Η ιδιάζουσα συνάρτηση $?(x)$ του Minkowski

Μυρσίνη Βολιώτη

1 Εισαγωγή

Η συνάρτηση με τον ενδιαφέροντα συμβολισμό $?(x)$ παρουσιάστηκε αρχικά από τον Hermann Minkowski κατά τη διάρκεια της διεξαγωγής του τρίτου Διεθνούς Συνεδρίου Μαθηματικών (ICM) το 1904 στην Χαϊδελβέργη. Εκείνον τον καιρό, μεταξύ άλλων, ο Minkowski εργαζόταν πάνω στην εφαρμογή ορισμένων αποτελεσμάτων της θεωρίας κυρτών σωμάτων και της έννοιας του μοναδιαίου πλέγματος πάνω στον κλάδο της θεωρίας αριθμών.

Όπως αναφέρει ο ίδιος ο Minkowski στην ομιλία του στο συνέδριο, ονόμασε αυτήν την περιοχή της μελέτης του “Geometrie der Zahlen" (Η Γεωμετρία των αριθμών) έργο το οποίο δημοσιεύτηκε ολοκληρωμένο το 1910. Έτσι το ομώνυμο άρθρο που παρουσίασε στο ICM περιλαμβάνει μια σειρά από σημαντικά αποτελέσματα που αφορούν κυρτά σώματα και αλγεβρικούς αριθμούς.

Σε αυτό το πλαίσιο η συνάρτηση $?(x)$ που θα μελετήσουμε ορίστηκε με σκοπό τη δημιουργία άλλης μιας ικανής συνθήκης, πέρα από το θεώρημα του Langrange, ώστε να αποφανθούμε πότε ένας αριθμός είναι άρρητος τετραγωνικός αλγεβρικός αριθμός. Ο Minkowski προϋποθέτει τη συνέχεια της $?(x)$ σε ολόκληρο το $(0,1)$, αλλά δεν ασχολείται περισσότερο με την ιδιότητα αυτή. Η συνεχής επέκτασή της και το γεγονός ότι είναι ιδιάζουσα συνάρτηση, έχει δηλαδή μηδενική παράγωγο σχεδόν παντού, μελετήθηκαν αργότερα από τον A. Denjoy και τον R. Salem, όπως θα δούμε αναλυτικά.

Στη συνέχεια άλλοι νεώτεροι μαθηματικοί μελέτησαν διάφορες ενδιαφέρουσες ιδιότητες της συνάρτησης και όρισαν ευρύτερες κλάσεις ιδιαζουσών συναρτήσεων. Θα αναφέρουμε συνοπτικά τα βασικά αποτελέσματα της εργασίας τους. Ας δούμε όμως πώς ορίστηκε αρχικά η συνάρτηση από τον ίδιο τον Minkowski, παραθέτοντας απόσπασμα από το πρωτότυπο κείμενο “Zur Geometrie der Zahlen".

2 Ορισμός της συνάρτησης $?(x)$ από τον H. Minkowski

Θα χρειαστούμε αρχικά τους ορισμούς κάποιων εννοιών που χρησιμοποιεί ο H. Minkowski στο άρθρο του.

Ορισμός 2.1. (α) Ονομάζουμε *τετραγωνικό άρρητο αλγεβρικό αριθμό*, μία άρρητη ρίζα ενός πολυωνύμου δευτέρου βαθμού με ακέραιους συντελεστές . Ένας τέτοιος αριθμός θα είναι της μορφής $x = \frac{a+d\sqrt{b}}{c}$, όπου a, c, d, ακέραιοι και ο b είναι σταθερός θετικός ακέραιος, όχι όμως τέλειο τετράγωνο.
(β) Αντίστοιχα, ένας *κυβικός άρρητος αλγεβρικός αριθμός* είναι ρίζα ενός πολυωνύμου τρίτου βαθμού με ακέραιους συντελεστές.

Ορισμός 2.2. (α) Ο αριθμός

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

ή αλλιώς $x = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$ με a_0 μη αρνητικό ακέραιο αριθμό και τα υπόλοιπα a_i να είναι θετικοί ακέραιοι, ονομάζεται *κανονικό συνεχές κλάσμα*. Θα αναφερόμαστε στα παρακάτω σε συνεχή κλάσματα, εννοώντας ότι είναι κανονικά.

(β) Ένα συνεχές κλάσμα ονομάζεται *πεπερασμένο* εάν $x = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, ενώ ονομάζεται *άπειρο* εάν δεν είναι πεπερασμένο.

(γ) Ένα άπειρο συνεχές κλάσμα ονομάζεται *περιοδικό* εάν

$$\begin{aligned} x &= [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+h}, a_{n+1}, \ldots, a_{n+h}, \ldots] \\ &= [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \overline{a_{n+1}, \ldots, a_{n+h}}]. \end{aligned}$$

Επίσης θα ονομάζουμε *αναγώγημα k-τάξης* του $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$ το συνεχές κλάσμα

$$x = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k]$$

όπου k είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος μικρότερος ή ίσος του n.

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα για τους πραγματικούς αριθμούς:

Θεώρημα 2.3. (α) *Κάθε απλό, πεπερασμένο συνεχές κλάσμα αναπαριστά έναν ρητό αριθμό. Αντίστροφα, κάθε ρητός αριθμός μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα απλό, πεπερασμένο συνεχές κλάσμα.*

(β) (Langrange) *Ένας αριθμός είναι τετραγωνικός άρρητος αλγεβρικός αριθμός αν και μόνο αν αναπαρίσταται με ένα περιοδικό συνεχές κλάσμα.*

Τέλος χρειαζόμαστε έναν ακόμα ορισμό για την κατανόηση της κατασκευής της $?(x)$ αλλά και για όσα θα ακολουθήσουν έπειτα:

Ορισμός 2.4 (κλάσματα τύπου Farey)**.** Κατασκευάζουμε την εξής αρίθμηση των ρητών του $(0, 1)$: Στο πρώτο βήμα εισάγουμε τα άκρα του διαστήματος $0/1$ και $1/1$. Στο δεύτερο βήμα εισάγουμε τον αριθμό $1/2$, τον οποίο ονομάζουμε Farey-μέσο των $0/1$ και $1/1$. Στο τρίτο βήμα εισάγουμε τους $1/3$ και $2/3$ και ταξινομούμε τους αριθμούς με αύξουσα σειρά. Συνεχίζοντας κατά τον ίδιο τρόπο μετά το n-στο βήμα θα έχουμε απαριθμίσει όλα τα ανάγωγα κλάσματα με παρονομαστή το πολύ n. Δηλαδή εάν τα a/b και c/d είναι δύο διαδοχικά κλάσματα που υπάρχουν στο $(n-1)$-στο βήμα, τότε στο n-στο θα εισάγουμε τον Farey-μέσο $a + c/b + d$ αν και μόνο αν $b + d = n$. Αποδεικνύεται επαγωγικά ότι μπορούμε να παράξουμε κατ' αυτόν τον τρόπο όλους τους ρητούς του $(0, 1)$, τους οποίους τότε θα ονομάζουμε κλάσματα τύπου Farey.

Παραθέτουμε τώρα τη μετάφραση αποσπάσματος από το Zur Geometrie der Zahlen από την σελίδα 171 (προτελευταία παράγραφο) έως την σελίδα 173.

Α΄ μέρος

... Τέλος θα ήθελα να προσθέσω κάποια στοιχεία αναφορικά με τα θεωρήματα που αφορούν τους αλγεβρικούς αριθμούς.

(Σχ. 7) Μέσα από αυτό το γράφημα επιδιώκω να αναδείξω μια νέα πτυχή του γνωστού θεωρήματος του Langrange που αποτελεί κριτήριο για τους πραγματικούς τετραγωνικούς άρρητους αλγεβρικούς αριθμούς.

Σε τετράγωνο πλευράς μήκους 1 υποδιπλασιάζουμε κατ' επανάληψη τα διαστήματα πάνω στην κάθετη εδώ αριστερή πλευρά, τον άξονα y, έτσι ώστε διαδοχικά να σχηματίσουμε όλα τα σημεία τα οποία έχουν ως τεταγμένη έναν αμιγώς δυαδικό αριθμό, δηλαδή ένα ρητό αριθμό με παρονομαστή κάποια δύναμη του 2.

Σε κάθε διάστημα ή σημείο που εμφανίζεται στον άξονα y, αντιστοιχίζεται τώρα πάνω στον άξονα x, δηλαδή την κάτω οριζόντια πλευρά, ένα διάστημα ή ένα σημείο, έτσι ώστε αρχικά, στα άκρα $y = 0$ και $y = 1$ να αντιστοιχίζονται οι τιμές $x = 0$ και $x = 1$.

Στη συνέχεια, κάθε φορά που υποδιπλασιάζουμε εκεί ένα διάστημα, εισάγουμε εδώ ένα νέο σημείο $x = (a + a')/(b + b')$ ανάμεσα στα άκρα $a/b, a'/b'$ του διαστήματος (του άξονα x) το οποίο είχαμε αντιστοιχίσει προηγουμένως (σε διάστημα του άξονα y), θεωρώντας ότι οι a, b και a', b' είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Κατ' αυτόν τον τρόπο εμφανίζονται διαδοχικά στην οριζόντια πλευρά όλα τα σημεία με ρητή τετμημένη και η αντιστοίχιση των ταυτοχρόνως κατασκευασμένων τετμημένων και τεταγμένων μας προσφέρει την εικόνα μιας γνησίως αύξουσας συνάρτησης $y = ?(x)$, αρχικά οριζόμενη για όλους τους ρητούς x, και κατόπιν, προϋποθέτοντας την συνέχεια της συνάρτησης, επεκτεινόμενη για κάθε πραγματική μεταβλητή στο διάστημα $0 \leqslant x \leqslant 1$, ενώ ταυτοχρόνως το y διατρέχει ολόκληρο αυτό το διάστημα.

