
Μιχάλης Παπαδημητράκης

Αρμονική Ανάλυση

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Περιεχόμενα

1 Το ολοκλήρωμα Lebesgue.	1
1.1 Σύνολα μηδενικού μέτρου.	1
1.2 Η συλλογή C_0 των κλιμακωτών συναρτήσεων.	3
1.3 Η συλλογή συναρτήσεων C_1	9
1.4 Η συλλογή C_2 των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.	13
1.5 Τα οριακά θεωρήματα.	16
1.6 Ολοκληρώματα σε διαστήματα και ολοκληρώματα μιγαδικών συναρτήσεων.	31
1.7 Το ολοκλήρωμα σε πολλές διαστάσεις.	34
1.8 Ο χώρος $L^1(I)$	39
1.9 Ο χώρος $L^2(I)$	63
2 Σειρές Fourier.	84
2.1 Σειρές Fourier στον $L^1([0, 1])$	84
2.2 Σειρές Fourier στον $L^2([0, 1])$	101
3 Ο μετασχηματισμός Fourier.	106
3.1 Ο μετασχηματισμός Fourier στον $L^1(\mathbb{R})$	106
3.2 Ο μετασχηματισμός Fourier στον $L^2(\mathbb{R})$	122

Κεφάλαιο 1

Το ολοκλήρωμα Lebesgue.

1.1 Σύνολα μηδενικού μέτρου.

Όλα τα σύνολα που θα συναντήσουμε σ' αυτές τις σημειώσεις θα είναι υποσύνολα του \mathbb{R} ή σε μερικές περιπτώσεις του \mathbb{R}^d . Διάφορες περιστασιακές εξαιρέσεις θα τονίζονται ιδιαίτερα.

Θα συμβολίζουμε

$$l(I) = b - a$$

το μήκος ενός διαστήματος $I = [a, b]$. Το ίδιο μήκος έχουν και τα διαστήματα $[a, b)$, $(a, b]$ και (a, b) .

Ειδική περίπτωση διαστήματος θεωρείται και το κενό σύνολο \emptyset , διότι μπορεί να γραφτεί $\emptyset = (a, a)$. Φυσικά, $l(\emptyset) = a - a = 0$.

Ορισμός. Ένα σύνολο A θα λέμε ότι είναι **μηδενικού μέτρου** αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών διαστημάτων τα οποία καλύπτουν το A και έχουν συνολικό μήκος $< \epsilon$. Με σύμβολα: υπάρχουν ανοικτά διαστήματα I_1, I_2, \dots ώστε

$$A \subseteq \bigcup_n I_n \quad \text{και} \quad \sum_n l(I_n) < \epsilon.$$

Σχόλια. [1] Στον παραπάνω ορισμό τα σύμβολα \bigcup_n και \sum_n έχουν το εξής νόημα. Αν η συλλογή διαστημάτων είναι πεπερασμένη, δηλαδή αν τα διαστήματα είναι τα I_1, I_2, \dots, I_k , τότε τα σύμβολα γράφονται $\bigcup_{n=1}^k$ και $\sum_{n=1}^k$. Αν η συλλογή διαστημάτων είναι άπειρη αριθμήσιμη, δηλαδή τα διαστήματα είναι τα I_1, I_2, \dots όπου ο δείκτης n διατρέχει ολόκληρο το \mathbb{N} , τότε τα σύμβολα γράφονται $\bigcup_{n=1}^{+\infty}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}$. Αυτή η επεξήγηση θα ισχύει και σε άλλες ανάλογες περιπτώσεις.

[2] Τί γίνεται αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει αριθμήσιμη συλλογή διαστημάτων - όχι αναγκαστικά ανοικτών - τα οποία καλύπτουν το A και έχουν συνολικό μήκος $< \epsilon$; Παρά το ότι ο παραπάνω ορισμός απαιτεί η συλλογή διαστημάτων να αποτελείται από ανοικτά διαστήματα, το σύνολο A είναι μηδενικού μέτρου.

Πράγματι, σύμφωνα με την παραδοχή μας, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει αριθμήσιμη συλλογή διαστημάτων - όχι αναγκαστικά ανοικτών - τα οποία καλύπτουν το A και έχουν συνολικό μήκος $< \frac{\epsilon}{2}$. Τώρα, θεωρούμε καθένα από τα διαστήματα της συλλογής και το αντικαθιστούμε με ένα μεγαλύτερο ανοικτό διάστημα ίδιου μέσου και διπλάσιου μήκους. Η νέα συλλογή διαστημάτων αποτελείται από ανοικτά διαστήματα τα οποία, επειδή είναι μεγαλύτερα από τα διαστήματα της αρχικής συλλογής, καλύπτουν το A και έχουν διπλάσιο συνολικό μήκος, δηλαδή συνολικό μήκος $< 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών διαστημάτων τα οποία καλύπτουν το A και έχουν συνολικό μήκος $< \epsilon$ και συμπεραίνουμε ότι το A είναι μηδενικού μέτρου.

Παράδειγμα. Το κενό σύνολο \emptyset καθώς και κάθε μονοσύνολο $\{x\}$ είναι σύνολα μηδενικού μέτρου.

Πράγματι, έστω $\epsilon > 0$.

Στην περίπτωση του \emptyset θεωρούμε τη συλλογή που αποτελείται από ένα μόνο ανοικτό διάστημα, το κενό διάστημα $I_1 = \emptyset$. Τότε, προφανώς, $\emptyset \subseteq I_1$ και $l(I_1) = 0 < \epsilon$. Άρα το \emptyset είναι μηδενικού μέτρου.

Στην περίπτωση του $\{x\}$ θεωρούμε τη συλλογή που αποτελείται από ένα μόνο ανοικτό διάστημα, το διάστημα $I_1 = (x - \frac{\epsilon}{3}, x + \frac{\epsilon}{3})$. Τότε, προφανώς, $\{x\} \subseteq I_1$ και $l(I_1) = 2 \cdot \frac{\epsilon}{3} < \epsilon$. Άρα το $\{x\}$ είναι μηδενικού μέτρου.

Πρόταση 1.1. [1] Έστω $A \subseteq B$. Αν το B είναι μηδενικού μέτρου, τότε και το A είναι μηδενικού μέτρου.

[2] Αν τα αριθμήσιμου πλήθους σύνολα A_1, A_2, \dots είναι όλα μηδενικού μέτρου, τότε και η ένωση $\bigcup_n A_n$ είναι μηδενικού μέτρου.

Απόδειξη. [1] Έστω ότι το B είναι μηδενικού μέτρου. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών διαστημάτων τα οποία καλύπτουν το B και έχουν συνολικό μήκος $< \epsilon$. Επειδή $A \subseteq B$, τα ίδια ανοικτά διαστήματα καλύπτουν και το A . Άρα το A είναι μηδενικού μέτρου.

[2] Έστω ότι τα A_1, A_2, \dots είναι όλα μηδενικού μέτρου και έστω $\epsilon > 0$. Τότε για το κάθε A_n υπάρχουν αριθμήσιμου πλήθους ανοικτά διαστήματα $I_{n,1}, I_{n,2}, \dots$ τα οποία καλύπτουν το A_n και έχουν συνολικό μήκος $< \frac{\epsilon}{2^n}$. Τώρα συγκεντρώνουμε όλα τα διαστήματα

$$\begin{array}{lll} I_{1,1} & I_{1,2} & \dots \\ I_{2,1} & I_{2,2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{array}$$

Έτσι δημιουργούμε μια αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών διαστημάτων τα οποία καλύπτουν την ένωση $\bigcup_n A_n$ και έχουν συνολικό μήκος $< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \dots = \epsilon$. Άρα η ένωση $\bigcup_n A_n$ είναι μηδενικού μέτρου. \square

Παράδειγμα. Κάθε αριθμήσιμο σύνολο, για παράδειγμα το \mathbb{Q} , είναι μηδενικού μέτρου.

Πράγματι, έστω $A = \{x_1, x_2, \dots\}$. Τότε $A = \bigcup_n \{x_n\}$ και, επειδή κάθε μονοσύνολο $\{x_n\}$ είναι μηδενικού μέτρου, συνεπάγεται ότι και το A είναι μηδενικού μέτρου.

Τώρα, ίσως κάποιος αναρωτηθεί αν τα μόνα σύνολα μηδενικού μέτρου είναι τα αριθμήσιμα σύνολα. Αυτό δεν ισχύει και θα δούμε ένα συγκεκριμένο υπεραριθμήσιμο σύνολο μηδενικού μέτρου.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την εξής ακολουθία συνόλων

$$\begin{aligned} F_0 &= [0, 1], \\ F_1 &= [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1], \\ F_2 &= [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1], \\ F_3 &= [0, \frac{1}{27}] \cup [\frac{2}{27}, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{7}{27}] \cup [\frac{8}{27}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{19}{27}] \cup [\frac{20}{27}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, \frac{25}{27}] \cup [\frac{26}{27}, 1], \\ &\dots \end{aligned}$$

Τα σύνολα αυτά δημιουργούνται ως εξής. Ξεκινάμε με το $F_0 = [0, 1]$. Χωρίζουμε το $[0, 1]$ σε τρία ισομήκη κλειστά διαστήματα και κρατάμε τα δυο ακριανά: η ένωσή τους είναι το F_1 . Σε καθένα από τα δυο κλειστά διαστήματα που αποτελούν το F_1 επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία, δηλαδή το χωρίζουμε σε τρία ισομήκη κλειστά διαστήματα και κρατάμε τα δυο ακριανά: η ένωση των τεσσάρων διαστημάτων που προκύπτουν είναι το F_2 . Συνεχίζουμε επ' άπειρον.

Είναι φανερό ότι για κάθε n το σύνολο F_n είναι η ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{3^n}$. Άρα το F_n αποτελείται από διαστήματα συνολικού μήκους $2^n \frac{1}{3^n} = (\frac{2}{3})^n$. Είναι, επίσης, φανερό ότι $F_{n+1} \subseteq F_n$ για κάθε n .

Ορισμός. Ορίζουμε το σύνολο $C = \bigcap_{n=0}^{+\infty} F_n$. Το C ονομάζεται **σύνολο του Cantor**.

Τώρα, έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $(\frac{2}{3})^n \rightarrow 0$, υπάρχει αρκετά μεγάλο n ώστε $(\frac{2}{3})^n < \epsilon$. Τότε, επειδή $C \subseteq F_n$, τα πεπερασμένου πλήθους διαστήματα τα οποία αποτελούν το F_n καλύπτουν το C και έχουν συνολικό μήκος $< \epsilon$. Άρα το C είναι μηδενικού μέτρου. (Τα συγκεκριμένα διαστήματα δεν είναι ανοικτά, αλλά θυμηθείτε το δεύτερο σχόλιο μετά από τον ορισμό του συνόλου μηδενικού μέτρου.)

Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι το C δεν είναι αριθμήσιμο σύνολο. Ας υποθέσουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι το C είναι αριθμήσιμο και έστω $C = \{x_1, x_2, \dots\}$. Ένα από τα δυο διαστήματα που αποτελούν το F_1 δεν περιέχει τον x_1 . Ονομάζουμε I_1 αυτό το διάστημα. Το I_1 γεννά δυο διαστήματα από αυτά που αποτελούν το

F_2 : τουλάχιστον ένα από αυτά τα δυο διαστήματα δεν περιέχει τον x_2 . Ονομάζουμε I_2 αυτό το διάστημα. Το I_2 γεννά δυο διαστήματα από αυτά που αποτελούν το F_3 : τουλάχιστον ένα από αυτά τα δυο διαστήματα δεν περιέχει τον x_3 . Ονομάζουμε I_3 αυτό το διάστημα. Συνεχίζουμε επ' άπειρον. Με αυτόν τον τρόπο σχηματίζεται μια ακολουθία εγκιβωτισμένων κλειστών διαστημάτων I_1, I_2, I_3, \dots με τις εξής ιδιότητες:

(i) $I_n \subseteq F_n$ για κάθε n και

(ii) $x_n \notin I_n$ για κάθε n .

Γνωρίζουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός x ο οποίος ανήκει σε κάθε I_n . Σύμφωνα με την (i), ο x ανήκει σε κάθε F_n και, επομένως, ο x ανήκει στο C . Από την άλλη μεριά, βλέπουμε ότι για κάθε n ισχύει $x \in I_n$ και, βάσει της (ii), $x_n \notin I_n$. Επομένως, $x \neq x_n$ για κάθε n . Έτσι καταλήγουμε σε άτοπο: $x \in C$ και $x \notin \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Άρα το C αποτελεί παράδειγμα υπεραριθμήσιμου συνόλου μηδενικού μέτρου.

Ορισμός. Εστω μια ιδιότητα, η ισχύς της οποίας εξαρτάται από τις τιμές μιας πραγματικής μεταβλητής x . Λέμε ότι η ιδιότητα αυτή *ισχύει σχεδόν παντού (σ.π.)* ή, ισοδύναμα, *ότι ισχύει για σχεδόν κάθε (σ.κ.) x* , αν το σύνολο των x για τα οποία δεν ισχύει η ιδιότητα είναι μηδενικού μέτρου.

Παράδειγμα. Θεωρούμε τη συνάρτηση Dirichlet με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Τότε ισχύει $f = 0$ σ.π. Πράγματι το σύνολο $\{x : f(x) \neq 0\}$ είναι ίσο με το \mathbb{Q} , οπότε είναι μηδενικού μέτρου.

1.2 Η συλλογή C_0 των κλιμακωτών συναρτήσεων.

Σε λίγο θα χρησιμοποιήσουμε μια τοπολογική ιδιότητα του \mathbb{R} , δηλαδή το ότι *κάθε κλειστό και φραγμένο $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι συμπαγές*. Σύμφωνα με τον ορισμό της έννοιας της συμπαγείας, αυτό σημαίνει ότι, αν θεωρήσουμε μια οποιαδήποτε συλλογή ανοικτών συνόλων τα οποία καλύπτουν το E , τότε υπάρχουν πεπερασμένα από αυτά τα ανοικτά σύνολα τα οποία, επίσης, καλύπτουν το E . Ουσιαστικά, θα χρησιμοποιήσουμε μια πολύ ειδική περίπτωση αυτής της τοπολογικής ιδιότητας, όπου το κλειστό και φραγμένο σύνολο είναι ένα κλειστό, φραγμένο διάστημα και τα ανοικτά σύνολα που το καλύπτουν είναι ανοικτά διαστήματα. Θα δούμε τώρα την απόδειξη αυτής της ειδικής περίπτωσης.

Πρόταση 1.2. Εστω κλειστό, φραγμένο διάστημα I και μια συλλογή ανοικτών διαστημάτων, τα οποία καλύπτουν το I . Τότε υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους από τα ανοικτά διαστήματα της ίδιας συλλογής τα οποία, επίσης, καλύπτουν το I .

Απόδειξη. Εστω ότι έχουμε μια συλλογή ανοικτών διαστημάτων, τα οποία καλύπτουν το κλειστό, φραγμένο διάστημα I .

Υποθέτουμε - για να καταλήξουμε σε άτοπο - ότι *δεν υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους από τα διαστήματα της συλλογής τα οποία καλύπτουν το I* .

Χωρίζουμε το I σε δύο ισομήκη κλειστά υποδιαστήματα. Αν καθένα από αυτά τα υποδιαστήματα μπορούσε να καλυφτεί από πεπερασμένου πλήθους από τα διαστήματα της συλλογής, τότε και το I θα μπορούσε να καλυφτεί από πεπερασμένου πλήθους από τα διαστήματα της συλλογής. Επομένως, υπάρχει κάποιο από τα δυο υποδιαστήματα, ας το συμβολίσουμε I_1 , το οποίο δε μπορεί να καλυφτεί από πεπερασμένου πλήθους από τα διαστήματα της συλλογής.

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία με το I_1 . Το χωρίζουμε σε δύο ισομήκη κλειστά υποδιαστήματα και παρατηρούμε ότι υπάρχει κάποιο από αυτά, ας το συμβολίσουμε I_2 , το οποίο δε μπορεί να καλυφτεί από πεπερασμένου πλήθους από τα διαστήματα της συλλογής.

Συνεχίζουμε επ' άπειρον και δημιουργούμε ακολουθία εγκιβωτισμένων κλειστών διαστημάτων I, I_1, I_2, \dots με τις εξής ιδιότητες:

(i) $l(I_n) = \frac{l(I)}{2^n}$ για κάθε n , οπότε $l(I_n) \rightarrow 0$.

(ii) Για κάθε n , το I_n δε μπορεί να καλυφτεί από πεπερασμένου πλήθους από τα ανοικτά διαστήματα της συλλογής.

Είναι γνωστό ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός x ο οποίος ανήκει σε όλα τα διαστήματα I, I_1, I_2, \dots . Επειδή το I καλύπτεται από τα διαστήματα της συλλογής και $x \in I$, υπάρχει κάποιο από αυτά, ας το συμβολίσουμε J , ώστε $x \in J$. Επειδή το J είναι ανοικτό, υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε

$$(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq J.$$

Τώρα, από την (i) συνεπάγεται ότι υπάρχει n ώστε $l(I_n) < \epsilon$. Επειδή $x \in I_n$, συνεπάγεται

$$I_n \subseteq (x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq J.$$

Φτάσαμε σε άτοπο: αφ' ενός το I_n δε μπορεί να καλυφτεί από πεπερασμένου πλήθους από τα διαστήματα της συλλογής αφ' ετέρου το I_n καλύπτεται από ένα μόνο από τα διαστήματα της συλλογής, το J . \square

Για πραγματικές συναρτήσεις f, g , όταν ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in A$ γράφουμε

$$f \leq g \text{ στο } A.$$

Αν οι δυο συναρτήσεις έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και αν ισχύει $f \leq g$ στο κοινό πεδίο ορισμού τους, τότε γράφουμε, απλώς, $f \leq g$.

Θυμόμαστε μερικούς τρόπους ορισμού συναρτήσεων από άλλες συναρτήσεις. Από τις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ και τον αριθμό λ ορίζονται οι $f + g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $fg : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\lambda f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με τους τύπους

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Ομοίως, ορίζονται οι $|f| : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\max\{f, g\} : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\min\{f, g\} : A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους

$$|f|(x) = |f(x)|, \quad \max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad \min\{f, g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

Εύκολα βλέπουμε τις σχέσεις

$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \quad \min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|), \quad \max\{f, g\} + \min\{f, g\} = f + g.$$

Τέλος, έχουμε και τις συναρτήσεις

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \quad f^- = \max\{-f, 0\}.$$

Προφανώς,

$$\max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} f(x), & \text{αν } f(x) \geq g(x) \\ g(x), & \text{αν } f(x) \leq g(x) \end{cases}$$

$$\min\{f, g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} g(x), & \text{αν } f(x) \geq g(x) \\ f(x), & \text{αν } f(x) \leq g(x) \end{cases}$$

και, επομένως,

$$f^+(x) = \max\{f, 0\}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{αν } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \max\{-f, 0\}(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{αν } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

Άρα οι συναρτήσεις f^+ και f^- είναι μη-αρνητικές και όχι μεγαλύτερες από την $|f|$, δηλαδή ισχύει $0 \leq f^+(x) \leq |f(x)|$ και $0 \leq f^-(x) \leq |f(x)|$ για κάθε $x \in A$:

$$0 \leq f^+ \leq |f|, \quad 0 \leq f^- \leq |f|.$$

Τέλος, εύκολα βλέπουμε τις σχέσεις

$$f^+ + f^- = |f|, \quad f^+ - f^- = f, \quad f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f), \quad f^- = \frac{1}{2}(|f| - f), \quad f^+ f^- = 0.$$

Ορισμός. Ονομάζουμε **κλιμακωτή συνάρτηση** κάθε συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία μηδενίζεται έξω από κάποιο φραγμένο διάστημα και είναι σταθερή σε καθένα από πεπερασμένου πλήθους διαδοχικά ανοικτά υποδιαστήματα αυτού του διαστήματος. Με σύμβολα: υπάρχουν $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ και c_1, \dots, c_n ώστε $\phi(x) = 0$ για κάθε $x < a$ και κάθε $x > b$ και ώστε $\phi(x) = c_k$ για $x \in (x_{k-1}, x_k)$ για κάθε $k = 1, \dots, n$.

Η ϕ μπορεί να έχει οποιοσδήποτε τιμές στα μεμονωμένα σημεία $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$.

Ορισμός. Συμβολίζουμε \mathcal{C}_0 τη συλλογή όλων των κλιμακωτών συναρτήσεων.

Σχόλιο. Μια χρήσιμη παρατήρηση. Έστω δυο κλιμακωτές συναρτήσεις ϕ και ψ . Στην ϕ αντιστοιχούν τα σημεία τα οποία χωρίζουν τα διαστήματα στα οποία αυτή είναι σταθερή. Ομοίως, στην ψ αντιστοιχούν τα σημεία τα οποία χωρίζουν τα διαστήματα στα οποία αυτή είναι σταθερή. Τα σημεία που αντιστοιχούν στην ϕ μπορεί να είναι διαφορετικά από τα σημεία που αντιστοιχούν στην ψ . Αυτό σημαίνει ότι σε ένα διάστημα στο οποίο είναι σταθερή η ϕ μπορεί να μην είναι σταθερή η ψ και σε ένα διάστημα στο οποίο είναι σταθερή η ψ μπορεί να μην είναι σταθερή η ϕ . Όμως, αν συγκεντρώσουμε όλα αυτά τα σημεία, τότε δημιουργούνται διαδοχικά ανοικτά διαστήματα σε καθένα από τα οποία είναι σταθερή και η ϕ και η ψ . Με άλλα λόγια μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχουν $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ και c_1, \dots, c_n και d_1, \dots, d_n ώστε $\phi(x) = \psi(x) = 0$ για κάθε $x < a$ και κάθε $x > b$ και ώστε $\phi(x) = c_k$ και $\psi(x) = d_k$ για $x \in (x_{k-1}, x_k)$ για κάθε $k = 1, \dots, n$.

Πρόταση 1.3. Έστω κλιμακωτές συναρτήσεις ϕ και ψ και αριθμός λ . Τότε οι συναρτήσεις $\lambda\phi$, $\phi + \psi$, $\phi\psi$, $|\phi|$, $\max\{\phi, \psi\}$ και $\min\{\phi, \psi\}$ είναι όλες κλιμακωτές συναρτήσεις.

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε ότι οι ϕ και ψ περιγράφονται όπως στο τελευταίο σχόλιο.

Η $\lambda\phi$ μηδενίζεται έξω από το $[a, b]$ και είναι σταθερή λc_k σε κάθε διάστημα (x_{k-1}, x_k) . Άρα η $\lambda\phi$ είναι κλιμακωτή.

Ομοίως, η $|\phi|$ μηδενίζεται έξω από το $[a, b]$ και είναι σταθερή $|c_k|$ σε κάθε διάστημα (x_{k-1}, x_k) .

Η $\phi + \psi$ μηδενίζεται έξω από το $[a, b]$ και είναι σταθερή $c_k + d_k$ σε κάθε διάστημα (x_{k-1}, x_k) .

Η $\phi\psi$ μηδενίζεται έξω από το $[a, b]$ και είναι σταθερή $c_k d_k$ σε κάθε διάστημα (x_{k-1}, x_k) .

Η $\max\{\phi, \psi\}$ μηδενίζεται έξω από το $[a, b]$ και είναι σταθερή $\max\{c_k, d_k\}$ σε κάθε διάστημα (x_{k-1}, x_k) .

Η $\min\{\phi, \psi\}$ μηδενίζεται έξω από το $[a, b]$ και είναι σταθερή $\min\{c_k, d_k\}$ σε κάθε διάστημα (x_{k-1}, x_k) . \square

Σχόλιο. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός

$$\lambda\phi + \mu\psi$$

κλιμακωτών συναρτήσεων (όπου λ, μ είναι αριθμοί) είναι κλιμακωτή συνάρτηση. Ειδικότερα η $\phi - \psi$ είναι κλιμακωτή συνάρτηση. Αυτό μπορεί να γενικευτεί επαγωγικά: κάθε γραμμικός συνδυασμός

$$\lambda_1\phi_1 + \dots + \lambda_n\phi_n$$

κλιμακωτών συναρτήσεων (όπου $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ είναι αριθμοί) είναι κλιμακωτή συνάρτηση.

Το ίδιο μπορούμε να πούμε και για τις

$$\phi_1 \cdots \phi_n, \quad \max\{\phi_1, \dots, \phi_n\}, \quad \min\{\phi_1, \dots, \phi_n\}.$$

Άρα, αν οι ϕ, ψ είναι κλιμακωτές συναρτήσεις, τότε οι συναρτήσεις

$$\phi^+ = \max\{\phi, 0\}, \quad \phi^- = \max\{-\phi, 0\}$$

είναι κι αυτές κλιμακωτές.

Ορισμός. Έστω $\phi \in \mathcal{C}_0$, δηλαδή ϕ είναι οποιαδήποτε κλιμακωτή συνάρτηση. Άρα υπάρχουν $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ και c_1, \dots, c_n ώστε $\phi(x) = 0$ για κάθε $x < a$ και κάθε $x > b$ και ώστε $\phi(x) = c_k$ για $x \in (x_{k-1}, x_k)$ για κάθε $k = 1, \dots, n$.

Ορίζουμε το **ολοκλήρωμα** της ϕ και το συμβολίζουμε $\int_{\mathbb{R}} \phi$ ή $\int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx$ με τον τύπο

$$\int_{\mathbb{R}} \phi = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx = \sum_{k=1}^n c_k (x_k - x_{k-1}).$$

Σχόλι α. [1] Το $\int_{\mathbb{R}} \phi$ είναι απλώς το ολοκλήρωμα Riemann της ϕ στο διάστημα $[a, b]$, όπως το γνωρίζουμε από τον Απειροστικό Λογισμό.

[2] Στο σύμβολο $\int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx$ η μεταβλητή x μπορεί να αντικατασταθεί από οποιοδήποτε άλλο γράμμα χωρίς να αλλάξει η τιμή του ολοκληρώματος.

Πρόταση 1.4. [1] Έστω $\phi, \psi \in \mathcal{C}_0$ και αριθμός λ . Τότε

$$\int_{\mathbb{R}} (\phi + \psi) = \int_{\mathbb{R}} \phi + \int_{\mathbb{R}} \psi, \quad \int_{\mathbb{R}} (\lambda\phi) = \lambda \int_{\mathbb{R}} \phi.$$

[2] Έστω $\phi, \psi \in \mathcal{C}_0$. Τότε

$$\phi \leq \psi \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \phi \leq \int_{\mathbb{R}} \psi.$$

Απόδειξη. Έστω $\phi, \psi \in \mathcal{C}_0$. Άρα υπάρχουν $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ και c_1, \dots, c_n και d_1, \dots, d_n ώστε $\phi(x) = \psi(x) = 0$ για κάθε $x < a$ και κάθε $x > b$ και ώστε $\phi(x) = c_k$ και $\psi(x) = d_k$ για $x \in (x_{k-1}, x_k)$ για κάθε $k = 1, \dots, n$.

[1] Τότε $(\phi + \psi)(x) = 0$ για κάθε $x < a$ και κάθε $x > b$ και $(\phi + \psi)(x) = c_k + d_k$ για $x \in (x_{k-1}, x_k)$ για κάθε $k = 1, \dots, n$. Άρα, σύμφωνα με τους ορισμούς,

$$\int_{\mathbb{R}} (\phi + \psi) = \sum_{k=1}^n (c_k + d_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n d_k(x_k - x_{k-1}) = \int_{\mathbb{R}} \phi + \int_{\mathbb{R}} \psi.$$

Επίσης, $(\lambda\phi)(x) = 0$ για κάθε $x < a$ και κάθε $x > b$ και $(\lambda\phi)(x) = \lambda c_k$ για $x \in (x_{k-1}, x_k)$ για κάθε $k = 1, \dots, n$. Άρα,

$$\int_{\mathbb{R}} (\lambda\phi) = \sum_{k=1}^n \lambda c_k(x_k - x_{k-1}) = \lambda \sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1}) = \lambda \int_{\mathbb{R}} \phi.$$

[2] Αν $\phi \leq \psi$, συνεπάγεται $c_k \leq d_k$ για κάθε $k = 1, \dots, n$. Άρα

$$\int_{\mathbb{R}} \phi = \sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n d_k(x_k - x_{k-1}) = \int_{\mathbb{R}} \psi.$$

□

Σχόλι ο. Συνδυάζοντας τις σχέσεις στο [1] της Πρότασης 1.4, βλέπουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} (\lambda\phi + \mu\psi) = \lambda \int_{\mathbb{R}} \phi + \mu \int_{\mathbb{R}} \psi$$

για κάθε $\phi, \psi \in \mathcal{C}_0$ και οποιουδήποτε αριθμούς λ, μ . Αυτό γενικεύεται επαγωγικά:

$$\int_{\mathbb{R}} (\lambda_1\phi_1 + \dots + \lambda_n\phi_n) = \lambda_1 \int_{\mathbb{R}} \phi_1 + \dots + \lambda_n \int_{\mathbb{R}} \phi_n.$$

Η ιδιότητα αυτή του ολοκληρώματος ονομάζεται **γραμμικότητα**.

Η ιδιότητα του ολοκληρώματος η οποία εκφράζεται στο [2] της Πρότασης 1.4 ονομάζεται **διατήρηση της διάταξης**.

Ό,τι περιγράψουμε / αποδείξουμε στο υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου βασίζεται στα επόμενα δυο Λήμματα Α και Β. Πρέπει να προσεχτούν ιδιαίτερα.

Λήμμα Α. Έστω ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων (ϕ_n) με τις ιδιότητες:

(i) $0 \leq \phi_{n+1} \leq \phi_n$ για κάθε n .

(ii) $\phi_n \rightarrow 0$ σ.π.

Τότε ισχύει $\int_{\mathbb{R}} \phi_n \rightarrow 0$.

Απόδειξη. Μερικές προκαταρκτικές παρατηρήσεις.

Η ιδιότητα (i) λέει ότι η (ϕ_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μη-αρνητικών (κλιμακωτών) συναρτήσεων. Για κάθε x η ακολουθία των τιμών $(\phi_n(x))$ είναι φθίνουσα ακολουθία μη-αρνητικών αριθμών και, επομένως, έχει όριο το οποίο είναι ένας μη-αρνητικός αριθμός. Το όριο αυτό, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x)$, ανάλογα με τον x , μπορεί να είναι μηδέν ή θετικός αριθμός. Τώρα, η ιδιότητα (i) λέει ότι ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x) = 0$ για σχεδόν κάθε x . Δηλαδή, το σύνολο των x για τους οποίους ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x) > 0$ είναι μηδενικού μέτρου. Για τους υπόλοιπους x ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x) = 0$.

Από την (i) συνεπάγεται $0 \leq \int_{\mathbb{R}} \phi_{n+1} \leq \int_{\mathbb{R}} \phi_n$ για κάθε n . Δηλαδή η ακολουθία $(\int_{\mathbb{R}} \phi_n)$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία μη-αρνητικών αριθμών, οπότε έχει όριο το οποίο είναι μη-αρνητικός αριθμός. Το επιδιωκόμενο συμπέρασμα είναι ότι το όριο είναι 0 και όχι θετικό.

Μετά από αυτές τις απλές παρατηρήσεις ξεκινάμε την απόδειξη.

Επειδή η ϕ_1 είναι κλιμακωτή συνάρτηση, έχει πεπερασμένου πλήθους τιμές. Άρα, αν πάρουμε έναν αριθμό $M \geq$ από τη μεγαλύτερη από τις τιμές της ϕ_1 , θα ισχύει $\phi_1 \leq M$ και, επειδή $0 \leq \phi_n \leq \phi_1$ για κάθε n , συνεπάγεται

$$0 \leq \phi_n \leq M$$

για κάθε n .

Επίσης, επειδή η ϕ_1 είναι κλιμακωτή συνάρτηση, υπάρχει ένα διάστημα $[a, b]$ ώστε η ϕ_1 να μηδενίζεται έξω από το $[a, b]$. Πάλι επειδή $0 \leq \phi_n \leq \phi_1$ για κάθε n , συνεπάγεται ότι όλες οι ϕ_n μηδενίζονται έξω από το ίδιο διάστημα $[a, b]$.

Σε κάθε ϕ_n αντιστοιχούν τα πεπερασμένου πλήθους σημεία τα οποία χωρίζουν τα ανοικτά διαστήματα στα οποία η ϕ_n είναι σταθερή. Αν συγκεντρώσουμε όλα αυτά τα σημεία για όλες τις ϕ_n , σχηματίζεται ένα αριθμήσιμο σύνολο, το οποίο, επομένως, είναι μηδενικού μέτρου. Αν θεωρήσουμε και τα σημεία x στα οποία δεν ισχύει $\phi_n(x) \rightarrow 0$, τότε, λόγω της (ii), έχουμε ένα επιπλέον σύνολο μηδενικού μέτρου. Αν ενώσουμε τα δυο αυτά σύνολα σχηματίζεται ένα σύνολο K , το οποίο είναι κι αυτό μηδενικού μέτρου.

Επειδή για κάθε n ισχύει $\phi_n(x) = 0$ για κάθε x έξω από το $[a, b]$, βλέπουμε ότι τα σημεία τα οποία χωρίζουν τα ανοικτά διαστήματα στα οποία η οποιαδήποτε ϕ_n είναι σταθερή περιέχονται όλα στο $[a, b]$. Για τον ίδιο λόγο, ισχύει $\phi_n(x) = 0 \rightarrow 0$ για κάθε x έξω από το $[a, b]$, οπότε τα σημεία x στα οποία δεν ισχύει $\phi_n(x) \rightarrow 0$ περιέχονται κι αυτά όλα στο $[a, b]$. Άρα

$$K \subseteq [a, b].$$

Έστω $\epsilon > 0$.

