \inf\{\|x + y - i\| : i \in I\} = \inf\{\|x - i_1 + y - i_2\| : i_1, i_2 \in I\} \\ &\leqslant \inf\{\|x - i_1\| : i_1 \in I\} + \inf\{\|y - i_2\| : i_2 \in I\} \\ &= \|x + I\|_{\mathcal{A}/I} + \|y + I\|_{\mathcal{A}/I}. \end{aligned}$$

Αποδείξαμε έτσι ότι η $\|\cdot\|_{\mathcal{A}/I}$ είναι νόρμα.

Τώρα, θα δείξουμε ότι η $\mathcal{A}/I$ είναι *νορμαρισμένη άλγεβρα*. Πρέπει να δείξουμε ότι η $\|\cdot\|_{\mathcal{A}/I}$ είναι *υποπολλαπλασιαστική*: Έστω $x + I, y + I \in \mathcal{A}/I$. Τότε, από τον ορισμό της $\|\cdot\|_{\mathcal{A}/I}$ υπάρχουν $x' \in x + I$ και $y' \in y + I$ ώστε

$$\|x'\|_{\mathcal{A}} < \|x + I\|_{\mathcal{A}/I} + \varepsilon \quad \text{και} \quad \|y'\|_{\mathcal{A}} < \|y + I\|_{\mathcal{A}/I} + \varepsilon.$$

Αφού $x'y' \in xy + I = (x+I)(y+I)$, έχουμε

$$\begin{aligned}\|(x+I)(y+I)\|_{\mathcal{A}/I} &\leqslant \|x'y'\|_{\mathcal{A}} \leqslant \|x'\|_{\mathcal{A}}\|y'\|_{\mathcal{A}} \\ &< (\|x+I\|_{\mathcal{A}/I} + \varepsilon)(\|y+I\|_{\mathcal{A}/I} + \varepsilon).\end{aligned}$$

Έτσι, όταν $\varepsilon \to 0^+$, παίρνουμε το ζητούμενο.

Τέλος, αποδεικνύουμε την πληρότητα της $\mathcal{A}/I$. $\square$

Πρόταση 2.23. *Έστω I ένα μεγιστικό ιδεώδες σε μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ με $\|e\|_{\mathcal{A}} = 1$. Τότε το στοιχείο $e + I$ ικανοποιεί την*

$$\|e + I\|_{\mathcal{A}/I} = 1.$$

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathcal{A}$ ώστε $r_A(x) < 1$. Τότε το $(e - x)$ είναι αντιστρέψιμο, από την Πρόταση 2.12. Αλλά, ένα μεγιστικό ιδεώδες δεν περιέχει αντιστρέψιμα στοιχεία, άρα έχουμε

$$\|e + I\|_{\mathcal{A}/I} \geqslant 1.$$

Επίσης, $e \in e + I$, οπότε από τον ορισμό της $\|\cdot\|_{\mathcal{A}/I}$ έχουμε

$$\|e + I\|_{\mathcal{A}/I} \leqslant \|e\|_{\mathcal{A}} = 1.$$

Έτσι, $\|e + I\|_{\mathcal{A}/I} = 1$. $\square$

Συνεχίζουμε την ανάπτυξη της θεωρίας, θέλοντας να καταλήξουμε στις συνθήκες κάτω από τις οποίες η άλγεβρα Banach $\mathcal{A}/I$ είναι σώμα.

Πρόταση 2.24. *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα Banach με μονάδα e. Τότε, η $\mathcal{A}$ είναι σώμα αν και μόνο αν δεν υπάρχει μη-τετριμμένο γνήσιο ιδεώδες στην $\mathcal{A}$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η $\mathcal{A}$ είναι σώμα. Ξέρουμε ότι κάθε ιδεώδες σε ένα σώμα είναι τετριμμένο. Δηλαδή,

$$I = \mathcal{A} \quad \text{ή} \quad I = \{0\}.$$

Αντίστροφα, έστω ότι η $\mathcal{A}$ έχει μόνο τετριμμένα ιδεώδη. Επίσης, η $\mathcal{A}$ είναι ιδεώδες. Κάθε στοιχείο ενός ιδεώδους είναι της μορφής ra, $r, a \in \mathcal{A}$. Άρα, μπορούμε να βρούμε $x, y \in \mathcal{A}$ ώστε $xy = e$. Αυτό σημαίνει ότι $y = x^{-1}$. Το x ήταν τυχόν, άρα κάθε $x \in \mathcal{A}$ είναι αντιστρέψιμο. Άρα, η $\mathcal{A}$ είναι σώμα. $\square$