Εάν τώρα το x είναι ένας τετραγωνικός άρρητος αλγεβρικός αριθμός, θα οδηγεί σε μια περιοδική αναπαράσταση συνεχούς κλάσματος, κι άρα στην τιμή $y = ?(x)$ θα αντιστοιχεί ένα περιοδικό δυαδικό ανάπτυγμα, οπότε ο y αποδεικνύεται ρητός. Ως εκ τούτου λαμβάνουμε τις εξής δύο προτάσεις:

Εάν το x είναι ένας τετραγωνικός άρρητος τότε το y είναι ρητός αλλά όχι αμιγώς δυαδικός. Εάν το x είναι ρητός τότε το y είναι αμιγώς δυαδικός. Αυτές οι προτάσεις είναι απόλυτα αντιστρέψιμες.

(Το γράφημα της επέκτασης της συνάρτησης $?(x)$ στο διάστημα $(0, 1)$.)

(Β′ μέρος)

(Σχ. 8) Το τελευταίο γράφημα καταδεικνύει μια γενίκευση αυτών των προτάσεων όσον αφορά τους κυβικούς άρρητους αλγεβρικούς αριθμούς, την οποία ανέπτυξε στη διατριβή του ο κος Louis Kollros (Ζυρίχη 1904):

Αφενός, μετασχηματίζουμε εδώ ένα τετράγωνο, στο οποίο τα ξ, η κυμαίνονται ανάμεσα στα σημεία 0 και 1, αρχικά με τέτοιο τρόπο, ώστε να διαχωρίζεται μέσω της διαγωνίου σε δύο ορθογώνια ισοσκελή τρίγωνα. Στη συνέχεια αναλύουμε καθένα από τα προηγουμένως σχηματιζόμενα τρίγωνα σε δύο άλλα ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα ενώνοντας την κορυφή με το μέσο της υποτείνουσας.

Αφετέρου, αναλύουμε ταυτοχρόνως ένα άλλο τετράγωνο, στο οποίο τα x και y λαμβάνουν τιμές ανάμεσα στο 0 και 1, μέσω μιας ορισμένης διαδοχικής διαδικασίας αντιστοίχισης, σε επιμέρους τρίγωνα: αρχικά αντιστοιχίζουμε τις τέσσερις κορυφές του τετραγώνου μία προς μία στις κορυφές του αρχικού μας τετραγώνου που έχουν ίδιες συντεταγμένες. Στη συνέχεια αντιστοιχίζουμε την ευθεία $x = y$ στην ευθεία $\xi = \eta$ κι ακολούθως κάθε φορά που υποδιπλασιάζεται εκεί η υποτείνουσα, κι άρα δημιουργείται μια ευθύγραμμη σύνδεση, εισάγουμε εδώ ένα νέο ενδιάμεσο σημείο με συντεταγμένες $x = (a + a')/(c + c')$ και $y = (b + b')/(c + c')$ ανάμεσα στα άκρα $a/c, b/c$ και $a'/c', b'/c'$ του τμήματος πού είχαμε προηγουμένως αντιστοιχίσει, όπου τα a, b, c και a', b', c' είναι σχετικά πρώτοι αριθμοί. Κατόπιν, ενώνουμε, λαμβάνοντας το αντίστοιχο ευθύγραμμο τμήμα.

Ως εκ τούτου καθορίζονται δύο σαφώς αντιστρέψιμες σχέσεις, αρχικά για τους ρητούς x, y και τους δυαδικούς ξ, η και κατόπιν, προϋποθέτοντας την συνέχεια της συνάρτησης, για οποιαδήποτε μεταβλητή και τιμή της συνάρτησης ανάμεσα στα 0 και 1. Σ' αυτό το σημείο ισχυρίζεται ο Kollros ότι ισχύουν οι επόμενες δύο προτάσεις, οι οποίες βέβαια δεν έχουν αποδειχθεί ουσιαστικά πέρα από ένα σημείο, η ορθότητα των οποίων όμως φαντάζει σε μεγάλο βαθμό εύλογη μελετώντας μία σειρά από παραδείγματα:

Εάν οι $1, x, y$ είναι τρεις ανεξάρτητοι αριθμοί ενός πραγματικού κυβικού σώματος (αλγεβρικού σώματος βαθμού 3) τότε οι ξ, η θα είναι ρητοί και καμία από τις τιμές $\xi, \eta, \xi - \eta, \xi + \eta$ δεν θα είναι αμιγώς δυαδικός αριθμός. Εάν οι x, y ανήκουν σε ένα τετραγωνικό σώμα και δεν είναι κι οι δύο ρητοί αριθμοί, τότε οι ξ, η είναι ρητοί και μία εκ των τιμών $\xi, \eta, \xi - \eta, \xi + \eta$ θα είναι ένας αμιγώς δυαδικός αριθμός. Στην περίπτωση που οι x, y είναι κι οι δύο ρητοί τότε οι ξ, η θα είναι αμιγώς δυαδικοί. Αυτές οι προτάσεις είναι απολύτως αντιστρέψιμες.

Θεωρώντας τώρα ότι $y = x^2$ λαμβάνουμε ένα ολοκληρωμένο επιχείρημα (ακρ.μετάφραση: πλήρες κριτήριο) για το ότι ο x αποτελεί κυβικό άρρητο αλγεβρικό αριθμό. Πρέπει να τονιστεί ιδιαιτέρως, ότι τα παραπάνω φαίνεται να ισχύουν για κάθε κυβικό αλγεβρικό σώμα κι όχι μόνο για εκείνα με αρνητική διακρίνουσα, στα οποία υπάρχει μοναδικός γεννήτορας της ομάδας των αντιστρέψιμων στοιχείων του δακτύλιου ακεραίων του σώματος.

Παρατηρήσεις 2.5. (α) Όπως αναφέρει ο R. Conley στο [2] το γράφημα 7 το οποίο παρουσιάζει ο Minkowski στη διάλεξή του αποτελείται από 30 ζευγάρια τιμών. Το γράφημα που παραθέσαμε εμείς αφορά την επέκταση της συνάρτησης για κάθε πραγματικό αριθμό του $(0, 1)$.

(β) Το δεύτερο μέρος περιγράφει την ιδέα της γενίκευσης της συνάρτησης σε δύο διαστάσεις. Όπως θα δούμε αργότερα αυτή η ιδέα κι η εργασία του Louis Kollros ενέπνευσαν τους Beaver και Garrity [9] να εργαστούν πάνω σε ένα άλυτο πρόβλημα του Charles Hermite.

Στη συνέχεια θα δούμε πώς ο A. Denjoy και ο R. Salem επεκτείνουν την συνάρτηση του Minkowski σε ολόκληρο το $(0, 1)$ δίνοντας τον τύπο

$$?(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{(a_1+\cdots+a_k)-1}} \qquad \text{όπου } \; x = [0, a_1, a_2, \ldots], \tag{2.1}$$

ενώ στη συνέχεια αποδεικνύουν ότι είναι ιδιάζουσα συνάρτηση. Αν και το άρθρο του Denjoy, *Sur quelques points de la theorie des fonctions* προηγείται χρονικά (1932), παραθέτουμε πρώτα μεταφρασμένο ολόκληρο το άρθρο του R. Salem, *On some singular monotonic functions which are strictly increasing*. Σε αυτό, με πολύ ωραίο και εύληπτο τρόπο αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητες της συνάρτησης, αφού πρώτα παρουσιαστούν ανάλογα αποτελέσματα για μία ευρύτερη κλάση ιδιαζουσών συναρτήσεων. Ακολουθεί το άρθρο του Salem.

3 Salem: *On some singular monotonic functions which are strictly increasing*

Μια αύξουσα συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$, η οποία είναι γνησίως ιδιάζουσα, δηλαδή έχει την ιδιότητα

$$f'(x) = 0$$

σχεδόν παντού, μπορεί να είναι σταθερή σε κάθε διάστημα που περιέχεται στο συμπλήρωμα ενός τέλειου συνόλου που έχει μηδενικό μέτρο. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι η f είναι «τύπου Cantor». Υπάρχουν όμως αύξουσες και συνεχείς, γνησίως ιδιάζουσες, συναρτήσεις οι οποίες είναι γνησίως αύξουσεσ: δηλαδή, $f(x) < f(y)$ αν $x < y$.

Ενώ η ύπαρξη συναρτήσεων τύπου Cantor είναι διαισθητικά σχεδόν αποδεκτή, με την έννοια ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε τέτοιες συναρτήσεις με μια αρκετά φυσιολογική επαγωγική διαδικασία διαδοχικών προσεγγίσεων, η ύπαρξη γνησίως αυξουσών ιδιαζουσών συναρτήσεων είναι πολύ λιγότερο προφανής. Με την εξαίρεση της συνάρτησης $?(x)$ του Minkowski (για την οποία δεν είναι καθόλου προφανές το ότι είναι ιδιάζουσα) δεν υπάρχει κάποια ευθεία κατασκευή τέτοιων συναρτήσεων. Μπορεί κανείς να πάρει τέτοιες συναρτήσεις θεωρώντας «συνελίξεις» συναρτήσεων τύπου Cantor και η απόδειξη του ότι τέτοιες διαδικασίες παράγουν γνησίως αύξουσες ιδιάζουσες συναρτήσεις είναι αρκετά δύσκολη. Παρουσιάζει λοιπόν ενδιαφέρον το πρόβλημα να δοθούν απλές και ευθείες κατασκευές τέτοιων συναρτήσεων.

