Το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz

Κωνσταντίνα Ταξείδη

Περίληψη

Το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz είναι ένα από τα δύο κλασσικά θεωρήματα παρεμβολής, μαζί με το θεώρημα Riesz-Thorin. Περιγράφουμε την απόδειξή του και μία από τις πιο σημαντικές εφαρμογές του: το γεγονός ότι ο μεγιστικός τελεστής των Hardy-Littlewood είναι φραγμένος τελεστής στον $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$. Στη συνέχεια εισάγουμε τους χώρους Lorentz και δίνουμε την απόδειξη της πιο γενικής μορφής του θεωρήματος παρεμβολής του Marcinkiewicz: εξασθενίζουμε τις υποθέσεις και ταυτόχρονα παίρνουμε ισχυρότερο συμπέρασμα.

1 Ιστορικά στοιχεία για τον J. Marcinkiewicz

O Jósef Marcinkiewicz (1910-1940) γεννήθηκε στην Πολωνία και σπούδασε Μαθηματικά στο Πανεπιστήμιο Stefan Batory, στο Wilno – επιλέγοντας μεταξύ των θετικών επιστημών και της Πολωνικής Λογοτεχνίας.

Κατά το δεύτερο έτος των σπουδών του, γνωρίζει τον καθηγητή και μέντορά του Antoni Zygmund. Ο Zygmund ενδιαφερόταν για την μελέτη των τριγωνομετρικών σειρών και σε διάλεξη που παρέθεσε σε σπουδαστές του δευτέρου έτους, παρουσίασε μία άκρως φιλόδοξη άσκηση με προαπαιτούμενες γνώσεις ολοκληρώματος Lebesgue. Ο Marcinkiewicz – αν και μέχρι εκείνη τη στιγμή δεν είχε εκδηλώσει ενδιαφέρον για τον εν λόγω τομέα, προσέγγισε τον Zygmund και σύντομα ανέπτυξαν σχέσεις συνεργασίας. Η ταχύτατη εξέλιξη του Marcinkiewicz και οι ρηξικέλευθες ιδέες του εντυπωσίασαν τον Zygmund, ο οποίος αφιέρωνε πολύ χρόνο στις συζητήσεις μαζί του.

Η ταχεία πρόοδος του Marcinkiewicz είχε ως αποτέλεσμα την ολοκλήρωση των προπτυχιακών σπουδών του το 1933 και την παρουσίαση της πτυχιακής του εργασίας περί της σύγκλισης των τριγωνομετρικών πολυωνύμων. Ο Marcinkiewicz επεκτείνει αυτά τα μαθηματικά αποτελέσματα το 1935 με την διδακτορική διατριβή του "Trigonometric Interpolation of Absolutely Continuous Functions", την οποία περατώνει ενώ εκπληρώνει τις στρατιωτικές του υποχρεώσεις.

Την ίδια χρονική περίοδο, ο Marcinkiewicz αρχίζει τη σταδιοδρομία του στη διδασκαλία και την έρευνα ως λέκτορας στο πανεπιστήμιο του Wilno και ταξιδεύει στην – ουκρανική σήμερα – πόλη Λβιβ, όπου συνεργάζεται με τον Schauder και επηρεάζεται από το ενδιαφέρον του για τις μερικές διαφορικές εξισώσεις. Το φθινόπωρο του 1936 επιστρέφει στην Πολωνία και το 1937 ανήκει πλέον στη βαθμίδα των Dozent, μία θέση υπό τον καθηγητή, αλλά εξαιρετικά υψηλή.

Ωστόσο, την άνοιξη του 1939 ο ζήλος του τον οδηγεί στο Παρίσι και κατόπιν στην Αγγλία. Αυτό το διάστημα της ζωής του αποδεικνύεται ιδιαιτέρως παραγωγικό για τον Marcinkiewicz, ο οποίος συνεργάζεται με σπουδαίες μαθηματικές προσωπικότητες και καταγράφει τα μαθηματικά αποτελέσματα και τις ιδέες του. Τον Αύγουστο του ίδιου έτους η πολιτική κατάσταση στην Ευρώπη επιδεινώνεται και ο Marcinkiewicz παρακινημένος από το αίσθημα του καθήκοντος αποφασίζει να επιστρέψει στην Πολωνία, παρά την επιμονή των συνεργατών και των φίλων του να παραμείνει στη Μ. Βρετανία.

Με την επιστροφή του στην Πολωνία παραδίδει τα χειρόγραφά του στους γονείς του και λίγες ημέρες μετά κηρύσσεται ο πόλεμος. Στις 2 Σεπτεμβρίου 1939 ο Marcinkiewicz, ο οποίος έχει ήδη καταταγεί, δεν εμφανίζεται στη συνάντηση με τον καθηγητή του Zygmund και λίγο καιρό αργότερα βρίσκεται αιχμάλωτος πολέμου σε ρωσικό έδαφος, όπου ζητά μαθηματικά βιβλία. Η ημερομηνία και ο τόπος θανάτου του δεν είναι γνωστά, αλλά εικάζεται ότι πέθανε στο Katyn. Τα χειρόγραφά του δεν βρέθηκαν ποτέ.

Όσον αφορά στην απόδειξη του θεωρήματος παρεμβολής το οποίο θα μελετήσουμε εν συνεχεία, ο Marcinkiewicz δεν δημοσίευσε κάποια απόδειξη. Ο ίδιος ανακοίνωσε το περιεχόμενό του και ένα τμήμα της απόδειξης στον Zygmund το 1939. Το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz εδημοσίευσε ο καθηγητής του Antoni Zygmund το 1956.

2 Το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz

Το θεώρημα του Marcinkiewicz είναι ένα εκ των δύο σημαντικών αποτελεσμάτων παρεμβολής για τελεστές. Εξασφαλίζει ότι αν ένας υπογραμμικός τελεστής ικανοποιεί δύο ανισότητες ασθενούς τύπου για χώρους L^p τότε είναι φραγμένος για τους ενδιάμεσους χώρους L^p, δηλαδή ικανοποιεί ανισότητα ισχυρού τύπου γι¨ αυτούς. Το δεύτερο κλασσικό θεώρημα αυτού του τύπου είναι το θεώρημα των Riesz-Thorin.

Προκειμένου να κατανοήσουμε τους παραπάνω όρους, παραθέτουμε στη συνέχεια τους απαραίτητους ορισμούς.

Ορισμός 2.1. Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε ως *συνάρτηση κατανομής* της f την $\lambda_f : (0,\infty) \to [0,\infty)$, που ορίζεται ως εξής:

$$\lambda_f(\alpha) = \mu(\{x : |f(x)| > \alpha\}).$$

Παρατηρήσεις 2.2. (α) Αν f,g μετρήσιμες με $|f| < |g|$ τότε $\lambda_f \leqslant \lambda_g$. (Η απόδειξη είναι απλή: χρησιμοποιούμε τον ορισμό της συνάρτησης κατανομής και την ιδιότητα του μέτρου $A \subseteq B \implies \mu(A) \leqslant \mu(B)$).