Πρόταση 2.25. *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα Banach και I ένα κανονικό και μεγιστικό ιδεώδες. Τότε, το $\mathcal{A}/I$ είναι σώμα.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει ένα μη-αντιστρέψιμο στοιχείο $x + I \in \mathcal{A}/I$. Τότε, το σύνολο

$$\mathcal{J} = \{xy + I : y + I \in \mathcal{A}/I\}$$

είναι ιδεώδες του $\mathcal{A}/I$.

Από τον ορισμό του $\mathcal{J}$ έχουμε $e + I \notin \mathcal{J}$ και $x + I \in \mathcal{J}$. Άρα, το $\mathcal{J}$ είναι μη-τετριμμένο και μη-κενό ιδεώδες του $\mathcal{A}/I$.

Αφού η αντίστροφη εικόνα ενός ιδεώδους μέσω ενός ομομορφισμού είναι ιδεώδες, υπάρχει ένα μη-τετριμμένο ιδεώδες που περιέχει το I ως γνήσιο υποσύνολο. Αυτό είναι άτοπο, αφού το I είναι μεγιστικό. Άρα, το $\mathcal{A}/I$ είναι σώμα. $\square$

Πρόταση 2.26. *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα Banach με μονάδα, και I ένα μεγιστικό ιδεώδες. Τότε, η $(\mathcal{A}/I, \|\cdot\|_{\mathcal{A}/I})$ είναι σομετρικά ισόμορφη με τους μιγαδικούς αριθμούς.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τις Προτάσεις **;;**, 2.24 και 2.25 συμπεραίνουμε ότι το $\mathcal{A}/I$ είναι σώμα και ότι $\|e + I\|_{\mathcal{A}/I} = 1$.

Τώρα, χρησιμοποιούμε το θεώρημα Gelfand-Mazur. □

2.2 Πολλαπλασιαστικά γραμμικά συναρτησοειδή

Ορισμός 2.27. Ένα γραμμικό συναρτησοειδές $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, όπου $\mathcal{A}$ είναι μια άλγεβρα Banach, λέγεται *πολλαπλασιαστικό* αν $\varphi \not\equiv 0$ και

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x)\varphi(y) \tag{2.32}$$

για κάθε $x, y \in \mathcal{A}$.

Έστω $\Delta(\mathcal{A})$ το σύνολο όλων των γραμμικών πολλαπλασιαστικών συναρτησοειδών που ορίζονται στην $\mathcal{A}$. Το σύνολο $\Delta(\mathcal{A})$ λέγεται *χώρος μεγιστικών ιδεωδών.*

Σημείωση. Είναι εύκολο να δει κνείς ότι, σε μια άλγεβρα Banach (με ή χωρίς μονάδα), κάθε γραμμικό πολλαπλασιαστικό συναρτησοειδές είναι συνεχής συνάρτηση.

Το επόμενο θεώρημα (το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη) είναι σημαντικό για την ανάπτυξη της θεωρίας.

Θεώρημα 2.28 (Gleason, Kahane, Zelasko)**.** *Έστω φ ένα γραμμικό συναρτησοειδές, ορισμένο σε μια άλγεβρα Banach $\mathcal{A}$ με μονάδα. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Το φ είναι πολλαπλασιαστικό.*

(β) *$\varphi(e) = 1$ και $\varphi(x) \neq 0$ για κάθε $x \in G(\mathcal{A})$.*

(γ) *$\varphi(x) \in \sigma_{\mathcal{A}}(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$.*