Τότε υπάρχει αριθμήσιμη συλλογή \mathcal{S}_1 ανοικτών διαστημάτων τα οποία καλύπτουν το K και έχουν συνολικό μήκος $< \epsilon$.

Αν, τώρα, πάρουμε οποιοδήποτε $x \in [a, b] \setminus K$, τότε για αυτό το x ισχύει $\phi_n(x) \rightarrow 0$ και, επίσης, το x δεν είναι κανένα από τα σημεία τα οποία χωρίζουν τα ανοικτά διαστήματα στα οποία η οποιαδήποτε ϕ_n είναι σταθερή. Άρα κάθε ϕ_n είναι σταθερή σε ένα ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το x . Τώρα, επειδή $\phi_n(x) \rightarrow 0$, υπάρχει αρκετά μεγάλο $N = N(x)$ ώστε $\phi_N(x) < \epsilon$. Και, σύμφωνα με τα προηγούμενα, υπάρχει κάποιο ανοικτό διάστημα $I = I(x)$ το οποίο περιέχει το x και στο οποίο η ϕ_N είναι σταθερή. Άρα ισχύει $\phi_N < \epsilon$ σε ολόκληρο το διάστημα I . Οπότε, λόγω της (i), ισχύει $\phi_n < \epsilon$ σε ολόκληρο το διάστημα I για κάθε $n \geq N$.

Θεωρούμε τη συλλογή \mathcal{S}_2 όλων των ανοικτών διαστημάτων $I = I(x)$ για κάθε $x \in [a, b] \setminus K$.

Τα ανοικτά διαστήματα της συλλογής \mathcal{S}_1 καλύπτουν το K και τα ανοικτά διαστήματα της συλλογής \mathcal{S}_2 καλύπτουν το $[a, b] \setminus K$ (διότι κάθε $x \in [a, b] \setminus K$ ανήκει στο αντίστοιχο $I = I(x)$ της \mathcal{S}_2). Άρα τα ανοικτά διαστήματα και των δυο συλλογών καλύπτουν το $[a, b]$. Οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 1.2, υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους διαστήματα, κάποια από την \mathcal{S}_1 και κάποια από την \mathcal{S}_2 , τα οποία καλύπτουν το $[a, b]$. Έστω, λοιπόν, I_1, \dots, I_p από τα διαστήματα της \mathcal{S}_1 και J_1, \dots, J_q από τα διαστήματα της \mathcal{S}_2 ώστε

$$[a, b] \subseteq I_1 \cup \dots \cup I_p \cup J_1 \cup \dots \cup J_q.$$

Επειδή τα I_1, \dots, I_p είναι κάποια από τα διαστήματα της \mathcal{S}_1 , το συνολικό τους μήκος είναι $< \epsilon$. Επίσης,

$$\text{για κάθε } n \text{ ισχύει } \phi_n \leq M \quad \text{σε όλα τα } I_1, \dots, I_p$$

(αφού αυτό ισχύει σε όλο το \mathbb{R}).

Από τον τρόπο με τον οποίο προέκυψαν τα διαστήματα της συλλογής \mathcal{S}_2 , βλέπουμε ότι στα J_1, \dots, J_q αντιστοιχούν δείκτες N_1, \dots, N_q ώστε για κάθε J_k να ισχύει $\phi_n < \epsilon$ στο J_k για κάθε $n \geq N_k$. Θεωρούμε τον $N = \max\{N_1, \dots, N_q\}$, οπότε εύκολα βλέπουμε ότι

$$\text{για κάθε } n \geq N \text{ ισχύει } \phi_n < \epsilon \quad \text{σε όλα τα } J_1, \dots, J_q.$$

Φτάσαμε στο τελευταίο βήμα. Έστω $n \geq N$. Όπως γνωρίζουμε, η ϕ_n μηδενίζεται έξω από το $[a, b]$, οπότε τα διαστήματα στα οποία η ϕ_n είναι σταθερή (και μη-μηδενική) περιέχονται στο $[a, b]$. Μπορούμε, τώρα, να χωρίσουμε τα διαστήματα αυτά σε μικρότερα διαστήματα έτσι ώστε καθένα από αυτά να περιέχεται εξ ολοκλήρου σε κάποιο από τα $I_1, \dots, I_p, J_1, \dots, J_q$ (δεν ξεχνάμε ότι τα τελευταία καλύπτουν το $[a, b]$). Ας συμβολίσουμε αυτά τα νέα διαστήματα (σε καθένα από τα οποία η ϕ_n είναι σταθερή και τα οποία περιέχονται όλα στο $[a, b]$) $I_1^*, \dots, I_p^*, J_1^*, \dots, J_q^*$ δηλώνοντας έτσι ότι καθένα από τα I_1^*, \dots, I_p^* περιέχεται σε κάποιο από τα I_1, \dots, I_p και καθένα από τα J_1^*, \dots, J_q^* περιέχεται σε κάποιο από τα J_1, \dots, J_q . Επομένως,

$$\phi_n \leq M \quad \text{σε όλα τα } I_1^*, \dots, I_p^*$$

και, επειδή $n \geq N$,

$$\phi_n < \epsilon \quad \text{σε όλα τα } J_1^*, \dots, J_q^*.$$

Είναι σαφές ότι το συνολικό μήκος των I_1^*, \dots, I_p^* είναι $< \epsilon$. Επίσης, το συνολικό μήκος των J_1^*, \dots, J_q^* είναι $\leq b - a$.

Τώρα, η συμβολή καθενός I_k^* στον υπολογισμό του $\int_{\mathbb{R}} \phi_n$ είναι $\leq Ml(I_k^*)$. Επίσης, η συμβολή καθενός J_k^* στον υπολογισμό του $\int_{\mathbb{R}} \phi_n$ είναι $\leq \epsilon l(J_k^*)$. Επειδή όλα αυτά τα νέα διαστήματα (με τα αστεράκια) είναι διαδοχικά και περιέχονται στο $[a, b]$ και έξω από αυτά η ϕ_n μηδενίζεται, ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_n \leq M(l(I_1^*) + \dots + l(I_p^*)) + \epsilon(l(J_1^*) + \dots + l(J_q^*)) < M\epsilon + \epsilon(b - a) = (M + b - a)\epsilon.$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για τον τυχόντα $\epsilon > 0$ υπάρχει N ώστε για $n \geq N$ να ισχύει $\int_{\mathbb{R}} \phi_n < (M + b - a)\epsilon$. Επειδή ο αριθμός $M + b - a$ είναι σταθερός, συνεπάγεται $\int_{\mathbb{R}} \phi_n \rightarrow 0$. \square

Λήμμα Β. Έστω ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων (ϕ_n) με τις ιδιότητες:

(i) $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ για κάθε n .

(ii) υπάρχει αριθμός M ώστε $\int_{\mathbb{R}} \phi_n \leq M$ για κάθε n .

Τότε το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός για σ.κ. x .

Απόδειξη. Και πάλι μερικές προκαταρκτικές παρατηρήσεις.

Η ιδιότητα (i) λέει ότι η (ϕ_n) είναι αύξουσα ακολουθία (κλιμακωτών) συναρτήσεων. Για κάθε x η ακολουθία των τιμών $(\phi_n(x))$ είναι αύξουσα ακολουθία αριθμών και, επομένως, έχει όριο το οποίο είναι αριθμός ή $+\infty$. Δηλαδή το όριο $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x)$ υπάρχει και, ανάλογα με τον x , μπορεί να είναι αριθμός ή $+\infty$. Τώρα, το επιδιωκόμενο συμπέρασμα είναι ότι, αν εξαιρέσουμε κάποιους x για τους οποίους το όριο αυτό είναι $+\infty$ και οι οποίοι αποτελούν ένα σύνολο μηδενικού μέτρου, για όλους τους άλλους x το όριο είναι αριθμός. Η προϋπόθεση για να έχουμε ένα τέτοιο συμπέρασμα είναι η ιδιότητα (ii), δηλαδή ότι η ακολουθία αριθμών $(\int_{\mathbb{R}} \phi_n)$ είναι άνω φραγμένη. Παρατηρούμε, φυσικά, ότι η ακολουθία αυτή (των ολοκληρωμάτων των ϕ_n) είναι αύξουσα. Αυτό προκύπτει αμέσως από την ιδιότητα (i).

Μετά από αυτές τις απλές παρατηρήσεις ξεκινάμε την απόδειξη.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι το σύνολο

$$A = \{x : \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x) = +\infty\}$$

είναι μηδενικού μέτρου. Θεωρούμε $\epsilon > 0$ και ορίζουμε τα σύνολα

$$A_\epsilon = \{x : \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x) > \frac{M}{\epsilon}\}, \quad A_{\epsilon, n} = \{x : \phi_n(x) > \frac{M}{\epsilon}\}.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$A \subseteq A_\epsilon, \quad A_{\epsilon,n} \subseteq A_{\epsilon,n+1}, \quad A_\epsilon = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_{\epsilon,n}.$$

Η πρώτη σχέση είναι προφανής. Η δεύτερη προκύπτει από την $\phi_n \leq \phi_{n+1}$. Για την τρίτη σχέση παρατηρούμε ότι αν $x \in A_\epsilon$, τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x) > \frac{M}{\epsilon}$, οπότε υπάρχει n ώστε $\phi_n(x) > \frac{M}{\epsilon}$, οπότε υπάρχει n ώστε $x \in A_{\epsilon,n}$. Αντιστρόφως, αν υπάρχει n ώστε $x \in A_{\epsilon,n}$, τότε υπάρχει n ώστε $\phi_n(x) > \frac{M}{\epsilon}$, οπότε, επειδή η ακολουθία αριθμών $(\phi_n(x))$ είναι αύξουσα, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x) > \frac{M}{\epsilon}$, οπότε $x \in A_\epsilon$.

Τώρα θεωρούμε μια πρώτη περίπτωση: $\phi_1 \geq 0$, οπότε $\phi_n \geq 0$ για κάθε n .

Επειδή η ϕ_n είναι κλιμακωτή συνάρτηση, το σύνολο $A_{\epsilon,n}$ αποτελείται από πεπερασμένου πλήθους ξένα ανά δύο διαστήματα στα οποία η ϕ_n έχει σταθερές τιμές $> \frac{M}{\epsilon}$. Στα υπόλοιπα διαστήματα η ϕ_n έχει σταθερές τιμές ≥ 0 . Άρα το $\int_{\mathbb{R}} \phi_n$ είναι μεγαλύτερο από $\frac{M}{\epsilon}$ επί το συνολικό μήκος των διαστημάτων που αποτελούν το $A_{\epsilon,n}$. Άρα το συνολικό μήκος των διαστημάτων που αποτελούν το $A_{\epsilon,n}$ είναι $< \frac{\epsilon}{M} \int_{\mathbb{R}} \phi_n \leq \frac{\epsilon}{M} M = \epsilon$.

Τώρα θεωρούμε τα πεπερασμένου πλήθους ξένα ανά δύο διαστήματα που αποτελούν το $A_{\epsilon,1}$. Έστω \mathcal{I}_1 η συλλογή τους. Το $A_{\epsilon,2}$ αποτελείται από πεπερασμένου πλήθους ξένα ανά δύο διαστήματα, οπότε το $A_{\epsilon,2} \setminus A_{\epsilon,1}$ αποτελείται κι αυτό από πεπερασμένου πλήθους ξένα ανά δύο διαστήματα και έστω \mathcal{I}_2 η συλλογή τους. Γενικότερα, κάθε $A_{\epsilon,n} \setminus A_{\epsilon,n-1}$ αποτελείται από πεπερασμένου πλήθους ξένα ανά δύο διαστήματα και έστω \mathcal{I}_n η συλλογή τους.

Τώρα ορίζουμε l_1 να είναι το συνολικό μήκος των διαστημάτων του $A_{\epsilon,1}$ και, για $n \geq 2$, ορίζουμε l_n να είναι το συνολικό μήκος των διαστημάτων του $A_{\epsilon,n} \setminus A_{\epsilon,n-1}$. Κατ' αρχάς βλέπουμε ότι τα διαστήματα των συλλογών $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_n$ όλα μαζί αποτελούν το $A_{\epsilon,n}$ οπότε έχουν συνολικό μήκος

$$l_1 + \dots + l_n \leq \epsilon.$$

Κατόπιν παρατηρούμε ότι τα διαστήματα των συλλογών $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots$ όλα μαζί είναι αριθμήσιμοι πλήθους και καλύπτουν το σύνολο A_ϵ . Άρα το A_ϵ και, επομένως, και το A καλύπτεται από αριθμήσιμοι πλήθους διαστήματα συνολικού μήκους

$$l_1 + l_2 + \dots \leq \epsilon$$

ακριβώς επειδή η ανισότητα $l_1 + \dots + l_n \leq \epsilon$ ισχύει για κάθε n .

Επειδή, λοιπόν, για κάθε ϵ υπάρχουν αριθμήσιμοι πλήθους διαστήματα που καλύπτουν το A και έχουν συνολικό μήκος $\leq \epsilon$, συνεπάγεται ότι το A είναι μηδενικού μέτρου.

Μένει να δούμε τί γίνεται στην γενική περίπτωση, όπου δεν ισχύει $\phi_1 \geq 0$.

Τώρα ορίζουμε τις κλιμακωτές συναρτήσεις $\psi_n = \phi_n - \phi_1$ για κάθε n , οπότε και για την ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων (ψ_n) ισχύουν οι ιδιότητες (i), (ii). Πράγματι, $\psi_n \leq \psi_{n+1}$ για κάθε n και $\int_{\mathbb{R}} \psi_n = \int_{\mathbb{R}} \phi_n - \int_{\mathbb{R}} \phi_1 \leq M - \int_{\mathbb{R}} \phi_1$ για κάθε n . Επιπλέον, ισχύει $\psi_n \geq 0$ για κάθε n . Άρα ισχύει το αποτέλεσμα της πρώτης περίπτωσης, οπότε το σύνολο $\{x : \lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n(x) = +\infty\}$ είναι μηδενικού μέτρου. Όμως, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x) - \phi_1(x)$, οπότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n(x) = +\infty$ αν και μόνο αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x) = +\infty$. Άρα το σύνολο $A = \{x : \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x) = +\infty\}$ είναι το ίδιο με το σύνολο $\{x : \lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n(x) = +\infty\}$ και, επομένως, είναι μηδενικού μέτρου. \square

1.3 Η συλλογή συναρτήσεων \mathcal{C}_1 .

Ορισμός. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}$. Λέμε ότι η f ανήκει στη συλλογή συναρτήσεων \mathcal{C}_1 αν υπάρχει ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων (ϕ_n) η οποία ικανοποιεί τις υποθέσεις (i), (ii) του Λήμματος B και ώστε να ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n = f$ σ.π.

Σχόλιο. Το τελευταίο σημαίνει ότι ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x) = f(x)$ για σχεδόν κάθε x .

Το να μην ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x) = f(x)$ για κάποιον x σημαίνει ότι είτε δεν ορίζεται η τιμή $f(x)$ είτε ότι ορίζεται η $f(x)$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x) \neq f(x)$ (το όριο $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x)$ υπάρχει ούτως ή άλλως). Άρα το ότι ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x) = f(x)$ για σχεδόν κάθε x ισοδυναμεί με το ότι το σύνολο

$$\{x : x \notin A \text{ ή } \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x) \neq f(x)\}$$

είναι μηδενικού μέτρου. Επειδή, όμως, το $\mathbb{R} \setminus A$ είναι υποσύνολο αυτού του συνόλου, συνεπάγεται ότι και το $\mathbb{R} \setminus A$ είναι μηδενικού μέτρου. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι κάθε συνάρτηση f η οποία ανήκει στη συλλογή \mathcal{C}_1 είναι ορισμένη σ.π. δηλαδή ότι το συμπλήρωμα του πεδίου ορισμού της είναι μηδενικού μέτρου.

Παραδείγματα. [1] Κάθε κλιμακωτή συνάρτηση ανήκει στην \mathcal{C}_1 . Με άλλα λόγια, $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}_1$.

Πράγματι, έστω κλιμακωτή συνάρτηση ϕ . Για κάθε n ορίζουμε $\phi_n = \phi$, οπότε δημιουργούμε ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων (ϕ_n) με τις ιδιότητες (i) $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ για κάθε n , (ii) $\int_{\mathbb{R}} \phi_n \leq M$ για κάθε n , όπου $M = \int_{\mathbb{R}} \phi$. (Και στις δυο ιδιότητες, οι ανισότητες ισχύουν προφανώς ως ισότητες.) Τώρα, ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n = \phi$ σ.π. Μάλιστα, το τελευταίο ισχύει παντού, αφού για κάθε x ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(x) = \phi(x)$. Άρα η ϕ ανήκει, σύμφωνα με τον ορισμό, στη συλλογή \mathcal{C}_1 .

[2] Κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a, b]$ και η οποία μηδενίζεται έξω από το $[a, b]$, ανήκει στην \mathcal{C}_1 .

Πράγματι, για κάθε n , χωρίζουμε με κατάλληλα ισαπέχοντα διαιρετικά σημεία το διάστημα $[a, b]$ σε 2^n ισομήκη διαστήματα, τα οποία συμβολίζουμε $I_{n,1}, I_{n,2}, \dots, I_{n,2^n-1}, I_{n,2^n}$, αρχίζοντας από αριστερά και πηγαίνοντας δεξιά. Όλα αυτά τα διαστήματα τα θεωρούμε ανοικτά. Τώρα, ορίζουμε την κλιμακωτή συνάρτηση ϕ_n ως εξής. Ορίζουμε την ϕ_n να μηδενίζεται έξω από το $[a, b]$. Κατόπιν, σε κάθε διάστημα $I_{n,k}$ από τα παραπάνω ορίζουμε την ϕ_n να έχει σταθερή τιμή ίση με το $\inf\{f(x) : x \in I_{n,k}\}$. Τέλος, σε καθένα από τα $2^n + 1$ διαιρετικά σημεία ορίζουμε την τιμή της ϕ_n να είναι ίση με την τιμή της f στο ίδιο σημείο.

Πειραματιζόμενοι με μια τυχαία τέτοια συνάρτηση f και με τις αντίστοιχες $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$, μπορούμε εύκολα να πεισθούμε ότι ισχύει (i) $\phi_n \leq \phi_{n+1} \leq f$ για κάθε n και (ii) $\int_{\mathbb{R}} \phi_n \leq u(b-a)$ για κάθε n , όπου $u = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Επίσης, ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x) = f(x)$ για κάθε x .

Δεν θα επιμείνουμε στις λεπτομέρειες για τα παραπάνω, διότι αργότερα, στο Θεώρημα 1.1, θα αποδείξουμε ένα αποτέλεσμα το οποίο υπερκαλύπτει αυτά που είπαμε εδώ.

(Πάντως, αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη να αποδείξει αναλυτικά τα παραπάνω για την οποιαδήποτε τέτοια f . Για το (i) πρέπει να δει κανείς ότι καθένα από τα διαστήματα σταθερότητας της ϕ_n χωρίζεται σε δυο διαστήματα σταθερότητας της ϕ_{n+1} . Για το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x) = f(x)$ χρησιμοποιείται η ομοιόμορφη συνέχεια της f στο $[a, b]$.)

Σχόλιο. Πριν προχωρήσουμε θα κάνουμε ένα σχόλιο σχετικό με ιδιότητες που ισχύουν σ.π.

Έστω αριθμήσιμοι πλήθους ιδιότητες καθεμιά από τις οποίες ισχύει σ.π. Τότε όλες μαζί οι ιδιότητες ισχύουν ταυτόχρονα σ.π. Με άλλα λόγια, η σύζευξη αυτών των ιδιοτήτων είναι μια ιδιότητα που ισχύει κι αυτή σ.π.

Πράγματι, έστω A_n το σύνολο των x για τα οποία δεν ισχύει η n -οστή ιδιότητα. Το A_n είναι μηδενικού μέτρου. Τώρα, το σύνολο των x για τα οποία δεν ισχύει μια τουλάχιστον από τις ιδιότητες είναι ίσο με το $A = \bigcup_n A_n$. Δηλαδή, για κάθε x στο συμπλήρωμα του A ισχύουν όλες οι ιδιότητες. Γνωρίζουμε, όμως, ότι το A είναι μηδενικού μέτρου.

Θα δούμε τώρα μερικές βασικές ιδιότητες της συλλογής συναρτήσεων \mathcal{C}_1 .

Πρόταση 1.5. Έστω $f, g \in \mathcal{C}_1$ και $\lambda \geq 0$. Τότε $f + g, \lambda f, \max\{f, g\} \in \mathcal{C}_1$.

Απόδειξη. Έστω $f, g \in \mathcal{C}_1$ και $\lambda \geq 0$.

Τότε υπάρχουν ακολουθίες κλιμακωτών συναρτήσεων $(\phi_n), (\psi_n)$ οι οποίες ικανοποιούν τις υποθέσεις (i), (ii) του Λήμματος Β και ώστε να ισχύει $\phi_n \rightarrow f$ σ.π. και $\psi_n \rightarrow g$ σ.π. Οι ιδιότητες (i), (ii) διατυπώνονται ως εξής.

(i) $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ και $\psi_n \leq \psi_{n+1}$ για κάθε n ,

(ii) υπάρχουν αριθμοί M, K ώστε $\int_{\mathbb{R}} \phi_n \leq M, \int_{\mathbb{R}} \psi_n \leq K$ για κάθε n .

[α] Θεωρούμε την ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων $(\phi_n + \psi_n)$.

Επειδή οι $\phi_n \rightarrow f$ και $\psi_n \rightarrow g$ ισχύουν καθεμιά σ.π. συνεπάγεται ότι ισχύουν και οι δυο ταυτόχρονα σ.π. Άρα ισχύει $\phi_n + \psi_n \rightarrow f + g$ σ.π. Από την (i) συνεπάγεται $\phi_n + \psi_n \leq \phi_{n+1} + \psi_{n+1}$ για κάθε n και από την (ii) συνεπάγεται $\int_{\mathbb{R}} (\phi_n + \psi_n) = \int_{\mathbb{R}} \phi_n + \int_{\mathbb{R}} \psi_n \leq M + K$ για κάθε n .

Άρα, σύμφωνα με τον ορισμό, η $f + g$ ανήκει στη συλλογή \mathcal{C}_1 .

[β] Τώρα, θεωρούμε την ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων $(\lambda\phi_n)$.

Τότε ισχύει $\lambda\phi_n \rightarrow \lambda f$ σ.π. Από την (i) συνεπάγεται $\lambda\phi_n \leq \lambda\phi_{n+1}$ για κάθε n και από την (ii) συνεπάγεται

$$\int_{\mathbb{R}} (\lambda \phi_n) = \lambda \int_{\mathbb{R}} \phi_n \leq \lambda M \text{ για κάθε } n.$$

Άρα, σύμφωνα με τον ορισμό, η λf ανήκει στη συλλογή \mathcal{C}_1 .

[γ] Τέλος, θεωρούμε την ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων $(\max\{\phi_n, \psi_n\})$.

Επειδή οι $\phi_n \rightarrow f$ και $\psi_n \rightarrow g$ ισχύουν καθεμιά σ.π. συνεπάγεται ότι ισχύουν και οι δυο ταυτόχρονα σ.π. Άρα ισχύει $\max\{\phi_n, \psi_n\} \rightarrow \max\{f, g\}$ σ.π. Από την (i) προκύπτει $\max\{\phi_n, \psi_n\} \leq \max\{\phi_{n+1}, \psi_{n+1}\}$ για κάθε n και από την (ii) και την $\max\{\phi_n, \psi_n\} = \phi_n + \psi_n - \min\{\phi_n, \psi_n\} \leq \phi_n + \psi_n - \min\{\phi_1, \psi_1\}$ προκύπτει $\int_{\mathbb{R}} \max\{\phi_n, \psi_n\} \leq M + K - \int_{\mathbb{R}} \min\{\phi_1, \psi_1\}$ για κάθε n .

Άρα, σύμφωνα με τον ορισμό, η $\max\{f, g\}$ ανήκει στη συλλογή \mathcal{C}_1 . □

Σχόλιο. Στην προηγούμενη απόδειξη ήταν σημαντικό το ότι $\lambda \geq 0$ για τη διατήρηση των σχετικών ανισοτήτων όταν τις πολλαπλασιάζουμε με το λ . Μάλιστα, υπάρχει παράδειγμα συνάρτησης f στην \mathcal{C}_1 ώστε η $-f = (-1)f$ να μην ανήκει στην \mathcal{C}_1 . Επίσης, υπάρχει παράδειγμα συναρτήσεων f, g στην \mathcal{C}_1 ώστε η $\min\{f, g\}$ να μην ανήκει στην \mathcal{C}_1 .

Κατόπιν, θα δώσουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος για συναρτήσεις της συλλογής \mathcal{C}_1 . Θα χρειαστούμε, όμως, το εξής λήμμα.

Λήμμα 1.1. [1] Έστω κλιμακωτή συνάρτηση ψ και ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων (ϕ_n) ώστε να ισχύει $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ για κάθε n καθώς και $\psi \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n$ σ.π. Τότε $\int_{\mathbb{R}} \psi \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n$.
 [2] Έστω ακολουθίες κλιμακωτών συναρτήσεων $(\psi_n), (\phi_n)$ ώστε να ισχύει $\psi_n \leq \psi_{n+1}$ και $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ για κάθε n καθώς και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n$ σ.π. Τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n$.
 [3] Έστω ακολουθίες κλιμακωτών συναρτήσεων $(\psi_n), (\phi_n)$ ώστε να ισχύει $\psi_n \leq \psi_{n+1}$ και $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ για κάθε n καθώς και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n$ σ.π. Τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n$.

Απόδειξη. [1] Ορίζουμε τις κλιμακωτές συναρτήσεις $\chi_n = \psi - \min\{\psi, \phi_n\}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι $0 \leq \chi_{n+1} \leq \chi_n$ για κάθε n και ότι $\chi_n \rightarrow 0$ σ.π. Σύμφωνα με το Λήμμα A, συνεπάγεται $\int_{\mathbb{R}} \chi_n \rightarrow 0$. Παρατηρούμε, επίσης, ότι $\chi_n \geq \psi - \phi_n$ για κάθε n , οπότε $\int_{\mathbb{R}} \chi_n \geq \int_{\mathbb{R}} \psi - \int_{\mathbb{R}} \phi_n$ για κάθε n . Παίρνοντας όρια, βρίσκουμε $0 \geq \int_{\mathbb{R}} \psi - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n$, οπότε $\int_{\mathbb{R}} \psi \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n$.

[2] Για κάθε m ισχύει $\psi_m \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n$ σ.π. Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα του [1], βρίσκουμε ότι για κάθε m ισχύει $\int_{\mathbb{R}} \psi_m \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n$. Άρα $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi_m \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n$.

[3] Άμεση από το [2] και τις $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n$ σ.π. και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n$ σ.π. □

Ορισμός. Έστω f στη συλλογή \mathcal{C}_1 . Τότε υπάρχει ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων (ϕ_n) η οποία ικανοποιεί τις υποθέσεις (i), (ii) του Λήμματος B και ώστε να ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n = f$ σ.π. Από τις (i), (ii), η ακολουθία (αριθμών) $(\int_{\mathbb{R}} \phi_n)$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, οπότε έχει όριο το οποίο είναι αριθμός. Ορίζουμε το **ολοκλήρωμα** της f και το συμβολίζουμε $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ να είναι ίσο με αυτό το όριο:

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n.$$

Τα δυο σχόλια που ακολουθούν είναι απολύτως απαραίτητα.

Σχόλιο α. [1] Για να είναι καλός ο προηγούμενος ορισμός, πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι η τιμή του $\int_{\mathbb{R}} f$ δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων που χρησιμοποιούμε για να το ορίσουμε. Πράγματι, ας θεωρήσουμε και μια οποιαδήποτε άλλη ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων (ψ_n) η οποία ικανοποιεί τις υποθέσεις (i), (ii) του Λήμματος B και ώστε να ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n = f$ σ.π. Με βάση τον ορισμό, το $\int_{\mathbb{R}} f$ ορίζεται ως το όριο $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi_n$. Άρα πρέπει να αποδείξουμε ότι τα δυο όρια $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi_n$ είναι ίσα. Αυτό, όμως, είναι άμεσο από το [3] του Λήμματος 1.1, διότι ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n = f$ σ.π. και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n = f$ σ.π., οπότε ισχύουν και τα δυο αυτά ταυτόχρονα σ.π., οπότε ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n$ σ.π.

[2] Γνωρίζουμε ότι κάθε κλιμακωτή συνάρτηση ϕ ανήκει στην \mathcal{C}_1 . Επομένως, για την ϕ έχουμε ορίσει το αρχικό ολοκλήρωμα $\int_{\mathbb{R}} \phi$ αλλά και το τελευταίο ολοκλήρωμα που το συμβολίσαμε με το ίδιο σύμβολο $\int_{\mathbb{R}} \phi$. Για να μην υπάρχει ασυμφωνία ανάμεσα στις τιμές των ολοκληρωμάτων (οπότε θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε άλλο σύμβολο για το δεύτερο ολοκλήρωμα) πρέπει να αποδείξουμε ότι τα δυο ολοκληρώματα είναι ίσα.

Τώρα, θεωρούμε τις κλιμακωτές συναρτήσεις $\phi_n = \phi$, οπότε η ακολουθία (ϕ_n) ικανοποιεί τις υποθέσεις (i), (ii) του Λήμματος Β και ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n = \phi$ σ.π. (και, μάλιστα, παντού). Σύμφωνα με τον τελευταίο ορισμό το "νέο" ολοκλήρωμα της ϕ ισούται με το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi = \int_{\mathbb{R}} \phi$, δηλαδή με το "παλιό" ολοκλήρωμα της ϕ .

Πρόταση 1.6. [1] Έστω $f, g \in \mathcal{C}_1$ και αριθμός $\lambda \geq 0$. Τότε

$$\int_{\mathbb{R}} (f + g) = \int_{\mathbb{R}} f + \int_{\mathbb{R}} g, \quad \int_{\mathbb{R}} (\lambda f) = \lambda \int_{\mathbb{R}} f.$$

[2] Έστω $f, g \in \mathcal{C}_1$. Τότε

$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} f \leq \int_{\mathbb{R}} g.$$

Απόδειξη. [1] Επειδή $f, g \in \mathcal{C}_1$, υπάρχουν ακολουθίες κλιμακωτών συναρτήσεων $(\phi_n), (\psi_n)$ οι οποίες ικανοποιούν τις υποθέσεις (i), (ii) του Λήμματος Β και ώστε να ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n = f$ σ.π. και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n = g$ σ.π. Από τον ορισμό των $\int_{\mathbb{R}} f, \int_{\mathbb{R}} g$, έχουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n, \quad \int_{\mathbb{R}} g = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi_n.$$

Είδαμε στην απόδειξη της Πρότασης 1.5 ότι η ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων $(\phi_n + \psi_n)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις (i), (ii) του Λήμματος Β και ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\phi_n + \psi_n) = f + g$ σ.π. Άρα από τον ορισμό του $\int_{\mathbb{R}} (f + g)$ συνεπάγεται

$$\int_{\mathbb{R}} (f + g) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} (\phi_n + \psi_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi_n = \int_{\mathbb{R}} f + \int_{\mathbb{R}} g.$$

Και πάλι στην απόδειξη της Πρότασης 1.5 είδαμε ότι η ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων $(\lambda \phi_n)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις (i), (ii) του Λήμματος Β και ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda \phi_n) = \lambda f$ σ.π. Άρα από τον ορισμό του $\int_{\mathbb{R}} (\lambda f)$ συνεπάγεται

$$\int_{\mathbb{R}} (\lambda f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} (\lambda \phi_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n = \lambda \int_{\mathbb{R}} f.$$

[2] Θεωρούμε τις ίδιες ακολουθίες κλιμακωτών συναρτήσεων του [1]. Από $f \leq g$ συνεπάγεται $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n$ σ.π. οπότε από το [2] του Λήμματος 1.1 συνεπάγεται

$$\int_{\mathbb{R}} f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi_n = \int_{\mathbb{R}} g.$$

□

Σχόλιο. Η ιδιότητα

$$\int_{\mathbb{R}} (\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n) = \lambda_1 \int_{\mathbb{R}} f_1 + \dots + \lambda_n \int_{\mathbb{R}} f_n$$

ισχύει για συναρτήσεις $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}_1$, αλλά μόνο αν οι αριθμοί $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ είναι όλοι ≥ 0 .

Πρόταση 1.7. Έστω $f \in \mathcal{C}_1$ και $g = f$ σ.π. Τότε $g \in \mathcal{C}_1$ και $\int_{\mathbb{R}} g = \int_{\mathbb{R}} f$.

Απόδειξη. Επειδή $f \in \mathcal{C}_1$, υπάρχει ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων (ϕ_n) , η οποία ικανοποιεί τις υποθέσεις (i), (ii) του Λήμματος Β και ώστε να ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n = f$ σ.π. Από το ότι ισχύει $g = f$ σ.π. συνεπάγεται ότι ισχύουν ταυτόχρονα οι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n = f$ και $g = f$ σ.π. Άρα ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n = g$ σ.π. Άρα η g ανήκει στην \mathcal{C}_1 .