Ας θεωρήσουμε, στο επίπεδο, την ευθεία PQ που συνδέει τα σημεία $P = (x, y)$ και $Q = (x + \Delta x, y + \Delta y)$, όπου $\Delta x > 0$ και $\Delta y > 0$. Ας θεωρήσουμε επίσης δύο θετικούς αριθμούς $\lambda_0 \neq \lambda_1$ με $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$. Γράφουμε R για το σημείο με συντεταγμένες $x + \Delta x/2$ και $y + \lambda_0 \Delta y$, δηλαδή, η οριζόντια απόσταση των P, R αλλά και των Q, R είναι $\Delta x/2$, ενώ η κατακόρυφη απόσταση των P, R είναι $\lambda_0 \Delta y$ και η κατακόρυφη απόσταση των R, Q είναι $\lambda_1 \Delta y$. Αν αντικαταστήσουμε την ευθεία PQ με την τεθλασμένη γραμμή PRQ, λέμε ότι *εφαρμόζουμε στο PQ τον μετασχηματισμό $T(\lambda_0, \lambda_1)$*.

Ορισμός 3.1. Έστω $f_0 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f_0(x) = x$. Γεωμετρικά, η f_0 αναπαρίσταται από την ευθεία OA που ενώνει την αρχή των αξόνων $O = (0, 0)$ με το σημείο $A = (1, 1)$. Εφαρμόζουμε στην OA τον μετασχηματισμό $T(\lambda_0, \lambda_1)$. Προκύπτει τότε μια τεθλασμένη γραμμή που αποτελείται από δύο ευθύγραμμα τμήματα και αντιστοιχεί σε μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Εφαρμόζουμε σε καθένα από τα δύο ευθύγραμμα τμήματα που «απαρτίζουν» την f_1 τον ίδιο μετασχηματισμό $T(\lambda_0, \lambda_1)$. Προκύπτει τότε μια τεθλασμένη γραμμή που αποτελείται από 2^2 ευθύγραμμα τμήματα και αντιστοιχεί σε μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, μετά από n εφαρμογές του μετασχηματισμού, παίρνουμε μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ (με $f_n(0) = 0$ και $f_n(1) = 1$) η οποία αναπαρίσταται από μια τεθλασμένη γραμμή που αποτελείται από 2^n ευθύγραμμα τμήματα, οι κορυφές των οποίων έχουν τετμημένες τα σημεία $k/2^n$, $k = 1, \ldots, 2^n - 1$.

Αν θέσουμε

$$\mu = \max\{\lambda_0, \lambda_1\}, \tag{3.1}$$

τότε $\mu < 1$, και μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι

$$\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leqslant \mu^n.$$

Έτσι, η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συναρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα διότι, για κάθε n, οι κορυφές της καμπύλης $y = f_n(x)$ ανήκουν στην καμπύλη $y = f(x)$: αν λοιπόν η f ήταν σταθερή σε κάποιο διάστημα, θα υπήρχε κάποιος n τέτοιος ώστε δύο διαφορετικές κορυφές της $y = f_n(x)$ θα είχαν την ίδια τεταγμένη, κάτι το οποίο είναι αδύνατο.

Η τεταγμένη της κορυφής της $y = f_n(x)$ που έχει τετμημένη την

$$\frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2^2} + \cdots + \frac{\theta_n}{2^n} \qquad (\theta_i = 0 \ \text{ή} \ 1)$$

είναι ίση με

$$\lambda_0[\theta_1 + \lambda_{\theta_1}\theta_2 + \lambda_{\theta_1}\lambda_{\theta_2}\theta_3 + \cdots + \lambda_{\theta_1}\lambda_{\theta_2}\cdots\lambda_{\theta_{n-1}}\theta_n],$$

και, λόγω συνέχειας, συμπεραίνουμε ότι αν

$$x = \frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2^2} + \cdots + \frac{\theta_n}{2^n} + \cdots, \tag{3.2}$$

τότε

$$f(x) = \lambda_0[\theta_1 + \lambda_{\theta_1}\theta_2 + \lambda_{\theta_1}\lambda_{\theta_2}\theta_3 + \cdots + \lambda_{\theta_1}\lambda_{\theta_2}\cdots\lambda_{\theta_{n-1}}\theta_n + \cdots]. \tag{3.3}$$

Παρατηρήστε ότι η τελευταία σειρά συγκλίνει. Επίσης, αν ο x έχει δύο διαφορετικά δυαδικά αναπτύγματα τότε η (3.3) θα δώσει, για καθένα από τα δύο αναπτύγματα του x, την ίδια τιμή $f(x)$.

Παρατηρήστε επίσης ότι αν οι x και $y > x$ έχουν τα ίδια πρώτα n ψηφία στο δυαδικό τους ανάπτυγμα, ίσα με $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, τότε

$$f(y) - f(x) < \lambda_{\theta_1}\lambda_{\theta_2}\cdots\lambda_{\theta_n}. \tag{3.4}$$

Αυτό φαίνεται αμεσως από την (3.3) (μπορούμε επίσης να το διαπιστώσουμε γεωμετρικά).

Πρόταση 3.2. *Η $f(x)$ είναι ιδιάζουσα.*

Απόδειξη. Είναι γνωστό ότι σχεδόν όλοι οι αριθμοί του $(0,1)$ είναι «κανονικοί» στην κλίμακα του 2, δηλαδή, είναι τέτοιοι ώστε

$$\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n = \frac{n}{2} + o(n) \quad \text{όταν } n \to \infty.$$

Έστω N το σύνολο αυτών των κανονικών αριθμών. Έχουμε $\lambda(N) = 1$. Σταθεροποιούμε κάποιον $x \in N$. Ας υποθέσουμε ότι ο x δίνεται από την (3.2). Αφού ο n είναι θετικός ακέραιος, ο αριθμός $x + \varepsilon_{n+1}/2^{n+1}$, όπου

$$\varepsilon_{n+1} = 1 \text{ αν } \theta_{n+1} = 0$$

και

$$\varepsilon_{n+1} = -1 \text{ αν } \theta_{n+1} = 1,$$

έχει ένα δυαδικό ανάπτυγμα στο οποίο τα n πρώτα ψηφία είναι τα ίδια με αυτά του x, δηλαδή, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$.

Συνεπώς, από την (3.4),

$$|f(x + \varepsilon_{n+1}/2^{n+1}) - f(x)| < \lambda_{\theta_1}\lambda_{\theta_2}\cdots\lambda_{\theta_n}.$$

Τώρα, αφού ο x είναι κανονικός, έχουμε

$$\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n = \frac{n}{2} + \phi(n),$$

όπου $|\phi(n)|/n \to 0$ όταν $n \to \infty$. Συνεπώς,

$$\lambda_{\theta_1}\lambda_{\theta_2}\cdots\lambda_{\theta_n} = \lambda_0^{n/2-\phi(n)}\lambda_1^{n/2+\phi(n)} < (\lambda_0\lambda_1)^{n/2-|\phi(n)|},$$

απ' όπου έπεται ότι

$$2^{n+1}|f(x + \varepsilon_{n+1}/2^{n+1}) - f(x)| < (2\sqrt{\lambda_0\lambda_1})^n \cdot \frac{2}{(\lambda_0\lambda_1)^{|\phi(n)|}}. \tag{3.5}$$

Τώρα, αφού $\lambda_0 \neq \lambda_1$ και $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$, έχουμε

$$2\sqrt{\lambda_0\lambda_1} < 1.$$

Αυτό, μαζί με το γεγονός ότι $\lim_n |\phi(n)|/n = 0$, αποδεικνύει ότι το δεξιό μέλος της (3.5) τείνει στο μηδέν όταν $n \to \infty$, άρα, *αν η $f(x)$ έχει παράγωγο στο σημείο x*, αυτή η παράγωγος είναι υποχρεωτικά ίση με μηδέν. Όμως, από ένα κλασσικό θεώρημα, η f' υπάρχει και είναι πεπερασμένη σχεδόν παντού, άρα σχεδόν παντού στο N. Άρα, επίσης σχεδόν παντού στο $(0,1)$ ισχύει $f'(x) = 0$, το οποίο αποδεικνύει την πρόταση. □

Μέτρο συνέχειας της $f(x)$. Η κατακόρυφη απόσταση ανάμεσα σε δύο κορυφές με τετμημένες $k/2^n$ και $(k+1)/2^n$ είναι μικρότερη από μ^n, όπου μ είναι ο αριθμός που ορίστηκε στην (3.1), συνεπώς έχουμε άμεσα ότι αν $\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant y - x < \frac{1}{2^n}$ τότε

$$f(y) - f(x) < 2\mu^n \leqslant 2\mu^{-1}\mu^{\log(y-x)^{-1}/\log 2} = 2\mu^{-1}(y-x)^{|\log\mu|/\log 2}.$$

Άρα, η $f(x)$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz τάξης $|\log\mu|/\log 2$.