Πρόταση 2.29. *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα Banach με μονάδα e, και φ ένα γραμμικό πολλαπλασιαστικό συναρτησοειδές ορισμένο στην $\mathcal{A}$. Αν $x \in G(\mathcal{A})$ τότε*

$$\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}. \tag{2.33}$$

Απόδειξη. Αφού το φ είναι πολλαπλασιαστικό και $\varphi(e) = 1$, έχουμε

$$1 = \varphi(e) = \varphi(x \cdot x^{-1}) = \varphi(x)\varphi(x^{-1}). \tag{2.34}$$

Δηλαδή, $\varphi(x)\varphi(x^{-1}) = 1$. □

Ορισμός 2.30. Ως *πυρήνα* ενός $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$, όπου $\mathcal{A}$ είναι μια άλγεβρα Banach, ορίζουμε το σύνολο

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{x \in \mathcal{A} : \varphi(x) = 0\}. \tag{2.35}$$

Θα εξετάσουμε τώρα τη σχέση ανάμεσα στους πυρήνες των γραμμικών πολλαπλασιαστικών συναρτησοειδών και τα ιδεώδη σε μια άλγεβρα Banach.

Πρόταση 2.31. *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα Banach. Τότε:*

(α) *Ο πυρήνας ενός $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ είναι ιδεώδες της $\mathcal{A}$.*

(β) *Κάθε μεγιστικό ιδεώδες της $\mathcal{A}$ είναι πυρήνας κάποιου $\psi \in \Delta(\mathcal{A})$.*

Απόδειξη. (α) Το γεγονός ότι το φ είναι *γραμμικό* και *πολλαπλασιαστικό* μας οδηγεί εύκολα στο ότι το σύνολο $\mathrm{Ker}(\varphi)$ είναι ιδεώδες.

(β) Έστω I ένα μεγιστικό ιδεώδες της $\mathcal{A}$. Τότε, ο χώρος πηλίκο $\mathcal{A}/I$ είναι σώμα. Επίσης, ο $\mathcal{A}/I$ είναι άλγεβρα Βanαχη. Από το θεώρημα Gelfand-Mazur έχουμε

$$\mathcal{A}/I \simeq \mathbb{C}. \tag{2.36}$$

Ας ορίσουμε ω *αυτόν* τον ισομορφισμό και φ την φυσιολογική προβολή από την $\mathcal{A}$ στην $\mathcal{A}/I$. Αν $\psi = \omega \circ \varphi$, τότε $\psi \in \Delta(\mathcal{A})$ και $\mathrm{Ker}(\psi) = I$. □

Πρόταση 2.32. *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα e. Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ και $x \in \mathcal{A}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(x)$.

(β) $\varphi(x) = \lambda$ *για κάποιο* $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$.

Απόδειξη. (α) $\Longrightarrow$ (β) Έστω $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(x)$. Τότε, το $\lambda e - x$ *δεν* είναι αντιστρέψιμο. Ορίζουμε το σύνολο

$$I = \{(\lambda e - x)y : y \in \mathcal{A}\}. \tag{2.37}$$

Το I είναι γνήσιο ιδεώδες της $\mathcal{A}$ και περιέχεται σε ένα μεγιστικό ιδεώδες. Από την Πρόταση 2.31 υπάρχει $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ ώστε $\varphi(\lambda e - x) = 0$, δηλαδή

$$\lambda = \lambda\varphi(e) = \varphi(\lambda e) = \varphi(\lambda e - x) + \varphi(x) = \varphi(x). \tag{2.38}$$

(β) $\Longrightarrow$ (α) Έστω $\lambda \notin \sigma_{\mathcal{A}}(x)$. Τότε $\lambda \in \rho_{\mathcal{A}}(x)$ και το $\lambda e - x$ είναι αντιστρέψιμο. Δηλαδή, υπάρχει $y \in \mathcal{A}$ ώστε

$$(\lambda e - x)y = e. \tag{2.39}$$

Για κάθε $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ έχουμε $\varphi(\lambda e - x)\varphi(y) = 1$, άρα $\varphi(\lambda e - x) \neq 0$. Συνεπώς, $\varphi(x) \neq \lambda$, το οποίο είναι άτοπο. □

Πρόταση 2.33. *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach. Για κάθε $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ ισχύει*

$$|\varphi(x)| \leqslant r_{\mathcal{A}}(x), \qquad x \in \mathcal{A}. \tag{2.40}$$

Ειδικότερα, $\|\varphi\| \leqslant 1$ και $\|\varphi\| = 1$ αν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα.