(β) Αν f_n ακολουθία συναρτήσεων τέτοια ώστε $|f_n| \leqslant f$ τότε

$$\lambda_{f_n} \nearrow \lambda_f.$$

(γ) Αν η συνάρτηση f γράφεται ως άθροισμα των g, h τότε

$$\lambda_f(\alpha) \leqslant \lambda_g(\alpha/2) + \lambda_h(\alpha/2).$$

Η πρόταση που ακολουθεί αποδεικνύεται εξαιρετικά χρήσιμη για το συμπέρασμα απλών, αλλά βασικών βημάτων κατά την απόδειξη του θεωρήματος παρεμβολής.

Πρόταση 2.3. *Έστω $0 < p < \infty$. Αν $f \in L^p(\mu)$ τότε*

$$\int |f|^p \, d\mu = \quad p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_f(\alpha) \, d\alpha \tag{2.1}$$

Απόδειξη. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Πρώτη περίπτωση: Αν η συνάρτηση f είναι απλή τότε το συμπέρασμα έπεται με χρήση του θεωρήματος Fubini.

Δεύτερη περίπτωση: Αν η f δεν είναι απλή, τότε μπορούμε να την προσεγγίσουμε με μια ακολουθία απλών μετρησίμων συναρτήσεων f_n, τέτοια ώστε $|f_n| \leqslant |f|$ και $|f_n| \to |f|$.

Τότε, από την Παρατήρηση 2.2 (β) έχουμε ότι $\lambda_{f_n} \nearrow \lambda_f$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue έπεται το συμπέρασμα. □

Πρόταση 2.4. *Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση και b τυχών θετικός αριθμός. Ορίζουμε $A_b = \{x : |f(x)| > b\}$. Θέτουμε*

$$h_b = f\chi_{A_b^c} + b(\mathrm{sgn} f)\chi_{A_b}$$

και

$$g_b = f - h_b.$$

Τότε $\lambda_{g_b}(\alpha) = \lambda_f(\alpha + b)$ και

$$\lambda_{h_b}(\alpha) = \begin{cases} \lambda_f(\alpha) & \text{αν} \quad \alpha < b \\ 0 & \text{αν} \quad \alpha \geqslant b \end{cases}. \tag{2.2}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $g_b = (\mathrm{sgn} f)(|f| - b)\chi_{A_b}$. Επίσης,

$$h_b = \begin{cases} f \quad \text{αν} \quad |f(x)| \leqslant b \\ b\,(\mathrm{sgn} f) \quad \text{αν} \quad |f(x)| > b \end{cases} \tag{2.3}$$

και

$$|h_b| = \begin{cases} |f| \quad \text{αν} \quad |f(x)| \leqslant b \\ b \quad \text{αν} \quad |f(x)| > b \end{cases} \tag{2.4}$$

Συνεπώς $|h_b| \leqslant b$. Άρα,

$$\lambda_{h_b}(\alpha) = \begin{cases} \lambda_f(\alpha) \quad \text{αν} \quad \alpha < b \\ 0 \quad \text{αν} \quad \alpha \geqslant b \end{cases} \tag{2.5}$$

Τώρα,

$$\mu(\{x : |f(x)| - b > \alpha\}) = \mu(\{x : |f(x)| > \alpha + b\}) = \lambda_f(\alpha + b). \tag{2.6}$$

□

Ορισμός 2.5. *Έστω f μετρήσιμη. Για $0 < p < \infty$ θέτουμε*

$$[f]_p = \left(\sup_{\alpha>0} \alpha^p \lambda_f(\alpha)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ορίζουμε ως ασθενή χώρο L^p, και τον συμβολίζουμε με $L^{p,w}$, την κλάση των μετρησίμων f για τις οποίες $[f]_p < \infty$.

Σημείωση: (α) Η $[\cdot]$ δεν είναι νόρμα, καθώς δεν ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα. Ισχύει, ωστόσο, η έτερη ιδιότητα της νόρμασ: $[cf]_p = |c|[f]_p$.

(β) Ισχύουν οι $L^p \subset L^{p,w}$ και $[f]_p \leqslant \|f\|_p$.

Ορισμός 2.6. *Υπογραμμικοί καλούνται οι τελεστές που ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητεσ: $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ και $T(x+y) \leqslant T(x) + T(y)$*

Ορισμός 2.7. *Έστω υπογραμμικός τελεστής $T : V \to Y$, όπου V υποσύνολο του (X, μ) και $(X, \mu), (Y, \nu)$ χώροι μετρησίμων συναρτήσεων. Ο T καλείται ισχυρού τύπου (π,χ) αν $L^p(\mu) \subset V$, ο T απεικονίζει τον $L^p(\mu)$ στον $L^q(\nu)$, και*

$$\|Tf\|_q \leqslant C\|f\|_p$$

για κάθε $f \in L^p$ και κάποια σταθερά $C > 0$.

Ορισμός 2.8. *Έστω T υπογραμμικός μετασχηματισμός $T : V \to Y$, όπου V υποσύνολο του (X, μ) και $(X, \mu), (Y, \nu)$ χώροι μετρησίμων συναρτήσεων. Ο T καλείται ασθενούς τύπου (π,χ), για κάποιους $p \in [1, \infty)$ και $q \in [1, \infty]$, αν ο T απεικονίζει τον $L^p(\mu)$ στον $L^{q,w}$ και*

$$[Tf]_q \leqslant C\|f\|_p$$

για κάθε $f \in L^p$.

Μελετάμε στη συνέχεια το *θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz*. Σε αντίθεση με το *θεώρημα των Riesz-Thorin*, εφαρμόζεται τόσο για γραμμικούς όσο και για υπογραμμικούς τελεστές, οι οποίοι ικανοποιούν ανισότητες ασθενούς τύπου. Ωστόσο, οι σταθερές που περιλαμβάνει το φράγμα για τη νόρμα του τελεστή είναι εμφανώς πιο περίπλοκες από εκείνες του θεωρήματος Riesz-Thorin.

Θεώρημα 2.9 (παρεμβολής του Marcinkiewicz, 1939)**.** *Έστω υπογραμμικός τελεστής $T : (X, \mu) \to (Y, \nu)$, όπου (X, μ), (Y, ν) είναι χώροι μέτρου, και έστω $p_0, q_0, p_1, q_1 \in [1, \infty]$ με $p_0 \leqslant q_0$, $p_1 \leqslant q_1$ και $q_0 \neq q_1$, οι οποίοι ικανοποιούν τις*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \quad \textit{και} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$$

για κάποιον $t \in (0,1)$. Αν ο T απεικονίζει τον $L^{p_0}(X,\mu) + L^{p_1}(X,\mu)$ στον υπόχωρο των ν-μετρησίμων συναρτήσεων του Y και

$$[Tf]_{q_i} \leqslant C_i \|f\|_{p_i}$$

για κάποιες σταθερές $C_i > 0$, $i = 0,1$, τότε υπάρχει σταθερά C, η οποία εξαρτάται από τα p_0, q_0, p_1, q_1, C_0, C_1, τέτοια ώστε

$$\|Tf\|_q \leqslant C\|f\|_p.$$

Δηλαδή, αν ο T είναι ασθενούς τύπου (p_0,q_0) και (p_1,q_1) τότε ο T είναι ισχυρού τύπου (p,q).