Συντελεστές Fourier-Stieltjes της $f(x/2\pi)$. Ορίζουμε

$$c_k = \int_0^{2\pi} e^{ikx} df(x/2\pi).$$

Διαιρούμε τον y-άξονα με τα σημεία υποδιαίρεσης που αντιστοιχούν στις κορυφές που έχουν δημιουργηθεί στο n-στό βήμα της κατασκευής της συνάρτησης, και παρατηρούμε ότι η κατακόρυφη απόσταση ανάμεσα στην κορυφή που έχει τετμημένη την

$$2\pi\left(\frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2^2} + \cdots + \frac{\theta_n}{2^n}\right)$$

και την επόμενη, η οποία μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$2\pi\left(\frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2} + \cdots + \frac{\theta_n}{2^n} + \sum_{s=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^s}\right),$$

είναι ίση με $\lambda_{\theta_1}\lambda_{\theta_2}\cdots\lambda_{\theta_n}$. Έτσι, βλέπουμε ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι το όριο (καθώς το $n \to \infty$) των

$$\sum \lambda_{\theta_1}\lambda_{\theta_2}\cdots\lambda_{\theta_n} e^{2\pi ik(\theta_1/2+\theta_2/2^2+\cdots+\theta_n/2^n)},$$

όπου η άθροιση είναι πάνω από τους 2^n συνδυασμούς των τιμών 0 και 1 για τα θ_i. Αυτό το άθροισμα είναι ίσο με

$$\prod_{s=1}^{n}(\lambda_0 + \lambda_1 e^{2\pi ik/2^s}),$$

άρα, αφήνοντας το $n \to \infty$, παίρνουμε

$$c_k = \prod_{s=1}^{\infty}(\lambda_0 + \lambda_1 e^{2\pi ik/2^s}).$$

Μπορούμε επίσης να γράψουμε

$$c_k = \prod_{s=1}^{\infty} e^{\pi ik/2^s}(\lambda_0 e^{-\pi ik/2^s} + \lambda_1 e^{\pi ik/2^s}) = e^{\pi ik}\prod_{s=1}^{\infty}(\lambda_0 e^{-\pi ik/2^s} + \lambda_1 e^{\pi ik/2^s}),$$

ή, θέτοντας $\lambda_0 = \frac{1-r}{2}$ και $\lambda_1 = \frac{1+r}{2}$,

$$c_k = e^{\pi ik}\prod_{s=1}^{\infty}(\cos(\pi k/^s) + it\sin(\pi k/2^s)),$$

το οποίο μας δίνει

$$|c_k|^2 = \prod_{s=1}^{\infty} (\cos^2(\pi k/2^s) + r^2 \sin^2(\pi k/2^s)).$$

Επιλέγοντας $k = 2^m$, έχουμε

$$|c_{2^m}|^2 > r^2 \cos^2(\pi/4) \cos^2(\pi/8) \cos^2(\pi/16) \cdots ,$$

και αυτό αποδεικνύει ότι η $\{c_k\}$ δεν τείνει στο μηδέν όταν $k \to \infty$.

3.1 Γενίκευση της προηγούμενης συνάρτησης

Αντί να κατασκευάσουμε την συνάρτησή μας με άπειρες εφαρμογές του ίδιου πάντα μετασχηματισμού $T(\lambda_0, \lambda_1)$, μπορούμε να αλλάζουμε τον μετασχηματισμό που χρησιμοποιούμε σε κάθε βήμα της κατασκευής.

Έτσι, αν η $F_0(x)$ είναι ίση με x στο $(0, 1)$, θεωρούμε το σημείο $O = (0, 0)$ και το σημείο $A = (1, 1)$, και εφαρμόζουμε στο OA το μετασχηματισμό $T(\lambda_0^{(1)}, \lambda_1^{(1)})$. Παίρνουμε μια τεθλασμένη γραμμή που αποτελείται από δύο ευθύγραμμα τμήματα και αναπαριστά την $F_1(x)$. Σε καθένα από αυτά τα δύο ευθύγραμμα τμήματα εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό $T(\lambda_0^{(2)}, \lambda_1^{(2)})$. Στα 2^2 ευθύγραμμα τμήματα που συναποτελούν την $F_2(x)$ εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό $T(\lambda_0^{(3)}, \lambda_1^{(3)})$ για να πάρουμε την $F_3(x)$, και ούτω καθεξής.

Έστω ότι

$$\lambda_0^{(k)} = \frac{1 - r_k}{2} \quad \text{και} \quad \lambda_1^{(k)} = \frac{1 + r_k}{2}.$$

Υποθέτουμε ότι $-1 < r_k < 1$ για κάθε k και ότι αν θέσουμε

$$u_n = \prod_{s=1}^{n} \left(\frac{1 + |r_s|}{2} \right)$$

τότε η σειρά $\sum u_n$ συγκλίνει. (Αυτό συμβαίνει ασφαλώς αν $-a < r_k < a$ και $0 < a < 1$, μπορεί όμως να εξασφαλιστεί και με λιγότερο περιοριστικές υποθέσεις.) Τότε, χωρίς καμία αλλαγή στο επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, μπορούμε να δείξουμε ότι η $F_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση $F(x)$ η οποία αυξάνει γνησίως από την τιμή 0 στην τιμή 1 στο $(0, 1)$.

Με τον ίδιο τρόπο όπως πριν, αποδεικνύουμε ότι αν

$$x = \frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2^2} + \cdots + \frac{\theta_n}{2^n} + \cdots , \tag{3.6}$$

τότε

$$F(x) = \theta_1 \lambda_0^{(1)} + \theta_2 \lambda_{\theta_1}^{(1)} \lambda_0^{(2)} + \theta_3 \lambda_{\theta_1}^{(1)} \lambda_{\theta_2}^{(2)} \lambda_0^{(3)} + \cdots . \tag{3.7}$$

Τέλος, αν το x και το $y > x$ έχουν τα ίδια πρώτα n ψηφία στο δυαδικό τους ανάπτυγμα, τότε

$$F(y) - F(x) < \lambda_{\theta_1}^{(1)} \lambda_{\theta_2}^{(2)} \cdots \lambda_{\theta_n}^{(n)} = \frac{1}{2^n} \prod_{s=1}^{n} (1 - \varepsilon_s r_s), \tag{3.8}$$

όπου

$$\varepsilon_s = 1 \ \text{αν} \ \theta_s = 0, \qquad \varepsilon_s = -1 \ \text{αν} \ \theta_s = 1.$$

Είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι αν το x δίνεται από την (3.6) τότε μπορούμε επίσης να γράψουμε

$$\lambda^{(s)}_{\theta_s} = \frac{1-\varepsilon_s r_s}{2} = \frac{1-\phi_s(x) r_s}{2},$$

όπου $\{\phi_s(x)\}$ είναι το σύστημα των συναρτήσεων Rademacher ($s = 1, 2, \ldots$). Με αυτόν τον συμβολισμό, η ανισότητα (3.8) γράφεται

$$F(y) - F(x) < \frac{1}{2^n} \prod_{s=1}^{n} (1 - \phi_s(x) r_s).$$

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.3. *Η συνάρτηση $F(x)$ είναι γνησίως ιδιάζουσα αν και μόνο αν η σειρά $\sum r_s^2$ αποκλίνει.*

Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής θεώρημα του Zygmund: σχεδόν για κάθε x έχουμε

$$\liminf \sum_{s=1}^{\infty} -r_s \phi_s(x) = -\infty$$

αν η σειρά $\sum r_s^2$ αποκλίνει.

Από αυτό τοαποτέλεσμα και από την ανισότητα

$$1 - r_s \phi_s(x) < e^{-r_s \phi_s(x)}$$

προκύπτει άμεσα ότι, σχεδόν για κάθε x,

$$\liminf_{s\to\infty} \prod_{s=1}^{n} (1 - r_s \phi_s(x)) = 0 \tag{3.9}$$

αν $\sum r_s^2 = \infty$.

Η απόδειξη του πρώτου μέρους του θεωρήματός μας είναι τώρα άμεση. Παίρνοντας το x να ανήκει στο σύνολο (μέτρου 1) E για τα σημεία του οποίου ισχύει η (3.9), έχουμε

$$|F(x + (\varepsilon_{n+1}/2^{n+1})) - F(x)| < \frac{1}{2^n} \prod_{s=1}^{n} (1 - \phi_s(x) r_s),$$

άρα

$$\liminf 2^{n+1} |F(x + (\varepsilon_{n+1}/2^{n+1})) - F(x)| = 0$$

και αν η $F'(x)$ υπάρχει τότε είναι ίση με μηδέν. Ολοκληρώνουμε την απόδειξη όπως πριν.

Για να δείξουμε το δεύτερο μέρος του θεωρήματός μας ας υποθέσουμε ότι $\sum r_s^2 < \infty$. Γνωρίζουμε από ένα κλασσικό θεώρημα ότι σε αυτήν την περίπτωση η σειρά $\sum r_s \phi_s(x)$ συγκλίνει σε ένα σύνολο B μέτρου 1. Από αυτό και από την υπόθεση $\sum r_s^2 < \infty$ είναι εύκολο να συμπεράνουμε ότι το άπειρο γινόμενο

$$\prod_{s=1}^{\infty} (1 - r_s \phi_s(x)) \tag{3.10}$$

συγκλίνει αν το x ανήκει στο B. Σταθεροποιώντας ένα $x \in B$, παρατηρούμε ότι, με το ε_{n+1} να έχει το ίδιο νόημα όπως προηγουμένως, τα δυαδικά αναπτύγματα των x και $x + \varepsilon_{n+1}/2^{n+1}$ έχουν όλα τους τα ψηφία ίσα εκτός από τα ψηφία τάξης $n+1$.

Από αυτήν την παρατήρηση είναι εύκολο να συμπεράνουμε, για παράδειγμα γεωμετρικά, ότι

$$\begin{aligned}\frac{1-|r_{n+1}|}{2}\lambda^{(1)}_{\theta_1}\cdots\lambda^{(n)}_{\theta_n} &< \Big|F\Big(x+\frac{\varepsilon_{n+1}}{2^{n+1}}\Big)-F(x)\Big| \\ &< \frac{1+|r_{n+1}|}{2}\lambda^{(1)}_{\theta_1}\cdots\lambda^{(n)}_{\theta_n}.\end{aligned}$$

Τώρα, το πρώτο μέρος αυτής της ανισότητας μαζί με τη σύγκλιση του γινομένου (3.10) δείχνει ότι

$$\liminf 2^{n+1}\Big|F\Big(x+\frac{\varepsilon_{n+1}}{2^{n+1}}\Big)-F(x)\Big| > 0.$$

Άρα, όταν η $F'(x)$ υπάρχει για κάποιο $x \in B$, τότε η $F'(x)$ δεν μηδενίζεται. Δεδομένου ότι η $F'(x)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη σχεδόν παντού, έχουμε ότι $F'(x) \neq 0$ σχεδόν παντού, άρα η $F(x)$ δεν μπορεί να είναι γνησίως ιδιάζουσα. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος.