Επίσης, από τον ορισμό των $\int_{\mathbb{R}} f, \int_{\mathbb{R}} g$, έχουμε ότι $\int_{\mathbb{R}} f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n$ και $\int_{\mathbb{R}} g = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n$. Άρα $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} g$. □

Σχόλιο. Άμεση συνέπεια της Πρότασης 1.7 είναι ότι, αν αλλάξουμε μια συνάρτηση η οποία ανήκει στην \mathcal{C}_1 σε ένα σύνολο μηδενικού μέτρου, τότε η νέα συνάρτηση ανήκει κι αυτή στην \mathcal{C}_1 και έχει το ίδιο ολοκλήρωμα με την αρχική συνάρτηση.

Παράδειγμα. Η συνάρτηση Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ανήκει στην \mathcal{C}_1 και $\int_{\mathbb{R}} f = 0$.

Πράγματι, ισχύει $f(x) = 0$ για σ.κ. x . Δηλαδή, η συνάρτηση Dirichlet προκύπτει από τη μηδενική συνάρτηση αλλάζοντάς την (και κάνοντάς την 1) στα σημεία του \mathbb{Q} , το οποίο είναι μηδενικού μέτρου.

Το ίδιο μπορούμε να πούμε και για τις παραλλαγές: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \notin [a, b] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$

1.4 Η συλλογή \mathcal{C}_2 των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

Ορισμός. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}$. Λέμε ότι η f ανήκει στη συλλογή συναρτήσεων \mathcal{C}_2 , αν υπάρχουν $g, h \in \mathcal{C}_1$ ώστε $f = g - h$.

Σχόλιο. [1] Στον ορισμό, αν $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ και $h : C \rightarrow \mathbb{R}$, τότε $A = B \cap C$. Επειδή τα σύνολα $\mathbb{R} \setminus B$ και $\mathbb{R} \setminus C$ είναι μηδενικού μέτρου και $\mathbb{R} \setminus A = \mathbb{R} \setminus (B \cap C) = (\mathbb{R} \setminus B) \cup (\mathbb{R} \setminus C)$, συνεπάγεται ότι και το $\mathbb{R} \setminus A$ είναι μηδενικού μέτρου. Άρα, όπως κάθε συνάρτηση της συλλογής \mathcal{C}_1 είναι ορισμένη σχεδόν παντού, έτσι και κάθε συνάρτηση της συλλογής \mathcal{C}_2 είναι ορισμένη σχεδόν παντού.

[2] Αν $f \in \mathcal{C}_1$, τότε, επειδή $f = f - 0$ και $0 \in \mathcal{C}_1$, συνεπάγεται ότι $f \in \mathcal{C}_2$. Άρα $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$.

Πρόταση 1.8. Έστω $f, g \in \mathcal{C}_2$ και αριθμός λ . Τότε $f + g, \lambda f, \max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \mathcal{C}_2$.

Απόδειξη. Έστω $f, g \in \mathcal{C}_2$ και αριθμός λ . Τότε υπάρχουν $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{C}_1$ ώστε $f = f_1 - f_2$ και $g = g_1 - g_2$.

[α] Τότε $f + g = (f_1 + g_1) - (f_2 + g_2)$ και $f_1 + g_1 \in \mathcal{C}_1$ και $f_2 + g_2 \in \mathcal{C}_1$. Άρα $f + g \in \mathcal{C}_2$.

[β] Αν $\lambda = 0$, τότε $\lambda f = 0 \in \mathcal{C}_2$.

Αν $\lambda > 0$, τότε $\lambda f_1 \in \mathcal{C}_1$ και $\lambda f_2 \in \mathcal{C}_1$. Επειδή $\lambda f = \lambda f_1 - \lambda f_2$, συνεπάγεται $\lambda f \in \mathcal{C}_2$.

Αν $\lambda < 0$, τότε $(-\lambda)f_1 \in \mathcal{C}_1$ και $(-\lambda)f_2 \in \mathcal{C}_1$. Επειδή $\lambda f = (-\lambda)f_2 - (-\lambda)f_1$, συνεπάγεται $\lambda f \in \mathcal{C}_2$.

[γ] Παρατηρούμε ότι $\max\{f, g\} = \max\{f_1 + g_2, f_2 + g_1\} - (f_2 + g_2)$ και, επειδή $\max\{f_1 + g_2, f_2 + g_1\} \in \mathcal{C}_1$ και $f_2 + g_2 \in \mathcal{C}_1$, συνεπάγεται $\max\{f, g\} \in \mathcal{C}_2$.

Ομοίως, $\min\{f, g\} = (f_1 + g_1) - \max\{f_1 + g_2, f_2 + g_1\}$ και, επειδή $\max\{f_1 + g_2, f_2 + g_1\} \in \mathcal{C}_1$ και $f_1 + g_1 \in \mathcal{C}_1$, συνεπάγεται $\min\{f, g\} \in \mathcal{C}_2$. \square

Σχόλιο. Από την Πρόταση 1.8 συνεπάγεται ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$$

συναρτήσεων στη συλλογή \mathcal{C}_2 (όπου $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ είναι αριθμοί) είναι συνάρτηση στη \mathcal{C}_2 .

Το ίδιο μπορούμε να πούμε και για τις

$$\max\{f_1, \dots, f_n\}, \quad \min\{f_1, \dots, f_n\}.$$

Δηλαδή η συλλογή \mathcal{C}_2 είναι κλειστή ως προς γραμμικούς συνδυασμούς των στοιχείων της και, επομένως, είναι ένας γραμμικός χώρος (ή διανυσματικός χώρος). Και επειδή είναι και κλειστή ως προς το \max και το \min των στοιχείων της, είναι ένας διατεταγμένος γραμμικός χώρος.

Ειδικότερα, αν οι f, g είναι στη συλλογή \mathcal{C}_2 , τότε οι συναρτήσεις

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \quad f^- = \max\{-f, 0\}, \quad |f| = f^+ + f^-$$

είναι κι αυτές στη συλλογή \mathcal{C}_2 .

Ορισμός. Έστω $f \in \mathcal{C}_2$. Τότε υπάρχουν $g, h \in \mathcal{C}_1$ ώστε $f = g - h$. Ορίζουμε το **ολοκλήρωμα** της f και το συμβολίζουμε $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ να είναι το

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g - \int_{\mathbb{R}} h.$$

Σχόλια. [1] Για να είναι καλός ο παραπάνω ορισμός του $\int_{\mathbb{R}} f$, πρέπει να αποδείξουμε ότι αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε άλλο ζεύγος $g_1, h_1 \in \mathcal{C}_1$ ώστε $f = g_1 - h_1$, τότε ο νέος υπολογισμός $\int_{\mathbb{R}} g_1 - \int_{\mathbb{R}} h_1$ θα δώσει το ίδιο αποτέλεσμα με τον παλιό υπολογισμό $\int_{\mathbb{R}} g - \int_{\mathbb{R}} h$. Πράγματι, από το $g - h = f = g_1 - h_1$ συνεπάγεται $g + h_1 = g_1 + h$ συνεπάγεται $\int_{\mathbb{R}}(g + h_1) = \int_{\mathbb{R}}(g_1 + h)$ συνεπάγεται $\int_{\mathbb{R}} g + \int_{\mathbb{R}} h_1 = \int_{\mathbb{R}} g_1 + \int_{\mathbb{R}} h$ συνεπάγεται $\int_{\mathbb{R}} g_1 - \int_{\mathbb{R}} h_1 = \int_{\mathbb{R}} g - \int_{\mathbb{R}} h$.

[2] Επίσης, επειδή κάθε $f \in \mathcal{C}_1$ ανήκει και στην \mathcal{C}_2 , πρέπει να αποδείξουμε ότι η ήδη ορισμένη από την προηγούμενη ενότητα τιμή του $\int_{\mathbb{R}} f$ ισούται με την μόλις ορισμένη τιμή του $\int_{\mathbb{R}} f$, ώστε να αιτιολογηθεί η επιλογή του ίδιου συμβόλου για τα δυο ολοκληρώματα.

Πράγματι, αν $f \in \mathcal{C}_1$, τότε γράφουμε $f = f - 0$ (και αυτό δικαιολογεί το ότι $f \in \mathcal{C}_2$) οπότε η νέα τιμή του $\int_{\mathbb{R}} f$ ισούται εξ ορισμού με $\int_{\mathbb{R}} f - \int_{\mathbb{R}} 0 = \int_{\mathbb{R}} f$, όπου $\int_{\mathbb{R}} f$ και $\int_{\mathbb{R}} 0$ είναι οι προηγούμενες τιμές των ολοκληρωμάτων.

Πρόταση 1.9. [1] Έστω $f, g \in \mathcal{C}_2$ και αριθμός λ . Τότε

$$\int_{\mathbb{R}} (f + g) = \int_{\mathbb{R}} f + \int_{\mathbb{R}} g, \quad \int_{\mathbb{R}} (\lambda f) = \lambda \int_{\mathbb{R}} f.$$

[2] Έστω $f, g \in \mathcal{C}_2$. Τότε

$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} f \leq \int_{\mathbb{R}} g.$$

[3] Έστω $f \in \mathcal{C}_2$. Τότε

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f|.$$

Απόδειξη. Έστω $f, g \in \mathcal{C}_2$ και αριθμός λ . Τότε υπάρχουν $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{C}_1$ ώστε $f = f_1 - f_2$ και $g = g_1 - g_2$.

[1] Τότε $f + g = (f_1 + g_1) - (f_2 + g_2)$ και $f_1 + g_1 \in \mathcal{C}_1$ και $f_2 + g_2 \in \mathcal{C}_1$. Άρα

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (f + g) &= \int_{\mathbb{R}} (f_1 + g_1) - \int_{\mathbb{R}} (f_2 + g_2) = \int_{\mathbb{R}} f_1 + \int_{\mathbb{R}} g_1 - \int_{\mathbb{R}} f_2 - \int_{\mathbb{R}} g_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_1 - \int_{\mathbb{R}} f_2 + \int_{\mathbb{R}} g_1 - \int_{\mathbb{R}} g_2 = \int_{\mathbb{R}} f + \int_{\mathbb{R}} g. \end{aligned}$$

Αν $\lambda = 0$, τότε $\lambda f = 0$, οπότε

$$\int_{\mathbb{R}} (\lambda f) = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0 = \lambda \int_{\mathbb{R}} f.$$

Αν $\lambda > 0$, τότε $\lambda f_1 \in \mathcal{C}_1$ και $\lambda f_2 \in \mathcal{C}_1$ και $\lambda f = \lambda f_1 - \lambda f_2$. Άρα

$$\int_{\mathbb{R}} (\lambda f) = \int_{\mathbb{R}} (\lambda f_1) - \int_{\mathbb{R}} (\lambda f_2) = \lambda \int_{\mathbb{R}} f_1 - \lambda \int_{\mathbb{R}} f_2 = \lambda \left(\int_{\mathbb{R}} f_1 - \int_{\mathbb{R}} f_2 \right) = \lambda \int_{\mathbb{R}} f.$$

Αν $\lambda < 0$, τότε $(-\lambda) f_1 \in \mathcal{C}_1$ και $(-\lambda) f_2 \in \mathcal{C}_1$ και $\lambda f = (-\lambda) f_2 - (-\lambda) f_1$. Άρα

$$\int_{\mathbb{R}} (\lambda f) = \int_{\mathbb{R}} ((-\lambda) f_2) - \int_{\mathbb{R}} ((-\lambda) f_1) = (-\lambda) \int_{\mathbb{R}} f_2 - (-\lambda) \int_{\mathbb{R}} f_1 = \lambda \left(\int_{\mathbb{R}} f_1 - \int_{\mathbb{R}} f_2 \right) = \lambda \int_{\mathbb{R}} f.$$

[2] Από $f \leq g$ συνεπάγεται $f_1 + g_2 \leq f_2 + g_1$ και, επειδή $f_1 + g_2 \in \mathcal{C}_1$ και $f_2 + g_1 \in \mathcal{C}_1$, συνεπάγεται $\int_{\mathbb{R}} (f_1 + g_2) \leq \int_{\mathbb{R}} (f_2 + g_1)$ συνεπάγεται $\int_{\mathbb{R}} f_1 + \int_{\mathbb{R}} g_2 \leq \int_{\mathbb{R}} f_2 + \int_{\mathbb{R}} g_1$ συνεπάγεται $\int_{\mathbb{R}} f_1 - \int_{\mathbb{R}} f_2 \leq \int_{\mathbb{R}} g_1 - \int_{\mathbb{R}} g_2$ συνεπάγεται $\int_{\mathbb{R}} f \leq \int_{\mathbb{R}} g$.

[3] Από το ότι $-|f| \leq f \leq |f|$ σ.π. και από το ότι οι $f, |f|$ ανήκουν στην \mathcal{C}_2 , συνεπάγεται

$$-\int_{\mathbb{R}} |f| = \int_{\mathbb{R}} (-|f|) \leq \int_{\mathbb{R}} f \leq \int_{\mathbb{R}} |f|.$$

Άρα $\left| \int_{\mathbb{R}} f \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f|$. □

Σχόλιο. Οι σχέσεις της Πρότασης 1.9 εκφράζουν τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος και τη διατήρηση της διάταξης από το ολοκλήρωμα στην συλλογή \mathcal{C}_2 .

Πρόταση 1.10. Έστω $f \in \mathcal{C}_2$ και $g = f$ σ.π. Τότε $g \in \mathcal{C}_2$ και $\int_{\mathbb{R}} g = \int_{\mathbb{R}} f$.

Απόδειξη. Ισχύει $g - f = 0$ σ.π. και $0 \in \mathcal{C}_1$. Από την Πρόταση 1.7 συνεπάγεται $g - f \in \mathcal{C}_1$ και, επομένως, $g - f \in \mathcal{C}_2$. Επίσης, $\int_{\mathbb{R}} (g - f) = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0$. Άρα $g = f + (g - f) \in \mathcal{C}_2$ και $\int_{\mathbb{R}} g = \int_{\mathbb{R}} f + \int_{\mathbb{R}} (g - f) = \int_{\mathbb{R}} f$. \square

Σχόλιο. [1] Με άλλα λόγια, αν αλλάξουμε μια συνάρτηση που ανήκει στη συλλογή \mathcal{C}_2 σε ένα σύνολο μηδενικού μέτρου, τότε η νέα συνάρτηση ανήκει κι αυτή στη συλλογή \mathcal{C}_2 και έχει το ίδιο ολοκλήρωμα με την αρχική συνάρτηση.

Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι τα σύνολα μηδενικού μέτρου είναι κατά κάποια έννοια αμελητέα όσον αφορά στις συναρτήσεις της συλλογής \mathcal{C}_2 και στα ολοκλήρωμά τους.

Αυτό δεν ισχύει για τις Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις σε διάστημα ούτε για τα Riemann ολοκληρώματά τους. Δείτε ξανά τη συνάρτηση Dirichlet $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \notin [a, b] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$ Η συνάρτηση αυτή προκύπτει

από τη μηδενική συνάρτηση με αλλαγή σε ένα σύνολο μηδενικού μέτρου και, ενώ η μηδενική συνάρτηση είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ με Riemann ολοκλήρωμα ίσο με 0, η συνάρτηση Dirichlet δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ (αν $a < b$) και δεν ορίζεται το Riemann ολοκλήρωμά της.

Σε σχέση με τις Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και τα Riemann ολοκλήρωμα, τα πεπερασμένα σύνολα είναι αμελητέα. Πράγματι, γνωρίζουμε ότι, αν αλλάξουμε μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση σε πεπερασμένου πλήθους σημεία, τότε η νέα συνάρτηση είναι κι αυτή Riemann ολοκληρώσιμη και το Riemann ολοκλήρωμά της είναι το ίδιο με το Riemann ολοκλήρωμα της αρχικής συνάρτησης.

[2] Συνδυάζοντας την Πρόταση 1.10 με τις Προτάσεις 1.8 και 1.9, έχουμε τα εξής λίγο γενικότερα συμπεράσματα.

Αν $f, g \in \mathcal{C}_2$ και $h = f + g$ σ.π. τότε $h \in \mathcal{C}_2$ και

$$\int_{\mathbb{R}} h = \int_{\mathbb{R}} f + \int_{\mathbb{R}} g.$$

Αν $f \in \mathcal{C}_2$ και ο λ είναι αριθμός και $h = \lambda f$ σ.π. τότε $h \in \mathcal{C}_2$ και

$$\int_{\mathbb{R}} h = \lambda \int_{\mathbb{R}} f.$$

Αν $f, g \in \mathcal{C}_2$, τότε

$$f \leq g \text{ σ.π.} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f \leq \int_{\mathbb{R}} g.$$

Ορισμός. Κάθε συνάρτηση f στη συλλογή \mathcal{C}_2 χαρακτηρίζεται **Lebesgue ολοκληρώσιμη** ή απλά **ολοκληρώσιμη** και το $\int_{\mathbb{R}} f$ ονομάζεται **ολοκλήρωμα Lebesgue** ή απλά **ολοκλήρωμα** της f . Η συλλογή \mathcal{C}_2 θα αναφέρεται και ως **συλλογή των (Lebesgue) ολοκληρώσιμων συναρτήσεων**.

Σχόλιο. [1] Στις σημειώσεις αυτές, όταν λέμε *ολοκληρώσιμη* ή *ολοκλήρωμα* θα εννοούμε *Lebesgue ολοκληρώσιμη* ή *Lebesgue ολοκλήρωμα*, αντιστοίχως. Αντιθέτως, θα λέμε, χωρίς συντόμευση, *Riemann ολοκληρώσιμη* ή *Riemann ολοκλήρωμα*. Το Riemann ολοκλήρωμα μιας f η οποία είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$ θα το συμβολίζουμε

$$\mathcal{R} \int_a^b f \quad \text{ή} \quad \mathcal{R} \int_a^b f(x) dx.$$

[2] Λίγο παρακάτω, στο Θεώρημα 1.1, θα δούμε ακριβώς ποιά είναι η σχέση ανάμεσα στη συλλογή των Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων και στη συλλογή των Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων καθώς και τη σχέση ανάμεσα στο Riemann ολοκλήρωμα και στο Lebesgue ολοκλήρωμα.

[3] Μέχρι τώρα, ξεκινήσαμε με τη συλλογή \mathcal{C}_0 των κλιμακωτών συναρτήσεων, αυτήν την επεκτείναμε στη μεγαλύτερη συλλογή \mathcal{C}_1 και αυτήν την επεκτείναμε στη μεγαλύτερη συλλογή \mathcal{C}_2 των Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Η τελευταία συλλογή, η \mathcal{C}_2 , είναι, ουσιαστικά, και η τελευταία συλλογή συναρτήσεων που

θα εισαγάγουμε. Παράλληλα με αυτές τις επεκτάσεις των συλλογών συναρτήσεων, κάναμε και αντίστοιχες επεκτάσεις της έννοιας του ολοκληρώματος.

Πρόταση 1.11. Έστω $f \in \mathcal{C}_2$. Τότε υπάρχει ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων (χ_n) ώστε

$$\int_{\mathbb{R}} |\chi_n - f| \rightarrow 0 \quad \text{και} \quad \chi_n \rightarrow f \text{ σ.π.}$$

Απόδειξη. Υπάρχουν $g, h \in \mathcal{C}_1$ ώστε $f = g - h$. Επομένως, υπάρχουν ακολουθίες κλιμακωτών συναρτήσεων $(\phi_n), (\psi_n)$ οι οποίες ικανοποιούν τις υποθέσεις (i), (ii) του Λήμματος Β και ώστε να ισχύει $\phi_n \rightarrow g$ σ.π. και $\psi_n \rightarrow h$ σ.π. Μάλιστα, τότε, βάσει των ορισμών, $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} g - \int_{\mathbb{R}} h$ και $\int_{\mathbb{R}} \phi_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} g$ και $\int_{\mathbb{R}} \psi_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} h$. Ορίζουμε για κάθε n την κλιμακωτή συνάρτηση $\chi_n = \phi_n - \psi_n$ και τότε

$$|\chi_n - f| \leq |\phi_n - g| + |\psi_n - h| = (g - \phi_n) + (h - \psi_n) \text{ σ.π.}$$

Επειδή, $\int_{\mathbb{R}} \phi_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} g$ και $\int_{\mathbb{R}} \psi_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} h$, συνεπάγεται

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}} |\chi_n - f| \leq \int_{\mathbb{R}} (g - \phi_n) + \int_{\mathbb{R}} (h - \psi_n)$$

και, επομένως, $\int_{\mathbb{R}} |\chi_n - f| \rightarrow 0$.

Επίσης, επειδή $\phi_n \rightarrow g$ σ.π. και $\psi_n \rightarrow h$ σ.π., συνεπάγεται $\chi_n \rightarrow f$ σ.π. □

1.5 Τα οριακά θεωρήματα.

Τώρα θα δούμε τα τρία κεντρικά θεωρήματα σχετικά με τη συλλογή των Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Σε αυτά τα τρία θεωρήματα βασίζεται το ότι το Lebesgue ολοκλήρωμα είναι εν γένει πιο χρήσιμο από το Riemann ολοκλήρωμα.

Θα χρειαστούμε το εξής τεχνικό λήμμα.

Λήμμα 1.2. [1] Έστω $f \in \mathcal{C}_2$ και $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχουν $g, h \in \mathcal{C}_1$ ώστε $f = g - h$ σ.π., $h \geq 0$ σ.π. και $\int_{\mathbb{R}} h < \epsilon$.

[2] Έστω $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_2$ με $f_1 \leq f_2$ σ.π. και $\epsilon > 0$. Αν $f_1 = g_1 - h_1$ σ.π., όπου $g_1, h_1 \in \mathcal{C}_1$, τότε υπάρχουν $g_2, h_2 \in \mathcal{C}_1$ ώστε $f_2 = g_2 - h_2$ σ.π., $g_1 \leq g_2$ σ.π., $h_1 \leq h_2$ σ.π. και $\int_{\mathbb{R}} h_2 < \int_{\mathbb{R}} h_1 + \epsilon$.

Απόδειξη. [1] Βάσει του ορισμού, επειδή $f \in \mathcal{C}_2$, υπάρχουν $g_1, h_1 \in \mathcal{C}_1$ ώστε $f = g_1 - h_1$ σ.π. Άρα υπάρχει ακολουθία (ϕ_n) στην \mathcal{C}_0 η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες (i), (ii) του Λήμματος Β ώστε $\phi_n \rightarrow h_1$ σ.π. Τότε $\int_{\mathbb{R}} \phi_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} h_1$, οπότε υπάρχει n αρκετά μεγάλος ώστε $\int_{\mathbb{R}} (h_1 - \phi_n) = \int_{\mathbb{R}} h_1 - \int_{\mathbb{R}} \phi_n < \epsilon$.

Με αυτόν τον n , ορίζουμε $g = g_1 - \phi_n$ και $h = h_1 - \phi_n$. Τότε $f = g - h$ σ.π., $h \geq 0$ σ.π. και $\int_{\mathbb{R}} h < \epsilon$.

[2] Επειδή $f_2 - f_1 \in \mathcal{C}_2$, από το [1] συνεπάγεται ότι υπάρχουν $g, h \in \mathcal{C}_1$ ώστε $f_2 - f_1 = g - h$ σ.π., $h \geq 0$ σ.π. και $\int_{\mathbb{R}} h < \epsilon$. Επιπλέον, επειδή $f_2 - f_1 \geq 0$ σ.π., ισχύει $g = (f_2 - f_1) + h \geq 0$ σ.π.

Τώρα ορίζουμε $g_2 = g_1 + g$ και $h_2 = h_1 + h$ και εύκολα βλέπουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις που θέλουμε. □

Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης (Levi). Έστω ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων (f_n) με τις ιδιότητες:

(i) $f_n \leq f_{n+1}$ σ.π. για κάθε n .

(ii) υπάρχει αριθμός M ώστε $\int_{\mathbb{R}} f_n \leq M$ για κάθε n .

Τότε:

[α] Υπάρχει ολοκληρώσιμη f ώστε

$$f_n \rightarrow f \text{ σ.π.} \quad \text{και} \quad \int_{\mathbb{R}} f_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f.$$

[β] Αν $f_n \rightarrow f^*$ σ.π., τότε η f^* είναι ολοκληρώσιμη και $\int_{\mathbb{R}} f_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f^*$.

Απόδειξη. [α] Θεωρούμε κατ' αρχάς την περίπτωση που όλες οι f_n ανήκουν στη συλλογή \mathcal{C}_1 .

Τότε, για κάθε n υπάρχει ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων $(\phi_{n,k})$ με τις ιδιότητες:

(i)' $\phi_{n,k} \leq \phi_{n,k+1}$ για κάθε k ,

(ii)' υπάρχει αριθμός M_n ώστε $\int_{\mathbb{R}} \phi_{n,k} \leq M_n$ για κάθε k

και ώστε να ισχύει

$$\phi_{n,k} \rightarrow f_n \quad \text{σ.π.}$$

όταν $k \rightarrow +\infty$. Επειδή $\phi_{n,k} \leq f_n$ σ.π. συνεπάγεται $\int_{\mathbb{R}} \phi_{n,k} \leq \int_{\mathbb{R}} f_n \leq M$ και, επομένως, στην ιδιότητα (ii)' μπορούμε να θεωρήσουμε ότι όλοι οι M_n είναι ίσοι με τον M .

Τώρα, για κάθε k ορίζουμε την κλιμακωτή συνάρτηση

$$\phi_k = \max\{\phi_{1,k}, \phi_{2,k}, \dots, \phi_{k-1,k}, \phi_{k,k}\}.$$

Επειδή $\phi_{1,k} \leq \phi_{1,k+1}, \dots, \phi_{k,k} \leq \phi_{k,k+1}$, συνεπάγεται

$$\max\{\phi_{1,k}, \dots, \phi_{k,k}\} \leq \max\{\phi_{1,k+1}, \dots, \phi_{k,k+1}\} \leq \max\{\phi_{1,k+1}, \dots, \phi_{k+1,k+1}\}$$

και, επομένως,

$$\phi_k \leq \phi_{k+1}$$

για κάθε k .

Επειδή $\phi_{n,k} \leq f_n \leq f_k$ σ.π. για κάθε $n = 1, \dots, k$, συνεπάγεται

$$\phi_k \leq f_k \quad \text{σ.π.}$$

και, επομένως,

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_k \leq \int_{\mathbb{R}} f_k \leq M$$

για κάθε k .

Άρα η ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων (ϕ_k) ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος Β, οπότε υπάρχει συνάρτηση f στη συλλογή \mathcal{C}_1 ώστε

$$\phi_k \rightarrow f \quad \text{σ.π.} \quad \text{και} \quad \int_{\mathbb{R}} \phi_k \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f.$$

Κατόπιν, έστω τυχόν n . Για κάθε $k \geq n$ ισχύει $\phi_{n,k} \leq \phi_k$ και, παίρνοντας όριο καθώς $k \rightarrow +\infty$,

$$f_n \leq f \quad \text{σ.π.}$$

για κάθε n . Συνδυάζοντας με την $\phi_k \leq f_k$ σ.π. που είδαμε ότι ισχύει για κάθε k , έχουμε ότι

$$\phi_k \leq f_k \leq f \quad \text{σ.π.}$$

Άρα

$$f_k \rightarrow f \quad \text{σ.π.}$$

Επιπλέον, $\int_{\mathbb{R}} \phi_k \leq \int_{\mathbb{R}} f_k \leq \int_{\mathbb{R}} f$ και, λόγω του ότι $\int_{\mathbb{R}} \phi_k \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f$,

$$\int_{\mathbb{R}} f_k \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f.$$

Άρα, στην περίπτωση που όλες οι f_n ανήκουν στη συλλογή \mathcal{C}_1 , τότε το αποτέλεσμα του θεωρήματος ισχύει και, μάλιστα, η οριακή συνάρτηση f ανήκει κι αυτή στην \mathcal{C}_1 .

Τώρα θα ασχοληθούμε με τη γενική περίπτωση.

Επειδή $f_1 \in \mathcal{C}_2$, υπάρχουν, λόγω του Λήμματος 1.2, $g_1, h_1 \in \mathcal{C}_1$ ώστε $f_1 = g_1 - h_1$ σ.π., $h_1 \geq 0$ σ.π. και $\int_{\mathbb{R}} h_1 < \frac{1}{2}$. Κατόπιν, επειδή $f_2 \in \mathcal{C}_2$ και $f_1 \leq f_2$ σ.π., υπάρχουν, πάλι λόγω του Λήμματος 1.2, $g_2, h_2 \in \mathcal{C}_1$ ώστε

$f_2 = g_2 - h_2$ σ.π., $g_1 \leq g_2$ σ.π., $h_1 \leq h_2$ σ.π. και $\int_{\mathbb{R}} h_2 < \int_{\mathbb{R}} h_1 + \frac{1}{4}$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, δημιουργούμε ακολουθίες $(g_n), (h_n)$ στην \mathcal{C}_1 ώστε για κάθε n να ισχύει

$$f_n = g_n - h_n \text{ σ.π.} \quad g_n \leq g_{n+1} \text{ σ.π.}, \quad h_n \leq h_{n+1} \text{ σ.π.} \quad \int_{\mathbb{R}} h_{n+1} < \int_{\mathbb{R}} h_n + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Από την τελευταία σχέση συνεπάγεται

$$\int_{\mathbb{R}} h_n < \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} < 1$$

για κάθε n και, επομένως,

$$\int_{\mathbb{R}} g_n = \int_{\mathbb{R}} f_n + \int_{\mathbb{R}} h_n < M + 1$$

για κάθε n .

Τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα της ειδικής περίπτωσης στις ακολουθίες $(g_n), (h_n)$ και έχουμε ότι υπάρχουν $g, h \in \mathcal{C}_1$ ώστε $g_n \rightarrow g$ σ.π., $h_n \rightarrow h$ σ.π. και $\int_{\mathbb{R}} g_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} g$ και $\int_{\mathbb{R}} h_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} h$. Τέλος, ορίζουμε $f = g - h$, οπότε $f \in \mathcal{C}_2$ και

$$f_n = g_n - h_n \rightarrow g - h = f \text{ σ.π.} \quad \int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} g_n - \int_{\mathbb{R}} h_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} g - \int_{\mathbb{R}} h = \int_{\mathbb{R}} f.$$

[β] Αν f είναι η συνάρτηση που προκύπτει από το [α], τότε $f_n \rightarrow f$ σ.π. και $f_n \rightarrow f^*$ σ.π., οπότε $f^* = f$ σ.π. Επειδή $f \in \mathcal{C}_2$, έχουμε $f^* \in \mathcal{C}_2$ και $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} f^*$. Τέλος, επειδή $\int_{\mathbb{R}} f_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f$, έχουμε $\int_{\mathbb{R}} f_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f^*$. \square

Σχόλιο. Επειδή $f_n \rightarrow f$ σ.π., η σχέση $\int_{\mathbb{R}} f_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f$ μπορεί να διατυπωθεί

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$$

και εκφράζει τη δυνατότητα εναλλαγής των συμβόλων \lim και \int .

Θεώρημα Σύγκλισης Σειράς (Levi). Έστω ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων (f_n) ώστε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n| < +\infty.$$

Τότε:

[α] Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει απολύτως σ.π. και ορίζει ολοκληρώσιμη συνάρτηση

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$$

και

$$\int_{\mathbb{R}} f = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

[β] Αν υπάρχει συνάρτηση f^* ώστε $f^* = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ σ.π., τότε η f^* είναι ολοκληρώσιμη και $\int_{\mathbb{R}} f^* = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n$.

Απόδειξη. [α] Για κάθε n θεωρούμε τις συναρτήσεις f_n^+ και f_n^- οι οποίες ανήκουν στην \mathcal{C}_2 και για τις οποίες ισχύει

$$0 \leq f_n^+, \quad 0 \leq f_n^-, \quad f_n^+ - f_n^- = f_n, \quad f_n^+ + f_n^- = |f_n| \quad \text{σ.π.}$$

Άρα $0 \leq \int_{\mathbb{R}} f_n^+ \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n|$ και $0 \leq \int_{\mathbb{R}} f_n^- \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n|$, οπότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n^+ < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n^- < +\infty.$$

Ορίζουμε $t_n = f_1^+ + \dots + f_n^+$ και $u_n = f_1^- + \dots + f_n^-$ για κάθε n , οπότε οι ακολουθίες $(t_n), (u_n)$ είναι στην \mathcal{C}_2 και ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μονότονης Σύγκλισης. Άρα υπάρχουν $g, h \in \mathcal{C}_2$ ώστε $t_n \rightarrow g$ σ.π. και $u_n \rightarrow h$ σ.π. και $\int_{\mathbb{R}} t_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} g$ και $\int_{\mathbb{R}} u_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} h$. Άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^+ = g, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^- = h \quad \sigma.π.$$

και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n^+ = \int_{\mathbb{R}} g, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n^- = \int_{\mathbb{R}} h.$$

Επομένως,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n| = g + h \quad \sigma.π.$$

οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει απολύτως σ.π.

Τέλος, αν ορίσουμε $f = g - h$, έχουμε ότι $f \in \mathcal{C}_2$ και

$$f = g - h = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^- = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \quad \sigma.π.$$

και

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} g - \int_{\mathbb{R}} h = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n^- = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

[β] Αν f είναι η συνάρτηση που προκύπτει από το [α], τότε $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ σ.π. και $f^* = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^*$, σ.π. οπότε $f^* = f$ σ.π. Άρα $f^* \in \mathcal{C}_2$ και $\int_{\mathbb{R}} f^* = \int_{\mathbb{R}} f$. Επειδή $\int_{\mathbb{R}} f = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n$, συνεπάγεται $\int_{\mathbb{R}} f^* = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n$. \square

Σχόλιο. Επειδή $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ σ.π., η σχέση $\int_{\mathbb{R}} f = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n$ γράφεται

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n$$

και εκφράζει τη δυνατότητα εναλλαγής των συμβόλων \sum και \int .

Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης (Lebesgue). Έστω ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων (f_n) και ολοκληρώσιμη F ώστε $|f_n| \leq F$ σ.π. για κάθε n . Αν $f_n \rightarrow f$ σ.π., τότε και η f είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f.$$

Απόδειξη. Έστω τυχόν n . Για κάθε k ορίζουμε

$$h_{n,k} = \min\{f_n, \dots, f_{n+k-1}\}, \quad g_{n,k} = \max\{f_n, \dots, f_{n+k-1}\}.$$

Τότε $h_{n,k}, g_{n,k} \in \mathcal{C}_2$ και $h_{n,k} \geq h_{n,k+1}$ σ.π. και $g_{n,k} \leq g_{n,k+1}$ σ.π. για κάθε k . Επίσης, επειδή $-F \leq f_n \leq F$ σ.π. για κάθε n , συνεπάγεται $-F \leq h_{n,k} \leq g_{n,k} \leq F$ σ.π. και, επομένως,

$$\int_{\mathbb{R}} h_{n,k} \geq - \int_{\mathbb{R}} F, \quad \int_{\mathbb{R}} g_{n,k} \leq \int_{\mathbb{R}} F.$$

Άρα η ακολουθία $(-h_{n,k})$ (με δείκτη k) και η ακολουθία $(g_{n,k})$ (με δείκτη k) ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μονότονης Σύγκλισης, οπότε υπάρχουν h_n, g_n στην \mathcal{C}_2 ώστε

$$h_{n,k} \rightarrow h_n \text{ σ.π.} \quad g_{n,k} \rightarrow g_n \text{ σ.π.} \quad \int_{\mathbb{R}} h_{n,k} \rightarrow \int_{\mathbb{R}} h_n, \quad \int_{\mathbb{R}} g_{n,k} \rightarrow \int_{\mathbb{R}} g_n$$

για κάθε n (οι συγκλίσεις είναι για $k \rightarrow +\infty$).

Κατόπιν, παρατηρούμε ότι

$$h_{n,k} = \min\{f_n, \dots, f_{n+k-1}\} \leq \min\{f_{n+1}, \dots, f_{n+k-1}\} = h_{n+1,k-1} \text{ σ.π.}$$

$$g_{n,k} = \max\{f_n, \dots, f_{n+k-1}\} \geq \max\{f_{n+1}, \dots, f_{n+k-1}\} = g_{n+1,k-1} \text{ σ.π.}$$

για κάθε $k \geq 2$, οπότε παίρνοντας όριο όταν $k \rightarrow +\infty$,

$$h_n \leq h_{n+1} \text{ σ.π.} \quad g_n \geq g_{n+1} \text{ σ.π.}$$

για κάθε n .

Είδαμε προηγουμένως ότι $-F \leq h_{n,k} \leq g_{n,k} \leq F$ σ.π. και, παίρνοντας πάλι όριο όταν $k \rightarrow +\infty$, έχουμε ότι $-F \leq h_n \leq g_n \leq F$ σ.π. και, επομένως,

$$-\int_{\mathbb{R}} F \leq \int_{\mathbb{R}} h_n \leq \int_{\mathbb{R}} g_n \leq \int_{\mathbb{R}} F$$

για κάθε n .

Άρα οι ακολουθίες $(h_n), (-g_n)$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μονότονης Σύγκλισης, οπότε υπάρχουν $h, g \in \mathcal{C}_2$ ώστε

$$h_n \rightarrow h \text{ σ.π.} \quad g_n \rightarrow g \text{ σ.π.} \quad \int_{\mathbb{R}} h_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} h, \quad \int_{\mathbb{R}} g_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} g.$$

Τώρα, έστω x ώστε $f_n(x) \rightarrow f(x), h_n(x) \rightarrow h(x)$ και $g_n(x) \rightarrow g(x)$. Επίσης, έστω $\epsilon > 0$. Τότε, αν ο n_0 είναι αρκετά μεγάλος, ισχύει $f(x) - \epsilon < f_m(x) < f(x) + \epsilon$ για κάθε $m \geq n_0$ και, επομένως, $f(x) - \epsilon < h_{n,k}(x) \leq g_{n,k}(x) < f(x) + \epsilon$ για κάθε k και κάθε $n \geq n_0$. Παίρνοντας όριο όταν $k \rightarrow +\infty$, βρίσκουμε $f(x) - \epsilon \leq h_n(x) \leq g_n(x) \leq f(x) + \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Τέλος, παίρνοντας όριο όταν $n \rightarrow +\infty$, βρίσκουμε $f(x) - \epsilon \leq h(x) \leq g(x) \leq f(x) + \epsilon$. Άρα $|h(x) - f(x)| \leq \epsilon$ και $|g(x) - f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$, οπότε $h(x) = g(x) = f(x)$. Συμπεραίνουμε ότι $h = g = f$ σ.π. Άρα $f \in \mathcal{C}_2$ και

$$h_n \rightarrow f \text{ σ.π.} \quad g_n \rightarrow f \text{ σ.π.} \quad \int_{\mathbb{R}} h_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f, \quad \int_{\mathbb{R}} g_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f.$$

Τέλος, έχουμε ότι $h_{n,k} \leq f_n \leq g_{n,k}$ σ.π. για κάθε n, k . Παίρνοντας όριο όταν $k \rightarrow +\infty$, βρίσκουμε ότι $h_n \leq f_n \leq g_n$ σ.π. για κάθε n , οπότε

$$\int_{\mathbb{R}} h_n \leq \int_{\mathbb{R}} f_n \leq \int_{\mathbb{R}} g_n$$

για κάθε n . Άρα $\int_{\mathbb{R}} f_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f$. □

Σχόλιο. Όπως στο Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης, επειδή $f_n \rightarrow f$ σ.π., η σχέση $\int_{\mathbb{R}} f_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f$ μπορεί να διατυπωθεί

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$$

και εκφράζει τη δυνατότητα εναλλαγής των συμβόλων \lim και \int .

Οι προϋποθέσεις για να γίνει αυτή η εναλλαγή είναι οι εξής. (i) Σε σχέση με το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης, πρέπει οι f_n να αυξάνονται και τα ολοκληρώματά τους να είναι φραγμένα. (ii) Σε σχέση με το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, πρέπει οι f_n να κυριαρχούνται από την ίδια ολοκληρώσιμη συνάρτηση F .

Πρόταση 1.12. Έστω ολοκληρώσιμη f . Ισχύει $g = f$ σ.π. αν και μόνο αν η g είναι κι αυτή ολοκληρώσιμη και $\int_{\mathbb{R}} |g - f| = 0$.

Απόδειξη. Η μια κατεύθυνση είναι απλή εφαρμογή της Πρότασης 1.10. Αν $g = f$ σ.π., τότε $g \in \mathcal{C}_2$. Επίσης $|g - f| = 0$ σ.π. οπότε $\int_{\mathbb{R}} |g - f| = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0$. Τώρα έστω $g \in \mathcal{C}_2$ και $\int_{\mathbb{R}} |g - f| = 0$. Ορίζουμε $f_n = |g - f| \in \mathcal{C}_2$ για κάθε n και τότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |g - f| = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0 < +\infty.$$

Από το Θεώρημα Σύγκλισης Σειράς συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει σ.π. Δηλαδή, για σχεδόν κάθε x η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ συγκλίνει και, επομένως, $|g(x) - f(x)| = f_n(x) \rightarrow 0$ και, επομένως, $g(x) = f(x)$. Άρα $g = f$ σ.π. \square

Σχόλιο. Ας θυμηθούμε τον ορισμό του γενικευμένου Riemann ολοκληρώματος. Έστω $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, όπου ο b είναι αριθμός ή $+\infty$. Αν για κάθε c , $a \leq c < b$, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a, c]$ και το όριο $\lim_{c \rightarrow b^-} \mathcal{R} \int_a^c f$ υπάρχει, τότε λέμε ότι υπάρχει το γενικευμένο Riemann ολοκλήρωμα της f στο $[a, b)$, το συμβολίζουμε $\mathcal{GR} \int_a^b f$ ή $\mathcal{GR} \int_a^b f(x) dx$ και η τιμή του είναι

$$\mathcal{GR} \int_a^b f = \mathcal{GR} \int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \mathcal{R} \int_a^c f.$$

Ανάλογος είναι ο ορισμός του γενικευμένου Riemann ολοκληρώματος και στην περίπτωση που η f ορίζεται σε διάστημα $(a, b]$, όπου ο a είναι αριθμός ή $-\infty$.

Από τα βασικά μαθήματα Ανάλυσης γνωρίζουμε κάποια πράγματα για γενικευμένα Riemann ολοκληρώματα καθώς και διάφορα παραδείγματα. Εδώ θα τα χρησιμοποιήσουμε ελεύθερα. Ειδικότερα, θυμόμαστε το εξής αποτέλεσμα για το γενικευμένο Riemann ολοκλήρωμα μη αρνητικής συνάρτησης.

Αν η $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a, c]$ για κάθε c , $a \leq c < b$, και αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b)$, τότε το $\mathcal{GR} \int_a^b f$ υπάρχει και η τιμή του είναι είτε μη αρνητικός αριθμός είτε $+\infty$.

Επίσης, θυμόμαστε το εξής για την απόλυτη σύγκλιση γενικευμένου Riemann ολοκληρώματος.

Αν η $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a, c]$ για κάθε c , $a \leq c < b$, και αν η τιμή του $\mathcal{GR} \int_a^b |f|$ είναι αριθμός (δηλαδή, όχι $+\infty$), τότε το $\mathcal{GR} \int_a^b f$ υπάρχει, η τιμή του είναι αριθμός και

$$|\mathcal{GR} \int_a^b f| \leq \mathcal{GR} \int_a^b |f|.$$

Θεώρημα 1.1. [1] Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε η f να μηδενίζεται έξω από κάποιο διάστημα $[a, b]$ και να είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Τότε η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και το Lebesgue ολοκλήρωμά της είναι το ίδιο με το Riemann ολοκλήρωμά της στο $[a, b]$:

$$\int_{\mathbb{R}} f = \mathcal{R} \int_a^b f.$$

[2] Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε η f να μηδενίζεται έξω από κάποιο διάστημα $[a, b)$, όπου b είναι αριθμός ή $+\infty$, και να είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a, c]$ για κάθε c , $a \leq c < b$. Αν η τιμή του $\mathcal{GR} \int_a^b |f|$ είναι αριθμός, τότε η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και το Lebesgue ολοκλήρωμά της είναι το ίδιο με το γενικευμένο Riemann ολοκλήρωμά της στο $[a, b)$:

$$\int_{\mathbb{R}} f = \mathcal{GR} \int_a^b f.$$

Όμως, αν η τιμή του $\mathcal{GR} \int_a^b |f|$ είναι $+\infty$, τότε η f δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη. [1] Έστω ότι η f μηδενίζεται έξω από το διάστημα $[a, b]$ και είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Τότε η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$, οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$M = \sup\{f(x) : a \leq x \leq b\} < +\infty, \quad m = \inf\{f(x) : a \leq x \leq b\} > -\infty.$$

Το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann λέει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει αντίστοιχη διαμέριση $x_0 = a < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ του $[a, b]$ ώστε

$$\sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) < \epsilon,$$

όπου $M_k = \sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$ και $m_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$. Επίσης, ισχύει

$$\sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) \leq \mathcal{R} \int_a^b f \leq \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Είναι φανερό ότι

$$m \leq m_k \quad \text{και} \quad M_k \leq M$$

για κάθε $k = 1, \dots, n$.

Τώρα, ορίζουμε τις κλιμακωτές συναρτήσεις ψ και ϕ ως εξής. Και οι δυο μηδενίζονται έξω από το $[a, b]$, ενώ, για κάθε $k = 1, \dots, n$, η ψ είναι σταθερή m_k και η ϕ είναι σταθερή M_k στο ανοικτό διάστημα (x_{k-1}, x_k) . Επειδή σε κάθε (x_{k-1}, x_k) ισχύει $m_k \leq f(x) \leq M_k$, συνεπάγεται $\psi(x) \leq f(x) \leq \phi(x)$ για κάθε x εκτός ίσως από τα σημεία $x = x_k$ για $k = 1, \dots, n$. Άρα

$$\psi \leq f \leq \phi \quad \text{σ.π.}$$

Παρατηρούμε ότι $\int_{\mathbb{R}} \psi = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1})$ και $\int_{\mathbb{R}} \phi = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1})$, οπότε οι αρχικές ανισότητες γράφονται

$$\int_{\mathbb{R}} \phi - \int_{\mathbb{R}} \psi < \epsilon \quad \text{και} \quad \int_{\mathbb{R}} \psi \leq \mathcal{R} \int_a^b f \leq \int_{\mathbb{R}} \phi.$$

Εφαρμόζοντας τα προηγούμενα με $\epsilon = \frac{1}{2^n}$, συμπεραίνουμε ότι για κάθε n υπάρχουν κλιμακωτές συναρτήσεις ψ_n, ϕ_n οι οποίες μηδενίζονται έξω από το $[a, b]$ ώστε

$$\psi_n \leq f \leq \phi_n \quad \text{σ.π.} \quad \int_{\mathbb{R}} \phi_n - \int_{\mathbb{R}} \psi_n < \frac{1}{2^n} \quad \int_{\mathbb{R}} \psi_n \leq \mathcal{R} \int_a^b f \leq \int_{\mathbb{R}} \phi_n.$$

Από τις δυο τελευταίες σχέσεις είναι φανερό ότι προκύπτει

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_n \rightarrow \mathcal{R} \int_a^b f, \quad \int_{\mathbb{R}} \phi_n \rightarrow \mathcal{R} \int_a^b f.$$

Τώρα, έχουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |\phi_n - \psi_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (\phi_n - \psi_n) < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1,$$

οπότε, από το Θεώρημα Σύγκλισης Σειράς, η $\sum_{n=1}^{+\infty} (\phi_n - \psi_n)$ συγκλίνει σ.π. Άρα

$$\phi_n - \psi_n \rightarrow 0 \quad \text{σ.π.}$$

και, επομένως,

$$\psi_n \rightarrow f \quad \text{σ.π.}, \quad \phi_n \rightarrow f \quad \text{σ.π.}$$

Τέλος, ορίζουμε την κλιμακωτή συνάρτηση F η οποία μηδενίζεται έξω από το $[a, b]$ και είναι σταθερή $K = \max\{-m, M\}$ στο (a, b) . Τότε

$$|\phi_n| \leq F \quad \text{σ.π.}$$

οπότε, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f.$$

Άρα

$$\int_{\mathbb{R}} f = \mathcal{R} \int_a^b f.$$

[2] Θεωρούμε μια οποιαδήποτε γνησίως αύξουσα ακολουθία (c_n) στο διάστημα $[a, b)$ ώστε $c_n \rightarrow b$. Θεωρούμε για κάθε n τη συνάρτηση f_n η οποία μηδενίζεται έξω από το $[a, c_n]$ και ταυτίζεται με την f στο $[a, c_n]$. Τότε οι $f_n, |f_n|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμες στο $[a, c_n]$, οπότε από το [1] συνεπάγεται ότι οι $f_n, |f_n|$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμες και

$$\int_{\mathbb{R}} f_n = \mathcal{R} \int_a^{c_n} f_n = \mathcal{R} \int_a^{c_n} f, \quad \int_{\mathbb{R}} |f_n| = \mathcal{R} \int_a^{c_n} |f_n| = \mathcal{R} \int_a^{c_n} |f| \leq \mathcal{GR} \int_a^b |f|.$$

Επίσης, είναι φανερό ότι $f_n \rightarrow f$, ότι $|f_n| \rightarrow |f|$ καθώς και ότι $|f_n| \leq |f_{n+1}| \leq |f|$ για κάθε n . Άρα, αν η τιμή του $\mathcal{GR} \int_a^b |f|$ είναι αριθμός, τότε από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης συνεπάγεται ότι η $|f|$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και

$$\int_{\mathbb{R}} |f| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{R} \int_a^{c_n} |f| = \mathcal{GR} \int_a^b |f|.$$

Τέλος, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης συνεπάγεται ότι η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και

$$\int_{\mathbb{R}} f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{R} \int_a^{c_n} f = \mathcal{GR} \int_a^b f.$$

Τώρα, έστω ότι η τιμή του $\mathcal{GR} \int_a^b |f|$ είναι $+\infty$. Αν υποθέσουμε ότι η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη, τότε και η $|f|$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη, οπότε η τιμή του $\int_{\mathbb{R}} |f|$ είναι αριθμός. Τότε

$$\mathcal{R} \int_a^{c_n} |f| = \int_{\mathbb{R}} |f_n| \leq \int_{\mathbb{R}} |f|$$

για κάθε n και, παίρνοντας όριο όταν $n \rightarrow +\infty$, συμπεραίνουμε ότι

$$\mathcal{GR} \int_a^b |f| \leq \int_{\mathbb{R}} |f|$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα η f δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη. □

Παραδείγματα. [1] Η f η οποία μηδενίζεται έξω από το $[0, 1]$ και ισούται με τη συνάρτηση x στο $[0, 1]$ είναι ολοκληρώσιμη και $\int_{\mathbb{R}} f = \mathcal{R} \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

[2] Η συνάρτηση Dirichlet $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \notin [a, b] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$ δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, αλλά είναι ολοκληρώσιμη.

Τα επόμενα τρία παραδείγματα είναι άμεσες εφαρμογές του [2] του Θεωρήματος 1.1.

[3] Έστω αριθμός p και η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^p}, & \text{αν } x \in [1, +\infty) \\ 0, & \text{αν } x \in (-\infty, 1) \end{cases}$$

Αν $p > 1$, η f είναι ολοκληρώσιμη ενώ, αν $p \leq 1$, η f δεν είναι ολοκληρώσιμη. Επίσης, αν $p > 1$,

$$\int_{\mathbb{R}} f = \mathcal{GR} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1}.$$

[4] Έστω αριθμός p και η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^p}, & \text{αν } x \in (0, 1] \\ 0, & \text{αν } x \in (-\infty, 0] \text{ ή } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Αν $p < 1$, η f είναι ολοκληρώσιμη ενώ, αν $p \geq 1$, η f δεν είναι ολοκληρώσιμη. Επίσης, αν $p < 1$,

$$\int_{\mathbb{R}} f = \mathcal{GR} \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p}.$$

[5] Έστω αριθμοί c, p, q και η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^p e^{-cx^q}, & \text{αν } x \in [a, +\infty) \\ 0, & \text{αν } x \in (-\infty, a) \end{cases}$$

Αν $c > 0$ και $q > 0$, η f είναι ολοκληρώσιμη.

Ορισμός. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Ονομάζουμε **χαρακτηριστική συνάρτηση του A** και τη συμβολίζουμε

$$\chi_A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

τη συνάρτηση με τύπο

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A \\ 0, & \text{αν } x \notin A \end{cases}$$

Μερικές απλές σχέσεις είναι οι:

$$\chi_A \chi_B = \chi_{A \cap B}, \quad \chi_{A \cup B} + \chi_{A \cap B} = \chi_A + \chi_B, \quad \chi_{\mathbb{R} \setminus A} = 1 - \chi_A.$$

Είναι φανερό ότι, αν το A είναι ένωση κάποιων πεπερασμένου πλήθους φραγμένων διαστημάτων, τότε η χ_A είναι κλιμακωτή συνάρτηση. Λίγο γενικότερα, αν μια συνάρτηση είναι γραμμικός συνδυασμός

$$f = \sum_{k=1}^n \lambda_k \chi_{A_k},$$

όπου κάθε σύνολο A_k είναι ένωση κάποιων πεπερασμένου πλήθους φραγμένων διαστημάτων, τότε η f είναι κλιμακωτή συνάρτηση.

Επίσης, αν ϕ είναι οποιαδήποτε κλιμακωτή συνάρτηση, τότε υπάρχουν αριθμοί c_1, \dots, c_n και φραγμένα διαστήματα I_1, \dots, I_n ώστε

$$\phi = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{I_k}.$$

Ορισμός. Η συνάρτηση $\mu_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $\mu_a(x) = x + a$ ονομάζεται **μεταφορά κατά a** .

Η συνάρτηση $o_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($t \neq 0$) με τύπο $o_t(x) = tx$ ονομάζεται **ομοιοθεσία κατά t** .

Ορισμός. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Ονομάζουμε **μεταφορά του A κατά a** και συμβολίζουμε $A + a$ το σύνολο

$$A + a = \mu_a(A) = \{x + a : x \in A\}.$$

Επίσης, ονομάζουμε **ομοιόθετο του A κατά $t \neq 0$** και συμβολίζουμε tA το σύνολο

$$tA = o_t(A) = \{tx : x \in A\}.$$

Ορισμός. Έστω συνάρτηση f στο \mathbb{R} . Ονομάζουμε **μεταφορά της f κατά a** και συμβολίζουμε $\mu_a(f)$ τη συνάρτηση με τύπο

$$\mu_a(f)(x) = f(x - a).$$

Επίσης, ονομάζουμε **ομοιόθετη της f κατά $t \neq 0$** και συμβολίζουμε $o_t(f)$ τη συνάρτηση με τύπο

$$o_t(f)(x) = f\left(\frac{x}{t}\right).$$

Σχόλιο. Είναι, τώρα, εύκολο να δούμε ότι

$$\chi_{A+a}(x) = \chi_A(x-a), \quad \chi_{tA}(x) = \chi_A\left(\frac{x}{t}\right).$$

Με άλλα λόγια, $\chi_{\mu_a(A)} = \mu_a(\chi_A)$ και $\chi_{o_t(A)} = o_t(\chi_A)$.

Παραδείγματα. [1] Έστω $f_n = \sqrt{n}\chi_{(0, \frac{1}{n}]}$.

Κάθε f_n είναι κλιμακωτή συνάρτηση και $\int_{\mathbb{R}} f_n = \sqrt{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Άρα $\int_{\mathbb{R}} f_n \rightarrow 0$.

Επίσης, είναι εύκολο να δει κανείς ότι για κάθε x ισχύει $f_n(x) \rightarrow 0$. Πράγματι, αν $x \leq 0$, τότε $f_n(x) = 0$ για κάθε n και, αν $x > 0$, τότε για αρκετά μεγάλο n ισχύει $x \notin (0, \frac{1}{n}]$, οπότε $f_n(x) = 0$. Επομένως, $f_n \rightarrow 0$. Προφανώς, $\int_{\mathbb{R}} 0 = 0$, οπότε

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} 0.$$

Αυτό είναι και το συμπέρασμα του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης αλλά για να επιβεβαιωθεί το θεώρημα αυτό, πρέπει να δούμε αν υπάρχει κάποια ολοκληρώσιμη F με την ιδιότητα:

$$|f_n| \leq F \text{ σ.π.}$$

για κάθε n .

Μια προσεκτική σχεδίαση των γραφημάτων των f_n δείχνει ότι αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{αν } x \in (0, 1] \\ 0, & \text{αν } x \notin (0, 1] \end{cases}$$

τότε ισχύει $|f_n| \leq F$ (και, μάλιστα, παντού) για κάθε n . Σε ένα από τα προηγούμενα παραδείγματα είδαμε ότι η F είναι ολοκληρώσιμη.

[2] Έστω $f_n = n\chi_{(0, \frac{1}{n}]}$.

Κάθε f_n είναι κλιμακωτή συνάρτηση και $\int_{\mathbb{R}} f_n = n \frac{1}{n} = 1$. Άρα $\int_{\mathbb{R}} f_n \rightarrow 1$.

Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, εύκολα βλέπουμε ότι για κάθε x ισχύει $f_n(x) \rightarrow 0$. Άρα, $f_n \rightarrow 0$. Όμως,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \not\rightarrow \int_{\mathbb{R}} 0.$$

Για να δούμε αν αυτό δεν διαφωνεί με το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, πρέπει να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει κάποια ολοκληρώσιμη F με την ιδιότητα:

$$|f_n| \leq F \text{ σ.π.}$$

για κάθε n .

Μια προσεκτική σχεδίαση των γραφημάτων των f_n δείχνει ότι για κάθε F με αυτήν την ιδιότητα (δηλαδή: $|f_n| \leq F$ σ.π. για κάθε n) πρέπει να ισχύει

$$F(x) \geq \frac{1}{2x} \text{ για σ.κ. } x \in (0, 1] \text{ και } F(x) \geq 0 \text{ για σ.κ. } x \notin (0, 1].$$

Έστω, τώρα, ότι μια οποιαδήποτε τέτοια συνάρτηση F είναι ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε, για κάθε n , τη συνάρτηση g_n που μηδενίζεται έξω από το $(\frac{1}{n}, 1]$ και ισούται με $\frac{1}{2x}$ στο $(\frac{1}{n}, 1]$. Τότε, προφανώς,

$$F \geq g_n \text{ σ.π.}$$

για κάθε n . Λόγω του [1] του Θεωρήματος 1.1, κάθε g_n είναι ολοκληρώσιμη, οπότε

$$\int_{\mathbb{R}} F \geq \int_{\mathbb{R}} g_n = \mathcal{R} \int_{\frac{1}{n}}^1 g_n = \frac{1}{2} \log n$$

για κάθε n . Παίρνοντας όριο όταν $n \rightarrow +\infty$, καταλήγουμε σε άτοπο.

[3] Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \chi_{[n, n+1)}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$|f| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \chi_{[n, n+1)}.$$

Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[1, c]$, διότι σε κάθε τέτοιο διάστημα είναι κλιμακωτή συνάρτηση. Σύμφωνα με το [2] του Θεωρήματος 1.1, για να δούμε αν η f είναι ολοκληρώσιμη αρκεί να δούμε αν η τιμή του $\mathcal{GR} \int_1^{+\infty} |f|$ είναι αριθμός ή $+\infty$.

Για κάθε $c \geq 1$ θεωρούμε το ακέραιο μέρος $n(c) = [c]$ και τότε

$$\mathcal{R} \int_1^c |f| = \mathcal{R} \int_1^{n(c)} |f| + \mathcal{R} \int_{n(c)}^c |f|.$$

Με έναν απλό υπολογισμό,

$$\mathcal{R} \int_1^{n(c)} |f| = \sum_{k=1}^{n(c)-1} \frac{1}{k},$$

οπότε $\mathcal{R} \int_1^{n(c)} |f| \rightarrow +\infty$ όταν $c \rightarrow +\infty$, διότι $n(c) \rightarrow +\infty$ και διότι $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

Επίσης,

$$\mathcal{R} \int_{n(c)}^c |f| = \frac{c - n(c)}{n(c)},$$

οπότε $\mathcal{R} \int_{n(c)}^c |f| \rightarrow 0$ όταν $c \rightarrow +\infty$, διότι $0 \leq c - n(c) < 1$.

Άρα $\mathcal{R} \int_1^c |f| \rightarrow +\infty$ όταν $c \rightarrow +\infty$, οπότε

$$\mathcal{GR} \int_1^{+\infty} |f| = +\infty$$

και, επομένως, η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Πάντως, αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το $\mathcal{GR} \int_1^{+\infty} f$ υπάρχει και η τιμή του είναι αριθμός.

Πράγματι, με παρόμοιους υπολογισμούς έχουμε τα εξής.

$$\mathcal{R} \int_1^c f = \mathcal{R} \int_1^{n(c)} f + \mathcal{R} \int_{n(c)}^c f.$$

Τώρα

$$\mathcal{R} \int_1^{n(c)} f = \sum_{k=1}^{n(c)-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k},$$

οπότε το $\mathcal{R} \int_1^{n(c)} f$ συγκλίνει σε κάποιον συγκεκριμένο αριθμό όταν $c \rightarrow +\infty$, διότι, όπως γνωρίζουμε, η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ συγκλίνει. Μάλιστα, το όριο είναι ίσο με το άθροισμα αυτής της σειράς:

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \mathcal{R} \int_1^{n(c)} f = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Επίσης,

$$\mathcal{R} \int_{n(c)}^c f = \frac{(c - n(c))(-1)^{n(c)-1}}{n(c)},$$

οπότε $\mathcal{R} \int_{n(c)}^c f \rightarrow 0$.

Άρα το $\mathcal{R} \int_1^c f$ συγκλίνει στο άθροισμα της παραπάνω σειράς όταν $c \rightarrow +\infty$, οπότε

$$\mathcal{GR} \int_1^{+\infty} f = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

[4] Θεωρούμε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 x}$ για $x > 0$.

Επειδή $0 \leq e^{-n^2 x} \leq e^{-nx} = (e^{-x})^n$ για $x > 0$ και για κάθε n , συνεπάγεται

$$0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-x})^n < +\infty,$$

οπότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 x}$ συγκλίνει για $x > 0$. Άρα μπορούμε να ορίσουμε συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 x}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$

Τώρα, για κάθε n ορίζουμε την

$$f_n(x) = \begin{cases} e^{-n^2 x}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$

οπότε

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n| = \mathcal{GR} \int_0^{+\infty} e^{-n^2 x} dx = \frac{1}{n^2}.$$

Άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Σύγκλισης Σειράς, η f είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_{\mathbb{R}} f = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Θεώρημα 1.2. Έστω ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων (f_n) και ολοκληρώσιμη F . Αν $f_n \rightarrow f$ σ.π. και $|f| \leq F$ σ.π., τότε η f είναι ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$g_n = \max \{ \min \{ f_n, F \}, -F \}$$

για κάθε n . Οι g_n είναι ολοκληρώσιμες και

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{αν } -F(x) \leq f_n(x) \leq F(x) \\ F(x), & \text{αν } f_n(x) \geq F(x) \\ -F(x), & \text{αν } f_n(x) \leq -F(x) \end{cases}$$

Τότε

$$|g_n| \leq F \text{ σ.π.}$$

και

$$g_n = \max \{ \min \{ f_n, F \}, -F \} \rightarrow \max \{ \min \{ f, F \}, -F \} = f \text{ σ.π.}$$

επειδή $-F \leq f \leq F$ σ.π.

Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης συνεπάγεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. □

Σχόλιο. Αξίζει να δούμε τη διαφορά ανάμεσα στο τελευταίο Θεώρημα 1.2 και στο Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης. Το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχει ισχυρότερες υποθέσεις από το Θεώρημα 1.2. Πράγματι, το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης απαιτεί να ισχύει $|f_n| \leq F$ σ.π. για κάθε n . Αν ισχύει αυτή η υπόθεση, τότε παίρνοντας όριο όταν $n \rightarrow +\infty$, βρίσκουμε ότι $|f| \leq F$ σ.π., δηλαδή την υπόθεση του Θεωρήματος 1.2. Τώρα, επειδή το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχει ισχυρότερες υποθέσεις από το Θεώρημα 1.2, το συμπέρασμα του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης είναι ισχυρότερο από το συμπέρασμα του Θεωρήματος 1.2. Πράγματι, το συμπέρασμα του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης είναι ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int_{\mathbb{R}} f_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f$, ενώ το συμπέρασμα του Θεωρήματος 1.2 είναι μόνο ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

Παράδειγμα. Δείτε το δεύτερο από τα τελευταία τέσσερα παραδείγματα. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1.2 με $f = F = 0$ και, πράγματι, η f είναι ολοκληρώσιμη, αλλά δεν ισχύει $\int_{\mathbb{R}} f_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f$.

Ακολουθούν δυο εφαρμογές του Θεωρήματος 1.2, οι Προτάσεις 1.13 και 1.14.

Πρόταση 1.13. [1] Έστω ολοκληρώσιμη f και διάστημα I . Θεωρούμε τη συνάρτηση $\chi_I f$, η οποία ταυτίζεται με την f στο διάστημα I και μηδενίζεται έξω από το I . Τότε η $\chi_I f$ είναι ολοκληρώσιμη. [2] Έστω ολοκληρώσιμη f και κλιμακωτή ϕ . Τότε η ϕf είναι ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη. [1] Από την Πρόταση 1.11, υπάρχει ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων (ϕ_n) ώστε $\phi_n \rightarrow f$ σ.π. Θεωρούμε την ακολουθία κλιμακωτών (και, επομένως, ολοκληρώσιμων) συναρτήσεων $(\chi_I \phi_n)$ για την οποία ισχύει $\chi_I \phi_n \rightarrow \chi_I f$ σ.π.

Επειδή, $|\chi_I f| \leq |f|$ σ.π., από το Θεώρημα 1.2 συνεπάγεται ότι η $\chi_I f$ είναι ολοκληρώσιμη.

[2] Υπάρχουν αριθμοί c_1, \dots, c_n και φραγμένα διαστήματα I_1, \dots, I_n ώστε $\phi = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{I_k}$. Άρα $\phi f = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{I_k} f$. Από το [1] συνεπάγεται ότι κάθε $\chi_{I_k} f$ είναι ολοκληρώσιμη, οπότε η ϕf είναι ολοκληρώσιμη. \square

Πρόταση 1.14. Έστω ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων (f_n) και ολοκληρώσιμη g . Αν $f_n \rightarrow f$ σ.π. και αν για κάποιον αριθμό M ισχύει $|f| \leq M$ σ.π., τότε η fg είναι ολοκληρώσιμη και

$$\left| \int_{\mathbb{R}} fg \right| \leq M \int_{\mathbb{R}} |g|.$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 1.11, υπάρχει ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων (ψ_n) ώστε $\psi_n \rightarrow g$ σ.π.