Η ιδέα της απόδειξης βασίζεται στη χρήση του επιχειρήματος της Πρότασης 2.4. Γράφουμε, δηλαδή, την f ως άθροισμα κατάλληλων g_b, h_b και τη νόρμα συναρτήσει της λ_f. Επιλέγουμε b τέτοιο ώστε να παίρνουμε κατάλληλη σταθερά ως φράγμα της q-νόρμας της Tf.

Απόδειξη. Εξετάζουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Πρώτη περίπτωση: Για $p_0, p_1, p, q_1 = \infty$, $q_0 \neq q_1$.

Για κάθε $\alpha > 0$,

$$\alpha^{q_0}\lambda_{Tf}(\alpha) \leqslant [Tf]_{q_0}^{q_0} \leqslant C_0^{q_0}\|f\|_p^{q_0}.$$

Η πρώτη ανισότητα προκύπτει διότι το δεξί μέλος είναι supremum και η δεύτερη από την υπόθεση.

Άρα,

$$\lambda_{Tf}(\alpha) \leqslant \Big(\frac{C_0\|f\|_p}{\alpha}\Big)^{q_0}$$

και

$$\|Tf\|_\infty \leqslant C_1\|f\|_p.$$

Από την Πρόταση 2.4 και παίρνοντας $b = C_1\|f\|_p$, έπεται ότι $\lambda_{Tf}(\alpha) = 0$ αν $\alpha > b$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_q^q &= q\int_0^\infty \alpha^{q-1}\lambda_{Tf}(\alpha)\,d\alpha \\
&= q\int_0^b \alpha^{q-1}\lambda_{Tf}(\alpha)\,d\alpha \\
&\leqslant q\int_0^b \alpha^{q-1}\Big(\frac{C_0\|f\|_p}{\alpha}\Big)^{q_0}\,d\alpha \\
&= qC_0^{q_0}\|f\|_p^{q_0}\int_0^b \alpha^{q-1-q_0}\,d\alpha \\
&= C^q\|f\|_p^q,
\end{aligned}$$

όπου $C > 0$ κατάλληλη σταθερά.

Δεύτερη περίπτωση: Για $q_1, q_0 < \infty$ και $p_0 = p_1$.

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητος ότι $q_0 < q_1$. Έχουμε ότι

$$\lambda_{Tf} \leqslant \left(\frac{C_i\|f\|_p}{\alpha}\right)^{q_i}$$

για $i = 0, 1$. Τότε,

$$\begin{aligned}
[Tf]_q^q &= q\int_0^\infty \alpha^{q-1}\lambda_{Tf}(\alpha)\,d\alpha \\
&\leqslant q\int_0^1 \alpha^{q-1-q_0}C_0^{q_0}\|f\|_p^{q_0}\,d\alpha + q\int_1^\infty \alpha^{q-1-q_1}C_1^{q_1}\|f\|_p^{q_1}\,d\alpha \\
&= q\left(\frac{C_0^{q_0}\|f\|_p^{q_0}}{q-q_0}\right) + q\left(\frac{C_1^{q_1}\|f\|_p^{q_1}}{q-q_1}\right) \\
&= C\|f\|_p^q.
\end{aligned}$$

Αν $p_0 < p_1$, $q_0, q_1 < \infty$, από τις Προτάσεις 2.3 και 2.4, και αλλάζοντας μεταβλητές, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int |g_b|^{p_0} &= p_0\int_0^\infty \alpha^{p_0-1}\lambda_{g_b}(\alpha)\,d\alpha \\
&= p_0\int_b^\infty \alpha^{p_0-1}\lambda_f(\alpha+b)\,d\alpha \\
&= p_0\int_b^\infty (\alpha-b)^{p_0-1}\lambda_f(\alpha)\,d\alpha \\
&\leqslant p_0\int_b^\infty \alpha^{p_0-1}\lambda_f(\alpha)\,d\alpha
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\int |h_b|^{p_1} &= p_1\int_0^\infty \alpha^{p_1-1}\lambda_{h_b}(\alpha)\,d\alpha \\
&= p_1\int_1^b \alpha^{p_1-1}\lambda_f(\alpha)\,d\alpha.
\end{aligned}$$

Από την Παρατήρηση 2.2 (γ) έπεται ότι

$$
\begin{aligned}
\int |Tf|^q &= q\int_0^\infty \beta^{q-1}\lambda_{Tf}(\beta)\,d\beta \\
&= 2^q q\int_0^\infty \beta^{q-1}\lambda_{Tf}(2\beta)\,d\beta \\
&\leqslant 2^q q\int_0^\infty \beta^{q-1}(\lambda_{Tg_b}(\beta)+\lambda_{Th_b}(\beta))\,d\beta \\
&\leqslant 2^q q\int_0^\infty \beta^{q-1}\Big(\frac{[Tg_b]_{q_0}^{q_0}}{\beta^{q_0}}+\frac{[Th_b]_{q_1}^{q_1}}{\beta^{q_1}}\Big)\,d\beta \\
&\leqslant 2^q q\int_0^\infty \beta^{q-1}\Big((\frac{C_0\|g_b\|_{p_0}}{\beta})^{q_0}+(\frac{C_1\|h_b\|_{p_1}}{\beta})^{q_1}\Big)\,d\beta \\
&\leqslant 2^q qC_0^{q_0}\int_0^\infty \beta^{q-q_0-1}(p_0\int_b^\infty \alpha^{p_0-1}\lambda_f(\alpha)\,d\alpha)^{q_0/p_0}\,d\beta \\
&\quad + 2^q qC_1^{q_1}\int_0^\infty \beta^{q-q_1-1}(p_1\int_0^b \alpha^{p_1-1}\lambda_f(\alpha)\,d\alpha)^{q_1/p_1}\,d\beta \\
&= 2^q qC_0^{q_0}p_0^{q_0/p_0}\int_0^\infty \beta^{q-q_0-1}(p_0\int_b^\infty \alpha^{p_0-1}\lambda_f(\alpha)\,d\alpha)^{q_0/p_0}\,d\beta \\
&\quad + +2^q qC_1^{q_1}p_1^{q_1/p_1}\int_0^\infty \beta^{q-q_1-1}(p_1\int_0^b \alpha^{p_1-1}\lambda_f(\alpha)\,d\alpha)^{q_1/p_1}\,d\beta.
\end{aligned}
$$