Μέτρο συνέχειας της $F(x)$. Το επιχείρημα είναι το ίδιο όπως πριν. Αν

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant y - x < \frac{1}{2^n},$$

έχουμε

$$F(y)-F(x) < 2\prod_{s=1}^{n}\Big(\frac{1+|r_s|}{2}\Big).$$

Συνεπώς, αν $\omega(\delta)$ είναι το μέτρο συνέχειας, έχουμε

$$\omega(\delta) < 4\prod_{s=1}^{|\log\delta|/\log 2}\Big(\frac{1+|r_s|}{2}\Big).$$

Συντελεστές Fourier-Stieltjes της $F(x/2\pi)$. Με το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε για την $f(x)$ δείχνουμε ότι αν

$$c_k = \int_0^{2\pi} e^{ikx}dF\big(\frac{x}{2\pi}\big)$$

τότε έχουμε την προσέγγιση του c_n από την παράσταση

$$\sum \lambda^{(1)}_{\theta_1}\cdots\lambda^{(n)}_{\theta_n}e^{2\pi ik(\theta_1/2+\theta_2/2^2+\cdots+\theta_n/2^n)},$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται πάνω από τους 2^n συνδυασμούς των τιμών 0 και 1 για τα θ_i. Έτσι παίρνουμε

$$\begin{aligned}c_k &= \prod_{s=1}^{\infty}[\lambda^{(s)}_0 + \lambda^{(s)}_1 e^{2\pi ik/2^s}] \\ &= e^{\pi ik}\prod_{s=1}^{\infty}[\lambda^{(s)}_0 e^{-\pi ik/2^s} + \lambda^{(s)}_1 e^{\pi ik/2^s}] \\ &= e^{\pi ik}\prod_{s=1}^{\infty}[\cos(\pi k/2^s) + ir_s\sin(\pi k/2^s)]\end{aligned}$$

και
$$|c_k|^2 = \prod_{s=1}^{\infty} [\cos^2(\pi k/2^s) + r_s^2 \sin^2(\pi k/2^s)].$$
Βλέπουμε αμέσως, όπως και στην περίπτωση της $f(x)$, ότι αν η (r_s) δεν τείνει στο μηδέν, τότε έχουμε $|c_k| \neq o(1)$.

4 Η συνάρτηση Minkowski $?(x)$

Η συγκεκριμένη συνάρτηση ορίστηκε από τον Minkowski με σκοπό τη δημιουργία μιας 1-1 αντιστοίχισης ανάμεσα στους ρητούς αριθμούς του $(0,1)$ και τους άρρητους τετραγωνικούς αλγεβρικούς αριθμούς του $(0,1)$. Οι ιδιότητες της συνάρτησης διερευνήθηκαν πρόσφατα απο τον Denjoy, ο οποίος απέδειξε ότι αποτελεί γνησίως ιδιάζουσα συνάρτηση και παρέθεσε και κάποιες άλλες ιδιότητες και γενικεύσεις της συνάρτησης του Minkowski.

Σκοπεύουμε εδώ να δώσουμε ορισμένα νέα στοιχεία για την συνάρτηση που αφορούν ιδιαιτέρως την συνθήκη της συνέχειάς της και τους συντελεστές Fourier-Stieltjes. Για λόγους πληρότητας θα παραθέσουμε τον ορισμό της συνάρτησης και την απόδειξη για το ότι είναι ιδιάζουσα.

Ορισμός 4.1 (ορισμός της συνάρτησης $?(x)$)**.** Ορίζουμε αρχικά:
$$?(0) = ?(0/1) = 0 \quad \text{και} \quad ?(1) = ?(1/1) = 1.$$
Στη συνέχεια λαμβάνουμε από τα δύο κλάσματα τύπου Farey $0/1$ και $1/1$, τον «μέσο» $1/2 = (0+1)/(1+1)$ κι ορίζουμε $?(0+1/1+1)$ να είναι ο αριθμητικός μέσος των $?(0)$ και $?(1)$, δηλαδή $1/2$.

Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε:
$$?(1/3) = ?\left(\frac{0+1}{1+2}\right) = \frac{?(0)+?(1/2)}{2} = 1/4$$
$$?(2/3) = ?\left(\frac{1+1}{2+1}\right) = \frac{?(1/2)+?(1/1)}{2} = 3/4.$$
Γενικότερα, εάν έχουμε ορίσει μέσω αυτής της διαδικασίας τα $?(p/q)$ και $?(p'/q')$ για δύο διαδοχικά ανάγωγα κλάσματα p/q και p'/q', τότε ορίζουμε:
$$?\left(\frac{p+p'}{q+q'}\right) = \frac{?(p/q)+?(p'/q')}{2}.$$
Στο n-στο βήμα η συνάρτηση θα έχει οριστεί για 2^n+1 τιμές του x κι οι αντίστοιχες τεταγμένες γι' αυτές τις τιμές του x θα είναι της μορφής $\frac{k}{2^n}$, $(k = 0, 1, 2, \ldots, 2^n)$. Ο ορισμός της $?(x)$ για κάθε x έπεται λόγω συνέχειας.

Έστω τώρα ότι ο x είναι ένας ρητός αριθμός εκφρασμένος με τη μορφή ενός πεπερασμένου συνεχούς κλάσματοσ:
$$x = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad a_0 = 0, \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$
Έστω ότι p_1/q_1, $p_2/q_2, \ldots, p_n/q_n = x$ είναι τα διαδοχικά μερικά αθροίσματα του συνεχούς κλάσματος $(p_0/q_0 = 0, \ p_1/q_1 = 1/a_1, \ldots)$. Ας υποθέσουμε ότι σε ένα συγκεκριμένο βήμα (το m-στο) της κατασκευής της $?(x)$ τα κλάσματα $p_{k-2}/q_{k-2}, p_{k-1}/q_{k-1}$ είναι διαδοχικά. (Αυτό συμβαίνει βεβαίως

για $p_0/q_0 = 0$ και $p_1/q_1 = 1/a_1$, όπου το $1/a_1$ εμφανίζεται να είναι ο διαδοχικός αριθμός του $0/1$ στο (a_1-1)-στο βήμα της κατασκευής.) Έστω

$$y_{k-2} = ?\left(\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}\right), \qquad y_{k-1} = ?\left(\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right).$$

Εξ ορισμού θα έχουμε:

$$?\left(\frac{p_{k-1}+p_{k-2}}{q_{k-1}+q_{k-2}}\right) = \frac{y_{k-1}+y_{k-2}}{2}.$$

Τώρα, γνωρίζουμε ότι το $(p_{k-1}+p_{k-2})/(q_{k-1}+q_{k-2})$ είναι ανάγωγο κλάσμα, κι έτσι στο επόμενο βήμα, το $(m+1)$-στο, το (επίσης ανάγωγο) κλάσμα $(2p_{k-1}+p_{k-2})/(2q_{k-1}+q_{k-2})$ θα αντιστοιχεί στο

$$?\left(\frac{2p_{k-1}+p_{k-2}}{2q_{k-1}+q_{k-2}}\right) = \frac{y_{k-1}+(y_{k-1}+y_{k-2})/2}{2}.$$

Συνεχίζοντας κατά τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι:

$$\begin{aligned} ?\left(\frac{p_k}{q_k}\right) &= ?\left(\frac{a_k p_{k-1}+p_{k-2}}{a_k q_{k-1}+q_{k-2}}\right) \\ &= \frac{y_{k-1}}{2}+\frac{y_{k-1}}{2^2}+\cdots+\frac{y_{k-1}}{2^{a_k}}+\frac{y_{k-2}}{2^{a_k}}. \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, εάν θέσουμε $?(p_k/q_k) = y_k$, τότε

$$y_k = (1-(1/2^{a_k}))y_{k-1} + y_{k-2}/2^{a_k}$$

ή

$$y_k - y_{k-1} = -\frac{1}{2^{a_k}}(y_{k-1}-y_{k-2}).$$

Τώρα, όταν εμφανίζεται το p_k/q_k, θα είναι διαδοχικό του p_{k-1}/q_{k-1}. Άρα, μπορούμε να επαναλάβουμε το επιχείρημα, κι αν θέσουμε $y_n = ?(p_n/q_n) = ?(x)$, θα έχουμε:

$$y_n - y_{n-1} = \left(-\frac{1}{2^{a_n}}\right)\left(-\frac{1}{2^{a_{n-1}}}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2^{a_2}}\right)(y_1-y_0).$$

Τώρα $y_0 = 0$, $y_1 = 1/2^{a_1-1}$, οπότε θα είναι

$$y_n - y_{n-1} = (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{(a_1+a_2+\cdots+a_n)-1}},$$

κι άρα

$$y_n = \frac{1}{2^{a_1-1}} - \frac{1}{2^{(a_1+a_2)-1}} + \frac{1}{2^{(a_1+a_2+a_3)-1}} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{(a_1+a_2+\cdots+a_n)-1}}.$$

Λόγω συνέχειας θα έχουμε το εξής αποτέλεσμα: αν $x = (0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, τότε

$$?(x) = \frac{1}{2^{a_1-1}} - \frac{1}{2^{(a_1+a_2)-1}} + \frac{1}{2^{(a_1+a_2+a_3)-1}} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{(a_1+a_2+\cdots+a_n)-1}} + \cdots, \tag{4.1}$$

κι είναι εύκολο να δούμε ότι αν ο x είναι ρητός, τότε τα δύο διαφορετικά αναπτύγματά του θα δώσουν το ίδιο $?(x)$.