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathcal{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| > r_{\mathcal{A}}(x)$. Τότε, $r_{\mathcal{A}}(x/\lambda) < 1$. Δηλαδή, το $\lambda e - x = \lambda\left(e - \frac{x}{\lambda}\right)$ είναι αντιστρέψιμο. Από το θεώρημα Gleason-Kahane-Zelasko έχουμε $\varphi(x) \in \sigma_{\mathcal{A}}(x)$, άρα $\varphi(x) \neq \lambda$.

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| > r_{\mathcal{A}}(x)$, συμπεραίνουμε ότι

$$|\varphi(x)| \leqslant r_{\mathcal{A}}(x). \tag{2.41}$$

Επίσης,

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|_{\mathcal{A}} \leqslant 1} |\varphi(x)| \leqslant \sup_{\|x\|_{\mathcal{A}} \leqslant 1} r_{\mathcal{A}}(x) \leqslant 1, \tag{2.42}$$

(διότι, γενικά, $r_{\mathcal{A}}(x) \leqslant \|x\|$).

Το γεγονός ότι $\varphi(e) = 1$ δίνει τον τελευταίο ισχυρισμό ($\|\varphi\| = 1$) αν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα. □

Σχόλια 2.34. Δεν δώσαμε την απόδειξη του θεωρήματος Gleason-Kahane-Zelasko, καθώς είναι αρκετά μακροσκελής. Παρόλα αυτά, είναι ένα πολύ σημαντικό θεώρημα και αξίζει να το σχολιάσουμε. Η αυθεντική απόδειξη χρησιμοποιεί αναλυτικές μεθόδους, και συγκεκριμένα το θεώρημα Hadamard από την μιγαδική ανάλυση. Αργότερα, οι Kahane και Zelasko έδωσαν μια εναλλακτική απόδειξη που βασίζεται στην θεωρία μέτρου. Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η απόδειξη των Roitman-Sternfeld, οι οποίοι χρησιμοποιούν καθαρά αγεβρικές ιδέες (το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας). Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι το θεώρημα αυτό ισχύει μόνο για μιγαδικές άλγεβρες, όχι για πραγματικές. Λύση σε αυτό το πρόβλημα έδωσε ο Kulkarni με την επιπλέον υπόθεση ότι το σσύνολο $\sigma_{\mathcal{A}}(x)$ είναι φραγμένο για κάθε $x \in \mathcal{A}$.

3 Η άλγεβρα Banach $\mathcal{A}(\mathbb{T}^d)$ και η απόδειξη του Gelfand

Εμείς, για την απόδειξη του θεωρήματος του Wiener ενδιαφερόμαστε για μια συγκεκριμένη άλγεβρα Banach.

Ορίζουμε ως $\mathcal{A}(\mathbb{T}^d)$ το σύνολο των $\mathbb{Z}^d$-περιοδικών συναρτήσεων, ορισμένων στον $\mathbb{R}^d$, οι οποίες έχουν απολύτως συγκλίνουσες σειρές Fourier.

Δηλαδή: Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ συνάρτηση $\mathbb{Z}^d$-περιοδική, ώστε

$$f(x+k) = f(x) \text{ για κάθε } k \in \mathbb{Z}^d. \tag{3.1}$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η f είναι ορισμένη στον d-διάστατο κύβο $[0,1]^d$ ή στον $\mathbb{T}^d$.

Ο n-οστός συντελεστής Fourier της f ορίζεται ως εξής:

$$\widehat{f}(n) = \int_{[0,1]^d} f(x) e^{-2\pi i \langle n,x\rangle} dx, \tag{3.2}$$

όπου $\langle n,x\rangle = \sum_{i=1}^d n_i x_i$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^d$.