Το b ήταν τυχόν. Επιλέγουμε $b=\beta^\sigma$, όπου $\sigma=\frac{p_0(q_0-q)}{q_0(p_0-p)}$. Έστω $A_0=\{(\alpha,\beta)|\alpha>\beta^\sigma\}$ και $A_1=\{(\alpha,\beta)|\alpha<\beta^\sigma\}$. Από την ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \beta^{q-q_i-1}\left(\int_0^\infty \chi_{A_i}\alpha^{p_i-1}\lambda_f(\alpha)\,d\alpha\right)^{q_i/p_i}\,d\beta \\
&\qquad \leqslant \left[\int_0^\infty\left(\int_0^\infty \chi_{A_i}\beta^{q-q_i-1}\left(\alpha^{p_i-1}\lambda_f(\alpha)\right)^{q_i/p_i}\,d\beta\right)^{p_i/q_i}\,d\alpha\right]^{q_i/p_i}.
\end{aligned}
$$

Αν $q_1 > q > q_0$: Έχουμε $q - q_0 > 0$ άρα $\sigma > 0$, και $\alpha > \beta^\sigma$ άρα $\alpha^{1/\sigma} > \beta$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
&2^q q C_0^{q_0} p_0^{q_0/p_0} \left[\int_0^\infty \left(\int_0^{\alpha^{1/\sigma}} \beta^{q-q_0-1} (\alpha^{p_0-1} \lambda_f(\alpha))^{q_0/p_0} \, d\beta \right)^{p_0/q_0} d\alpha \right]^{q_0/p_0} \\
&\quad = 2^q q C_0^{q_0} p_0^{q_0/p_0} (q-q_0)^{-1} \left(\int_0^\infty \alpha^{p_0-1+(q-q_0)/q_0\sigma} \lambda_f(\alpha) \, d\alpha \right)^{q_0/p_0} \\
&\quad = 2^q q C_0^{q_0} p_0^{q_0/p_0} |q-q_0|^{-1} \left(\int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_f(\alpha) \, d\alpha \right)^{q_0/p_0} \\
&\quad = 2^q q C_0^{q_0} p_0^{q_0/p_0} |q-q_0|^{-1} \left(\frac{\|f\|_p^p}{p} \right)^{q_0/p_0}.
\end{aligned}$$

Αν $q_1 < q < q_0$: Έχουμε $q - q_0 < 0$ άρα $\sigma < 0$, και $\alpha > \beta^\sigma$ άρα $\beta > \alpha^{1/\sigma}$. Τότε, ομοίωσ:

$$\begin{aligned}
&2^q q C_0^{q_0} p_0^{q_0/p_0} \left[\int_0^\infty \left(\int_{\alpha^{1/\sigma}}^\infty \beta^{q-q_0-1} (\alpha^{p_0-1} \lambda_f(\alpha))^{q_0/p_0} \, d\beta \right)^{p_0/q_0} d\alpha \right]^{q_0/p_0} \\
&\quad = 2^q q C_0^{q_0} p_0^{q_0/p_0} |q-q_0|^{-1} \left(\int_0^\infty -\alpha^{p_0-1+(q-q_0)/q_0\sigma} \lambda_f(\alpha) \, d\alpha \right)^{q_0/p_0} \\
&\quad = 2^q q C_0^{q_0} p_0^{q_0/p_0} |q-q_0|^{-1} \left(\frac{\|f\|_p^p}{p} \right)^{q_0/p_0}.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι εξ ορισμού

$$\sigma = \frac{1 - (\frac{q_0}{q})^{-1}}{1 - (\frac{p_0}{p})^{-1}} = \frac{p^{-1}(q^{-1} - q_0^{-1})}{q^{-1}(p^{-1} - p_0^{-1})} = \frac{1 - (\frac{q_1}{q})^{-1}}{1 - (\frac{p_1}{p})^{-1}} = \frac{p_1(q_1 - q)}{q_1(p_1 - p)}. \tag{2.7}$$

Άρα, ομοίως για το δεύτερο τμήμα του αθροίσματος. Τελικά έχουμε:

$$\|Tf\|_q \leqslant 2q^{1/q} \left[\sum (\frac{p_i}{p})^{q_i/p_i} C_i^{q_i} |q - q_i|^{-1} (\|f\|_p^p)^{q_i/p_i} \right]^{1/q}.$$

Γνωρίζουμε ότι ο T είναι υπογραμμικός και άρα, παίρνοντας supremum, έπεται ότι

$$\|Tf\|_q \leqslant C\|f\|_p.$$

Τρίτη περίπτωση: $p_1 = q_1 = \infty$, $b = \frac{\beta}{C_1}$. Τότε,

$$\|Th_b\|_\infty \leqslant C_1 \|h_b\|_\infty \leqslant \beta.$$

Από την Πρόταση 2.4, $\lambda_{Th_b} = 0$. Άρα, το δεύτερο τμήμα του αθροίσματος στην δεύτερη περίπτωση είναι μηδέν. Τότε,

$$\|Tf\|_\infty^{p_1} \leqslant 2\Big(q(p_0/p)^{q_0/p_0} C_0^{q_0} C_1^{q-q_1} |q - q_1|^{-1} \Big)^{1/q} \|f\|_p. \tag{2.8}$$

Τέταρτη περίπτωση: $q_0 < q_1 = \infty$, $b = (\frac{\beta}{d})^\tau$, όπου $d = C_1(\frac{p_1\|f\|_p^p}{p})^{1/p_1}$ και $\tau = \frac{p_1}{p_1 - p}$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\|Th_b\|_\infty^{p_1} &\leqslant C_1^{p_1}\|h_b\|_{p_1}^{p_1} \\
&= C_1^{p_1} p_1 \int_0^b \beta^{p_1-1}\lambda_f(\beta)\, d\beta \\
&\leqslant C_1^{p_1} p_1 b^{p_1-1} \int_0^b \beta^{p-1}\lambda_f(\beta)\, d\beta \\
&\leqslant C_1^{p_1} \frac{p_1}{p} b^{p_1-1}\|f\|_p^p \\
&= C_1^{p_1} \frac{p_1}{p} \left(\frac{\beta}{d}\right)^{p_1} \|f\|_p^p \\
&= \beta^{p_1},
\end{aligned}$$

και $\lambda_{Th_b} = 0$. Επιλέγοντας κατάλληλη σταθερά C έπεται το συμπέρασμα.

Πέμπτη περίπτωση: Για $q_1 < q_0 = \infty$, $b = (\frac{\beta}{d})^\tau$, ώστε $\lambda_{Th_b} = 0$. Επιλέγουμε κατάλληλα d, τ και κατάλληλη θετική σταθερά C. □

3 Η μεγιστική συνάρτηση Hardy-Littlewood

Ορισμός 3.1. Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση με μιγαδικές τιμές. Η f καλείται *τοπικά ολοκληρώσιμη* στο $X \subseteq \mathbb{R}^n$ αν για κάθε μετρήσιμο φραγμένο $E \subset X$ ισχύει $\int_E |f| \leqslant \infty$. Συμβολισμός:$L^1_{\text{loc}}$.