Από την Πρόταση 1.13, κάθε $f_n \psi_n$ είναι ολοκληρώσιμη. Τώρα, για την ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $(f_n \psi_n)$ ισχύει $f_n \psi_n \rightarrow fg$ σ.π. Επίσης, $|fg| \leq M|g|$ σ.π. και η $M|g|$ είναι ολοκληρώσιμη επειδή η g είναι ολοκληρώσιμη. Από το Θεώρημα 1.2 συνεπάγεται ότι η fg είναι ολοκληρώσιμη. Επίσης

$$\left| \int_{\mathbb{R}} fg \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |fg| \leq \int_{\mathbb{R}} (M|g|) = M \int_{\mathbb{R}} |g|.$$

\square

Λήμμα του Fatou. Έστω ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων (f_n) ώστε $f_n \rightarrow f$ σ.π. και $\int_{\mathbb{R}} |f_n| \leq M$ για κάθε n . Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_{\mathbb{R}} |f| \leq M$.

Απόδειξη. Κατ' αρχάς υποθέτουμε ότι $f_n \geq 0$ σ.π. για κάθε n .

Τότε η απόδειξη είναι η "μισή" απόδειξη του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης.

Έστω τυχόν n . Για κάθε k ορίζουμε

$$h_{n,k} = \min\{f_n, \dots, f_{n+k-1}\}.$$

Τότε κάθε $h_{n,k}$ είναι ολοκληρώσιμη και $h_{n,k} \geq h_{n,k+1}$ σ.π. για κάθε k . Επίσης, επειδή $f_n \geq 0$ σ.π. για κάθε n , συνεπάγεται $h_{n,k} \geq 0$ σ.π. και, επομένως,

$$\int_{\mathbb{R}} h_{n,k} \geq 0.$$

Άρα η ακολουθία $(-h_{n,k})$ (με δείκτη k) ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μονότονης Σύγκλισης, οπότε υπάρχει ολοκληρώσιμη h_n ώστε

$$h_{n,k} \rightarrow h_n \text{ σ.π.} \quad \int_{\mathbb{R}} h_{n,k} \rightarrow \int_{\mathbb{R}} h_n$$

για κάθε n (οι συγκλίσεις είναι για $k \rightarrow +\infty$).

Κατόπιν, παρατηρούμε ότι

$$h_{n,k} = \min\{f_n, \dots, f_{n+k-1}\} \leq \min\{f_{n+1}, \dots, f_{n+k-1}\} = h_{n+1,k-1} \text{ σ.π.}$$

για κάθε $k \geq 2$, οπότε παίρνοντας όριο όταν $k \rightarrow +\infty$,

$$h_n \leq h_{n+1} \text{ σ.π.}$$

για κάθε n .

Παρατηρούμε ότι $0 \leq h_{n,k} \leq f_n$ σ.π. και, παίρνοντας πάλι όριο όταν $k \rightarrow +\infty$, έχουμε ότι $0 \leq h_n \leq f_n$ σ.π. και, επομένως,

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}} h_n \leq \int_{\mathbb{R}} f_n \leq M$$

για κάθε n .

Άρα η ακολουθία (h_n) ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μονότονης Σύγκλισης, οπότε υπάρχει ολοκληρώσιμη h ώστε

$$h_n \rightarrow h \text{ σ.π.} \quad \int_{\mathbb{R}} h_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} h.$$

Τώρα, έστω x ώστε $f_n(x) \rightarrow f(x)$ και $h_n(x) \rightarrow h(x)$. Επίσης, έστω $\epsilon > 0$. Τότε, αν ο n_0 είναι αρκετά μεγάλος, ισχύει $f(x) - \epsilon < f_m(x) < f(x) + \epsilon$ για κάθε $m \geq n_0$ και, επομένως, $f(x) - \epsilon < h_{n,k}(x) < f(x) + \epsilon$ για κάθε k και κάθε $n \geq n_0$. Παίρνοντας όριο όταν $k \rightarrow +\infty$, βρίσκουμε $f(x) - \epsilon \leq h_n(x) \leq f(x) + \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Τέλος, παίρνοντας όριο όταν $n \rightarrow +\infty$, βρίσκουμε $f(x) - \epsilon \leq h(x) \leq f(x) + \epsilon$. Άρα $|h(x) - f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$, οπότε $h(x) = f(x)$.

Συμπεραίνουμε ότι $h = f$ σ.π. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη. Επίσης, $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} h$ και, επειδή $\int_{\mathbb{R}} h_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} h$ και $\int_{\mathbb{R}} h_n \leq M$ για κάθε n , συνεπάγεται $\int_{\mathbb{R}} f \leq M$.

Τώρα, η γενική περίπτωση.

Θεωρούμε τις ακολουθίες ολοκληρώσιμων συναρτήσεων (f_n^+) και (f_n^-) . Τότε $f_n^+ \rightarrow f^+$ σ.π., $f_n^- \rightarrow f^-$ σ.π., $f_n^+ \geq 0$ σ.π. και $f_n^- \geq 0$ σ.π. για κάθε n και $\int_{\mathbb{R}} f_n^+ \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n| \leq M$ και $\int_{\mathbb{R}} f_n^- \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n| \leq M$ για κάθε n . Επομένως, από την πρώτη περίπτωση, οι f^+ και f^- είναι ολοκληρώσιμες, οπότε και η $f = f^+ - f^-$ είναι ολοκληρώσιμη.

Τέλος, εφαρμόζοντας με τον ίδιο τρόπο το αποτέλεσμα της πρώτης περίπτωσης στην ακολουθία $(|f_n|)$, βρίσκουμε ότι $\int_{\mathbb{R}} |f| \leq M$. \square

Τέλος, θα δούμε δυο αποτελέσματα για τη συμπεριφορά ολοκληρωμάτων σε σχέση με απλές αλλαγές μεταβλητής.

Πρόταση 1.15. Έστω ολοκληρώσιμη f και συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη στο \mathbb{R} και επί του \mathbb{R} και η οποία έχει παράγωγο συνεχή και φραγμένη στο \mathbb{R} . Τότε η συνάρτηση $(f \circ g)|g'|$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_{\mathbb{R}} (f \circ g)|g'| = \int_{\mathbb{R}} f.$$

Απόδειξη. Ως πρώτη περίπτωση θεωρούμε ως f τη χαρακτηριστική συνάρτηση χ_I ενός διαστήματος $I = (a, b)$. Τότε υπάρχουν c, d ώστε $g(c) = a$ και $g(d) = b$. Αν η g είναι γνησίως αύξουσα, τότε $c < d$ και, αν η g είναι γνησίως φθίνουσα, τότε $d < c$. Αντιστοίχως, $\chi_I \circ g = \chi_J$, όπου $J = (c, d)$ ή (d, c) . Άρα η $(\chi_I \circ g)|g'| = \chi_J|g'|$ μηδενίζεται έξω από το διάστημα $J = (c, d)$ ή (d, c) και ταυτίζεται με την συνεχή $|g'|$ στο (c, d) ή (d, c) . Άρα

η $(\chi_I \circ g)|g'|$ είναι ολοκληρώσιμη. Παρατηρούμε, επίσης, ότι, αν η g είναι γνησίως αύξουσα, τότε $g' \geq 0$ και, αν η g είναι γνησίως φθίνουσα, τότε $g' \leq 0$. Άρα, αντιστοίχως, είτε

$$\int_{\mathbb{R}} (\chi_I \circ g)|g'| = \mathcal{R} \int_c^d |g'| = \mathcal{R} \int_c^d g' = g(d) - g(c) = b - a = \int_{\mathbb{R}} \chi_I,$$

είτε

$$\int_{\mathbb{R}} (\chi_I \circ g)|g'| = \mathcal{R} \int_d^c |g'| = -\mathcal{R} \int_d^c g' = g(d) - g(c) = b - a = \int_{\mathbb{R}} \chi_I,$$

Τώρα θεωρούμε ως f μια κλιμακωτή συνάρτηση ϕ .

Τότε η ϕ είναι σ.π. ίση με έναν γραμμικό συνδυασμό $\sum_{k=1}^n c_k \chi_{I_k}$, όπου κάθε I_k είναι ανοικτό διάστημα, όπως παραπάνω. Τότε

$$(\phi \circ g)|g'| = \sum_{k=1}^n c_k (\chi_{I_k} \circ g)|g'| \text{ σ.π.}$$

και, επειδή κάθε $(\chi_{I_k} \circ g)|g'|$ είναι ολοκληρώσιμη, συνεπάγεται ότι και η $(\phi \circ g)|g'|$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_{\mathbb{R}} (\phi \circ g)|g'| = \sum_{k=1}^n c_k \int_{\mathbb{R}} (\chi_{I_k} \circ g)|g'| = \sum_{k=1}^n c_k \int_{\mathbb{R}} \chi_{I_k} = \int_{\mathbb{R}} \phi.$$

Τώρα, θεωρούμε ότι η f ανήκει στη συλλογή \mathcal{C}_1 .

Τότε υπάρχει ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων (ϕ_n) ώστε $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ σ.π. για κάθε n , ώστε $\int_{\mathbb{R}} \phi_n \leq M$ για κάθε n και $\phi_n \rightarrow f$ σ.π. Όπως γνωρίζουμε, $\int_{\mathbb{R}} \phi_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f$.

Από την ειδική περίπτωση συνεπάγεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}} (\phi_n \circ g)|g'| = \int_{\mathbb{R}} \phi_n \leq M$$

για κάθε n .

Επίσης, $(\phi_n \circ g)|g'| \leq (\phi_{n+1} \circ g)|g'|$ σ.π. για κάθε n και $(\phi_n \circ g)|g'| \rightarrow (f \circ g)|g'|$ σ.π.

Από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης συνεπάγεται ότι η $(f \circ g)|g'|$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_{\mathbb{R}} (f \circ g)|g'| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} (\phi_n \circ g)|g'| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n = \int_{\mathbb{R}} f.$$

Τέλος, η γενική περίπτωση: η f είναι ολοκληρώσιμη.

Τότε υπάρχουν f_1, f_2 στην \mathcal{C}_1 ώστε $f = f_1 - f_2$ και $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} f_1 - \int_{\mathbb{R}} f_2$.

Από την προηγούμενη περίπτωση, οι $(f_1 \circ g)|g'|, (f_2 \circ g)|g'|$ είναι ολοκληρώσιμες, οπότε και η $(f \circ g)|g'| = (f_1 \circ g)|g'| - (f_2 \circ g)|g'|$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_{\mathbb{R}} (f \circ g)|g'| = \int_{\mathbb{R}} (f_1 \circ g)|g'| - \int_{\mathbb{R}} (f_2 \circ g)|g'| = \int_{\mathbb{R}} f_1 - \int_{\mathbb{R}} f_2 = \int_{\mathbb{R}} f.$$

□

Παραδείγματα. [1] Θεωρώντας $\mu_{-a}(x) = x - a$, δηλαδή τη μεταφορά κατά $-a$, έχουμε ότι, αν η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε και η συνάρτηση $\mu_a(f)(x) = f(x - a)$ (με μεταβλητή x) είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_{\mathbb{R}} f(x - a) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

Δηλαδή, $\int_{\mathbb{R}} \mu_a(f) = \int_{\mathbb{R}} f$.

[2] Θεωρώντας $o_{\frac{1}{t}}(x) = \frac{x}{t}$ με $t \neq 0$, δηλαδή την ομοιοθεσία κατά $\frac{1}{t}$, έχουμε ότι, αν η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε και η συνάρτηση $o_t(f)(x) = f(\frac{x}{t})$ (με μεταβλητή x) είναι ολοκληρώσιμη και

$$\frac{1}{|t|} \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{x}{t}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

Δηλαδή, $\frac{1}{|t|} \int_{\mathbb{R}} o_t(f) = \int_{\mathbb{R}} f$ ή, ισοδύναμα, $\int_{\mathbb{R}} o_t(f) = |t| \int_{\mathbb{R}} f$.

1.6 Ολοκληρώματα σε διαστήματα και ολοκληρώματα μιγαδικών συναρτήσεων.

Ορισμός. Έστω διάστημα I και πραγματική συνάρτηση f της οποίας το πεδίο ορισμού είναι σχεδόν ολόκληρο το I (δηλαδή, είναι υποσύνολο του I και η διαφορά τους είναι σύνολο μηδενικού μέτρου).

Ορίζουμε τη συνάρτηση \tilde{f} η οποία ταυτίζεται με την f στο I και μηδενίζεται έξω από το I , οπότε το πεδίο ορισμού της \tilde{f} είναι σχεδόν ολόκληρο το \mathbb{R} .

Λέμε ότι η f είναι **Lebesgue ολοκληρώσιμη στο I** ή απλώς **ολοκληρώσιμη στο I** αν η \tilde{f} είναι ολοκληρώσιμη. Σ' αυτήν την περίπτωση, ορίζουμε το **Lebesgue ολοκλήρωμα της f στο I** ή απλώς **ολοκλήρωμα της f στο I** και το συμβολίζουμε $\int_I f$ ή $\int_I f(x) dx$ να είναι το ολοκλήρωμα της \tilde{f} :

$$\int_I f = \int_I f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}.$$

Σχόλιο. Αν $I = \mathbb{R}$, τότε προφανώς $\tilde{f} = f$, οπότε οι έννοιες της ολοκληρωσιμότητας στο \mathbb{R} και του ολοκληρώματος στο \mathbb{R} ταυτίζονται με τις έννοιες της ολοκληρωσιμότητας και του ολοκληρώματος, όπως τις μελετήσαμε μέχρι τώρα.

Είναι εύκολο, αλλά πολύ χρονοβόρο, να αποδειχτεί ότι όλα τα αποτελέσματα που έχουμε μέχρι τώρα για τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και για τα ολοκληρώματα ισχύουν και για τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις σε διάστημα και για τα ολοκληρώματα σε διάστημα.

Αυτό θα το δεχτούμε και, ενδεικτικά μόνο, θα αποδείξουμε τον κανόνα: το άθροισμα ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο διάστημα I είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο I και το ολοκλήρωμα του αθροίσματος στο I ισούται με το άθροισμα των ολοκληρωμάτων στο I .

Πράγματι, έστω f, g ολοκληρώσιμες στο I . Θεωρούμε τις επεκτάσεις \tilde{f}, \tilde{g} , οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες και $\int_I f = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}$, $\int_I g = \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\tilde{f} + \tilde{g}$ μηδενίζεται έξω από το I και ισούται με $f + g$ στο I . Άρα $\tilde{f} + \tilde{g} = \widetilde{f + g}$. Άρα η $f + g$ είναι ολοκληρώσιμη, οπότε η $f + g$ είναι ολοκληρώσιμη στο I . Επίσης,

$$\int_I (f + g) = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f + g} = \int_{\mathbb{R}} (\tilde{f} + \tilde{g}) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f} + \int_{\mathbb{R}} \tilde{g} = \int_I f + \int_I g.$$

Με τον ίδιο τρόπο, άλλοτε πιο εύκολα και άλλοτε με λίγο περισσότερο κόπο, αποδεικνύονται όλα τα άλλα αποτελέσματα.

Μπορούμε, επίσης, να ξεκινήσουμε με μια πραγματική συνάρτηση f της οποίας το πεδίο ορισμού είναι σχεδόν ολόκληρο το \mathbb{R} (για παράδειγμα, μπορεί η f να είναι ολοκληρώσιμη) και να μιλήσουμε για το ολοκλήρωμά της σε κάποιο διάστημα I . Αυτό γίνεται με δυο ισοδύναμους τρόπους.

Ορισμός. Έστω διάστημα I και πραγματική συνάρτηση f της οποίας το πεδίο ορισμού είναι σχεδόν ολόκληρο το \mathbb{R} .

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\chi_I f$ η οποία είναι ορισμένη σ.π. στο \mathbb{R} και η οποία ταυτίζεται με την f στο I και μηδενίζεται έξω από το I . Επίσης, θεωρούμε και τη συνάρτηση $f|_I$, τον περιορισμό της f στο I , η οποία είναι ορισμένη σ.π. στο I .

Λέμε ότι η f είναι **Lebesgue ολοκληρώσιμη στο I** ή απλώς **ολοκληρώσιμη στο I** αν η $\chi_I f$ είναι ολοκληρώσιμη (στο \mathbb{R}) ή, ισοδύναμα, η $f|_I$ είναι ολοκληρώσιμη στο I . Σ' αυτήν την περίπτωση, ορίζουμε το **Lebesgue ολοκλήρωμα της f στο I** ή απλώς **ολοκλήρωμα της f στο I** και το συμβολίζουμε $\int_I f$ ή $\int_I f(x) dx$ να είναι το ολοκλήρωμα της $\chi_I f$ (στο \mathbb{R}) ή, ισοδύναμα, το ολοκλήρωμα της $f|_I$ στο I (όπως το ορίσαμε μόλις παραπάνω):

$$\int_I f = \int_I f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \chi_I f = \int_I f|_I.$$

Σχόλιο. Η ισοδυναμία που αναφέρεται στον ορισμό είναι προφανής, αν παρατηρήσουμε ότι η επέκταση $\widetilde{f|_I}$ της $f|_I$ ταυτίζεται με την $\chi_I f$. Επομένως, η ολοκληρωσιμότητα της $\chi_I f$ (στο \mathbb{R}) είναι ισοδύναμη με την ολοκληρωσιμότητα της $\widetilde{f|_I}$ (στο \mathbb{R}) και η ολοκληρωσιμότητα της $f|_I$ (στο \mathbb{R}) είναι (εξ ορισμού) ισοδύναμη με την ολοκληρωσιμότητα της $f|_I$ στο I . Ομοίως, $\int_{\mathbb{R}} \chi_I f = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f|_I}$ και (εξ ορισμού) $\int_{\mathbb{R}} \widetilde{f|_I} = \int_I f|_I$.

Παραδείγματα. [1] Από την Πρόταση 1.13 φαίνεται ότι, αν μια συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη (στο \mathbb{R}) και το I είναι διάστημα, τότε η $\chi_I f$ είναι ολοκληρώσιμη (στο \mathbb{R}) και, επομένως, ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο I .

[2] Γενικότερα, αν I, J είναι δυο διαστήματα με $I \subseteq J$ και μια συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα J , τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και στο μικρότερο διάστημα I .

Αν το διάστημα I χωρίζεται στα ξένα ανά δύο διαστήματα I_1, \dots, I_n , τότε μια συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο I αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε I_1, \dots, I_n , και ισχύει

$$\int_I f = \int_{I_1} f + \dots + \int_{I_n} f.$$

Αυτό προκύπτει άμεσα από την ισότητα $\chi_I f = \chi_{I_1} f + \dots + \chi_{I_n} f$.

Η Πρόταση 1.16 γενικεύει αυτό το αποτέλεσμα για άπειρα αριθμήσιμου πλήθους διαστήματα.

Πρόταση 1.16. Έστω άπειρη αριθμήσιμη συλλογή ξένων ανά δύο διαστημάτων I_1, I_2, I_3, \dots και διάστημα I ώστε $I = \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$.

[1] Αν η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε I_n και αν $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{I_n} |f| < +\infty$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο I και

$$\int_I f = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{I_n} f.$$

[2] Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο I , τότε ισχύει η ισότητα του [1].

Απόδειξη. [1] Παρατηρούμε ότι $\chi_I f = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{I_n} f$ (παντού) στο I . Τώρα,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_I |\chi_{I_n} f| = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_I \chi_{I_n} |f| = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{I_n} |f| < +\infty,$$

οπότε από το Θεώρημα Σύγκλισης Σειράς (στο I) συνεπάγεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο I και

$$\int_I f = \int_I \chi_I f = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_I \chi_{I_n} f = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{I_n} f.$$

[2] Για κάθε n , υπάρχουν πεπερασμένοι πλήθους διαστήματα τα οποία μαζί με τα I_1, \dots, I_n να είναι ανά δύο ξένα και η ένωσή τους να ισούται με το I . Επομένως,

$$\int_{I_1} |f| + \dots + \int_{I_n} |f| \leq \int_I |f|$$

για κάθε n , οπότε $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{I_n} |f| \leq \int_I |f| < +\infty$. Από το [1] συνεπάγεται η ισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε. \square

Τέλος, θα επεκτείνουμε τις έννοιες της ολοκληρωσιμότητας και του ολοκληρώματος για μιγαδικές συναρτήσεις.

Αν $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ είναι μια μιγαδική συνάρτηση, ορίζουμε τις συναρτήσεις $\operatorname{Re} f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\operatorname{Im} f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους

$$(\operatorname{Re} f)(x) = \operatorname{Re}(f(x)), \quad (\operatorname{Im} f)(x) = \operatorname{Im}(f(x)).$$

Τότε, για κάθε $x \in A$,

$$f(x) = \operatorname{Re}(f(x)) + i \operatorname{Im}(f(x)) = (\operatorname{Re} f)(x) + i (\operatorname{Im} f)(x) = (\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f)(x),$$

οπότε

$$f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f.$$

Οι πραγματικές συναρτήσεις $\operatorname{Re} f$ και $\operatorname{Im} f$ ονομάζονται **πραγματικό μέρος** και **φανταστικό μέρος** της f , αντιστοίχως.

Επίσης, ορίζεται και η **συζυγής** $\bar{f} : A \rightarrow \mathbb{C}$ της f με τύπο

$$\bar{f}(x) = \overline{f(x)}.$$

Τότε, προφανώς,

$$\bar{f} = \operatorname{Re} f - i \operatorname{Im} f.$$

Τέλος, ορίζεται και το **μέτρο** $|f| : A \rightarrow \mathbb{R}$ της f με τύπο

$$|f|(x) = |f(x)|,$$

οπότε

$$|f| = \sqrt{(\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2}.$$

Ορισμός. Έστω διάστημα I και μιγαδική συνάρτηση f της οποίας το πεδίο ορισμού είναι σχεδόν ολόκληρο το I . Τότε οι συναρτήσεις $\operatorname{Re} f$ και $\operatorname{Im} f$ είναι πραγματικές και το πεδίο ορισμού τους είναι σχεδόν ολόκληρο το I . Χαρακτηρίζουμε την f **Lebesgue ολοκληρώσιμη στο I** ή απλώς **ολοκληρώσιμη στο I** αν οι $\operatorname{Re} f$ και $\operatorname{Im} f$ είναι ολοκληρώσιμες στο I . Σ' αυτήν την περίπτωση, ορίζουμε το **Lebesgue ολοκλήρωμα της f στο I** ή απλώς **ολοκλήρωμα της f στο I** και το συμβολίζουμε $\int_I f$ ή $\int_I f(x) dx$ να είναι ο μιγαδικός αριθμός

$$\int_I f = \int_I f(x) dx = \int_I \operatorname{Re} f + i \int_I \operatorname{Im} f.$$

Σχόλιο. Οι αριθμοί $\int_I \operatorname{Re} f$ και $\int_I \operatorname{Im} f$ είναι πραγματικοί ως ολοκληρώματα πραγματικών συναρτήσεων. Άρα αυτοί οι αριθμοί είναι το πραγματικό μέρος και το φανταστικό μέρος, αντιστοίχως, του $\int_I f$. Δηλαδή,

$$\operatorname{Re} \int_I f = \int_I \operatorname{Re} f, \quad \operatorname{Im} \int_I f = \int_I \operatorname{Im} f.$$

Και πάλι, είναι εύκολο, αλλά χρονοβόρο, να αποδειχτεί ότι όλα τα αποτελέσματα που έχουμε μέχρι τώρα για τις ολοκληρώσιμες πραγματικές συναρτήσεις και για τα ολοκληρώματά τους ισχύουν και για τις ολοκληρώσιμες μιγαδικές συναρτήσεις και για τα ολοκληρώματά τους.

Και πάλι, αυτό θα το δεχτούμε και, ενδεικτικά μόνο, θα αποδείξουμε τον κανόνα: το άθροισμα ολοκληρώσιμων μιγαδικών συναρτήσεων στο διάστημα I είναι ολοκληρώσιμη μιγαδική συνάρτηση στο I και το ολοκλήρωμα του αθροίσματος στο I ισούται με το άθροισμα των ολοκληρωμάτων στο I .

Πράγματι, έστω f, g ολοκληρώσιμες μιγαδικές συναρτήσεις στο I . Τότε οι $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f, \operatorname{Re} g, \operatorname{Im} g$ είναι ολοκληρώσιμες πραγματικές συναρτήσεις και $\int_I f = \int_I \operatorname{Re} f + i \int_I \operatorname{Im} f$ και $\int_I g = \int_I \operatorname{Re} g + i \int_I \operatorname{Im} g$. Βάσει των σχέσεων $\operatorname{Re}(f + g) = \operatorname{Re} f + \operatorname{Re} g$ και $\operatorname{Im}(f + g) = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$, έχουμε ότι οι $\operatorname{Re}(f + g)$ και $\operatorname{Im}(f + g)$ είναι ολοκληρώσιμες στο I , οπότε και η $f + g$ είναι ολοκληρώσιμη στο I . Επίσης,

$$\int_I (f + g) = \int_I \operatorname{Re}(f + g) + i \int_I \operatorname{Im}(f + g) = \int_I \operatorname{Re} f + \int_I \operatorname{Re} g + i \int_I \operatorname{Im} f + i \int_I \operatorname{Im} g = \int_I f + \int_I g.$$

Δεν θα αποδείξουμε κανένα άλλο αποτέλεσμα εκτός από το επόμενο.

Πρόταση 1.17. Έστω ολοκληρώσιμη μιγαδική συνάρτηση f στο διάστημα I . Τότε η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη (πραγματική) συνάρτηση στο I και

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|.$$

Απόδειξη. Γράφουμε $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ και έχουμε ότι οι $\operatorname{Re} f$ και $\operatorname{Im} f$ είναι ολοκληρώσιμες στο I . Επομένως, υπάρχουν ακολουθίες κλιμακωτών (πραγματικών) συναρτήσεων (ϕ_n) και (ψ_n) στο I ώστε $\phi_n \rightarrow \operatorname{Re} f$ σ.π. στο I και $\psi_n \rightarrow \operatorname{Im} f$ σ.π. στο I .

Θεωρούμε, για κάθε n , την κλιμακωτή (πραγματική) συνάρτηση $\chi_n = \sqrt{(\phi_n)^2 + (\psi_n)^2} = |\phi_n + i\psi_n|$ και, τότε,

$$\chi_n = \sqrt{(\phi_n)^2 + (\psi_n)^2} \rightarrow \sqrt{(\operatorname{Re}f)^2 + (\operatorname{Im}f)^2} = |f| \text{ σ.π.}$$

Επίσης,

$$|f| \leq |\operatorname{Re}f| + |\operatorname{Im}f|$$

και η (πραγματική) συνάρτηση $|\operatorname{Re}f| + |\operatorname{Im}f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο I .

Από το Θεώρημα 1.2 (προσαρμοσμένο σε διάστημα) συνεπάγεται ότι η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο I .

Τώρα, θεωρούμε μια οποιαδήποτε πολική αναπαράσταση του μιγαδικού αριθμού $\int_I f$. Δηλαδή, γράφουμε

$$\int_I f = \left| \int_I f \right| e^{i\theta},$$

όπου θ είναι μια οποιαδήποτε από τις γωνίες του μιγαδικού αριθμού $\int_I f$. Τότε

$$\left| \int_I f \right| = e^{-i\theta} \int_I f = \int_I (e^{-i\theta} f) = \operatorname{Re} \int_I (e^{-i\theta} f) = \int_I \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f) \leq \int_I |e^{-i\theta} f| = \int_I |f|.$$

Η τρίτη ισότητα ισχύει διότι ο αριθμός $\int_I (e^{-i\theta} f)$ είναι *πραγματικός* ως ίσος με τον αριθμό $\left| \int_I f \right|$. \square

Σε όλα τα παρακάτω θα εννοούμε ότι όλες οι συναρτήσεις είναι μιγαδικές. Αν κάποια συνάρτηση είναι πραγματική, αυτό είτε θα είναι φανερό από το εκάστοτε ευρύτερο πλαίσιο είτε θα αναφέρεται ρητώς.

1.7 Το ολοκλήρωμα σε πολλές διαστάσεις.

Μπορούμε να ακολουθήσουμε την ίδια πορεία και να ορίσουμε την έννοια του ολοκληρώματος Lebesgue για συναρτήσεις ορισμένες σε υποσύνολα του ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^d με $d \geq 2$. Θα περιγράψουμε πάρα πολύ συνοπτικά τη διαδικασία.

Κατ' αρχάς, τον ρόλο των διαστημάτων του \mathbb{R} τον έχουν τώρα τα διαστήματα του \mathbb{R}^d . Ένα διάστημα I του \mathbb{R}^d είναι το καρτεσιανό γινόμενο d διαστημάτων I_1, \dots, I_d του \mathbb{R} . Δηλαδή,

$$I = I_1 \times \dots \times I_d.$$

Έτσι, τα διαστήματα του \mathbb{R}^2 είναι τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με πλευρές παράλληλες στους δυο κύριους άξονες και τα διαστήματα του \mathbb{R}^3 είναι τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με ακμές παράλληλες στους τρεις κύριους άξονες.

Ο (d -διάστατος) όγκος ενός διαστήματος I του \mathbb{R}^d είναι το γινόμενο των μηκών των αντίστοιχων διαστημάτων I_1, \dots, I_d του \mathbb{R} . Δηλαδή,

$$v_d(I) = l(I_1) \cdots l(I_d).$$

Επομένως, ο d -διάστατος όγκος ενός διαστήματος του \mathbb{R}^2 είναι το εμβαδόν του και ο τριδιάστατος όγκος ενός διαστήματος του \mathbb{R}^3 είναι ο όγκος του. Φυσικά, ο μονοδιάστατος όγκος ενός διαστήματος του \mathbb{R} είναι το μήκος του.

Κατόπιν, ορίζουμε τα υποσύνολα του \mathbb{R}^d τα οποία είναι μηδενικού μέτρου. Λέμε ότι ένα $A \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι μηδενικού (d -διάστατου) μέτρου αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει αριθμήσιμη συλλογή διαστημάτων I_1, I_2, I_3, \dots του \mathbb{R}^d τα οποία καλύπτουν το A και έχουν συνολικό όγκο $< \epsilon$. Δηλαδή

$$A \subseteq \bigcup_n I_n, \quad \sum_n v_d(I_n) < \epsilon.$$

Η Πρόταση 1.1 ισχύει και για τα σύνολα μηδενικού (d -διάστατου) μέτρου στον \mathbb{R}^d . Επίσης, κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο του \mathbb{R}^d είναι μηδενικού (d -διάστατου) μέτρου.

Όταν λέμε ότι κάποια ιδιότητα ισχύει σ.π. στον \mathbb{R}^d ή ότι ισχύει για σ.κ. x στον \mathbb{R}^d , εννοούμε ότι το σύνολο των x για τα οποία δεν ισχύει η ιδιότητα αποτελούν ένα σύνολο μηδενικού (d -διάστατου) μέτρου.

Η Πρόταση 1.2 ισχύει και για διαστήματα του \mathbb{R}^d .

Κατόπιν, ορίζουμε τις κλιμακωτές συναρτήσεις στον \mathbb{R}^d . Θεωρούμε ένα κλειστό διάστημα I του \mathbb{R}^d και το χωρίζουμε σε πεπερασμένου πλήθους κλειστά υποδιαστήματα I_1, \dots, I_n έτσι ώστε η ένωση των υποδιαστημάτων αυτών να είναι ακριβώς ίση με το I και τα υποδιαστήματα αυτά ανά δύο να μην έχουν κοινά εσωτερικά σημεία. Δηλαδή, τα μόνα κοινά σημεία δυο τέτοιων υποδιαστημάτων είναι σημεία των πλευρών τους. Κατόπιν, θεωρούμε μια συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία μηδενίζεται έξω από το I και είναι σταθερή σε καθένα από τα αντίστοιχα ανοικτά υποδιαστήματα I_1, \dots, I_n . Κάθε συνάρτηση ϕ , η οποία προκύπτει με αυτόν τον τρόπο, χαρακτηρίζεται κλιμακωτή συνάρτηση στον \mathbb{R}^d . Αν οι σταθερές τιμές της ϕ σε καθένα από τα ανοικτά υποδιαστήματα I_1, \dots, I_n είναι οι c_1, \dots, c_n , τότε ορίζουμε το (d -διάστατο) ολοκλήρωμα της ϕ (στον \mathbb{R}^d) να είναι ο αριθμός

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dx = \sum_{k=1}^n c_k v_d(I_k).$$

Αν γράψουμε $x = (x_1, \dots, x_d)$, τότε τα ισοδύναμα σύμβολα $\int_{\mathbb{R}^d} \phi$, $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dx$ τα γράφουμε και

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_d.$$

Οι Προτάσεις 1.3 και 1.4 ισχύουν και για κλιμακωτές συναρτήσεις στον \mathbb{R}^d και τα (d -διάστατα) ολοκληρώματά τους.

Τώρα η συλλογή \mathcal{C}_0 αποτελείται από τις κλιμακωτές συναρτήσεις στον \mathbb{R}^d .

Ο ορισμός των συναρτήσεων $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^d$, οι οποίες ανήκουν στη συλλογή \mathcal{C}_1 καθώς και ο ορισμός των (d -διάστατων) ολοκληρωμάτων

$$\int_{\mathbb{R}^d} f = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_d$$

αυτών των συναρτήσεων γίνεται ακριβώς όπως στην ενότητα 1.3.

Πάλι, έχουμε ότι $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}_1$ και οι Προτάσεις 1.5, 1.6, 1.7 και το Λήμμα 1.1 εξακολουθούν να ισχύουν, όπως και στην μονοδιάστατη περίπτωση.

Ομοίως, ο ορισμός των συναρτήσεων $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^d$, οι οποίες ανήκουν στη συλλογή \mathcal{C}_2 καθώς και ο ορισμός των (d -διάστατων) ολοκληρωμάτων $\int_{\mathbb{R}^d} f = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_d$ αυτών των συναρτήσεων γίνεται όπως στην ενότητα 1.4.

Ισχύει ότι $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$ και οι Προτάσεις 1.8, 1.9, 1.10, 1.11 εξακολουθούν να ισχύουν, όπως και στην μονοδιάστατη περίπτωση.