Η συνάρτηση f μπορεί να εκφραστεί από την σειρά Fourier τησ:

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(n) e^{2\pi i\langle n,x\rangle}. \tag{3.3}$$

Αν $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(n)| < \infty$, τότε η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως. Οπότε βλέπουμε ότι ισχύει:

$$f \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^d) \iff (\widehat{f}(n))_n \in \ell_1(\mathbb{Z}^d). \tag{3.4}$$

• Ο πρώτος στόχος μας είναι να δείξουμε ότι η άλγεβρα $\mathcal{A}(\mathbb{T}^d)$ με μια κατάλληλη νόρμα γίνεται Banach άλγεβρα και μάλιστα μεταθετική ως προς τον κατά σημείο πολλαπλασιασμό.

Ορίζουμε τη **νόρμα του Wiener**:

$$\|f\|_{\mathcal{A}(\mathbb{T}^d} := \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(n). \tag{3.5}$$

Ας εξτάσουμε την υποπολλαπλασιαστικότητα της νόρμας αυτής. Πρώτα ας δούμε τι παίρνουμε από τον κατά σημείο πολλαπλασιασμό δύο στοιχείων της $\mathcal{A}(\mathbb{T}^d)$. Έστω

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(k) e^{2\pi i\langle k,x\rangle}, \quad g = \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \widehat{g}(m) e^{2\pi i\langle m,x\rangle}. \tag{3.6}$$

Τότε,

$$\begin{aligned} f \cdot g &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}(k) e^{2\pi i \langle k, x \rangle} \right) \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \widehat{g}(m) e^{2\pi i \langle m, x \rangle} \right) \\ &= \sum_{k, m \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}(k) \widehat{g}(m) e^{2\pi i \langle k+m, x \rangle} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}(k) \widehat{g}(n-k) e^{2\pi i \langle n, x \rangle} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} (\widehat{f} * \widehat{g})(n) e^{2\pi i \langle n, x \rangle}, \end{aligned}$$

όπου $*$ η συνέλιξη (η εναλλαγή των αθροισμάτων είναι επιτρεπτή, αφού $\sum |\widehat{f}(k)| < \infty$ και $\sum |\widehat{g}(m)| < \infty$).

Παίρνουμε τώρα νόρμεσ:

$$\begin{aligned} \|fg\|_{\mathcal{A}(\mathbb{T}^d)} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |(\widehat{f} * \widehat{g})(n)| = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}(k) \widehat{g}(n-k) \right| \\ &\leqslant \sum_{k, n \in \mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(n)| \cdot |\widehat{g}(n-k)| = \|f\|_{\mathcal{A}(\mathbb{T}^d)} \|g\|_{\mathcal{A}(\mathbb{T}^d)}, \end{aligned}$$

οπότε η νόρμα του Wiener είναι *υποπολλαπλασιαστική*.

Είσης, εύκολα βγαίνει ότι $fg = gf$. Η μονάδα στην $\mathcal{A}(\mathbb{T}^d)$ είναι η σταθερή συνάρτηση $\varphi \equiv 1$. Τέλος, δείχνουμε ότι ο $(\mathcal{A}(\mathbb{T}^d), \|\cdot\|_{\mathcal{A}(\mathbb{T}d)})$ είναι πλήρης.

Άρα, δείξαμε ότι η $\mathcal{A}(\mathbb{T}^d)$ είναι μια μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα (ως προς των κατά σημείο πολλαπλασιασμό).

• Αφού δείξαμε ότι η $\mathcal{A}(\mathbb{T}^d)$ είναι άλγεβρα Banach, δεύτερος σκοπός μας είναι να εξετάσουμε τον χώρο μεγιστικών ιδεωδών $\Delta(\mathcal{A}(\mathbb{T}^d))$, δηλαδή τον χώρο των γραμμικών πολλαπλασιαστικών συναρτησοειδών που ορίζονται στην $\mathcal{A}(\mathbb{T}^d)$.