Ορισμός 3.2. Έστω $f \in L^1_{\text{loc}}$. Η *μεγιστική συνάρτηση Hardy-Littlewood* ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{M}f = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y)|\, dy,$$

όπου $B_r(x) = B(x, r)$.

Σημείωση: Η $\mathcal{M}f$ δίνει το supremum των μέσων τιμών της $|f(y)|$ πάνω από τις ανοιχτές μπάλες κέντρου x.

Λήμμα 3.3. *Έστω $\mathcal{U}$ οικογένεια από ανοιχτές μπάλες στον $\mathbb{R}^n$ και $V = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Αν $m(V) > a$, όπου $a \geqslant 0$, τότε υπάρχουν ξένες ανά δύο $U_1, U_2, \ldots, U_k \in \mathcal{U}$ τέτοιες ώστε*

$$\sum_{j=1}^k m(U_j) > \frac{a}{3^n}.$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε $K \subseteq V$ συμπαγές ώστε $a < m(K) \leqslant m(V)$. Τότε υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία $V_1, V_2, \cdots, V_m$ της $\mathcal{U}$ τα οποία καλύπτουν το K. Έστω τώρα U_1 κάποια από τις V_i με τη μεγαλύτερη ακτίνα. Ορίζουμε U_2 να είναι κάποια από τις V_i που να έχει τη μεγαλύτερη δυνατή ακτίνα μεταξύ των V_i που είναι ξένες προς την U_1. Στη συνλεχεια ορίζουμε U_3 να είναι κάποια από τις V_i που να έχει τη μεγαλύτερη δυνατή ακτίνα μεταξύ των V_i που είναι ξένες προς την U_1 και την U_2.

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία έως ότου το πεπερασμένο σύνολο να μην περιέχει άλλες V_i. Παρατηρούμε ότι κάθε $V_i = U_j$ για κάποιο j ή $V_i \bigcap U_j \neq \emptyset$ κατά μη τετριμμένο τρόπο. Θέτουμε

$$W_j = B_{3r_{U_j}}(x_{U_j}).$$

Έχουμε $V_i \subseteq W_j$ για κάθε i, άρα $K \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{k} U$. Συνεπώς,

$$a < m(K) \leqslant \sum_{j=1}^{k} m(Wj) \leqslant \sum_{j=1}^{k} 3^n m(U_j).$$

□

Θεώρημα 3.4. *Ο μεγιστικός τελεστής Hardy-Littlewood που απεικονίζει την f στην $\mathcal{M}f$ είναι φραγμένος στον $L^p(\mathbb{R}^n)$ για $1 < p < \infty$, δηλαδή*

$$\|\mathcal{M}f\|_p \leqslant C\|f\|_p.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι:

(α) $|H(cf)| = |c||Hf|$ (προφανές).

(β) $|H(f+g)| \leqslant |Hf| + |Hg|$ (τριγωνική ανισότητα για την $|\cdot|$).

Από τους Ισχυρισμούς (α) και (β) συμπεραίνουμε ότι ο $f \mapsto \mathcal{M}f$ είναι υπογραμμικός τελεστής (πρώτη συνθήκη του θεωρήματος Marcinkiewicz).

Επιπλέον, ο τελεστής $f \mapsto \mathcal{M}f$ είναι ασθενούς τύπου (∞, ∞), αφού:

$$\sup_{r>0} \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y)|\,dy \leqslant \sup_{r>0} \frac{m(B_r(x))}{m(B_r(x))} \|f\|_\infty.$$

Ισχυρισμός: Ο $f \mapsto \mathcal{M}f$ είναι ασθενούς τύπου $(1,1)$: δηλαδή,

$$\sup_{\alpha>0} (\alpha \lambda_{Tf}(\alpha)) \leqslant C_1 \int |f|$$

για κάθε $f \in L^1$, όπου $C_1 > 0$ είναι μια σταθερά.

Απόδειξη Ισχυρισμού: Έστω $A_\alpha = \{x | Hf(x) > \alpha\}$.

Αν $A_\alpha = \emptyset$ τότε από την Πρόταση 2.4 έπεται ότι $\lambda_{Tf}(\alpha) = 0$, και η ζητούμενη ανισότητα ισχύει τετριμμένα: $0 \leqslant C_1 \int |f|$.

Αν $A_\alpha \neq \emptyset$, τότε επιλέγουμε $r_x > 0$, $x \in A_\alpha$ τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{m(B_{r_x}(x))} \int_{B_{r_x}(x)} |f(y)| \, dy > \alpha.$$

Τότε η οικογένεια $\{B_{r_x}(x)\}$ είναι κάλυψη του A_α.

Σταθεροποιούμε $\beta > 0$ τέτοιο ώστε $m(A_\alpha) > \beta$. Από το Λήμμα, βρίσκουμε ξένες $B_{r_{x_1}}, \cdots, B_{r_{x_k}} = B_1, \cdots, B_n$ ώστε

$$\sum_{i=1}^{k} m(B_i) > 3^{-n}\beta.$$

Τότε,

$$\beta < 3^n \sum_{i=1}^{k} m(B_i) \leqslant \frac{3^n}{\alpha} \int_{B_i} |f(y)| \, dy \leqslant \frac{3^n}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \, dy. \tag{3.1}$$

Αφήνοντας το $\beta \to m(A_\alpha)$, έχουμε

$$m(A_\alpha) \leqslant \frac{3^n}{\alpha} \|f\|_1, \tag{3.2}$$

άρα

$$\sup_{\alpha > 0} (\alpha \lambda_{\mathcal{M}f}(\alpha)) \leqslant 3^n \|f\|_1,$$

δηλαδή

$$[\mathcal{M}f]_1 \leqslant 3^n \|f\|_1. \tag{3.3}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι ο $f \mapsto \mathcal{M}f$ είναι ασθενούς τύπου $(1, 1)$ (δεύτερη συνθήκη του θεωρήματος Marcinkiewicz).

Από το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz για τον υπογραμμικό τελεστή $\mathcal{M}$, ο οποίος είναι ασθενούς τύπου $(1, 1)$ και (∞, ∞), έπεται ότι, για κάθε $p \in (1, \infty)$ υπάρχει $C_p > 0$ ώστε

$$\|Hf\|_p \leqslant C_p \|f\|_p$$

για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. $\square$

4 Χώροι Lorentz

Ορισμός 4.1. Έστω f μετρήσιμη. Ορίζουμε ως *φθίνουσα αναδιάταξη της f* τη συνάρτηση:

$$f^*(t) = \inf\{\alpha : \lambda_f(\alpha) \leqslant t\}.$$

Παρατηρήσεις 4.2. (α) Η f^* είναι φθίνουσα και $\lambda_f = \lambda_{f^*}$.