Πάλι λέμε ότι κάθε συνάρτηση στη συλλογή \mathcal{C}_2 είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη ή απλά ολοκληρώσιμη και το (d -διάστατο) ολοκλήρωμά της ονομάζεται (d -διάστατο) Lebesgue ολοκλήρωμα ή απλά (d -διάστατο) ολοκλήρωμα της f .

Τα βασικά οριακά θεωρήματα, δηλαδή το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης (Levi), το Θεώρημα Σύγκλισης Σειράς (Levi) και το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης (Lebesgue), εξακολουθούν να ισχύουν για (d -διάστατα) ολοκληρώματα. Η Πρόταση 1.12 ισχύει. Το ίδιο και το Θεώρημα 1.1, το οποίο συσχετίζει το (d -διάστατο) Riemann ολοκλήρωμα με το (d -διάστατο) Lebesgue ολοκλήρωμα. Το Θεώρημα 1.2 και τα πορίσματά του, οι Προτάσεις 1.13, 1.14, ισχύουν, όπως ισχύει και το Λήμμα του Fatou.

Τέλος, όπως στην ενότητα 1.6, επεκτείνουμε την έννοια της Lebesgue ολοκληρωσιμότητας και του (d -διάστατου) Lebesgue ολοκληρώματος για μιγαδικές συναρτήσεις ορισμένες σ.π. σε κάποιο διάστημα του \mathbb{R}^d . Περιττό, ίσως, να πούμε ότι οι Προτάσεις 1.16 και 1.17 ισχύουν και πάλι.

Θα κλείσουμε αυτήν την ενότητα με ένα σημαντικό θεώρημα, το οποίο ανάγει τον υπολογισμό πολυδιάστατων ολοκληρωμάτων στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων μικρότερης διάστασης. Επίσης, επιτρέπει την εναλλαγή διαδοχικών ολοκληρωμάτων.

Προηγείται ένα λήμμα.

Λήμμα 1.3. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ μηδενικού (d -διάστατου) μέτρου. Τότε υπάρχει ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων (ϕ_n) στον \mathbb{R}^d ώστε $0 \leq \phi_n \leq \phi_{n+1}$ για κάθε n , $\int_{\mathbb{R}^d} \phi_n \leq M$ για κάθε n και $\phi_n(x) \rightarrow +\infty$ για κάθε $x \in A$.

Απόδειξη. Για κάθε k υπάρχει αριθμήσιμη συλλογή διαστημάτων $I_{k,1}, I_{k,2}, I_{k,3}, \dots$ του \mathbb{R}^d τα οποία καλύπτουν το A και έχουν συνολικό (d -διάστατο) όγκο $< \frac{1}{2^k}$.

Για κάθε n ορίζουμε την κλιμακωτή συνάρτηση

$$\phi_n = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \chi_{I_{k,l}}.$$

Είναι φανερό ότι $0 \leq \phi_n \leq \phi_{n+1}$ για κάθε n και ότι

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi_n = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{I_{k,l}} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n v_d(I_{k,l}) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} < 1.$$

Τώρα, έστω $x \in A$ και τυχόν m . Τότε για κάθε $k = 1, \dots, m$ υπάρχει l_k ώστε $x \in I_{k,l_k}$. Επομένως, αν $n \geq \max\{l_1, \dots, l_m\}$, συνεπάγεται $\phi_n(x) \geq m$. Άρα $\phi_n(x) \rightarrow +\infty$. \square

Θεώρημα του Fubini. Έστω $d = d_1 + d_2$, οπότε $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$. Αν $x \in \mathbb{R}^d$, γράφουμε $x = (x_1, x_2)$, όπου $x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$ και $x_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$.

Έστω ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f(x) = f(x_1, x_2)$ στον \mathbb{R}^d .

(i) Τότε για σ.κ. x_1 η συνάρτηση $f(x_1, x_2)$ (με μεταβλητή x_2) είναι ολοκληρώσιμη στον \mathbb{R}^{d_2} , οπότε ορίζεται σ.π. η συνάρτηση $\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x_1, x_2) dx_2$ με μεταβλητή x_1 . Η συνάρτηση αυτή είναι ολοκληρώσιμη στον \mathbb{R}^{d_1} .

(ii) Επίσης, για σ.κ. x_2 η συνάρτηση $f(x_1, x_2)$ (με μεταβλητή x_1) είναι ολοκληρώσιμη στον \mathbb{R}^{d_1} , οπότε ορίζεται σ.π. η συνάρτηση $\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x_1, x_2) dx_1$ με μεταβλητή x_2 . Η συνάρτηση αυτή είναι ολοκληρώσιμη στον \mathbb{R}^{d_2} .

Τέλος, τα διάφορα ολοκληρώματα συνδέονται με τη σχέση:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2.$$

Απόδειξη. Ως πρώτη περίπτωση, θεωρούμε ως f τη χαρακτηριστική συνάρτηση χ_I ενός διαστήματος I του \mathbb{R}^d . Τότε $I = I_1 \times I_2$, όπου I_1 είναι διάστημα στον \mathbb{R}^{d_1} και I_2 είναι διάστημα στον \mathbb{R}^{d_2} . Επομένως,

$$\chi_I(x_1, x_2) = \chi_{I_1}(x_1)\chi_{I_2}(x_2)$$

και

$$v_d(I) = v_{d_1}(I_1)v_{d_2}(I_2),$$

όπου $v_d(I)$ είναι ο d -διάστατος όγκος του I , $v_{d_1}(I_1)$ είναι ο d_1 -διάστατος όγκος του I_1 και $v_{d_2}(I_2)$ είναι ο d_2 -διάστατος όγκος του I_2 .

Τώρα, υπολογίζουμε

$$\int_{\mathbb{R}^d} \chi_I(x) dx = v_d(I).$$

Επίσης, για κάθε x_1 ,

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \chi_I(x_1, x_2) dx_2 = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \chi_{I_1}(x_1)\chi_{I_2}(x_2) dx_2 = \chi_{I_1}(x_1) \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \chi_{I_2}(x_2) dx_2 = v_{d_2}(I_2)\chi_{I_1}(x_1),$$

οπότε η συνάρτηση $\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \chi_I(x_1, x_2) dx_2$ (με μεταβλητή x_1) ταυτίζεται με ένα πολλαπλάσιο χαρακτηριστικής συνάρτησης διαστήματος του \mathbb{R}^{d_1} και το ολοκλήρωμά της στον \mathbb{R}^{d_1} είναι

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \chi_I(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 &= \int_{\mathbb{R}^{d_1}} v_{d_2}(I_2)\chi_{I_1}(x_1) dx_1 = v_{d_2}(I_2) \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_{I_1}(x_1) dx_1 \\ &= v_{d_2}(I_2)v_{d_1}(I_1) = v_d(I) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_I(x) dx. \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι, για κάθε x_2 ,

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_I(x_1, x_2) dx_1 = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_{I_1}(x_1) \chi_{I_2}(x_2) dx_1 = \chi_{I_2}(x_2) \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_{I_1}(x_1) dx_1 = v_{d_1}(I_1) \chi_{I_2}(x_2),$$

οπότε η συνάρτηση $\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_I(x_1, x_2) dx_1$ (με μεταβλητή x_2) ταυτίζεται με ένα πολλαπλάσιο χαρακτηριστικής συνάρτησης διαστήματος του \mathbb{R}^{d_2} και το ολοκλήρωμά της στον \mathbb{R}^{d_2} είναι

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_I(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 &= \int_{\mathbb{R}^{d_2}} v_{d_1}(I_1) \chi_{I_2}(x_2) dx_2 = v_{d_1}(I_1) \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \chi_{I_2}(x_2) dx_2 \\ &= v_{d_1}(I_1) v_{d_2}(I_2) = v_d(I) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_I(x) dx. \end{aligned}$$

Τώρα, θεωρούμε ως f μια κλιμακωτή συνάρτηση ϕ στον \mathbb{R}^d .

Τότε $\phi = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{I_k}$, όπου κάθε I_k είναι διάστημα στον \mathbb{R}^d και κάθε c_k είναι αριθμός. Άρα, για κάθε x_1 ,

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \phi(x_1, x_2) dx_2 = \sum_{k=1}^n c_k \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \chi_{I_k}(x_1, x_2) dx_2,$$

οπότε, βάσει της προηγούμενης περίπτωσης, η $\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \phi(x_1, x_2) dx_2$ (με μεταβλητή x_1) ταυτίζεται με μια κλιμακωτή συνάρτηση στον \mathbb{R}^{d_1} και το ολοκλήρωμά της είναι

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \phi(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 &= \sum_{k=1}^n c_k \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \chi_{I_k}(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 \\ &= \sum_{k=1}^n c_k \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{I_k}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Ομοίως, για κάθε x_2 ,

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \phi(x_1, x_2) dx_1 = \sum_{k=1}^n c_k \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_{I_k}(x_1, x_2) dx_1,$$

οπότε η $\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \phi(x_1, x_2) dx_1$ (με μεταβλητή x_2) ταυτίζεται με μια κλιμακωτή συνάρτηση στον \mathbb{R}^{d_2} και το ολοκλήρωμά της είναι

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \phi(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 &= \sum_{k=1}^n c_k \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_{I_k}(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 \\ &= \sum_{k=1}^n c_k \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{I_k}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Τώρα, έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ μηδενικού (d -διάστατου μέτρου).

Σύμφωνα με το Λήμμα 1.3, υπάρχει ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων (ϕ_n) στον \mathbb{R}^d ώστε $0 \leq \phi_n \leq \phi_{n+1}$ για κάθε n , $\int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(x) dx \leq M$ για κάθε n και $\phi_n(x) \rightarrow +\infty$ για κάθε $x \in A$.

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g_n(x_1) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \phi_n(x_1, x_2) dx_2$$

για κάθε x_1 , οπότε η g_n είναι κλιμακωτή συνάρτηση στον \mathbb{R}^{d_1} και ισχύει $g_n \leq g_{n+1}$ στον \mathbb{R}^{d_1} για κάθε n και

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} g_n(x_1) dx_1 = \int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(x) dx \leq M$$

για κάθε n .

Από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης, υπάρχει συνάρτηση g ολοκληρώσιμη στον \mathbb{R}^{d_1} ώστε $g_n(x_1) \rightarrow g(x_1)$ για σ.κ. x_1 . Έστω ένα x_1 τέτοιο ώστε το $g(x_1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x_1)$ να είναι αριθμός. Τότε

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \phi_n(x_1, x_2) dx_2 \leq g(x_1)$$

για κάθε n , οπότε από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης, το $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(x_1, x_2)$ είναι αριθμός (και όχι $+\infty$) για σ.κ. x_2 . Άρα για σ.κ. x_1 το σύνολο $\{x_2 : \phi_n(x_1, x_2) \rightarrow +\infty\}$ είναι μηδενικού (d_2 -διάστατου) μέτρου και, επειδή,

$$\{x_2 : (x_1, x_2) \in A\} \subseteq \{x_2 : \phi_n(x_1, x_2) \rightarrow +\infty\},$$

συνεπάγεται ότι και το $\{x_2 : (x_1, x_2) \in A\}$ είναι μηδενικού (d_2 -διάστατου) μέτρου.

Με “συμμετρικό” τρόπο αποδεικνύεται ότι για σ.κ. x_2 το $\{x_1 : (x_1, x_2) \in A\}$ είναι μηδενικού (d_1 -διάστατου) μέτρου.

[Αυτό που μόλις αποδείξαμε θα το διατυπώσουμε ως ξεχωριστή πρόταση αμέσως μετά την απόδειξη του παρόντος θεωρήματος.]

Κατόπιν, έστω ότι η f ανήκει στη συλλογή \mathcal{C}_1 .

Τότε υπάρχει ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων (ϕ_n) στον \mathbb{R}^d ώστε $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ σ.π. στον \mathbb{R}^d για κάθε n , $\int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(x) dx \leq M$ για κάθε n και $\phi_n \rightarrow f$ σ.π. στον \mathbb{R}^d . Επίσης, $\int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$.

Βάσει του προηγούμενου αποτελέσματος, για σ.κ. x_1 ισχύει $\phi_n(x_1, x_2) \rightarrow f(x_1, x_2)$ για σ.κ. x_2 .

Ορίζουμε

$$g_n(x_1) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \phi_n(x_1, x_2) dx_2$$

για κάθε x_1 , οπότε η g_n είναι κλιμακωτή συνάρτηση στον \mathbb{R}^{d_1} και ισχύει $g_n \leq g_{n+1}$ στον \mathbb{R}^{d_1} για κάθε n και

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} g_n(x_1) dx_1 = \int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(x) dx \leq M$$

για κάθε n .

Από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης, υπάρχει συνάρτηση g ολοκληρώσιμη στον \mathbb{R}^{d_1} ώστε $g_n(x_1) \rightarrow g(x_1)$ για σ.κ. x_1 και ώστε

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} g_n(x_1) dx_1 \rightarrow \int_{\mathbb{R}^{d_1}} g(x_1) dx_1.$$

Έστω ένα x_1 τέτοιο ώστε το $g(x_1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x_1)$ να είναι αριθμός και να ισχύει $\phi_n(x_1, x_2) \rightarrow f(x_1, x_2)$ για σ.κ. x_2 .

Τότε, για ένα τέτοιο x_1 ,

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \phi_n(x_1, x_2) dx_2 \leq g(x_1)$$

για κάθε n , οπότε από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης, η $f(x_1, x_2)$ (ως συνάρτηση του x_2) είναι ολοκληρώσιμη στον \mathbb{R}^{d_2} και

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \phi_n(x_1, x_2) dx_2 \rightarrow \int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x_1, x_2) dx_2,$$

οπότε

$$g(x_1) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x_1, x_2) dx_2.$$

Άρα για σ.κ. x_1 η $f(x_1, x_2)$ (ως συνάρτηση του x_2) είναι ολοκληρώσιμη στον \mathbb{R}^{d_2} . Ακόμη, για σ.κ. x_1 έχουμε $\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x_1, x_2) dx_2 = g(x_1)$, οπότε η $\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x_1, x_2) dx_2$ (ως συνάρτηση του x_1) είναι ολοκληρώσιμη στον \mathbb{R}^{d_1} και

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \phi_n(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^{d_1}} g_n(x_1) dx_1 = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} g(x_1) dx_1 = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1. \end{aligned}$$

Με “συμμετρικό” τρόπο αποδεικνύεται ότι για σ.κ. x_2 η συνάρτηση $f(x_1, x_2)$ (με μεταβλητή x_1) είναι ολοκληρώσιμη στον \mathbb{R}^{d_1} , ότι η συνάρτηση $\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x_1, x_2) dx_1$ (με μεταβλητή x_2) είναι ολοκληρώσιμη στον \mathbb{R}^{d_2} και

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2.$$

□

Πρόταση 1.18. Έστω $d = d_1 + d_2$, οπότε $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$. Αν $x \in \mathbb{R}^d$, γράφουμε $x = (x_1, x_2)$, όπου $x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$ και $x_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$.

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ μηδενικού (d -διάστατου) μέτρου. Τότε, για σ.κ. x_1 το σύνολο $\{x_2 : (x_1, x_2) \in A\}$ είναι μηδενικού (d_2 -διάστατου) μέτρου και για σ.κ. x_2 το σύνολο $\{x_1 : (x_1, x_2) \in A\}$ είναι μηδενικού (d_1 -διάστατου) μέτρου.

Απόδειξη. Η απόδειξη περιέχεται στην απόδειξη του Θεωρήματος του Fubini. □

Πρόταση 1.19. Έστω $d = d_1 + d_2$, οπότε $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$. Αν $x \in \mathbb{R}^d$, γράφουμε $x = (x_1, x_2)$, όπου $x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$ και $x_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$.

Έστω $A_1 \subseteq \mathbb{R}^{d_1}$ μηδενικού (d_1 -διάστατου) μέτρου και $A_2 \subseteq \mathbb{R}^{d_2}$ μηδενικού (d_2 -διάστατου) μέτρου. Τότε το $A = A_1 \times A_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι μηδενικού (d -διάστατου) μέτρου.

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει αριθμήσιμη συλλογή διαστημάτων I_1, I_2, I_3, \dots στον \mathbb{R}^{d_1} τα οποία καλύπτουν το A_1 και με συνολικό (d_1 -διάστατο) όγκο $\sum_k v_{d_1}(I_k) < \sqrt{\epsilon}$. Επίσης, υπάρχει αριθμήσιμη συλλογή διαστημάτων J_1, J_2, J_3, \dots στον \mathbb{R}^{d_2} τα οποία καλύπτουν το A_2 και με συνολικό (d_2 -διάστατο) όγκο $\sum_l v_{d_2}(J_l) < \sqrt{\epsilon}$.

Ορίζουμε τα διαστήματα $K_{k,l} = I_k \times J_l$. Αυτά αποτελούν αριθμήσιμη συλλογή διαστημάτων του \mathbb{R}^d τα οποία καλύπτουν το A και έχουν συνολικό (d -διάστατο) όγκο

$$\sum_k \sum_l v_{d_1}(I_k) v_{d_2}(J_l) = \sum_k v_{d_1}(I_k) \sum_l v_{d_2}(J_l) < \sqrt{\epsilon} \sqrt{\epsilon} = \epsilon.$$

Άρα το A είναι μηδενικού (d -διάστατου) μέτρου. □

1.8 Ο χώρος $L^1(I)$.

Ορισμός. Έστω διάστημα I . Το σύνολο όλων των ολοκληρώσιμων στο I συναρτήσεων το συμβολίζουμε

$$L^1(I)$$

και το ονομάζουμε **ο χώρος των ολοκληρώσιμων στο I συναρτήσεων**.

Σχόλια. [1] Τα στοιχεία του $L^1(I)$ είναι όλες οι συναρτήσεις οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες στο I . Όπως έχουμε συμφωνήσει, οι συναρτήσεις αυτές είναι μιγαδικές.

[2] Ο χώρος $L^1(\mathbb{R})$ δεν είναι άλλος από τη συλλογή \mathcal{C}_2 .

Πρόταση 1.20. Ο χώρος $L^1(I)$ είναι γραμμικός χώρος (επί του \mathbb{C}).

Απόδειξη. Η πρόταση αυτή είναι, ουσιαστικά, μέρος της Πρότασης 1.8, αφού, φυσικά, επεκταθούμε στο πλαίσιο των μιγαδικών συναρτήσεων σε διάστημα I . Δηλαδή, λέμε ότι, αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο I και ο λ είναι (μιγαδικός) αριθμός, τότε οι $f + g, \lambda f$ είναι ολοκληρώσιμες στο I . □

Ορισμός. Για κάθε $f \in L^1(I)$ ονομάζουμε **1-νόρμα** της f και συμβολίζουμε $\|f\|_{I,1}$ τον μη-αρνητικό αριθμό

$$\|f\|_{I,1} = \int_I |f|.$$

Αν στο εκάστοτε πλαίσιο συζήτησης δεν υπάρχει αμφιβολία για το ποιο είναι το συγκεκριμένο διάστημα I , τότε για απλούστευση θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο

$$\|f\|_1$$

αντί του $\|f\|_{I,1}$.

Η συνάρτηση

$$L^1(I) \ni f \mapsto \|f\|_{I,1} = \|f\|_1 \in \mathbb{R}_0^+$$

ονομάζεται **1-νόρμα** στον χώρο $L^1(I)$.

Σχόλιο. Λέμε ότι ο χώρος $L^1(I)$ είναι ένας **γραμμικός χώρος (επί του \mathbb{C}) με νόρμα**.

Πρόταση 1.21. Η 1-νόρμα στον $L^1(I)$ έχει τις εξής ιδιότητες.

- [1] $\|f\|_1 \geq 0$ για κάθε $f \in L^1(I)$. Αν $f \in L^1(I)$, τότε: $\|f\|_1 = 0$ αν και μόνο αν $f = 0$ σ.π. στο I .
- [2] $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ για κάθε $f, g \in L^1(I)$.
- [3] $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1$ για κάθε $f \in L^1(I)$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη. [1] Επειδή $|f| \geq 0$ σ.π. στο I , συνεπάγεται $\|f\|_1 = \int_I |f| \geq \int_I 0 = 0$. Επίσης, $\|f\|_1 = 0$ αν και μόνο αν $\int_I |f| = 0$ αν και μόνο αν $f = 0$ σ.π. στο I .

[2] $\|f + g\|_1 = \int_I |f + g| \leq \int_I (|f| + |g|) = \int_I |f| + \int_I |g| = \|f\|_1 + \|g\|_1$.

[3] $\|\lambda f\|_1 = \int_I |\lambda f| = \int_I (|\lambda| |f|) = |\lambda| \int_I |f| = |\lambda| \|f\|_1$. □

Ορισμός. Αν $f, g \in L^1(I)$, ορίζουμε την **1-απόσταση** ανάμεσα στις f, g να είναι ο μη-αρνητικός αριθμός

$$\|f - g\|_{1,1} = \|f - g\|_1 = \int_I |f - g|.$$

Πρόταση 1.22. Η 1-απόσταση ανάμεσα στα στοιχεία του $L^1(I)$ έχει τις εξής ιδιότητες.

- [1] $\|f - g\|_1 \geq 0$ για κάθε $f, g \in L^1(I)$. Αν $f, g \in L^1(I)$, τότε: $\|f - g\|_1 = 0$ αν και μόνο αν $f = g$ σ.π. στο I .
- [2] $\|f - h\|_1 \leq \|f - g\|_1 + \|g - h\|_1$ για κάθε $f, g, h \in L^1(I)$.
- [3] $\|\lambda f - \lambda g\|_1 = |\lambda| \|f - g\|_1$ για κάθε $f, g \in L^1(I)$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη. Τα τρία συμπεράσματα είναι άμεσες εφαρμογές των αντίστοιχων συμπερασμάτων της Πρότασης 1.21. Για το [2] παρατηρούμε ότι $f - h = (f - g) + (g - h)$ και για το [3] ότι $\lambda f - \lambda g = \lambda(f - g)$. □

Σχόλια. [1] Η ιδιότητα [1] της 1-απόστασης λέει ότι η 1-απόσταση ανάμεσα σε δυο στοιχεία του χώρου $L^1(I)$ είναι μηδέν αν και μόνο αν τα δυο αυτά στοιχεία ταυτίζονται.

Φυσικά, θα συμφωνήσουμε ότι όταν λέμε ότι δυο ολοκληρώσιμες σε διάστημα I συναρτήσεις ταυτίζονται εννοούμε ότι οι δυο συναρτήσεις ταυτίζονται σ.π. στο I ή, με άλλα λόγια, ότι το υποσύνολο του I στο οποίο οι δυο συναρτήσεις διαφέρουν είναι μηδενικού μέτρου.

[2] Η ιδιότητα [2] της 1-απόστασης ονομάζεται **τριγωνική ανισότητα** και λέει ότι η 1-απόσταση ανάμεσα σε δυο στοιχεία του χώρου $L^1(I)$ δεν είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των αποστάσεών τους από ένα τρίτο στοιχείο του χώρου $L^1(I)$.

[3] Η ιδιότητα [3] της 1-απόστασης ονομάζεται **θετική ομογένεια**. Αν $\lambda = -1$, προκύπτει ότι $\|g - f\|_1 = \|f - g\|_1$ και αυτό λέει ότι η 1-απόσταση ανάμεσα σε δυο στοιχεία του χώρου $L^1(I)$ είναι **συμμετρική**.

[4] Η χρήση της λέξης **απόσταση** μας παρακινεί να σκεφτόμαστε τα στοιχεία του χώρου $L^1(I)$ ως **σημεία** ενός κατά κάποιο τρόπο **γεωμετρικού χώρου** στον οποίο μετράμε αποστάσεις ανάμεσα στα διάφορα σημεία του, όπως περίπου μετράμε αποστάσεις ανάμεσα στα σημεία του ευκλείδειου χώρου \mathbb{R} ή του \mathbb{R}^2 ή του \mathbb{R}^3 . Το να μπορούμε σε μια συνάρτηση να κάνουμε μια νοητική **αφαίρεση** και να την βλέπουμε ως **σημείο** αγνοώντας προσωρινά την ειδικότερη φύση της (δηλαδή, ότι είναι συνάρτηση με συγκεκριμένο πεδίο ορισμού, συγκεκριμένο πεδίο τιμών, συγκεκριμένο τύπο κλπ) βοηθά πολύ όταν θέλουμε να περιγράψουμε τη σχέση της με άλλες παρόμοιες συναρτήσεις τις οποίες, επίσης, βλέπουμε ως **σημεία**. Όπως στο επίπεδο (δηλαδή στον χώρο \mathbb{R}^2) ή στον χώρο (δηλαδή στον χώρο \mathbb{R}^3) μπορούμε να προσθέτουμε τα σημεία τους (με τον κανόνα του παραλληλογράμμου) και να τα πολλαπλασιάζουμε με αριθμούς καθώς και να μετράμε την ευκλείδεια απόσταση ανάμεσά τους, έτσι και στον χώρο $L^1(I)$ έχουμε ορίσει κανόνες με τους οποίους μπορούμε να προσθέτουμε τα σημεία του (άθροισμα συναρτήσεων) και να τα πολλαπλασιάζουμε με αριθμούς (γινόμενο αριθμού και συνάρτησης) και να μετράμε την απόσταση ανάμεσά τους (1-απόσταση ανάμεσα σε δυο συναρτήσεις). Η 1-απόσταση ανάμεσα σε δυο σημεία-συναρτήσεις του $L^1(I)$ μας δίνει την αίσθηση του πόσο κοντά ή πόσο μακριά είναι αυτά τα δυο σημεία-συναρτήσεις. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε και μια αντίστοιχη έννοια σύγκλισης για σημεία του συγκεκριμένου χώρου. Αυτό θα γίνει αμέσως τώρα.

Ορισμός. Έστω ακολουθία (f_n) στον $L^1(I)$ και f στον $L^1(I)$. Λέμε ότι η (f_n) **συγκλίνει στην f στον χώρο $L^1(I)$** ή ότι **f είναι το όριο της (f_n) στον χώρο $L^1(I)$** αν $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ όταν $n \rightarrow +\infty$ ή, ισοδύναμα, $\int_I |f_n - f| \rightarrow 0$ όταν $n \rightarrow +\infty$. Συμβολίζουμε

$$f_n \rightarrow f \text{ στον } L^1(I) \text{ όταν } n \rightarrow +\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f \text{ στον } L^1(I).$$

Πρόταση 1.23. Έστω $f_n \rightarrow f$ και $g_n \rightarrow g$ στον $L^1(I)$ και $\lambda_n \rightarrow \lambda$ στο \mathbb{C} όταν $n \rightarrow +\infty$. Τότε

$$f_n + g_n \rightarrow f + g \quad \text{και} \quad \lambda_n f_n \rightarrow \lambda f \quad \text{στον } L^1(I) \text{ όταν } n \rightarrow +\infty.$$

Επίσης, τότε

$$\int_I f_n \rightarrow \int_I f.$$

Απόδειξη. Η πρώτη σύγκλιση αποδεικνύεται από τη σχέση

$$0 \leq \|(f_n + g_n) - (f + g)\|_1 = \|(f_n - f) + (g_n - g)\|_1 \leq \|f_n - f\|_1 + \|g_n - g\|_1 \rightarrow 0 + 0 = 0.$$

Η δεύτερη σύγκλιση αποδεικνύεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\lambda_n f_n - \lambda f\|_1 &= \|(\lambda_n - \lambda)(f_n - f) + \lambda(f_n - f) + (\lambda_n - \lambda)f\|_1 \\ &\leq |\lambda_n - \lambda| \|f_n - f\|_1 + |\lambda| \|f_n - f\|_1 + |\lambda_n - \lambda| \|f\|_1 \rightarrow 0 \cdot 0 + |\lambda| 0 + 0 \|f\|_1 = 0. \end{aligned}$$

Τέλος, η τρίτη σύγκλιση προκύπτει από τη σχέση

$$0 \leq \left| \int_I f_n - \int_I f \right| = \left| \int_I (f_n - f) \right| \leq \int_I |f_n - f| = \|f_n - f\|_1 \rightarrow 0.$$

□

Σχόλιο. Οι σχέσεις της Πρότασης 1.23 λένε ότι η πράξη της πρόσθεσης και η πράξη του πολλαπλασιασμού με αριθμό είναι συνεχείς στον $L^1(I)$. Ομοίως, εκτός από γραμμικό, το ολοκλήρωμα είναι και συνεχές στον $L^1(I)$.

Ορισμός. Η (f_n) χαρακτηρίζεται **ακολουθία Cauchy στον $L^1(I)$** αν $\|f_n - f_m\|_1 \rightarrow 0$ όταν $n, m \rightarrow +\infty$.

Θεώρημα 1.3. Έστω ακολουθία (f_n) στον $L^1(I)$. Τότε, η (f_n) είναι ακολουθία Cauchy στον $L^1(I)$ αν και μόνο αν συγκλίνει σε κάποιο σημείο του $L^1(I)$.

Απόδειξη. Η πρώτη κατεύθυνση.

Έστω ότι $f_n \rightarrow f$ στον $L^1(I)$ όταν $n \rightarrow +\infty$. Τότε

$$0 \leq \|f_n - f_m\|_1 \leq \|f_n - f\|_1 + \|f_m - f\|_1 \rightarrow 0 + 0 = 0$$

όταν $n, m \rightarrow +\infty$.

Η δεύτερη κατεύθυνση.

Έστω $\|f_n - f_m\|_1 \rightarrow 0$ όταν $n, m \rightarrow +\infty$.

Τότε υπάρχει n_1 ώστε

$$\|f_n - f_m\|_1 < \frac{1}{2} \quad \text{για κάθε } n, m \geq n_1.$$

Κατόπιν, υπάρχει $n_2 > n_1$ ώστε

$$\|f_n - f_m\|_1 < \frac{1}{2^2} \quad \text{για κάθε } n, m \geq n_2.$$

Κατόπιν, υπάρχει $n_3 > n_2$ ώστε

$$\|f_n - f_m\|_1 < \frac{1}{2^3} \quad \text{για κάθε } n, m \geq n_3.$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά επ' άπειρον, βλέπουμε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία δεικτών (n_k) ώστε

$$\|f_n - f_m\|_1 < \frac{1}{2^k} \quad \text{για κάθε } n, m \geq n_k$$

για κάθε k .

Έτσι σχηματίζεται υποακολουθία (f_{n_k}) της (f_n) και, παίρνοντας $n = n_{k+1} (\geq n_k)$ και $m = n_k (\geq n_k)$ στην τελευταία σχέση, έχουμε

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 < \frac{1}{2^k}$$

για κάθε k .

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Σύγκλισης Σειράς αφού δούμε ότι

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_I |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| = \sum_{k=1}^{+\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1 < +\infty.$$

Συμπεραίνουμε ότι η σειρά συγκλίνει απολύτως και ορίζει συνάρτηση στον $L^1(I)$. Αν προσθέσουμε και την f_{n_1} , καταλήγουμε σε συνάρτηση

$$f = f_{n_1} + \sum_{k=1}^{+\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}),$$

η οποία ανήκει στον $L^1(I)$.

Αμέσως βλέπουμε ότι το $(k-1)$ -οστό μερικό άθροισμα του δεξιού μέλους της τελευταίας ισότητας είναι ίσο με f_{n_k} , οπότε συμπεραίνουμε ότι

$$f_{n_k} \rightarrow f \text{ σ.π.}$$

όταν $k \rightarrow +\infty$.

Τώρα, παρατηρούμε ότι

$$|f_{n_k} - f| = \left| \sum_{j=k}^{+\infty} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j}) \right| \leq \sum_{j=k}^{+\infty} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|,$$

οπότε με μια απλή εφαρμογή του Θεωρήματος Σύγκλισης Σειράς στο δεξιό μέλος, βρίσκουμε

$$0 \leq \int_I |f_{n_k} - f| \leq \int_I \sum_{j=k}^{+\infty} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| = \sum_{j=k}^{+\infty} \int_I |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| < \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Άρα

$$\|f_{n_k} - f\|_1 \rightarrow 0$$

όταν $k \rightarrow +\infty$ και, επομένως, η υποακολουθία (f_{n_k}) συγκλίνει στην f στον $L^1(I)$.

Τώρα, είναι εύκολο να δούμε ότι η (f_n) συγκλίνει στην f στον $L^1(I)$. Πράγματι, επειδή η ακολουθία είναι ακολουθία Cauchy στον $L^1(I)$,

$$0 \leq \|f_k - f\|_1 \leq \|f_k - f_{n_k}\|_1 + \|f_{n_k} - f\|_1 \rightarrow 0 + 0 = 0$$

όταν $k \rightarrow +\infty$ (διότι τότε $n_k \rightarrow +\infty$). □

Ορισμός. Έστω ένα σύνολο X το οποίο είναι γραμμικός χώρος. Δηλαδή στο X ορίζεται η πράξη της πρόσθεσης ανάμεσα στα στοιχεία του X και η πράξη του πολλαπλασιασμού των αριθμών με τα στοιχεία του X έτσι ώστε να ισχύουν οι συνήθεις αλγεβρικές ιδιότητες αυτών των πράξεων.

Υποθέτουμε, επίσης, ότι σε κάθε $x \in X$ αντιστοιχεί ένας συγκεκριμένος μη-αρνητικός αριθμός $\|x\|$, ο οποίος ονομάζεται νόρμα του x ώστε

[1] $\|x\| \geq 0$ για κάθε $x \in X$. Αν $x \in X$, τότε: $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$.

[2] $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x, y \in X$.

[3] $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ για κάθε $x \in X$ και κάθε αριθμό λ .