Έστω φ ένα γραμμικό πολλαπλασιαστικό συναρτησοειδές $\varphi : \mathcal{A}(\mathbb{T}^d) \to \mathbb{C}$. Για κάθε $f \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^d)$ έχουμε

$$\varphi(f) = \varphi \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}(n) e^{2\pi i \langle n, x \rangle} \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \widehat{f}(n) \varphi \left(e^{2\pi i \langle n, x \rangle} \right). \tag{3.7}$$

Από την Πρόταση 2.28 και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\|e^{2\pi i \langle n, x \rangle}\|_{\mathcal{A}(\mathbb{T}^d)} = 1 \tag{3.8}$$

για κάθε $x \in \mathbb{T}^d$, παίρνουμε

$$\left| \varphi \left(e^{2\pi i \langle n, x \rangle} \right) \right| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|e^{2\pi i \langle n, x \rangle}\|_{\mathcal{A}(\mathbb{T}^d)} = 1 \tag{3.9}$$

και

$$\left|\varphi\left(e^{-2\pi i\langle n,x\rangle}\right)\right| \leqslant \|\varphi\|\cdot\|e^{-2\pi i\langle n,x\rangle}\|_{\mathcal{A}(\mathbb{T}^d)} = 1. \tag{3.10}$$

Όμως, $\varphi(\mathbf{1}_{\mathcal{A}(\mathbb{T}^d)}) = 1$ και το φ είναι πολλαπλασιαστικό, οπότε έχουμε

$$1 = |\varphi(e^{2\pi i\langle n,x\rangle}e^{-2\pi i\langle n,x\rangle})| = |\varphi(e^{2\pi i\langle n,x\rangle})|\cdot|\varphi(e^{-2\pi i\langle n,x\rangle})| \leqslant 1, \tag{3.11}$$

άρα

$$|\varphi(e^{2\pi i\langle n,x\rangle})| = 1. \tag{3.12}$$

Έτσι, υπάρχει κάποιο $\lambda \in \mathbb{T}^d$ ώστε $\varphi(e^{2\pi i\langle n,x\rangle}) = e^{2\pi i\langle n,\lambda\rangle}$, και η σχέση (3.7) γίνεται

$$\varphi(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\widehat{f}(n)e^{2\pi i\langle n,\lambda\rangle} = f(\lambda). \tag{3.13}$$

Συνεπώς καταλήγουμε στο ότι, αν φ είναι γραμμικό πολλαπλασιαστικό συναρτησοειδές ορισμένο στην $\mathcal{A}(\mathbb{T}^d)$ τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{T}^d$ ώστε

$$\varphi(f) = f(\lambda) \tag{3.14}$$

για κάθε $f \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^d)$.

Τώρα, από την Πρόταση 2.31 ξέρουμε ότι κάθε μεγιστικό ιδεώδες της $\mathcal{A}(\mathbb{T}^d)$ είναι ο πυρήνας ενός $\varphi \in \Delta(\mathcal{A}(\mathbb{T}^d))$, βλέπουμε ότι *κάθε μεγιστικό ιδεώδες της $\mathcal{A}(\mathbb{T}^d)$ συμπίπτει με τις μηδενικές συναρτήσεις του $\mathbb{T}^d$*.

Είμαστε έτσι έτοιμοι να αποδείξουμε το θεώρημα του Wiener:

Θεώρημα 3.1 (Wiener)**.** *Αν $f \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^d)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{T}^d$ τότε $\frac{1}{f} \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^d)$.*

Απόδειξη. Αφού $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{T}^d$, έχουμε ότι η f δεν ανήκει σε κανένα μεγιστικό ιδεώδες της $\mathcal{A}(\mathbb{T}^d)$ και από την Πρόταση 2.19 έχουμε ότι η f είναι αντιστρέψιμη, δηλαδή $\frac{1}{f} \in \mathcal{A}(\mathbb{T}^d)$. □

4 Η απόδειξη του Newmann

Η απόδειξη αυτή του θεωρήματος του Wiener δόθηκε από τον D. Newmann το 1975 και χρησιμοποιεί στοιχειώδεις μεθόδους της ανάλυσης. Σε αντίθεση με πριν, τώρα θα δουλέψουμε στη μία διάσταση.