(β) Αν $\lambda_f(\alpha) < \infty$ για κάθε α, και η $\phi \geqslant 0$ είναι Borel μετρήσιμη, τότε

$$\int \phi \circ |f| \, d\mu = \int_0^\infty \phi \circ f^* \, dt$$

και

$$\|f\|_p = \|f^*\|_p.$$

(γ) $[f]_p = \sup_{t>0}(t^{1/p} f^*(t))$.

(δ) $\int_E |f| \, d\mu \leqslant \int_0^{\mu(E)} f^* \, d\mu$.

Η f^* παρέχει σημαντικές πληροφορίες για την f. Ωστόσο, δεν είναι υποπροσθετική. Ορίζουμε, λοιπόν, ένα μετασχηματισμό εξαιρετικής σημασίας που ικανοποιεί τη συνθήκη της υπογραμμικότητας.

Ορισμός 4.3. Έστω f μετρήσιμη και $E \subset \Omega$. Ορίζουμε ως *μεγιστική συνάρτηση του Muirhead* την εξήσ:

$$f^\dagger(t) = \sup\left\{\frac{1}{t}\int_E |f| \, d\mu : \mu(E) \leqslant t\right\}, \qquad 0 < t < \mu(\Omega).$$

Παρατηρήσεις 4.4. (α) $|f| \leqslant |g| \implies f^\dagger \leqslant g^\dagger$.

(β) $|f_n| \nearrow |f| \implies f_n^\dagger \nearrow f^\dagger$.

(γ) $f^\dagger = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s) \, ds$.

(δ) Ισχύει $f^\dagger(t) = \infty$ για κάθε $0 < t < \mu(\Omega)$ ή $0 \leqslant f^* \leqslant f^\dagger < \infty$.

Πρόταση 4.5. *Έστω $0 < p < q < r \leqslant \infty$. Τότε $L^q \subseteq L^p + L^r$, δηλαδή κάθε $f \in L^q$ γράφεται ως άθροισμα μιας συνάρτησης από τον L^p και μιας συνάρτησης από τον L^r.*

Απόδειξη. Θέτουμε $\{x : |f(x)| > 1\}$ και $g = f\chi_E$, $h = f\chi_{E^c}$. Τότε,

$$\int |g|^p = \int |f|^p \chi_E \leqslant \int |f|^q \chi_E \leqslant \int |f|^q < \infty$$

αφού $f \in L^q$, άρα $g \in L^p$. Ομοίως, αφού $|f(x)| \leqslant 1$ στο E^c,

$$\int |h|^r = \int |f|^r \chi_{E^c} \leqslant \int |f|^q \chi_{E^c} \leqslant \int |f|^q < \infty$$

αφού $f \in L^q$, άρα $h \in L^r$. □

Ορισμός 4.6. Έστω $0 < p < \infty$. Ορίζουμε ως ασθενή L^p *χώρο Lorentz* και συμβολίζουμε με $L^p_w = L^p_w(\Omega, \Sigma, \mu)$ το σύνολο

$$L_{p,\infty} = \left\{ f \in L^1 + L^\infty : \|f\|^*_{p,\infty} = \sup_{\alpha>0} [\alpha(\mu(|f| > \alpha))]^{1/p} < \infty \right\}.$$

Σημείωση: Η $\|f\|^*_{p,\infty} = \sup\{t^{1/p} f^*(t) : 0 < t < \mu(\Omega)\}$ δεν είναι νόρμα.

Πρόταση 4.7. *Έστω $1 < p < \infty$. Τότε $f \in L_{p,\infty}$ αν και μόνο αν $\|f\|^\dagger_{p,\infty} < \infty$, όπου*

$$\|f\|^\dagger_{p,\infty} = \sup\{t^{1/p} f^\dagger : 0 < t < \mu(\Omega)\}.$$

Η $\|\cdot\|^\dagger_{p,\infty}$ είναι νόρμα στον $L_{p,\infty}$ και

$$\|f\|^*_{p,\infty} \leqslant \|f\|^\dagger_{p,\infty} \leqslant p' \|f\|^*_{p,\infty},$$

όπου p' είναι ο συζυγής εκθέτης του p. Ο $(L_{p,\infty}, \|\cdot\|^\dagger_{p,\infty})$ είναι χώρος συναρτήσεων αναλλοίωτος ως προς τις αναδιατάξεις.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε πρώτα την αντίστροφη κατεύθυνση. Έστω ότι $\|f\|^\dagger_{p,\infty} < \infty$. Τότε, αφού $f^* \leqslant f^\dagger$, έχουμε ότι

$$\|f\|^*_{p,\infty} \leqslant \|f\|^\dagger_{p,\infty} < \infty,$$

άρα $f \in L_{p,\infty}$.

Για το ευθύ: αν $f \in L_{p,\infty}$, τότε

$$\int_0^t f^*(s)\, ds \leqslant \|f\|^*_{p,\infty} \int_0^t s^{-1/p}\, ds = p' \|f\|^*_{p,\infty} t^{1-\frac{1}{p}}.$$

□

Ορισμός 4.8. *Ορίζουμε ως $L_{p,q}$ χώρο Lorentz, για $0 < p, q < \infty$, το σύνολο*

$$L_{p,q} = \left\{ f : \|f\|^*_{p,q} = \left(\frac{q}{p} \int_0^{\mu(\Omega)} t^{q/p} f^*(t)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \right\}. \tag{4.1}$$

Σημείωση: Ισχύουν οι $\|f\|^*_{p,q} = \|f\|^*_q$ και $L_{p,p} = L_p$ (με ίσες νόρμες). Όμως, η $\|\cdot\|_{p,q}$ δεν είναι νόρμα και για $p < 1$ ή $q < 1$ δεν υπάρχει ισοδύναμη νόρμα.

Θεώρημα 4.9 (ανισότητα Hardy)**.** *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση στο $[0, \infty)$ και*

$$A_{\theta,\beta}(f)(t) = t^{-\beta} \int_0^t s^\theta f(s) \frac{ds}{s}$$
$$B_{\theta,\beta}(f)(t) = t^\beta \int_0^t s^\theta f(s) \frac{ds}{s}$$

για $-\infty < \theta < \infty$, $\beta > 0$. *Αν* $1 \leqslant q < \infty$ *τότε*
(i)

$$\int_0^\infty (A_{\theta,\beta}(f)(t))^q \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{\beta^q} \int_0^\infty (t^{\theta-\beta} f(t))^q \frac{dt}{t} \tag{4.2}$$

και
(ii)

$$\int_0^\infty (B_{\theta,\beta}(f)(t))^q \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{\beta^q} \int_0^\infty (t^{\theta+\beta} f(t))^q \frac{dt}{t}. \tag{4.3}$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε το (i) διακρίνοντας δύο περιπτώσεις.
Πρώτη περίπτωση: Για $\theta = 1$, $q = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (A_{1,\beta}(f)(t))^1 \frac{dt}{t} &= \int_0^\infty t^{-\beta} \left(\int_0^t s f(s) \frac{ds}{s} \right) \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^\infty t^{-\beta-1} \left(\int_0^t f(u)\, du \right) dt \\
&= \int_0^\infty \left(\int_u^\infty t^{-\beta-1}\, dt \right) f(u)\, du \\
&= \frac{1}{\beta} \int_0^\infty u^{-\beta} f(u)\, du.
\end{aligned}$$