Τότε ο γραμμικός χώρος X χαρακτηρίζεται **γραμμικός χώρος με νόρμα**. Αν το σύνολο των αριθμών που χρησιμοποιούμε είναι το \mathbb{R} , τότε λέμε ότι ο X είναι γραμμικός χώρος **επί του \mathbb{R}** με νόρμα. Αν το σύνολο των αριθμών που χρησιμοποιούμε είναι το \mathbb{C} , τότε λέμε ότι ο X είναι γραμμικός χώρος **επί του \mathbb{C}** με νόρμα.

Σε ένα γραμμικό χώρο με νόρμα, όπως παραπάνω, ορίζουμε την **απόσταση** ανάμεσα σε δυο στοιχεία του x, y να είναι ο αριθμός $\|x - y\|$.

Σε ένα γραμμικό χώρο με νόρμα, όπως παραπάνω, λέμε ότι η ακολουθία (x_n) στο X συγκλίνει στο $x \in X$ αν $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ όταν $n \rightarrow +\infty$.

Αν ένας χώρος με νόρμα, όπως παραπάνω, είναι **πλήρης**, δηλαδή έχει την ιδιότητα κάθε ακολουθία *Cauchy* στον χώρο να συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο του χώρου, τότε ο χώρος αυτός χαρακτηρίζεται **χώρος Banach**.

Σχόλιο. Πρέπει να τονίσουμε ότι οι ιδιότητες της απόστασης στον $L^1(I)$ που αναφέρονται στην Πρόταση 1.22 και οι ιδιότητες της σύγκλισης ακολουθιών στον $L^1(I)$ που αναφέρονται στην Πρόταση 1.23 (εκτός αυτής με τα ολοκληρώματα) ισχύουν σε οποιονδήποτε χώρο με νόρμα. Δηλαδή,

[1] $\|x - y\| \geq 0$ για κάθε $x, y \in X$. Αν $x, y \in X$, τότε: $\|x - y\| = 0$ αν και μόνο αν $x = y$.

[2] $\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|$ για κάθε $x, y, z \in X$.

[3] $\|\lambda x - \lambda y\| = |\lambda| \|x - y\|$ για κάθε $x, y \in X$ και κάθε αριθμό λ .

[4] Αν $x_n \rightarrow x$ και $y_n \rightarrow y$ στον X και $\lambda_n \rightarrow \lambda$ όταν $n \rightarrow +\infty$, τότε $x_n + y_n \rightarrow x + y$ και $\lambda_n x_n \rightarrow \lambda x$ στον X όταν $n \rightarrow +\infty$.

Οι αποδείξεις είναι πιστή αντιγραφή των παραπάνω αποδείξεων.

Ορισμός. Έστω γραμμικός χώρος X (επί του \mathbb{R} ή επί του \mathbb{C}) με νόρμα. Επίσης, έστω μια συνάρτηση

$$l : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C} \text{ (αντιστοίχως)}$$

ώστε

(i) $l(x + y) = l(x) + l(y)$ και $l(\lambda x) = \lambda l(x)$ για κάθε $x, y \in X$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ή \mathbb{C} (αντιστοίχως).

Τότε η συνάρτηση l χαρακτηρίζεται **γραμμικό συναρτησοειδές** στον X .

Έστω ότι, εκτός από την ιδιότητα (i), ισχύει και η ιδιότητα

(ii) αν $x_n \rightarrow x$ στον X όταν $n \rightarrow +\infty$, τότε $l(x_n) \rightarrow l(x)$.

Τότε το γραμμικό συναρτησοειδές l χαρακτηρίζεται **συνεχές**.

Πρόταση 1.24. Ο χώρος $L^1(I)$ με την συγκεκριμένη 1-νόρμα που έχουμε ορίσει είναι ένας χώρος Banach (επί του \mathbb{C}). Επίσης, η συνάρτηση $l : L^1(I) \rightarrow \mathbb{C}$ με τύπο

$$l(f) = \int_I f$$

είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές στον $L^1(I)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη έχει ήδη γίνει. □

Σχόλιο. Το παραπάνω συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές στον $L^1(I)$ είναι και **θετικό**. Με αυτόν τον όρο εννοούμε ότι ισχύει:

$$f \geq 0 \text{ σ.π. στο } I \Rightarrow l(f) \geq 0.$$

Επίσης, παρατηρήστε ότι η ανισότητα $|\int_I f| \leq \int_I |f|$ γράφεται

$$|l(f)| \leq \|f\|_1.$$

Τώρα θα εισαγάγουμε μια νέα πράξη στον χώρο $L^1(\mathbb{R})$.

Πρόταση 1.25. Έστω ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f, g .

Τότε για σ.κ. x η συνάρτηση (με μεταβλητή y) $f(x - y)g(y)$ είναι ολοκληρώσιμη. Άρα, για σ.κ. x ορίζεται ο αριθμός

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) dy.$$

Η συνάρτηση h που ορίζεται σ.π. με αυτόν τον τρόπο είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_{\mathbb{R}} h = \int_{\mathbb{R}} f \int_{\mathbb{R}} g, \quad \int_{\mathbb{R}} |h| \leq \int_{\mathbb{R}} |f| \int_{\mathbb{R}} |g|.$$

Απόδειξη. Κατ'αρχάς θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $H(x, y) = f(x - y)g(y)$, ως συνάρτηση του (x, y) στον \mathbb{R}^2 , είναι ολοκληρώσιμη.

Στην περίπτωση που $f(x) = \chi_I(x)$ και $g(x) = \chi_J(x)$, όπου I, J είναι δυο διαστήματα του \mathbb{R} , είναι εύκολο να δει κανείς ότι $H(x, y) = \chi_A(x, y)$, όπου A είναι ένα παραλληλόγραμμο στον \mathbb{R}^2 . Πιο συγκεκριμένα, αν το I έχει άκρα a, b ($a \leq b$) και το J έχει άκρα c, d ($c \leq d$), τότε το παραλληλόγραμμο A έχει κορυφές τα σημεία $(a + c, c), (b + c, c), (a + d, d), (b + d, d)$. Τώρα βλέπουμε ότι η $\chi_A(x, y)$ μηδενίζεται έξω από το διάστημα του \mathbb{R}^2 με κορυφές τα σημεία $(a + c, c), (b + d, c), (a + c, d), (b + d, d)$ και ότι είναι Riemann ολοκληρώσιμη (ως συνάρτηση δύο μεταβλητών) στο διάστημα αυτό. Άρα η $\chi_A(x, y)$ είναι ολοκληρώσιμη στον \mathbb{R}^2 . Επίσης,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_A(x, y) dx dy = (b - a)(d - c) = \int_{\mathbb{R}} \chi_I(x) dx \int_{\mathbb{R}} \chi_J(x) dx.$$

Στην περίπτωση που $f(x) = \phi(x)$ και $g(x) = \psi(x)$ είναι δυο κλιμακωτές συναρτήσεις στον \mathbb{R} , τότε υπάρχουν ξένα ανά δύο διαστήματα I_1, \dots, I_n και ξένα ανά δύο διαστήματα J_1, \dots, J_m και αριθμοί c_1, \dots, c_n και d_1, \dots, d_m ώστε

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{I_k}(x), \quad \psi(x) = \sum_{l=1}^m d_l \chi_{J_l}(x).$$

Αν θέσουμε $H_{k,l}(x, y) = \chi_{I_k}(x - y)\chi_{J_l}(y)$, τότε, όπως είδαμε, κάθε $H_{k,l}(x, y)$ είναι ολοκληρώσιμη στον \mathbb{R}^2 . Επίσης,

$$H(x, y) = \phi(x - y)\psi(y) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m c_k d_l \chi_{I_k}(x - y)\chi_{J_l}(y) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m c_k d_l H_{k,l}(x, y)$$

και

$$|H(x, y)| \leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m |c_k| |d_l| |H_{k,l}(x, y)| = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m |c_k| |d_l| H_{k,l}(x, y)$$

οπότε η $H(x, y)$ είναι ολοκληρώσιμη στον \mathbb{R}^2 και

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |H(x, y)| dx dy &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m |c_k| |d_l| \int_{\mathbb{R}^2} H_{k,l}(x, y) dx dy = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m |c_k| |d_l| l(I_k) l(J_l) \\ &= \sum_{k=1}^n |c_k| l(I_k) \sum_{l=1}^m |d_l| l(J_l) = \int_{\mathbb{R}} |\phi(x)| dx \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)| dx. \end{aligned}$$

Τέλος, έστω τυχούσες ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f(x), g(x)$ στο \mathbb{R} .

Τότε υπάρχουν ακολουθίες κλιμακωτών συναρτήσεων (ϕ_n) και (ψ_n) στο \mathbb{R} ώστε

$$\int_{\mathbb{R}} |\phi_n - f| \rightarrow 0, \quad \int_{\mathbb{R}} |\psi_n - g| \rightarrow 0, \quad \phi_n \rightarrow f \text{ σ.π. στο } \mathbb{R} \quad \psi_n \rightarrow g \text{ σ.π. στο } \mathbb{R}.$$

Τώρα ορίζουμε τις συναρτήσεις $H(x, y) = f(x - y)g(y)$ και $H_n(x, y) = \phi_n(x - y)\psi_n(y)$.

Από τις δυο τελευταίες σχέσεις και από την Πρόταση 1.19 συνεπάγεται ότι

$$H_n \rightarrow H \text{ σ.π. στον } \mathbb{R}^2.$$

Επίσης, από την $\int_{\mathbb{R}} |\phi_n - f| \rightarrow 0$ και από την $|\int_{\mathbb{R}} \phi_n - \int_{\mathbb{R}} f| \leq \int_{\mathbb{R}} |\phi_n - f|$ συνεπάγεται $\int_{\mathbb{R}} |\phi_n| \rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f|$, οπότε υπάρχει αριθμός M ώστε $\int_{\mathbb{R}} |\phi_n| \leq M$ για κάθε n . Ομοίως, υπάρχει αριθμός K ώστε $\int_{\mathbb{R}} |\psi_n| \leq K$ για κάθε n . Άρα

$$\int_{\mathbb{R}^2} |H_n(x, y) - H(x, y)| dx dy \leq \int_{\mathbb{R}} |\phi_n(x) - f(x)| dx \int_{\mathbb{R}} |\psi_n(y)| dy \leq MK.$$

Από το Λήμμα του Fatou συνεπάγεται ότι η $H(x, y) = f(x - y)g(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στον \mathbb{R}^2 . Τα υπόλοιπα είναι άμεσα από το Θεώρημα του Fubini. Ειδικότερα,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} h(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} H(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} H(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}} f(x - y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \int_{\mathbb{R}} g(y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \int_{\mathbb{R}} g(x) dx \end{aligned}$$

και, επειδή, $|h(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x - y)g(y)| dy$ σ.π.,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |h(x)| dx &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x - y)g(y)| dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |H(x, y)| dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |H(x, y)| dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x - y)g(y)| dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x - y)| dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx. \end{aligned}$$

□

Ορισμός. Έστω ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f, g . Βάσει της Πρότασης 1.25, η συνάρτηση h που ορίζεται με τύπο $h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) dy$ για σ.κ. x είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει $\int_{\mathbb{R}} h = \int_{\mathbb{R}} f \int_{\mathbb{R}} g$ και $\int_{\mathbb{R}} |h| \leq \int_{\mathbb{R}} |f| \int_{\mathbb{R}} |g|$. Αυτήν την συνάρτηση h τη συμβολίζουμε $f * g$ και την ονομάζουμε **συνέλιξη** των f, g . Επομένως

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) dy \text{ για σ.κ. } x$$

και

$$\int_{\mathbb{R}} (f * g) = \int_{\mathbb{R}} f \int_{\mathbb{R}} g, \quad \int_{\mathbb{R}} |f * g| \leq \int_{\mathbb{R}} |f| \int_{\mathbb{R}} |g|.$$

Άρα ορίζεται μια νέα πράξη στον χώρο $L^1(\mathbb{R})$. Η πράξη με την οποία σε κάθε δυο στοιχεία f, g του $L^1(\mathbb{R})$ αντιστοιχίζεται το στοιχείο $f * g$ του $L^1(\mathbb{R})$. Η πράξη αυτή ονομάζεται **συνέλιξη** στον $L^1(\mathbb{R})$.

Παράδειγμα. Έστω (a, b) και (c, d) δυο διαστήματα και οι αντίστοιχες χαρακτηριστικές συναρτήσεις $\chi_{(a,b)}$ και $\chi_{(c,d)}$.

Είναι απλό να δει κανείς ότι

$$\chi_{(a,b)}(x - y) = \chi_{(x-b, x-a)}(y).$$

Πράγματι, $\chi_{(a,b)}(x - y) = 1$ ή 0 αν και μόνο αν (αντιστοίχως) $x - y \in (a, b)$ ή $x - y \notin (a, b)$ αν και μόνο αν (αντιστοίχως) $y \in (x - b, x - a)$ ή $y \notin (x - b, x - a)$ αν και μόνο αν (αντιστοίχως) $\chi_{(x-b, x-a)}(y) = 1$ ή 0 . Κατόπιν, βλέπουμε ότι

$$\chi_{(a,b)}(x - y)\chi_{(c,d)}(y) = \chi_{(x-b, x-a)}(y)\chi_{(c,d)}(y) = \chi_{(x-b, x-a) \cap (c,d)}(y)$$

και, με έναν απλό υπολογισμό, ότι, στην περίπτωση που $d - c \leq b - a$, τότε

$$(\chi_{(a,b)} * \chi_{(c,d)})(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(x-b, x-a) \cap (c,d)}(y) dy = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \leq a + c \\ x - a - c, & \text{αν } a + c \leq x \leq a + d \\ d - c, & \text{αν } a + d \leq x \leq b + c \\ b + d - x, & \text{αν } b + c \leq x \leq b + d \\ 0, & \text{αν } b + d \leq x \end{cases}$$

Ένας παρόμοιος τύπος προκύπτει και στην περίπτωση που $b - a \leq d - c$.

Και στις δυο περιπτώσεις, η $\chi_{(a,b)} * \chi_{(c,d)}$ είναι μη-αρνητική, συνεχής και μηδενίζεται έξω από το διάστημα $(a + c, b + d)$.

Πρόταση 1.26. Η πράξη συνέλιξη στον $L^1(\mathbb{R})$ έχει τις εξής ιδιότητες.

[1] $f * g = g * f$ για κάθε $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.

[2] $(f * g) * h = f * (g * h)$ για κάθε $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$.

[3] $(f_1 + f_2) * g = f_1 * g + f_2 * g$ και $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$ για κάθε $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 \in L^1(\mathbb{R})$.

[4] $(\lambda f) * g = \lambda(f * g)$ και $f * (\lambda g) = \lambda(f * g)$ για κάθε $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ και $\lambda \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη. [1] Κάνοντας στοιχειώδεις αλλαγές μεταβλητής, για σ.κ. x έχουμε

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(y')g(x - y') dy' = (g * f)(x).$$

[2] Πάλι με στοιχειώδεις αλλαγές μεταβλητής, για σ.κ. x έχουμε

$$\begin{aligned} [(f * g) * h](x) &= \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x - y)h(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(z)g(x - y - z) dz \right) h(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(z)g(x - y - z)h(y) dz \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(z)g(x - y - z)h(y) dy \right) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(z) \left(\int_{\mathbb{R}} g(x - y - z)h(y) dy \right) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(z)(g * h)(x - z) dz \\ &= [f * (g * h)](x). \end{aligned}$$

Όμως, εκτός από τις αλλαγές μεταβλητής, πρέπει να δικαιολογηθεί και η εναλλαγή ολοκληρωμάτων στην τέταρτη ισότητα. Αυτό είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος του Fubini και, επομένως, πρέπει να αποδειχτεί ότι για σ.κ. x η $f(z)g(x - y - z)h(y)$ ως συνάρτηση του (y, z) στον \mathbb{R}^2 είναι ολοκληρώσιμη. Αυτό με τη σειρά του είναι άμεση συνέπεια, επίσης, του Θεωρήματος του Fubini, οπότε πρέπει να αποδειχτεί ότι η $f(z)g(x - y - z)h(y)$ ως συνάρτηση του (x, y, z) στον \mathbb{R}^3 είναι ολοκληρώσιμη. Για να γίνει αυτό μιμούμαστε την απόδειξη της Πρότασης 1.25. Ξεκινάμε με τις f, g, h να είναι χαρακτηριστικές συναρτήσεις τριών διαστημάτων στον \mathbb{R} , κατόπιν περνάμε στην περίπτωση που οι f, g, h είναι κλιμακωτές συναρτήσεις και, τέλος, παίρνουμε τη γενική περίπτωση με εφαρμογή του Λήμματος του Fatou. Οι λεπτομέρειες αυτής της διαδικασίας αφήνονται για τον αναγνώστη.

[3] Για σ.κ. x ,

$$\begin{aligned} [(f_1 + f_2) * g](x) &= \int_{\mathbb{R}} (f_1(x - y) + f_2(x - y))g(y) dy = \int_{\mathbb{R}} f_1(x - y)g(y) dy + \int_{\mathbb{R}} f_2(x - y)g(y) dy \\ &= (f_1 * g)(x) + (f_2 * g)(x). \end{aligned}$$

[4] Για σ.κ. x ,

$$[(\lambda f) * g](x) = \int_{\mathbb{R}} (\lambda f(x - y))g(y) dy = \lambda \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) dy = \lambda(f * g)(x).$$

□

Ορισμός. Έστω ένα σύνολο X το οποίο είναι γραμμικός χώρος. Δηλαδή στο X ορίζεται η πράξη της πρόσθεσης $(x + y)$ ανάμεσα στα στοιχεία του X και η πράξη του πολλαπλασιασμού (λx) των αριθμών με τα στοιχεία του

X έτσι ώστε να ισχύουν οι συνήθεις αλγεβρικές ιδιότητες αυτών των πράξεων.

Υποθέτουμε, επίσης, ότι στο X ορίζεται και μια πράξη πολλαπλασιασμού $(x \cdot y)$ ανάμεσα στα στοιχεία του X με τις παρακάτω αλγεβρικές ιδιότητες:

[1] $x \cdot y = y \cdot x$ για κάθε $x, y \in X$.

[2] $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ για κάθε $x, y, z \in X$.

[3] $(x_1 + x_2) \cdot y = x_1 \cdot y + x_2 \cdot y$ και $x \cdot (y_1 + y_2) = x \cdot y_1 + x \cdot y_2$ για κάθε $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in X$.

[4] $(\lambda x) \cdot y = \lambda(x \cdot y)$ και $x \cdot (\lambda y) = \lambda(x \cdot y)$ για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{C}$.

Τότε το X χαρακτηρίζεται **μεταθετική άλγεβρα επί του \mathbb{C}** . Αν το σύνολο των αριθμών που χρησιμοποιούμε είναι το \mathbb{R} , τότε λέμε ότι το X είναι **μεταθετική άλγεβρα επί του \mathbb{R}** .

Αν η ιδιότητα [1] δεν ισχύει, τότε λέμε ότι το X είναι, απλώς, **άλγεβρα** (επί του \mathbb{C} ή επί του \mathbb{R}).

Εστω ότι η άλγεβρα X έχει ένα στοιχείο x_0 με την ιδιότητα: $xx_0 = x_0x = x$ για κάθε $x \in X$. Τότε το x_0 ονομάζεται **μοναδιαίο στοιχείο** της X και η X χαρακτηρίζεται **άλγεβρα με μοναδιαίο στοιχείο**.

Αν στην άλγεβρα X είναι ορισμένη μια νόρμα, η οποία, εκτός από τις ιδιότητες [1], [2], [3] μιας νόρμας, έχει και την επιπλέον ιδιότητα

[4] $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \|y\|$ για κάθε $x, y \in X$,

τότε λέμε ότι το X είναι μια **άλγεβρα με νόρμα** (επί του \mathbb{C} ή επί του \mathbb{R}).

Αν μια άλγεβρα με νόρμα, όπως παραπάνω, είναι **πλήρης**, δηλαδή έχει την ιδιότητα *κάθε ακολουθία Cauchy στον χώρο να συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο του χώρου*, τότε η άλγεβρα αυτή χαρακτηρίζεται **άλγεβρα Banach** (επί του \mathbb{C} ή επί του \mathbb{R}).

Πρόταση 1.27. Ο χώρος $L^1(\mathbb{R})$ με τις γνωστές πράξεις πρόσθεση και πολλαπλασιασμός με αριθμό, με την 1-νόρμα και με την πράξη *συνέλιξη* είναι μια μεταθετική άλγεβρα Banach (επί του \mathbb{C}).

Απόδειξη. Μένει να ελέγξουμε την επιπλέον ιδιότητα της 1-νόρμας:

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f * g| \leq \int_{\mathbb{R}} |f| \int_{\mathbb{R}} |g| = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Όλα τα άλλα έχουν αποδειχθεί. □

Σχόλιο. Λίγο αργότερα θα δούμε ότι η άλγεβρα $L^1(\mathbb{R})$ δεν έχει μοναδιαίο στοιχείο.

Τώρα θα ασχοληθούμε με τον χώρο $L^1([0, 1])$ αφ' ενός σε σχέση με τις "περιοδικές" συναρτήσεις στο \mathbb{R} αφ' ετέρου σε σχέση με την πράξη της "συνέλιξης" κατάλληλα ορισμένης και γι αυτόν τον χώρο.

Ορισμός. Εστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Το A χαρακτηρίζεται **1-περιοδικό** αν για κάθε $x \in A$ συνεπάγεται $x \pm 1 \in A$.

Εστω $f : A \rightarrow \mathbb{C}$. Η f χαρακτηρίζεται **1-περιοδική** αν το A είναι 1-περιοδικό και για κάθε $x \in A$ συνεπάγεται

$$f(x \pm 1) = f(x).$$

Αν ο αριθμός 1 αντικατασταθεί με έναν άλλο αριθμό $a \neq 0$, τότε μιλάμε για **a -περιοδικά** σύνολα και για **a -περιοδικές** συναρτήσεις.

Σχόλιο. Δυο πράγματα είναι σαφή από τον ορισμό.

[1] Αν το σύνολο A είναι 1-περιοδικό, τότε $A + 1 = \mu_1(A) = A$ και, γενικότερα, $A + n = \mu_n(A) = A$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Επίσης, αν $A_0 = A \cap [0, 1)$, τότε τα σύνολα $\mu_n(A_0) = A_0 + n$, $n \in \mathbb{Z}$, είναι ανά δύο ξένα και η ένωσή τους ισούται με το A :

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (A_0 + n).$$

Με άλλα λόγια, το A προσδιορίζεται μονοσήμαντα από την τομή του με το διάστημα $[0, 1)$. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, το $A_0 + n$ είναι ακριβώς η τομή του A με το $[n, n + 1)$: $A_0 + n = A \cap [n, n + 1)$.

[2] Επίσης, αν η f είναι 1-περιοδική, τότε $\mu_1(f) = f$ και, γενικότερα, $\mu_n(f) = f$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Αν $f_0 : A_0 \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ο περιορισμός της f στο A_0 (δηλαδή στο $[0, 1)$), τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ο περιορισμός της f στο $A_0 + n$ (δηλαδή στο $[n, n + 1)$) ταυτίζεται με τη συνάρτηση $\mu_n(f_0)$.

[3] Είναι φανερό ότι στα παραπάνω τον ρόλο του διαστήματος $[0, 1)$ μπορεί να τον παίξει οποιοδήποτε άλλο

διάστημα μήκους 1 το οποίο περιέχει ακριβώς ένα από τα δυο άκρα του. Ένα τέτοιο διάστημα είναι το $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

[4] Τέλος, όλα τα προηγούμενα μπορούν να προσαρμοστούν στο πλαίσιο των a -περιοδικών συνόλων και συναρτήσεων, αν αντικαταστήσουμε το $[0, 1)$ με οποιοδήποτε διάστημα μήκους a το οποίο περιέχει ακριβώς ένα από τα δυο άκρα του. Για παράδειγμα, όταν μιλάμε για 2π -περιοδικά σύνολα ή 2π -περιοδικές συναρτήσεις, χρησιμοποιούμε το διάστημα $[0, 2\pi)$ ή το $(-\pi, \pi]$.

[5] Μπορούμε εύκολα να περάσουμε από a -περιοδικές σε 1 -περιοδικές συναρτήσεις.

Αν η $f(x)$ είναι a -περιοδική, τότε η συνάρτηση $f(ax)$ είναι 1 -περιοδική. Πράγματι,

$$f(a(x \pm 1)) = f(ax \pm a) = f(ax).$$

Για παράδειγμα, για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ οι συναρτήσεις

$$\cos(mx), \quad \sin(mx), \quad e^{imx} = \cos(mx) + i \sin(mx)$$

είναι 2π -περιοδικές. Επομένως, οι συναρτήσεις

$$\cos(2\pi mx), \quad \sin(2\pi mx), \quad e^{2\pi imx} = \cos(2\pi mx) + i \sin(2\pi mx)$$

είναι 1 -περιοδικές.

Πρόταση 1.28. Έστω 1 -περιοδική συνάρτηση f η οποία είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$. Τότε,

[1] η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε φραγμένο διάστημα.

[2] για κάθε φραγμένο διάστημα I και κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισχύει $\int_I f = \int_{I+n} f$.

[3] αν τα διαστήματα I, J έχουν μήκος 1, ισχύει $\int_I f = \int_J f$.

Απόδειξη. [1] Έστω η συνάρτηση $\chi_{[0,1)}f$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισχύει $\chi_{[n,n+1)}f = \mu_n(\chi_{[0,1)}f)$.

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$, τότε (εξ ορισμού) η $\chi_{[0,1)}f$ είναι ολοκληρώσιμη, οπότε και η $\chi_{[n,n+1)}f$ είναι ολοκληρώσιμη, οπότε (εξ ορισμού) η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[n, n+1)$. Επίσης,

$$\int_{[0,1)} f = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1)}f = \int_{\mathbb{R}} \mu_n(\chi_{[0,1)}f) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[n,n+1)}f = \int_{[n,n+1)} f.$$

Ενώνοντας πεπερασμένου πλήθους τέτοια διαστήματα $[n, n+1)$, μπορούμε να καλύψουμε οποιοδήποτε φραγμένο διάστημα, οπότε η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε φραγμένο διάστημα.

[2] Όπως και στο [1], έχουμε ότι $\chi_{I+n}f = \mu_n(\chi_I f)$. Άρα

$$\int_{I+n} f = \int_{\mathbb{R}} \chi_{I+n}f = \int_{\mathbb{R}} \mu_n(\chi_I f) = \int_{\mathbb{R}} \chi_I f = \int_I f.$$

[3] Έστω $I = [a, a+1)$ και $J = [b, b+1)$. Υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ ώστε $b \leq a+n < b+1$. Τότε, βάσει του [2],

$$\int_{[a,a+1)} f = \int_{[a+n,a+n+1)} f, \quad \int_{[b,a+n)} f = \int_{[b+1,a+n+1)} f.$$

Από αυτές τις ισότητες και από την

$$\int_{[b,a+n)} f + \int_{[a+n,a+n+1)} f = \int_{[b,a+n+1)} f = \int_{[b,b+1)} f + \int_{[b+1,a+n+1)} f$$

συνεπάγεται $\int_I f = \int_J f$. □

Σχόλιο. Τα αποτελέσματα αυτά ισχύουν και για a -περιοδικές συναρτήσεις. Για παράδειγμα, το αποτέλεσμα του [2] γίνεται $\int_I f = \int_{I+na} f$. Το δε αποτέλεσμα του [3] διατυπώνεται: αν τα διαστήματα I, J έχουν μήκος a , ισχύει $\int_I f = \int_J f$.

Ορισμός. Έστω $A \subseteq [0, 1)$. Ορίζουμε την 1-περιοδική επέκταση του A και συμβολίζουμε \tilde{A}^p να είναι το σύνολο

$$\tilde{A}^p = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (A + n).$$

Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, όπου $A \subseteq [0, 1)$. Για κάθε $x \in \tilde{A}^p$ υπάρχει μοναδικός $n \in \mathbb{Z}$ ώστε $x \in A + n$ ή, ισοδύναμα, $x - n \in A$ και ορίζουμε

$$\tilde{f}^p(x) = f(x - n).$$

Έτσι ορίζεται συνάρτηση

$$\tilde{f}^p : \tilde{A}^p \rightarrow \mathbb{C}$$

την οποία ονομάζουμε 1-περιοδική επέκταση της f .

Σχόλια. [1] Είναι φανερό ότι το σύνολο \tilde{A}^p είναι 1-περιοδικό και η τομή του με το $[0, 1)$ είναι το A .

[2] Ομοίως, η συνάρτηση \tilde{f}^p είναι 1-περιοδική και ο περιορισμός της στο $[0, 1)$ είναι η f .

[3] Μπορούμε να ορίσουμε 1-περιοδικές επεκτάσεις συνόλων ή συναρτήσεων ξεκινώντας με οποιοδήποτε διάστημα μήκους 1 το οποίο περιέχει ακριβώς ένα από τα δυο άκρα του (αντί του $[0, 1)$).

[4] Τέλος, μπορούμε να ορίσουμε a -περιοδικές επεκτάσεις συνόλων ή συναρτήσεων ξεκινώντας με οποιοδήποτε διάστημα μήκους a το οποίο περιέχει ακριβώς ένα από τα δυο άκρα του.

[5] Προσέξτε τη διαφορά ανάμεσα στις επεκτάσεις \tilde{f} και \tilde{f}^p της f έξω από το διάστημα $[0, 1)$. Η \tilde{f} μηδενίζεται έξω από το $[0, 1)$, ενώ η \tilde{f}^p αποτελείται από “αντίγραφα” της f μεταφερόμενα σε κάθε διάστημα $[n, n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}$.

[6] Ένα σημαντικό σχόλιο για τη συνέχεια.

Ξεκινώντας με μια συνάρτηση f η οποία είναι 1-περιοδική και ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0, 1)$ μπορούμε να θεωρήσουμε τον περιορισμό $f|_{[0,1)}$ της f στο $[0, 1)$ και έτσι να βρούμε μια συνάρτηση-στοιχείο του χώρου $L^1([0, 1))$. Αντιστρόφως, ξεκινώντας με μια συνάρτηση f στον χώρο $L^1([0, 1))$, μπορούμε να θεωρήσουμε την 1-περιοδική επέκταση \tilde{f}^p της f και έτσι να βρούμε μια 1-περιοδική συνάρτηση ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0, 1)$. Είναι φανερό ότι αυτές οι δυο διαδικασίες είναι η μια αντίστροφη της άλλης. Αν περιορίσουμε μια 1-περιοδική συνάρτηση στο $[0, 1)$ και επεκτείνουμε τον προκύψαντα περιορισμό 1-περιοδικά, τότε θα καταλήξουμε στην αρχική συνάρτηση. Ομοίως, αν επεκτείνουμε 1-περιοδικά μια συνάρτηση στο $[0, 1)$ και μετά περιορίσουμε την προκύψασα επέκταση στο $[0, 1)$, τότε θα καταλήξουμε στην αρχική συνάρτηση.

Τα προηγούμενα, μας κάνουν να “ταυτίζουμε” συναρτήσεις οι οποίες είναι 1-περιοδικές και ολοκληρώσιμες στο διάστημα $[0, 1)$ με συναρτήσεις-στοιχεία του χώρου $L^1([0, 1))$.

Η Πρόταση 1.29 είναι το ανάλογο της Πρότασης 1.25 για 1-περιοδικές συναρτήσεις.

Πρόταση 1.29. Έστω 1-περιοδικές συναρτήσεις f, g ολοκληρώσιμες στο $[0, 1)$.

Τότε για σ.κ. x η συνάρτηση (με μεταβλητή y) $f(x - y)g(y)$ είναι 1-περιοδική και ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$. Άρα, για σ.κ. x ορίζεται ο αριθμός

$$h(x) = \int_{[0,1)} f(x - y)g(y) dy.$$

Η συνάρτηση h που ορίζεται σ.π. με αυτόν τον τρόπο είναι 1-περιοδική και ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$ και

$$\int_{[0,1)} h = \int_{[0,1)} f \int_{[0,1)} g, \quad \int_{[0,1)} |h| \leq \int_{[0,1)} |f| \int_{[0,1)} |g|.$$

Απόδειξη. Θα μπορούσαμε να επαναλάβουμε την απόδειξη της Πρότασης 1.25 προσαρμοσμένη κατάλληλα στο πλαίσιο των 1-περιοδικών συναρτήσεων. Ας δούμε, όμως, πώς αποδεικνύεται η παρούσα πρόταση ως άμεση εφαρμογή της Πρότασης 1.25.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$F = \chi_{(-1,1)} f, \quad G = \chi_{[0,1)} g.$$

Παρατηρούμε ότι, αν $x \in [0, 1)$, τότε για κάθε $y \in [0, 1)$ ισχύει $x - y \in (-1, 1)$, οπότε

$$F(x - y) = f(x - y), \quad G(y) = g(y) \quad \text{για σ.κ. } x, y \in [0, 1).$$

Επειδή οι f, g είναι 1-περιοδικές και ολοκληρώσιμες στο $[0, 1)$, οι F, G είναι ολοκληρώσιμες (στο \mathbb{R}). Άρα, σύμφωνα με την Πρόταση 1.25, για σ.κ. x η συνάρτηση (με μεταβλητή y) $F(x - y)G(y)$ είναι ολοκληρώσιμη (στο \mathbb{R}), οπότε ορίζεται ο αριθμός

$$H(x) = \int_{\mathbb{R}} F(x - y)G(y) dy \quad \text{για σ.κ. } x \in \mathbb{R}$$

και η συνάρτηση H , που ορίζεται σ.π. με αυτόν τον τρόπο, είναι ολοκληρώσιμη (στο \mathbb{R}).