Μια $\mathbb{Z}$-περιοδική συνάρτηση μπορούμε να την θεωρούμε ορισμένη στο $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Έστω $\mathcal{A}(\mathbb{T})$ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται στο $\mathbb{T}$ και έχουν απολύτως συγκλίνουσα σειρά Fourier.

Θεωρούμε τη νόρμα του Wiener:

$$\|f\|_{\mathcal{A}(\mathbb{T})} := \sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(n)|, \qquad f \in \mathcal{A}(\mathbb{T}). \tag{4.1}$$

Έστω $f \in \mathcal{A}(\mathbb{T})$. Τότε $\overline{f} \in \mathcal{A}(\mathbb{T})$. Αφού $\frac{1}{f} = \frac{\overline{f}}{|f|^2}$ αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{1}{|f|^2} \in \mathcal{A}(\mathbb{T})$. Έτσι, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε να αποδείξουμε το θεώρημα υποθέτοντας ότι $f > 0$

(ονομάζοντας την $|f|^2$ πάλι f). Επιπλέον, με κανονικοποίηση, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 < f \leqslant 1$ στο $\mathbb{T}$.

Ορίζουμε τώρα $g = 1 - f$. Αφού $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{T}$, έχουμε ότι η f είναι αντιστρέψιμη στον $C(\mathbb{T})$. Πράγματι, χρησιμοποιώντας την πληρότητα του $C(\mathbb{T})$ παρατηρούμε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty}(g(z))^n = \frac{1}{1-g(z)} = \frac{1}{f(z)} \in C(\mathbb{T}). \tag{4.2}$$

Εμείς θέλουμε να δείξουμε ότι η σειρά (4.2) συγκλίνει στην $\mathcal{A}(\mathbb{T})$.

Θεωρούμε τη σειρά Fourier

$$g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(n) e^{2\pi i n z}. \tag{4.3}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Διαλέγουμε $N \in \mathbb{N}$ τόσο μεγάλο ώστε

$$\sum_{|n|>N} |\widehat{g}(n)| < \varepsilon. \tag{4.4}$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $p(z)$ ως εξής:

$$p(z) = \sum_{|n|\leqslant N} \widehat{g}(n) e^{2\pi i n z}. \tag{4.5}$$

Τότε, για κατάλληλα μεγάλο N, έχουμε

$$\|g - p\|_{\mathcal{A}(\mathbb{T})} < \varepsilon. \tag{4.6}$$

Έτσι έχουμε την προσέγγιση $g(z) = p(z) + r(z)$ για κάποια συνάρτηση r με $\|r\|_{\mathcal{A}(\mathbb{T})} < \varepsilon$.

Από το διωνυμικό θεώρημα έχουμε

$$\begin{aligned}
\|g^n\|_{\mathcal{A}(\mathbb{T})} = \|(p+r)^n\|_{\mathcal{A}(\mathbb{T})} &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \|p\|^k_{\mathcal{A}(\mathbb{T})} \cdot \|r\|^{n-k}_{\mathcal{A}(\mathbb{T})} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \|p\|^k_{\mathcal{A}(\mathbb{T})} \cdot \varepsilon^{n-k} \\
&= (\|p\|_{\mathcal{A}(\mathbb{T})} + \varepsilon)^n \leqslant (\|g\|_{\mathcal{A}(\mathbb{T})} + 2\varepsilon)^n \\
&= (\|1-f\|_{\mathcal{A}(\mathbb{T})} + 2\varepsilon)^n \leqslant (1 - \delta + 2\varepsilon)^n,
\end{aligned}$$

όπου

$$\delta := \inf_{z\in\mathbb{T}} |f(z)| > 0. \tag{4.7}$$

Με κατάλληλη επιλογή του ε μπορούμε να πετύχουμε $(1-\delta+2\varepsilon) < 1$, και τότε η σειρά (4.2) συγκλίνει ως προς την $\|\cdot\|_{\mathcal{A}(\mathbb{T})}$ και έτσι συμπεραίνουμε ότι $\frac{1}{f} \in \mathcal{A}(\mathbb{T})$.