Δεύτερη περίπτωση: Για $\theta = 1$, $1 < q < \infty$ γράφουμε την $f(s)$ ως εξής: $f(s) = (s^{\beta-1/q'})(s^{1-\beta/q'} f(s))$, και εφαρμόζουμε την ανισότητα Holder για ολοκληρώματα:

$$\begin{aligned}
\int_0^t f(s)\, ds &\leqslant \left(\int_0^t s^{\beta-1}\, ds \right)^{1/q'} \left(\int_0^t s^{(1-\beta)q/q'} f(s)^q\, ds \right)^{1/q} \\
&= \left(\frac{t^\beta}{\beta} \right)^{1/q'} \left(\int_0^t s^{(1-\beta)q/q'} f(s)^q\, ds \right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας και την $\frac{q}{q'} = q - 1$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
(A_{1,\beta}(f)(t))^q &\leqslant t^{-\beta} \left[\left(\frac{t^\beta}{\beta} \right)^{1/q'} \left(\int_0^t s^{(1-\beta)(q-1)} f(s)^q\, ds \right)^{1/q}) \right]^q \\
&= \left(\frac{t^\beta}{\beta} \right)^{q-1} \int_0^t s^{(1-\beta)(q-1)} f(s)^q\, ds \\
&= \frac{1}{\beta^{q-1}} t^{-\beta} \int_0^t s^{(1-\beta)(q-1)} f(s)^q\, ds
\end{aligned}$$

(φράγμα για την υπό ολοκλήρωσιν ποσότητα). Τώρα,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (A_{1,\beta}(f)(t))^q \frac{dt}{t} &\leqslant \frac{1}{\beta^{q-1}} \int_0^\infty t^{-1-\beta} \left(\int_0^t s^{(1-\beta)(q-1)} f(s)^q \, ds \right) dt \\ &= \frac{1}{\beta^{q-1}} \int_0^\infty \left(\int_s^\infty t^{-1-\beta} \, dt \right) s^{(1-\beta)(q-1)} f(s)^q \, ds \\ &= \frac{1}{\beta^q} \int_0^\infty s^{-\beta+(1-\beta)(q-1)} f(s)^q \, ds \\ &= \frac{1}{\beta^q} \int_0^\infty \left(s^{(1-\beta)} f(s) \right)^q \frac{ds}{s}.\end{aligned}$$

Ομοίως για τη συνάρτηση $s^{\theta-1}f(s)$.

(ii) Θέτουμε $g(u) = f(1/u)$ και $u = 1/s$. Τότε, από το (i),

$$\begin{aligned}B_{\theta,\beta}(f)(t) &= t^\beta \int_t^\infty s^\theta f(s) \frac{ds}{s} = t^\beta \int_0^{1/t} u^{-\theta} g(u) \frac{du}{u} \\ &= A_{-\theta,\beta}(g)(1/t).\end{aligned}$$

Άρα, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (B_{\theta,\beta}(f)(t))^q \frac{dt}{t} &= \int_0^\infty (A_{-\theta,\beta}(g)(1/t))^q \frac{dt}{t} \\ &\leqslant \frac{1}{\beta^q} \int_0^\infty (t^{\theta+\beta} f(t))^q \frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 4.10. *Αν $f \in (L^1 + L^\infty)(\Omega, \Sigma, \mu)$ τότε*

$$\int t^{(1-\beta)q} (f^\dagger(t))^q \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{\beta^q} \int t^{(1-\beta)q} (f^*(t))^q \frac{dt}{t}. \tag{4.4}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την ανισότητα του Hardy για $f = f^*$ και $\theta = 1$. Τότε,

$$\int (A_{1,\beta}(f^*)(t))^q \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{\beta^q} \int t^{(1-\beta)q} f^*(t)^q \frac{dt}{t}. \tag{4.5}$$

□

Θεώρημα 4.11. *Έστω $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$. Τότε $f \in L_{p,q}$ αν και μόνον αν*

$$\|f\|^\dagger_{p,q} = \left(\frac{q}{p} \int_0^{\mu(\Omega)} t^{q/p} f^\dagger(t) \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty. \tag{4.6}$$

Επιπλέον,

$$\|f\|^*_{p,q} \leqslant \|f\|^\dagger_{p,q} \leqslant p' \|f\|^*_{p,q}.$$

Ο $(L_{p,q}, \|\cdot\|^\dagger_{p,q})$ είναι χώρος συναρτήσεων αναλλοίωτος ως προς τις αναδιατάξεις.

Εξετάζουμε τώρα τη σχέση μεταξύ των $L_{p,q}$.

Θεώρημα 4.12. *Για p σταθερό και q να μεταβάλλεται. Αν $0 < p < \infty$ και $1 \leqslant q < r \leqslant \infty$, τότε $L_{p,q} \subseteq L_{p,r}$, και*

$$\|f\|_{p,r}^* \leqslant \|f\|_{p,q}^*, \quad \|f\|_{p,r}^\dagger \leqslant \|f\|_{p,q}^\dagger.$$

Απόδειξη. Αν $f \in L_{p,q}$, για $0 < t < \mu(\Omega)$ έχουμε από το προηγούμενο θεώρημα:

$$\begin{aligned} t^{1/p} f^\dagger &= \left(\frac{q}{p} \int_0^t (s^{1/p} f^\dagger(t))^q \frac{ds}{s} \right)^{1/q} \\ &\leqslant \left(\frac{q}{p} \int_0^{\mu(\Omega)} (s^{1/p} f^\dagger(t))^q \frac{ds}{s} \right)^{1/q} \\ &= \|f\|_{p,q}^\dagger. \end{aligned}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $1 \leqslant q < r < \infty$. Αφού

$$\frac{q}{p} \int_0^\infty (t^{1/p} h(t))^q \frac{dt}{t} = q \int_0^\infty (t h(t^p))^q \frac{dt}{t}$$

για $h \geqslant 0$ μετρήσιμη, αρκεί να δείξουμε ότι για g φθίνουσα στο $[0, \infty)$ η

$$\left(q \int_0^\infty t^q g(t)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

είναι φθίνουσα συνάρτηση του q.