Από τα παραπάνω μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα σχετικά με τις πλέον βασικές ιδιότητες της $?(x)$, που είναι οι εξής:

1. Αν ο x είναι ρητός αριθμός, τότε το $?(x)$ θα είναι της μορφής $k/2^s$ όπου k, s ακέραιοι.
2. Αν ο x είναι άρρητος αριθμός, το δυαδικό ανάπτυγμα του $?(x)$ θα είναι άπειρο.
3. Αν ο x είναι άρρητος τετραγωνικός αλγεβρικός αριθμός, τότε το ανάπτυγμα $(0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ θα είναι περιοδικό, κι άρα το $?(x)$, όντας η διαφορά δύο περιοδικών δυαδικών αναπτυγμάτων, θα είναι ρητός.

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι κι οι αντίστροφες προτάσεις των παραπάνω συμπερασμάτων αληθεύουν.

Το γεγονός τώρα ότι η $?(x)$ είναι γνησίως αύξουσα αποτελεί άμεση συνέπεια της κατασκευής της.

Πρόταση 4.2. *Η $?(x)$ είναι ιδιάζουσα.*

Απόδειξη. Έστω $x = (0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$. Γνωρίζουμε ότι για σχεδόν κάθε x ισχύει $\limsup a_n = \infty$. Έστω N το σύνολο αυτών των αριθμών (το μέτρο του N θα είναι 1) κι ας σταθεροποιήσουμε ένα x που ανήκει στο N. Έστω $x = (0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ και έστω $?(x) = y$, και

$$r_n = p_n/q_n = (0, a_1, \ldots, a_n), \qquad \rho_n = ?(r_n).$$

Επίσης γράφουμε, ως συνήθως, $a'_{n+1} = (a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots)$. Τότε θα έχουμε

$$x = \frac{a'_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a'_{n+1} q_n + q_{n-1}}, \qquad \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{(a'_{n+1} q_n + q_{n-1}) q_n},$$

κι ως εκ τούτου:

$$\frac{1}{(a_{n+1}+2) q_n^2} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{a_{n+1} q_n^2}$$

και

$$y - \rho_n = (-1)^n \left[\frac{1}{2^{(a_1+a_2+\cdots+a_n)-1}} - \frac{1}{2^{(a_1+a_2+\cdots+a_{n+})-1}} + \cdots \right],$$

το οποίο θα μας δώσει:

$$\frac{1}{2^{a_1+\cdots+a_{n+1}}} < |y - \rho_n| < \frac{1}{2^{(a_1+\cdots+a_{n+2})-1}}.$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\delta_n = \left| \frac{y - \rho_n}{x - r_n} \right| < \frac{2(a_{n+1}+2) q_n^2}{2^{a_1+\cdots+a_{n+1}}}$$

και

$$\delta_{n-1} = \left| \frac{y - \rho_{n-1}}{x - r_{n-1}} \right| > \frac{a_n q_{n-1}^2}{2^{(a_1+\cdots+a_n)}}.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} &< 2 \frac{1}{2^{a_n+1}} \left(\frac{a_{n+1}+2}{a_n} \right) \left(\frac{q_n}{q_{n-1}} \right)^2 \\ &< 2 \frac{1}{2^{a_n+1}} \left(\frac{a_{n+1}+2}{a_n} \right) (a_n+1)^2 \\ &< C \frac{a_n a_{n+1}}{2^{a_{n+1}}}, \end{aligned}$$

όπου C είναι μια (απόλυτη) σταθερά. □

Τώρα μπορούμε βεβαίως να βρούμε μια άπειρη υπακολουθία $\{a_{k_n}\}$ της $\{a_n\}$ έτσι ώστε $a_{k_n} < a_{k_{n+1}}$ και $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \infty$, επομένως $\liminf \delta_n/\delta_{n-1} = 0$. Εάν υπάρχει η $\frac{dy}{dx}$, είναι πεπερασμένη και διάφορη του 0 στο σημείο x, τότε ο λόγος δ_n/δ_{n-1} θα πρέπει να τείνει στο 1. Επομένως δεν είναι δυνατόν να υπάρχει σε κάποιο σημείο η $\frac{dy}{dx}$, να είναι πεπερασμένη και ταυτοχρόνως διάφορη του 0. Όμως η $\frac{dy}{dx}$ υπάρχει και λαμβάνει σχεδόν παντού πεπερασμένες τιμές. Συνεπώς το μόνο πιθανό συμπέρασμα είναι ότι $\frac{dy}{dx} = 0$ σχεδόν παντού, το οποίο και αποδεικνύει ότι η συνάρτηση είναι ιδιάζουσα.

Μέτρο συνέχειας της $?(x)$. Χρειαζόμαστε το εξής λήμμα:

Λήμμα 4.3. *Έστω $p_n/q_n = (0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Έστω ο αριθμός Fibonacci $\theta = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Τότε ισχύει η ανισότητα*
$$q_n < \theta^{a_1+a_2+\cdots+a_n}.$$

Θα αποδείξουμε αυτό το λήμμα με επαγωγή. Έχουμε $q_1 = a_1 < \theta^{a_1}$, καθώς είναι εύκολο να δούμε ότι $m < \theta^m$ για κάθε θετικό ακέραιο m. Επίσης έχουμε $q_0 = 1 = \theta^0$. Γενικά θα έχουμε
$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, \qquad (k = 2, 3, \ldots, n).$$
Αν, υποθέτοντας ότι ισχύει το λήμμα για $n = k-2$ και $n = k-1$, αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n = k$, τότε θα έχουμε αποδείξει τον παραπάνω ισχυρισμό. Έστω ότι
$$q_{k-1} < \theta^{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}} \quad \text{και} \quad q_{k-2} < \theta^{a_1+a_2+\cdots+a_{k-2}}.$$
Αρκεί να δείξουμε ότι
$$a_k\theta^{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}} + \theta^{a_1+a_2+\cdots+a_{k-2}} \leqslant \theta^{a_1+a_2+\cdots+a_k},$$
κι άρα την
$$a_k\theta^{a_{k-1}} + 1 \leqslant \theta^{a_{k-1}+a_k},$$
ή ισοδύναμα την
$$a_k + \frac{1}{\theta} \leqslant \theta^{a_k}.$$
Τώρα για $a_k = 1$ έχουμε την ισότητα $1 + \frac{1}{\theta} = \theta$ κι είναι εύκολο να δούμε ότι $2 + \frac{1}{\theta} = \theta^2$ κι ότι η συνάρτηση $\theta^x - x$ αυξάνει όταν $x \geqslant 2$. Επομένως έχουμε αποδείξει το λήμμα. (Είναι εύκολο να δούμε, θεωρώντας τον αριθμό $(0, 1, 1, 1, \ldots)$, ότι αυτό το αποτέλεσμα είναι το καλύτερο δυνατό όσον αφορά τη τάξη μεγέθους.)

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στην εκτίμηση του μέτρου συνέχειας της $?(x)$. Στον ορισμό της συνάρτησης μέσω διαδοχικών προσεγγίσεων, ξεκινάμε από τα κλάσματα τύπου Farey $0/1$ και $1/1$ και στο πρώτο βήμα εισάγουμε τον μέσο $1/2$, στο δεύτερο βήμα τους δύο μέσους $1/3$ και $2/3$, στο τρίτο βήμα τέσσερις μέσους, κ.ο.κ. Στο n-στο βήμα εισάγουμε 2^{n-1} μέσους κι έτσι λαμβάνουμε μία ακολουθία που περιέχει
$$2 + (1 + 2 + \cdots + 2^{n-1}) = 2^n + 1$$
το πλήθος κλάσματα, την οποία θα καλούμε Minkowski-ακολουθία τάξης n και θα συμβολίζουμε με $\mathcal{M}_n$. Στην ακολουθία $\mathcal{M}_n$ θα αντιστοιχεί μέσω του μετασχηματισμού $?(x)$ η ακολουθία των αριθμών $k/2^n (k = 0, 1, 2, \ldots, 2^n)$. Η σχέση (4.1) που μας δίνει την τιμή της $?(x)$, δείχνει ότι τα κλάσματα που

ανήκουν στην $\mathcal{M}_n$ είναι εκείνα για τα οποία, όταν γραφούν στη μορφή $(0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$, το $\sum_{s=1}^{n} a_s$ δεν θα υπερβαίνει το $n+1$.

Άρα, από το λήμμα, αν ο a/b ανήκει στην $\mathcal{M}_n$, θα έχουμε $b < \theta^{n+1}$, κι αυτή η τάξη μεγέθους είναι πράγματι αυτή που λαμβάνεται για το κλάσμα $(0, 1, 1, \ldots, 1)$, όπου το 1 επαναλαμβάνεται $n+1$ φορές. Τώρα, μπορούμε άμεσα με επαγωγή να δούμε ότι, εάν a/b και a'/b' είναι δύο διαδοχικά κλάσματα της $\mathcal{M}_n$, θα έχουμε $|b'a - a'b| = 1$ κι άρα η απόσταση δύο διαδοχικών κλασμάτων της $\Updownarrow_n$ θα είναι μεγαλύτερη από $1/\theta^{2n+2}$.

Έστω τώρα x, x' δύο άρρητα σημεία του $(0,1)$, και έστω $y = ?(x)$, $y' = ?(x')$. Σε ένα συγκεκριμένο στάδιο της διαμέρισης, ένα ορισμένο κλάσμα x_0 θα εμφανιστεί για πρώτη φορά στο (x, x'). Ας συνεχίσουμε τη διαδικασία της διαμέρισης μέχρις ότου ένα κλάσμα να πρωτοεμφανιστεί στο (x, x_0) ή στο (x_0, x) ή και στα δύο διαστήματα. Έστω ότι αυτό το στάδιο της διαμέρισης είναι το n-στο. Τότε θα έχουμε

$$x' - x > \frac{1}{\theta^{2n+2}} \quad \text{και} \quad y' - y < \frac{4}{2^n}.$$

Επομένως,

$$(2n+2)\log\theta > \log\left|\frac{1}{x'-x}\right| \quad \text{και} \quad (n-2)\log 2 < \log\left|\frac{1}{y'-y}\right|,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι:

$$|y' - y| < |x' - x|^{\frac{\log 2}{2\log\theta}},$$

όπου C είναι μία απόλυτη σταθερά, κι αυτή η σχέση που αληθεύει για κάθε ζευγάρι από άρρητους x, x', θα ισχύει κι όταν ο x ή x' ή και οι δύο θα είναι ρητοί.