Πρώτη περίπτωση: Για $q = 1 < r$. Προσεγγίζουμε την g με αύξουσα ακολουθία φθινουσών κλιμακωτών συναρτήσεων, δηλαδή μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$g = \sum_{j=i}^{J} a_j I_{[0,t_j)},$$

όπου $a_j > 0$, $t_j > 0$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα του Minkowski έχουμε

$$\begin{aligned} \left(r \int_0^\infty (t g(t))^r \frac{dt}{t} \right)^{1/r} &\leqslant \sum_{j=i}^{J} \left(r a_j^r \int_0^{t_j} t^{r-1}\, dt \right)^{1/r} \\ &= \sum a_j t_j = \int_0^\infty t g(t) \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Δεύτερη περίπτωση: Για $1 < q < r$. Θέτουμε $\lambda = r/q$, $h(t) = (g(t^{1/q}))^q$, $u = t^q$, δηλαδή $h(u) = (g(t))^q$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\left(r\int_0^\infty (tg(t))^r\frac{dt}{t}\right)^{1/r} &= \left(\lambda\int_0^\infty u^\lambda(h(u))^\lambda\frac{du}{u}\right)^{1/q\lambda}\\ &\leqslant \left(\lambda\int_0^\infty uh(u)\frac{du}{u}\right)^{1/q}\\ &= \left(q\int_0^\infty t^q(g(t))^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Στην περίπτωση που και το p μεταβάλλεται, εργαζόμαστε σε χώρους πεπερασμένου μέτρου και μη ατομικούς. □

Πρόταση 4.13. *Έστω (Ω, Σ, μ) χώρος μέτρου με $\mu(\Omega) < \infty$, μη ατομικός. Τότε, αν $0 < p_1 < p_2 \leqslant \infty$, έχουμε $L_{p_2,q_2} \subseteq L_{p_1,q_1}$ για οποιαδήποτε q_1,q_2.*

Απόδειξη. Αρκεί να το αποδείξουμε για $q_1 = 1$, $q_2 = \infty$. Παρατηρούμε ότι, αν $f \in L_{p_2,\infty}$ τότε

$$\begin{aligned}\frac{1}{p_1}\int_0^{\mu(\Omega)} t^{1/p_1}f^*(t)\frac{dt}{t} &\leqslant \left(\frac{1}{p_1}\int_0^{\mu(\Omega)} t^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}\frac{dt}{t}\right)\|f\|^*_{p_2,\infty}\\ &= \frac{p_2}{p_2-p_1}(\mu(\Omega))^{1/p_1-1/p_2}\|f\|^*_{p_2,\infty}.\end{aligned}$$

□

5 Το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz II

Θεώρημα 5.1. *Έστω $1 \leqslant p_0 < p_1 < \infty$, $1 \leqslant q_0, q_1 \leqslant \infty$, με $q_0 \neq q_1$ και έστω $T : L_{p_0,1} + L_{p_1,1}(\Omega', \Sigma', \mu') \longrightarrow M_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ υπογραμμικός τελεστής, όπου M_1 ο χώρος των μετρησίμων συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι ο T είναι ασθενούς τύπου $(L_{p_0,1}, q_0)$ και $(L_{p_1,1}, q_1)$. Για κάθε $0 < \theta < 1$, ορίζουμε p και q μέσω των*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \text{και} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Τότε, αν $1 \leqslant r \leqslant \infty$, υπάρχει σταθερά $B = B(p_0, p_1, q_0, q_1, C_1, C_2)$ τέτοια ώστε

$$\|Tf\|^*_{q,r} \leqslant B\|f\|^*_{p,r}$$

για κάθε $f \in L_{p,r}$.

Πόρισμα 5.2. *Αν $q \geqslant p$ υπάρχει σταθερά B τέτοια ώστε $\|Tf\|_q \leqslant B\|f\|_p$. Το αποτέλεσνα δεν ισχύει για $q < p$.*

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.1. Θέτουμε $\gamma = \frac{1/q_0 - 1/q_1}{1/p_0 - 1/p_1}, \gamma \in \mathbb{R}$.

Έστω $f \in L_{p,r}$. Θέτουμε

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν} \quad |f(x)| > f^*(\alpha^\gamma) \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{5.1}$$

και $h_\alpha = f - g_\alpha$.

Ο T είναι υπογραμμικός. Έπεται ότι $|Tf| \leqslant |Tg_\alpha| + |Th_\alpha|$ και άρα,

$$(Tf^*)(\alpha) \leqslant (Tg_\alpha)(\alpha/2) + (Th_\alpha)(\alpha/2). \tag{5.2}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\|Tf\|^*_{q,r} &\leqslant \left(\frac{r}{q}\int_0^\infty [\alpha^{1/q}(Tg_\alpha)^*(\alpha/2) + (Th_\alpha)^*(\alpha/2)]^r \frac{d\alpha}{\alpha}\right)^{1/r} \\
&\leqslant \left(\frac{r}{q}\int_0^\infty [\alpha^{1/q}(Tg_\alpha)^*(\alpha/2)]^r \frac{d\alpha}{\alpha}\right)^{1/r} \\
&\quad + \left(\frac{r}{q}\int_0^\infty [\alpha^{1/q}(Th_\alpha)^*(\alpha/2)]^r \frac{d\alpha}{\alpha}\right)^{1/r} \\
&=: J_0 + J_1.
\end{aligned}$$

Για το J_0: ο T είναι ασθενούς τύπου $(L_{p_0,1}, q_0)$, άρα υπάρχει $C_0 > 0$:

$$T(g_\alpha)^*(\alpha/2) \leqslant C_0(\frac{2}{\alpha})^{q_0}\|g_\alpha\|^*_{p_0,1}.$$

Όμως,

$$g^*_\alpha \leqslant f^* I_{[0,\alpha^\gamma)} \quad \Longrightarrow \quad \|g_\alpha\|^*_{p_0,1} \leqslant \frac{1}{p_0}\int_0^{\alpha^\gamma} s^{1/p_0} f^*(s)\frac{ds}{s}. \tag{5.3}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
J_0^r &\leqslant C_1 \int_0^\infty \left(\alpha^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_0}} \int_0^{\alpha^\gamma} s^{1/p_0} f^*(s)\frac{ds}{s}\right)^r \frac{d\alpha}{\alpha} \\
&\overset{\alpha^\gamma = u}{=} C_2 \int_0^\infty \left(u^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}} \int_0^u s^{1/p_0} f^*(s)\frac{ds}{s}\right)^r \frac{du}{u} \\
&= C_2 \int_0^\infty \left(A_{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0},\frac{1}{p_0}}(f^*)(u)\right)^r \frac{du}{u} \\
&\leqslant C_3 \int_0^\infty \left(u^{1/p} f^*(u)\right)^r \frac{du}{u} = C_4(\|f\|^*_{p,r})^r.
\end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο φράσσουμε το $J_1, \|h_\alpha\|_{p_1,1}$. $\square$

Αναφορές

[1] C. Bernard, *Interpolation Theorems and Applications*, 2013.

[2] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley and Sons, Inc., 1984.

[3] D. J. H. Garling, *Inequalities: A Journey into linear Analysis*, Cambridge University Press, 2007.

[4] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, Springer Science+Business Media, LLC, 2008

[5] K. Dabrowski and E. Hensz-Chadzynska, *Józef Marcinkiewicz* (1910-1940), In Commemoration of the 60th Anniversary of his death. Banach Center Publications 56, Warsaw, Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics, 2002.