Επομένως: Η συνάρτηση $?(x)$ ικανοποιεί Lipschitz-συνθήκη τάξης $\alpha = \frac{\log 2}{2\log\theta}$, όπου θ είναι ο αριθμός łΦιβοναςςι $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι το α είναι η καλύτερη δυνατή τάξη για την συνθήκη Lipschitz της $?(x)$ κι ότι δε μπορεί να βελτιωθεί περαιτέρω. Ας θεωρήσουμε συγκεκριμένα το αριθμό

$$x = (0, 1, 1, \ldots) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\theta}.$$

Η αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης είναι

$$\eta = ?(x) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \cdots = \frac{2}{3}.$$

Έστω p_n/q_n τα διαδοχικά μερικά αθροίσματα του x. Γνωρίζουμε ότι

$$q_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[\theta^{n+1} - (-1)^{n+1}(1/\theta^{n+1})], \qquad p_n = q_{n-1}.$$

Έστω τώρα

$$\delta = |x - p_n/q_n| < 1/q_n^2$$

το οποίο έχει ίδια τάξη με το $1/\theta^{2n}$, ενώ

$$\eta - > (p_n/q_n) = (-1)^n(1/2^n) + (-1)^{n+1}(1/2^{n+1}) + \cdots$$

είναι τάξης $1/2^n$, που είναι τάξης $\delta^{\frac{\log 2}{2\log\theta}}$, το οποίο αποδεικνύει ότι το α της Lipschitz•συνθήκης μας είναι το καλύτερο δυνατό.

Συντελεστές Fourier-Stieltjes της $?(x/2\pi)$**.** Έστω

$$c_n = \int_0^{2\pi} e^{inx} d > (x/2\pi).$$

Είναι άμεσο να δούμε ότι

$$c_n = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{2^p} \sum_{\rho\in\mathcal{M}_n} e^{2\pi i n\rho}$$

όπου η άθροιση εκτείνεται πάνω σε κάθε κλάσμα ρ που ανήκει στην $\mathcal{M}_n$. Φαίνεται να μην γνωρίζουμε εάν οι c_n τείνουν στο 0 όταν $n \to \infty$. Εάν περιοριστούμε στη μελέτη της «κατά μέσο όρο» συμπεριφοράς των c_n, λαμβάνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα. Γνωρίζουμε από ένα θεώρημα του Wiener ότι:

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 + \cdots + |c_n|^2 < An\omega(1/n)$$

όπου $\omega(\delta)$ είναι το μέτρο συνέχειας της συνάρτησης και A μία απόλυτη σταθερά. Επομένως, λόγω του αποτελέσματός μας για το μέτρο συνέχειας της $?(x)$, θα έχουμε

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 + \cdots + |c_n|^2 = O(n^{1-(\log 2/2\log\theta)}),$$

και λόγω της ανισότητας του Schwarz:

$$|c_1| + |c_2| + \cdots + |c_n| = O(n^{1-(\log 2/4\log\theta)}).$$

5 Βασικά σημεία της εργασίας του Denjoy

Στο [3] ο A. Denjoy ορίζει την συνάρτηση $?(x)$ από την αρχή δίχως να αναφερθεί καθόλου στην προγενέστερη εργασία και τον ορισμό της από τον ίδιον τον Minkowski. Περιγράφει την κατασκευή της όπως ο Salem στον Ορισμό 4.1 (χωρίς όμως να χρησιμοποιεί τον συμβολισμό $?(x)$). Στη συνέχεια αποδεικνύει ότι η συνάρτηση είναι ιδιάζουσα. Θα δώσουμε την σκιαγράφηση της απόδειξης, η οποία βασίζεται σε ιδιότητες των συνεχών κλασμάτων:

(α) Αρχικά θεωρεί μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση $x(\xi)$ που έχει πεπερασμένη παράγωγο σε ένα υποσύνολο του $(0,1)$ με συμπλήρωμα μέτρου 0. Όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 4.2 του Salem έστω ότι έχουμε:

$$\xi = (0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots), \quad r_n = p_n/q_n = (0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$$
$$\xi_{n+1} = (a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots), \quad \rho_n = ?(r_n) = \frac{1}{2^{a_1-1}} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{(a_1+a_2+\cdots+a_n)-1}}$$

και

$$\delta_n = \frac{x-\rho_n}{\xi - r_n} \quad \text{(κι όπως γνωρίζουμε)} \quad \xi = \frac{\xi_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\xi_{n+1}q_n + q_{n-1}}.$$

Έστω τώρα ότι υπάρχει η παράγωγος στο ξ δίχως να είναι μηδέν ή άπειρη. Τότε ο λόγος $u_n = \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}$ θα πρέπει να τείνει στο 1, το οποίο είναι όμως αδύνατο.

(β) Στη συνέχεια αποδεικνύει ότι το μέτρο του συνόλου στο οποίο η $x(\xi)$ έχει θετική παράγωγο είναι αναγκαστικά μηδέν.

(γ) Τέλος, εάν ο ξ είναι ρητός αριθμός τότε η τιμή της παραγώγου στο ξ θα είναι πάντα μηδέν ή άπειρο.

Στο δεύτερο άρθρο του «*Sur une Fonction Réelle de Minkowski*» (1934), ο Denjoy αναφέρεται στον ορισμό της $?(x)$ από τον Minkowski κι έπειτα ορίζει μία ευρύτερη κλάση ιδιαζουσών συναρτήσεων: Έστω $0 < a < 1$ κι ας θεωρήσουμε την συνεχή συνάρτηση $F(x, a)$ με $F(0, a) = 1$, $F(\infty, a) = 0$, και

$$F\left(\frac{p+p'}{q+q'}, a\right) = aF\left(\frac{p'}{q'}, a\right) + (1-a)F\left(\frac{p}{q}, a\right), \qquad pq' - qp' = q \geqslant 0, q' \geqslant 1.$$

Η $F(x, a)$ είναι φθίνουσα και λαμβάνει τιμές από το $+\infty$ έως το 0 καθώς το x αυξάνει από το $-\infty$ στο $+\infty$. Η συνάρτηση του Minkowski μπορεί να δοθεί τότε από τον τύπο

$$?(x) = 2 - 2F\left(x, \frac{1}{2}\right)$$

για τιμές του x ανάμεσα στο 0 και στο 1.

6 Άλλες ιδιότητες της συνάρτησης και γενικεύσεις σε ευρύτερες οικογένειες ιδιαζουσών συναρτήσεων

Θα αναφερθούμε συνοπτικά στα βασικά σημεία της εργασίας μεταγενέστερων μαθηματικών, ξεκινώντας με αυτήν του J. R. Kinney:

Το 1959 ο J. R. Kinney δημοσιεύει το άρθρο [4] όπου η συνάρτηση $?(x)$ δίνεται με τη μορφή ενός (ολικά) προσθετικού μέτρου πιθανότητας, δηλαδή

$$?(x) = \int_A d?(x).$$

Στη συνέχεια αποδεικνύεται ότι ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz τάξης

$$\alpha = \frac{1}{2\int_0^1 \log_2(1+x)d?(x)},$$

κι ότι αυτό το α συνδέεται με τη διάσταση Hausdorff-Besicovitch $\beta(X)$ με την έννοια ότι ισχύει το εξής:

Θεώρημα 6.1 (Kinney). *Υπάρχει ένα σύνολο A με $?(A) = ?[(0, 1)] = 1$, έτσι ώστε:*

- $\beta(A \cap B) = \alpha$ *εάν* $?(B) > 0$.
- $?(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha)$ *για κάθε* $x \in A$.

Τώρα, παρακάμπτουμε λίγο την χρονολογική σειρά αναφέροντας στη συνέχεια τα αποτελέσματα των R. F. Tichy ανδ J. Uitz:

Στο [5] (1995) οι Tichy και Uitz επεκτείνουν το σκεπτικό του Kinney. Σημειώνουν ότι σύμφωνα με τα παραπάνω, η $d?(x)$ συγκεντρώνεται πάνω σε ένα σύνολο X που έχει διάσταση Hausdorff ίση με $a \simeq 0.875$, ή ισοδύναμα ότι υπάρχει ένα τέτοιο σύνολο Q με μέτρο Lebesgue ίσο με 1, ενώ για κάθε σύνολο A με διάσταση Hausdorff μικρότερη του a, το $?(A)$ θα έχει μέτρο 0. Επεκτείνουν αυτήν την ιδιότητα πάνω σε μία οικογένεια συναρτήσεων $g_\lambda(x)$, που αποτελείται από συνεχείς, γνησίως αύξουσες και ιδιάζουσες συναρτήσεις στο $(0,1)$. Τέλος, η συνάρτηση $?(x)$ προκύπτει για $\lambda = \frac{1}{2}$, όπως και στην οικογένεια συναρτήσεων που όρισε ο Denjoy.

Λίγους μήνες αργότερα ο Roland Girgensohn δημοσιεύει ένα άρθρο [6] στο οποίο παρουσιάζει επίσης μια ευρύτερη παραμετρκή οικογένεια ιδιαζουσών συναρτήσεων. Η $?(x)$ προκύπτει και σε αυτήν την περίπτωση όταν η τιμή της παραμέτρου ισούται με $\frac{1}{2}$. Ο Girgensohn χρησιμοποιεί, όπως ο Denjoy, τις ιδιότητες των συνεχών κλασμάτων για την κατασκευή της οικογένειας, και δίνει δύο συστήματα συναρτήσεων ορισμένα για κάθε x στο $(0,1)$:

$$r\left(\frac{x}{x+1}\right) = tr(x), \qquad r\left(\frac{1}{2-x}\right) = t + (1-t)r(x)$$

και

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = tf(x), \qquad r\left(\frac{1}{x+1}\right) = 1-(1-t)tf(x).$$

Το πρώτο σύστημα οφείλεται στην εργασία του Georges de Rham, ο οποίος δίνει την μοναδική τιμή $t = 1/2$ που αντιστοιχεί στην συνάρτηση του Minkowski. Το δεύτερο σύστημα σύμφωνα με τον Girgensohn έχει μοναδική φραγμένη συνάρτηση ως λύση για $t = 1/2$, συγκεκριμένα την $?(x)$.

Προχωράμε τώρα στους Pelegrí Viader, Jaume Paradís, και Lluís Bibiloni που έχουν εργαστεί εκτενώς πάνω στην $?(x)$ και σε άλλες ιδιάζουσες συναρτήσεις.

Στο άρθρο [7] (1997) η $?(x)$ δίνεται με τη μορφή μιας ασυμπτωτικής συνάρτησης κατανομής για μια ακολουθία ρητών του $(0,1)$. Γενικά μία ασυμπτωτική συνάρτηση κατανομής $F(x)$ μιας ακολουθίας ρητών $\{q_n\}$ του $(0,1)$ ορίζεται ως:

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\#(q_i \leqslant x : i = 1,2,\ldots,n)}{n}.$$

Έπειτα αποδεικνύουν ότι η $?(x)$ είναι ιδιάζουσα, έχοντας μηδενική παράγωγο σε ένα σύνολο μέτρου ίσο με 1.

Στο δεύτρο άρθρο τους [8] αποδεικνύουν την ίδια ιδιότητα χρησιμοποιώντας ένα σύνολο S μέτρου 1, για το οποίο όμως τόσο η εικόνα του μέσω της $?(x)$ όσο κι η αντίστροφη εικόνα του S μέσω της $?(x)$ έχουν μέτρο ίσο με μηδέν. Παραθέτουν επίσης μία αναλυτική έκφραση της παραγώγου της $?(x)$ με τη βοήθεια συνεχών κλασμάτων. Αποδεικνύουν επίσης την εξής πρόταση:

Πρόταση 6.2. (α) *Αν στην έκφραση του x ως συνεχές κλάσμα ο μέσος όρος των μερικών πηλίκων (δηλαδή των a_i, βλέπε Ορισμό 2.2) είναι μεγαλύτερος από $\overline{k} \simeq 5.31972$ κι υπάρχει η $?'(x)$, τότε $?'(x) = 0$. Η ακριβής τιμή του $\overline{k}$ είναι η λύση της εξίσωσης $2\log_2(1+x) - x = 0$.*

(β) *Αν η μέση τιμή όπως στο* (α) *είναι μικρότερη από $\underline{k} = 2\log_2\phi$, όπου ϕ είναι η χρυσή τομή, τότε $?'(x) = \infty$.*

Συνεχίζουμε με τους Olga R. Beaver και Thomas Garrity, οι οποίοι το 2002 [9] παρουσίασαν την ιδέα της γενίκευσης της συνάρτησης του Minkowski στις δύο διαστάσεις.

Το σκεπτικό τους έχει ώς αφετηρία την φυσική επέκταση της συνάρτησης στις δύο διαστάσεις, όπως έχουμε δει να συμβαίνει και στο κείμενο του Minkowski. Με ανάλογο συλλογισμό όπως στην περίπτωση των τετραγωνικών άρρητων αλγεβρικών αριθμών, θέτουν το ερώτημα αν μπορεί να γενικευτεί και για τους κυβικούς άρρητους αριθμούς η σχέση που υπάρχει με την περιοδικότητα των συνεχών κλασμάτων. Σε αυτό το σημείο αναφέρονται σε ένα άλυτο πρόβλημα του Charles Hermite:

Να βρεθεί μία μέθοδος με την οποία μπορεί να εκφραστεί ένας πραγματικός αριθμός με μια ακολουθία από θετικούς ακέραιους, έτσι ώστε η ακολουθία να είναι περιοδική ακριβώς όταν ο αρχικός αριθμός είναι άρρητος κυβικός.

Παρότι οι Beaver και Garrity δεν λύνουν το παραπάνω πρόβλημα, τα αποτελέσματα που δίνουν έχουν ενδιαφέρον από γεωμετρική αλλά κι από αναλυτική σκοπιά. Βασικό εργαλείο τους είναι η διαμέριση ενός μοναδιαίου τριγώνου Δ με δύο διαφορετικούς τρόπους (Farey και Bary partition) έτσι ώστε να προκύψει μία ανάλογη με την $?(x)$ αντιστοίχιση $\delta : \Delta_F \to \Delta_B$. Μέσω της δ καταφέρνουν να αντιστοιχίσουν ένα σύνολο ζευγαριών απο κυβικούς άρρητους σε ένα σύνολο ζευγαριών από ρητούς. Γενικότερα, καταλήγουν σε μία σειρά συμπερασμάτων συνδέοντας τις δύο διαμερίσεις με τους άρρητους κυβικούς και τους ρητούς αντίστοιχα.

Γυρνώντας λίγο πίσω στον χρόνο, συγκεκριμένα το 1987, μπορούμε να διαβάσουμε ένα αποτέλεσμα του Ramharter [10] που οδηγεί σε μία νέα απόδειξη για το γεγονός ότι η $?(x)$ είναι ιδιάζουσα:

Έστω ότι $?(x) = y = [0, a_1, a_2, \ldots]$ κι ας θεωρήσουμε το δυαδικό ανάπτυγμα του x, δηλαδή

$$x = 0_{a_1-1}1_{a_2}0_{a_3}1_{a_4}0_{a_5}\ldots,$$

όπου οι δείκτες υποδηλώνουν τον αριθμό των διαδοχικών επεναλήψεων των ψηφίων 0 και 1 (string length). Είναι γνωστό ότι:

$$[a_1+1, 2_{a_2-1}, a_3+2, 2_{a_4-1}, a_5+2, \ldots] = ?^{-1}(0_{a_1-1}1_{a_2}0_{a_3}1_{a_4}0_{a_5}\ldots) \tag{6.1}$$

και ότι η $?(x)$ είναι ιδιάζουσα.

Ο Ramharter αποδεικνύει την πρώτη ισότητα δείχνοντας ότι

$$[a_1+1, 2_{a_2-1}, a_3+2, 2_{a_4-1}, a_5+2, \ldots] = [0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots] \tag{6.2}$$

κι ότι

$$[0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots] = ?^{-1}(0_{a_1-1}1_{a_2}0_{a_3}1_{a_4}0_{a_5}\ldots). \tag{6.3}$$

Έπειτα μέσω αυτής της ισότητας αποδεικνύει ότι η $?(x)$ είναι ιδιάζουσα συνάρτηση.

Τέλος θα αναφερθούμε σε τρείς μαθηματικούς οι οποίοι ουσιαστικά ανακάλυψαν την συνάρτηση ;(ξ) από την αρχή:

Ο Folke Ryde το 1927 [11] ορίζει την συνάρτηση χωρίς να γνωρίζει την εργασία του Minkowski. Το 1981 στο [12] συνδέει τη δουλειά του με αυτήν του Minkowski και χρησιμοποιεί στον ορισμό της συνεχή κλάσματα και δυαδικούς.

Ο M. Mays στο «*A Farey function*» (2002), [13] ορίζει την συνάρτηση ακριβώς όπως ο Minkowski και σημείωνει ότι κατά τη διάρκεια της ανάπτυξης των κλασμάτων τύπου Farey στο $(0, 1)$, μειώνεται η πυκνότητά τους κοντά στα σημεία $0, 1/2, 1$, ενώ αντιθέτως η εικόνα τους συγκεντρώνεται κοντά στα ίδια σημεία.

Τέλος, ο John Conway περιγράφει στο βιβλίο του *On Numbers and Games* ένα αριθμητικό παιχνίδι-διαδικασία που αναλογεί στην $?(x)$ και παρέχει μια αριθμητική μέθοδο για να υπολογίσουμε την αντίστροφη εικόνα της $?(x)$ με τη βοήθεια της σχέσης (6.1). Περισσότερες λεπτομέρειες μπορεί να δει κανείς και στο άρθρο του Conley [2].

Αναφορές

[1] R. Salem, *On some singular monotonic functions which are strictly increasing*, 1943.

[2] R. Conley, *A Survey of the Minkowski* $?(x)$ *Function*, 2003.

[3] A. Denjoy, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, 1932.

[4] J. R. Kinney, *Note on a singular function of Minkowski*, 1959.

[5] R. Tichy and J. Uitz, *An extension of Minkowski's singular function*, 1995.

[6] R. Girgensohn, *Constructing singular functions via Farey fractions*, 2001.

[7] P. Viader, J. Paradis and L. Bibiloni, *A new light on Minkowski"s* $?(x)$ *function*, 2001.

[8] J. Paradis, P. Viader, and L. Bibiloni, *The derivative of Minkowski"s* $?(x)$ *function*, 2001.

[9] O. Beaver and T. Garrity, *A two dimensional Minkowski* $?(x)$ *function*, 2002.

[10] G. Ramharter, *On Minkowski's singular function*, 1987.

[11] F. Ryde, *Arithmetical continued fractions*, 1926.

[12] F. Ryde, *On the relation between two Minkowski functions*, 1983.

[13] M. Mays, *A Farey function*, 2002.