Άρα για σ.κ. x η συνάρτηση (με μεταβλητή y) $F(x - y)G(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$. Άρα για σ.κ. x στο $[0, 1)$ η συνάρτηση (με μεταβλητή y) $F(x - y)G(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$. Άρα, βάσει της παραπάνω παρατήρησης, για σ.κ. x στο $[0, 1)$ η συνάρτηση (με μεταβλητή y) $f(x - y)g(y) = F(x - y)G(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$ και

$$H(x) = \int_{\mathbb{R}} F(x - y)G(y) dy = \int_{[0,1)} F(x - y)g(y) dy = \int_{[0,1)} f(x - y)g(y) dy \quad \text{για σ.κ. } x \in [0, 1).$$

Η H είναι ολοκληρώσιμη, οπότε είναι ολοκληρώσιμη και στο $[0, 1)$. Συμπεραίνουμε ότι για σ.κ. x στο $[0, 1)$ η συνάρτηση (με μεταβλητή y) $f(x - y)g(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$ και ορίζεται ο αριθμός

$$h(x) = \int_{[0,1)} f(x - y)g(y) dy \quad \text{για σ.κ. } x \in [0, 1)$$

και ο αριθμός αυτός ταυτίζεται με τον αριθμό $H(x)$. Δηλαδή, η συνάρτηση h που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο σ.π. στο $[0, 1)$ ταυτίζεται με τον περιορισμό της H στο $[0, 1)$, οπότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$.

Τώρα, επειδή η f είναι 1-περιοδική, ισχύει $f(x + 1 - y)g(y) = f(x - y)g(y)$. Επομένως, αν για κάποιον x η συνάρτηση (με μεταβλητή y) $f(x - y)g(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$, τότε και για τον $x + 1$ η συνάρτηση (με μεταβλητή y) $f(x + 1 - y)g(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$ και ισχύει $\int_{[0,1)} f(x + 1 - y)g(y) dy = \int_{[0,1)} f(x - y)g(y) dy$.

Επομένως, για σ.κ. x (στο \mathbb{R}) η συνάρτηση (με μεταβλητή y) $f(x - y)g(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$ και ορίζεται ο αριθμός

$$h(x) = \int_{[0,1)} f(x - y)g(y) dy \quad \text{για σ.κ. } x \in \mathbb{R}.$$

Έτσι, λοιπόν, ορίζεται σ.π. (στο \mathbb{R}) η συνάρτηση h , η οποία είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$ και 1-περιοδική, αφού

$$h(x + 1) = \int_{[0,1)} f(x + 1 - y)g(y) dy = \int_{[0,1)} f(x - y)g(y) dy = h(x).$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned} \int_{[0,1)} h(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1)}(x) \left(\int_{\mathbb{R}} F(x - y)G(y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1)}(x) F(x - y)G(y) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1)}(x) F(x - y) dx \right) G(y) dy = \int_{[0,1)} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1)}(x) F(x - y) dx \right) g(y) dy \\ &= \int_{[0,1)} \left(\int_{[0,1)} \chi_{(-1,1)}(x - y) f(x - y) dx \right) g(y) dy \\ &= \int_{[0,1)} \left(\int_{[-y, -y+1)} \chi_{(-1,1)}(x) f(x) dx \right) g(y) dy \\ &= \int_{[0,1)} \left(\int_{[-y, -y+1)} f(x) dx \right) g(y) dy = \int_{[0,1)} \left(\int_{[0,1)} f(x) dx \right) g(y) dy \\ &= \int_{[0,1)} f(x) dx \int_{[0,1)} g(y) dy = \int_{[0,1)} f(x) dx \int_{[0,1)} g(x) dx. \end{aligned}$$

□

Ορισμός. Έστω 1-περιοδικές συναρτήσεις f, g ολοκληρώσιμες στο $[0, 1)$. Βάσει της Πρότασης 1.29, η συνάρτηση h που ορίζεται με τύπο $h(x) = \int_{[0,1)} f(x-y)g(y) dy$ για σ.κ. x είναι 1-περιοδική και ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$ και ισχύει $\int_{[0,1)} h = \int_{[0,1)} f \int_{[0,1)} g$ και $\int_{[0,1)} |h| \leq \int_{[0,1)} |f| \int_{[0,1)} |g|$. Αυτήν την συνάρτηση h τη συμβολίζουμε $f * g$ και την ονομάζουμε **συνέλιξη** των f, g . Επομένως

$$(f * g)(x) = \int_{[0,1)} f(x-y)g(y) dy \text{ για σ.κ. } x$$

και

$$\int_{[0,1)} (f * g) = \int_{[0,1)} f \int_{[0,1)} g, \quad \int_{[0,1)} |f * g| \leq \int_{[0,1)} |f| \int_{[0,1)} |g|.$$

Βάσει της “ταύτισης” ανάμεσα στα στοιχεία του $L^1([0, 1))$ και στις 1-περιοδικές συναρτήσεις που είναι ολοκληρώσιμες στο $[0, 1)$, ορίζεται μια νέα πράξη στον χώρο $L^1([0, 1))$. Η πράξη με την οποία σε κάθε δυο στοιχεία f, g του $L^1([0, 1))$ αντιστοιχίζεται το στοιχείο $f * g$ του $L^1([0, 1))$. Η πράξη αυτή ονομάζεται **συνέλιξη** στον $L^1([0, 1))$.

Σχόλιο. Η απόδειξη της ιδιότητας $\int_{[0,1)} (f * g) = \int_{[0,1)} f \int_{[0,1)} g$, η οποία υπάρχει μέσα στην απόδειξη της Πρότασης 1.29 είναι κάπως “σκοτεινή” διότι ανακατεύονται οι συναρτήσεις F, G για λόγους θεωρητικής αυστηρότητας. Θα ήταν καλό να δούμε μια πιο “φωτεινή” απόδειξη, έστω κι αν αυτή δεν είναι τόσο αυστηρή:

$$\begin{aligned} \int_{[0,1)} (f * g)(x) dx &= \int_{[0,1)} \left(\int_{[0,1)} f(x-y)g(y) dy \right) dx = \int_{[0,1)} \left(\int_{[0,1)} f(x-y)g(y) dx \right) dy \\ &= \int_{[0,1)} \left(\int_{[0,1)} f(x-y) dx \right) g(y) dy = \int_{[0,1)} \left(\int_{[-y, -y+1)} f(x) dx \right) g(y) dy \\ &= \int_{[0,1)} \left(\int_{[0,1)} f(x) dx \right) g(y) dy = \int_{[0,1)} f(x) dx \int_{[0,1)} g(y) dy \\ &= \int_{[0,1)} f(x) dx \int_{[0,1)} g(x) dx. \end{aligned}$$

Παρόμοια είναι και η “απόδειξη” της άλλης σχέσης:

$$\begin{aligned} \int_{[0,1)} |(f * g)(x)| dx &\leq \int_{[0,1)} \left(\int_{[0,1)} |f(x-y)||g(y)| dy \right) dx = \int_{[0,1)} \left(\int_{[0,1)} |f(x-y)||g(y)| dx \right) dy \\ &= \int_{[0,1)} \left(\int_{[0,1)} |f(x-y)| dx \right) |g(y)| dy = \int_{[0,1)} \left(\int_{[-y, -y+1)} |f(x)| dx \right) |g(y)| dy \\ &= \int_{[0,1)} \left(\int_{[0,1)} |f(x)| dx \right) |g(y)| dy = \int_{[0,1)} |f(x)| dx \int_{[0,1)} |g(y)| dy \\ &= \int_{[0,1)} |f(x)| dx \int_{[0,1)} |g(x)| dx. \end{aligned}$$

Η Πρόταση 1.30 είναι ανάλογη της Πρότασης 1.26.

Πρόταση 1.30. Η πράξη συνέλιξη στον $L^1([0, 1))$ έχει τις εξής ιδιότητες.

[1] $f * g = g * f$ για κάθε $f, g \in L^1([0, 1))$.

[2] $(f * g) * h = f * (g * h)$ για κάθε $f, g, h \in L^1([0, 1))$.

[3] $(f_1 + f_2) * g = f_1 * g + f_2 * g$ και $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$ για κάθε $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 \in L^1([0, 1))$.

[4] $(\lambda f) * g = \lambda(f * g)$ και $f * (\lambda g) = \lambda(f * g)$ για κάθε $f, g \in L^1([0, 1))$ και $\lambda \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι παραλλαγή της απόδειξης της Πρότασης 1.26. Ενδεικτικά, θα αποδείξουμε μόνο το [1].

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_{[0,1)} f(x-y)g(y) dy = \int_{(x-1, x]} f(y')g(x-y') dy' = \int_{(0,1)} f(y')g(x-y') dy' \\ &= \int_{[0,1)} f(y')g(x-y') dy' = (g * f)(x). \end{aligned}$$

Τα [3], [4] είναι τελείως στοιχειώδη. Η απόδειξη του [2] μπορεί να παρουσιάσει κάποια δυσκολία και αφήνεται στον αναγνώστη. \square

Παράδειγμα. Θεωρούμε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ την 1-περιοδική συνάρτηση $e_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$e_n(x) = e^{2\pi i n x} = \cos(2\pi n x) + i \sin(2\pi n x).$$

Είναι γνωστό ότι

$$\int_{[0,1)} e_n(x) dx = \int_{[0,1)} e^{2\pi i n x} dx = \int_{[0,1)} \cos(2\pi n x) dx + i \int_{[0,1)} \sin(2\pi n x) dx = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 0 \\ 0, & \text{αν } n \neq 0 \end{cases}$$

Συνεπάγεται

$$\int_{[0,1)} e_n(x) \overline{e_m(x)} dx = \int_{[0,1)} e^{2\pi i n x} e^{-2\pi i m x} dx = \int_{[0,1)} e^{2\pi i (n-m)x} dx = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = m \\ 0, & \text{αν } n \neq m \end{cases}$$

Τώρα θα υπολογίσουμε τις συνελίξεις $e_n * e_m$.

$$\begin{aligned} (e_n * e_m)(x) &= \int_{[0,1)} e_n(x-y) e_m(y) dy = \int_{[0,1)} e^{2\pi i n(x-y)} e^{2\pi i m y} dy = e^{2\pi i n x} \int_{[0,1)} e^{2\pi i (m-n)y} dy \\ &= \begin{cases} e^{2\pi i n x}, & \text{αν } n = m \\ 0, & \text{αν } n \neq m \end{cases} = \begin{cases} e_n(x), & \text{αν } n = m \\ 0, & \text{αν } n \neq m \end{cases} \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$e_n * e_m = 0, \quad \text{αν } n \neq m, \quad e_n * e_n = e_n.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα οποιονδήποτε γραμμικό συνδυασμό των συναρτήσεων e_n . Δηλαδή συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{k=m}^n a_k e_k(x) = \sum_{k=m}^n a_k e^{2\pi i k x}.$$

Κάθε τέτοια συνάρτηση χαρακτηρίζεται **εκθετικό πολυώνυμο**. Προσέξτε: οι m, n είναι ακέραιοι και $-\infty < m \leq n < +\infty$.

Ας θεωρήσουμε και ένα άλλο τέτοιο εκθετικό πολυώνυμο $g(x) = \sum_{k=m}^n b_k e_k(x)$. Τότε, βάσει των ιδιοτήτων στην Πρόταση 1.30,

$$f * g = \left(\sum_{k=m}^n a_k e_k \right) * \left(\sum_{l=m}^n b_l e_l \right) = \sum_{k=m}^n \sum_{l=m}^n a_k b_l e_k * e_l = \sum_{k=m}^n a_k b_k e_k.$$

Δηλαδή η $f * g$ είναι ένα νέο εκθετικό πολυώνυμο, του οποίου οι συντελεστές είναι τα γινόμενα των αντίστοιχων συντελεστών των εκθετικών πολυωνύμων f, g .

Πρόταση 1.31. Ο χώρος $L^1([0, 1))$ με τις γνωστές πράξεις πρόσθεση και πολλαπλασιασμός με αριθμό, με την 1-νόρμα και με την πράξη συνέλιξη είναι μια μεταθετική άλγεβρα Banach (επί του \mathbb{C}).

Απόδειξη. Όλα έχουν αποδειχθεί. \square

Λήμμα 1.4. Η συνάρτηση $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$k(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$

είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

Απόδειξη. Είναι τελείως προφανές ότι η k είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ και $k^{(n)}(x) = 0$ για κάθε n και κάθε $x < 0$.

Επίσης, είναι εύκολο να δει κανείς ότι η k είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ότι

$$k^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{για } x > 0$$

για κάθε n , όπου το P_n είναι κάποιο πολυώνυμο βαθμού $2n$.

Αυτό θα το δούμε επαγωγικά.

Για $n = 1$, έχουμε $k^{(1)}(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = P_1(x)e^{-\frac{1}{x}}$ για $x > 0$, όπου $P_1(t) = t^2$ είναι πολυώνυμο βαθμού 2.

Εστω ότι για κάποιο n είναι $k^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ για $x > 0$, όπου P_n είναι κάποιο πολυώνυμο βαθμού $2n$.

Τότε

$$k^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{για } x > 0,$$

όπου $P_{n+1}(t) = -t^2P_n'(t) + t^2P_n(t)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $2(n+1)$.

Τώρα θα δούμε ότι

$$k^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$

για κάθε n .

Αυτό έχει ήδη αποδειχθεί για $x < 0$ και $x > 0$, οπότε μένει η περίπτωση $x = 0$. Και αυτό θα αποδειχθεί επαγωγικά.

Για $n = 1$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{k(x) - k(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{k(x) - k(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{k(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} = 0.$$

Αρα $k^{(1)}(0) = 0$. Τώρα, έστω $k^{(n)}(0) = 0$ για κάποιο n . Τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{k^{(n)}(x) - k^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{k^{(n)}(x) - k^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{k^{(n)}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} = 0.$$

Αρα $k^{(n+1)}(0) = 0$. □

Λήμμα 1.5. Θεωρούμε τη συνάρτηση $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ του προηγούμενου λήμματος και ορίζουμε τη συνάρτηση $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$\psi(x) = k(1 - x^2).$$

Η ψ έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $\psi(x) > 0$ για $x \in (-1, 1)$ και $\psi(x) = 0$ για $x \notin (-1, 1)$.

(ii) Η ψ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

(iii) Η ψ είναι άρτια.

Επίσης, υπάρχει κατάλληλη σταθερά $c > 0$ ώστε η συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$\phi(x) = c\psi(x) = ck(1 - x^2)$$

να έχει τις ιδιότητες (i), (ii), (iii) και την

(iv) $\int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx = 1$.

Απόδειξη. Τα (i), (iii) είναι προφανή. Το (ii) προκύπτει επειδή η ϕ είναι σύνθεση δυο συναρτήσεων που είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} .

Επειδή $\int_{\mathbb{R}} \psi > 0$, θέτουμε $c = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} \psi} > 0$ και τότε η συνάρτηση $\phi = c\psi$ έχει

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx = c \int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 1.$$

□

Σχόλια. [1] Δεν είναι καθόλου εύκολο να κατασκευαστεί με κάποιο προφανή τρόπο μια συνάρτηση, όπως η ϕ , η οποία μηδενίζεται έξω από ένα διάστημα, είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και δεν μηδενίζεται ταυτοτικά στο \mathbb{R} .

[2] Ας θεωρήσουμε, για $t > 0$, τη συνάρτηση $\phi_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$\phi_t(x) = \frac{1}{t} \phi_t(\phi)(x) = \frac{1}{t} \phi\left(\frac{x}{t}\right).$$

Τότε

(i) $\phi_t(x) > 0$ για $x \in (-t, t)$ και $\phi_t(x) = 0$ για $x \notin (-t, t)$.

(ii) Η ϕ_t είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

(iii) Η ϕ_t είναι άρτια.

(iv) $\int_{\mathbb{R}} \phi_t(x) dx = 1$.

Πράγματι, $\int_{\mathbb{R}} \phi_t(x) dx = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{x}{t}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx = 1$.

Ορισμός. Χρησιμοποιούμε τα σύμβολα

$$C^k(\mathbb{R}), \quad C_c^k(\mathbb{R})$$

το μεν πρώτο για το σύνολο όλων των μιγαδικών συναρτήσεων οι οποίες είναι k φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} το δε δεύτερο για το σύνολο όλων των μιγαδικών συναρτήσεων οι οποίες είναι k φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} και μηδενίζονται έξω από κάποιο φραγμένο διάστημα.

Χρησιμοποιούμε τα σύμβολα

$$C^\infty(\mathbb{R}), \quad C_c^\infty(\mathbb{R})$$

το μεν πρώτο για το σύνολο όλων των μιγαδικών συναρτήσεων οι οποίες είναι άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} το δε δεύτερο για το σύνολο όλων των μιγαδικών συναρτήσεων οι οποίες είναι άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} και μηδενίζονται έξω από κάποιο φραγμένο διάστημα.

Χάριν ομοιομορφίας, χρησιμοποιούμε τα σύμβολα

$$C(\mathbb{R}) = C^0(\mathbb{R}), \quad C_c(\mathbb{R}) = C_c^0(\mathbb{R})$$

το μεν πρώτο για το σύνολο όλων των μιγαδικών συναρτήσεων οι οποίες είναι συνεχείς στο \mathbb{R} το δε δεύτερο για το σύνολο όλων των μιγαδικών συναρτήσεων οι οποίες είναι συνεχείς στο \mathbb{R} και μηδενίζονται έξω από κάποιο φραγμένο διάστημα.

Παραδείγματα. [1] Τα πολυώνυμα, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\sin x$, $\cos x$ και οι συναρτήσεις $e^{\pm x}$, $e^{\pm x^2}$ ανήκουν στον χώρο $C^\infty(\mathbb{R})$.

[2] Η συνάρτηση ϕ του Λήμματος 1.5 ανήκει στον χώρο $C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Σχόλιο. Όλοι οι χώροι $C^k(\mathbb{R})$, $C_c^k(\mathbb{R})$, $C^\infty(\mathbb{R})$, $C_c^\infty(\mathbb{R})$ είναι γραμμικοί χώροι επί του \mathbb{C} .

Αν $\lambda \in \mathbb{C}$ και οι f, g είναι k φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} , τότε το ίδιο ισχύει και για τις $f + g$, λf . Επιπλέον, αν η f μηδενίζεται έξω από το διάστημα $[a, b]$, τότε το ίδιο ισχύει και για την λf . Αν και η g μηδενίζεται έξω από το διάστημα $[c, d]$, τότε η $f + g$ μηδενίζεται έξω από οποιοδήποτε διάστημα το οποίο περιέχει το $[a, b]$ και το $[c, d]$, για παράδειγμα έξω από το $[k, l]$, όπου $k = \min\{a, c\}$ και $l = \max\{b, d\}$.

Πρόταση 1.32. [1] Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ και g ολοκληρώσιμη σε κάθε φραγμένο διάστημα και σ.π. φραγμένη. Τότε η $f * g$ ορίζεται (παντού) και είναι φραγμένη στο \mathbb{R} .

[2] Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ και g συνεχής και φραγμένη στο \mathbb{R} . Τότε η $f * g$ ορίζεται (παντού) και είναι συνεχής και φραγμένη στο \mathbb{R} .

[3] Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ και g παραγωγίσιμη και φραγμένη στο \mathbb{R} και έστω ότι η g' είναι φραγμένη στο \mathbb{R} . Τότε η $f * g$ είναι παραγωγίσιμη και φραγμένη στο \mathbb{R} και η $(f * g)'$ είναι φραγμένη στο \mathbb{R} και ισχύει

$$(f * g)' = f * g'.$$

Αν, επιπλέον, η g' είναι συνεχής στο \mathbb{R} , τότε η $(f * g)'$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

[4] Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Αν η f μηδενίζεται σ.π. έξω από ένα διάστημα $[a, b]$ και η g μηδενίζεται σ.π.

έξω από ένα διάστημα $[c, d]$, τότε η $f * g$ μηδενίζεται (παντού) έξω από το $[a + c, b + d]$.

[5] Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ και $g \in C_c^k(\mathbb{R})$. Τότε $f * g \in C^k(\mathbb{R})$ και

$$(f * g)^{(k)} = f * g^{(k)}.$$

Αν, επιπλέον, η f μηδενίζεται σ.π. έξω από ένα διάστημα, τότε $f * g \in C_c^k(\mathbb{R})$.

Αυτά ισχύουν και στην περίπτωση $k = \infty$.

Απόδειξη. [1] Έστω $|g| \leq M$ σ.π. Θεωρούμε για κάθε n τη συνάρτηση $g_n = \chi_{[-n, n]}g$. Τότε, από την υπόθεση, κάθε g_n είναι ολοκληρώσιμη και $g_n \rightarrow g$ σ.π. Επειδή, για κάθε x , η $f(x - y)$ (με μεταβλητή y) είναι ολοκληρώσιμη, από την Πρόταση 1.14 συνεπάγεται ότι η $f(x - y)g(y)$ (με μεταβλητή y) είναι ολοκληρώσιμη. Άρα για κάθε x ορίζεται ο αριθμός $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) dy$ και

$$|(f * g)(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) dy \right| \leq M \int_{\mathbb{R}} |f(x - y)| dy = M \|f\|_1.$$

[2] Επειδή η g είναι συνεχής, συνεπάγεται ότι είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε φραγμένο διάστημα. Από το [1] έχουμε ότι η $f * g$ ορίζεται (παντού) και είναι φραγμένη στο \mathbb{R} . Άρα μένει να αποδείξουμε ότι είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

Έστω τυχόν x και ακολουθία (x_n) ώστε $x_n \rightarrow x$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $(f * g)(x_n) \rightarrow (f * g)(x)$.

Ισχύει $|g| \leq M$ (η g είναι φραγμένη) οπότε $|g(x_n - y)f(y)| \leq M|f(y)|$ για σ.κ. y για κάθε n και η συνάρτηση (του y) $M|f(y)|$ είναι ολοκληρώσιμη. Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης συνεπάγεται η παρακάτω εναλλαγή ορίων:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (f * g)(x_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} g(x_n - y)f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n - y)f(y) \right) dy = \int_{\mathbb{R}} g(x - y)f(y) dy = (f * g)(x), \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $g(x_n - y) \rightarrow g(x - y)$ λόγω συνέχειας της g .

[3] Η g είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) και φραγμένη στο \mathbb{R} , οπότε από το [2] η $f * g$ ορίζεται (παντού) και είναι συνεχής και φραγμένη στο \mathbb{R} . Αν αποδείξουμε ότι η $f * g$ είναι παραγωγίσιμη και $(f * g)' = f * g'$ στο \mathbb{R} , τότε, επειδή η g' είναι φραγμένη, από το [1] συνεπάγεται ότι η $f * g'$ και, επομένως, και η $(f * g)'$ είναι φραγμένη στο \mathbb{R} . Επίσης, αν η g' είναι και συνεχής στο \mathbb{R} , τότε από το [2] συνεπάγεται ότι η $f * g'$ και, επομένως, και η $(f * g)'$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

Άρα μένει να αποδείξουμε ότι η $f * g$ είναι παραγωγίσιμη και $(f * g)' = f * g'$ στο \mathbb{R} .

Έστω τυχόν x και ακολουθία (x_n) ώστε $x_n \rightarrow x$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{(f * g)(x_n) - (f * g)(x)}{x_n - x} \rightarrow (f * g')(x).$$

Επειδή η g' είναι φραγμένη, ισχύει

$$\left| \frac{g(x_n - y) - g(x - y)}{x_n - x} f(y) \right| = |g'(\xi)f(y)| \leq N|f(y)|$$

για σ.κ. y , λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής, όπου ο ξ είναι αριθμός ανάμεσα στους $x_n - y$, $x - y$. Η συνάρτηση (του y) $N|f(y)|$ είναι ολοκληρώσιμη, οπότε από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης συνεπάγεται η παρακάτω εναλλαγή ορίων:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(f * g)(x_n) - (f * g)(x)}{x_n - x} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{g(x_n - y) - g(x - y)}{x_n - x} f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{g(x_n - y) - g(x - y)}{x_n - x} f(y) \right) dy = \int_{\mathbb{R}} g'(x - y)f(y) dy = (f * g')(x), \end{aligned}$$

[4] Έστω x έξω από το $[a + c, b + d]$. Η συνάρτηση (του y) $f(x - y)$ μηδενίζεται σ.π. έξω από το διάστημα $[x - b, x - a]$ και η $g(y)$ μηδενίζεται σ.π. έξω από το $[c, d]$. Παρατηρούμε ότι, λόγω της υπόθεσης για το x ,

τα δυο αυτά διαστήματα είναι ξένα, οπότε η συνάρτηση (του y) $f(x - y)g(y)$ μηδενίζεται σ.π. στο \mathbb{R} . Άρα $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) dy = 0$.

[5] Αποδεικνύεται με επαγωγικό τρόπο χρησιμοποιώντας τα [1] έως [4]. □

Πριν προχωρήσουμε, θα δούμε μερικές απλές σχέσεις ανάμεσα σε μια συνάρτηση και στις μεταφορές $\mu_h(f)$ της f κατά h . Θυμόμαστε τον ορισμό $\mu_h(f)(x) = f(x - h)$.

(i) Για συναρτήσεις f, g και αριθμό λ ,

$$\mu_h(f + g) = \mu_h(f) + \mu_h(g) \quad \text{και} \quad \mu_h(\lambda f) = \lambda \mu_h(f).$$

Πράγματι, $\mu_h(f + g)(x) = (f + g)(x - h) = f(x - h) + g(x - h) = \mu_h(f)(x) + \mu_h(g)(x)$ και $\mu_h(\lambda f)(x) = (\lambda f)(x - h) = \lambda f(x - h) = \lambda \mu_h(f)(x)$.

(ii) Επίσης

$$\int_{\mathbb{R}} \mu_h(f) = \int_{\mathbb{R}} f \quad \text{και} \quad \int_{\mathbb{R}} |\mu_h(f)| = \int_{\mathbb{R}} |f| \quad \text{ισοδ.} \quad \|\mu_h(f)\|_1 = \|f\|_1.$$

Αυτά τα έχουμε ήδη αποδείξει.

Πρόταση 1.33. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Τότε

$$\mu_h(f) \rightarrow f \quad \text{στον} \quad L^1(\mathbb{R}) \quad \text{όταν} \quad h \rightarrow 0.$$

Απόδειξη. Έστω η χαρακτηριστική συνάρτηση χ_I ενός διαστήματος $I = (a, b)$.

Τότε $\mu_h(\chi_I) = \chi_{I+h}$, όπου $I + h = (a + h, b + h)$. Άρα, όταν το h είναι πολύ μικρό και > 0 , η συνάρτηση $|\chi_{I+h} - \chi_I|$ είναι σταθερή 1 στα διαστήματα $(a, a + h]$ και $[b, b + h)$ και σταθερή 0 έξω από αυτά. Ομοίως, αν το h είναι πολύ μικρό και < 0 , η συνάρτηση $|\chi_{I+h} - \chi_I|$ είναι σταθερή 1 στα διαστήματα $(a + h, a]$ και $[b + h, b)$ και σταθερή 0 έξω από αυτά. Άρα, όταν το h είναι πολύ μικρό,

$$\|\mu_h(\chi_I) - \chi_I\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |\chi_{I+h} - \chi_I| = 2|h|$$

και, επομένως,

$$\|\mu_h(\chi_I) - \chi_I\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{όταν} \quad h \rightarrow 0.$$

Το ίδιο ισχύει και σε κάθε άλλη περίπτωση φραγμένου διαστήματος I .

Κατόπιν, έστω κλιμακωτή συνάρτηση ϕ .

Τότε η ϕ γράφεται $\phi = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{I_k}$, για κάποιους αριθμούς c_1, \dots, c_n και κάποια διαστήματα I_1, \dots, I_n . Τότε

$$\mu_h(\phi) = \sum_{k=1}^n c_k \mu_h(\chi_{I_k}),$$

οπότε

$$\begin{aligned} \|\mu_h(\phi) - \phi\|_1 &= \left\| \sum_{k=1}^n c_k \mu_h(\chi_{I_k}) - \sum_{k=1}^n c_k \chi_{I_k} \right\|_1 = \left\| \sum_{k=1}^n c_k (\mu_h(\chi_{I_k}) - \chi_{I_k}) \right\|_1 \\ &\leq \sum_{k=1}^n |c_k| \|\mu_h(\chi_{I_k}) - \chi_{I_k}\|_1. \end{aligned}$$

Τώρα, επειδή από την προηγούμενη περίπτωση έχουμε $\|\mu_h(\chi_{I_k}) - \chi_{I_k}\|_1 \rightarrow 0$ όταν $h \rightarrow 0$, συνεπάγεται

$$\|\mu_h(\phi) - \phi\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{όταν} \quad h \rightarrow 0.$$

Τώρα, στη γενική περίπτωση, έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Από την Πρόταση 1.11 συνεπάγεται ότι υπάρχει κλιμακωτή συνάρτηση ϕ ώστε

$$\|\phi - f\|_1 < \frac{\epsilon}{3}.$$

Από τα παραπάνω συνεπάγεται για την ϕ ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$\|\mu_h(\phi) - \phi\|_1 < \frac{\epsilon}{3}$$

όταν $|h| < \delta$. Τότε, αν $|h| < \delta$,

$$\begin{aligned} \|\mu_h(f) - f\|_1 &\leq \|\mu_h(f) - \mu_h(\phi)\|_1 + \|\mu_h(\phi) - \phi\|_1 + \|\phi - f\|_1 \\ &= \|\mu_h(f - \phi)\|_1 + \|\mu_h(\phi) - \phi\|_1 + \|\phi - f\|_1 \\ &= \|f - \phi\|_1 + \|\mu_h(\phi) - \phi\|_1 + \|\phi - f\|_1 < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Άρα

$$\|\mu_h(f) - f\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{όταν } h \rightarrow 0.$$

□

Τώρα, όπως κάναμε και με τις μεταφορές μιας συνάρτησης, θα δούμε μερικές απλές σχέσεις ανάμεσα σε μια συνάρτηση και στις ομοιόθετες $o_t(f)$ της f κατά $t \neq 0$. Ο ορισμός είναι $o_t(f)(x) = f(\frac{x}{t})$.

(i) Για συναρτήσεις f, g και αριθμό λ ,

$$o_t(f + g) = o_t(f) + o_t(g) \quad \text{και} \quad o_t(\lambda f) = \lambda o_t(f).$$

Πράγματι, $o_t(f + g)(x) = (f + g)(\frac{x}{t}) = f(\frac{x}{t}) + g(\frac{x}{t}) = o_t(f)(x) + o_t(g)(x)$ και $o_t(\lambda f)(x) = (\lambda f)(\frac{x}{t}) = \lambda f(\frac{x}{t}) = \lambda o_t(f)(x)$.

(ii) Επίσης

$$\int_{\mathbb{R}} o_t(f) = |t| \int_{\mathbb{R}} f \quad \text{και} \quad \int_{\mathbb{R}} |o_t(f)| = |t| \int_{\mathbb{R}} |f| \quad \text{ισοδ.} \quad \|o_t(f)\|_1 = |t| \|f\|_1.$$

Αυτά αποδεικνύονται με απλές αλλαγές στα ολοκληρώματα.

Πρόταση 1.34. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $\phi_t(x) = \frac{1}{t} \phi(\frac{x}{t})$ ($t > 0$), οι οποίες ορίστηκαν στο δεύτερο σχόλιο μετά από το Λήμμα 1.5.

Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ η οποία μηδενίζεται έξω από κάποιο διάστημα $[a, b]$. Τότε η $f * \phi_t$ μηδενίζεται έξω από το διάστημα $[a - t, b + t]$, είναι $f * \phi_t \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ και

$$f * \phi_t \rightarrow f \quad \text{στον } L^1(\mathbb{R}) \quad \text{όταν } t \rightarrow 0+.$$

Απόδειξη. Επειδή $\phi_t \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, συνεπάγεται από την Πρόταση 1.32 ότι $f * \phi_t \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Πάλι από την Πρόταση 1.32, επειδή η f μηδενίζεται έξω από το $[a, b]$ και η ϕ_t μηδενίζεται έξω από το $[-t, t]$, η $f * \phi_t$ μηδενίζεται έξω από το $[a - t, b + t]$.

Τέλος, για σ.κ. x , επειδή $\int_{\mathbb{R}} \phi_t(y) dy = 1$,

$$(f * \phi_t)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y) \phi_t(y) dy - f(x) \int_{\mathbb{R}} \phi_t(y) dy = \int_{\mathbb{R}} (f(x - y) - f(x)) \phi_t(y) dy.$$

Άρα, επειδή $\phi_t(y) \geq 0$,

$$|(f * \phi_t)(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x - y) - f(x)| \phi_t(y) dy = \int_{\mathbb{R}} |\mu_y(f)(x) - f(x)| \phi_t(y) dy.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\|f * \phi_t - f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |(f * \phi_t)(x) - f(x)| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\mu_y(f)(x) - f(x)| \phi_t(y) dy \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mu_y(f)(x) - f(x) \phi_t(y) dx \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mu_y(f)(x) - f(x) dx \right) \phi_t(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \|\mu_y(f) - f\|_1 \phi_t(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \|\mu_y(f) - f\|_1 \frac{1}{t} \phi\left(\frac{y}{t}\right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \|\mu_{ty}(f) - f\|_1 \phi(y) dy.
\end{aligned}$$

Τώρα, έστω $t_n \rightarrow 0 +$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\|f * \phi_{t_n} - f\|_1 \rightarrow 0$ και, επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\int_{\mathbb{R}} \|\mu_{t_n y}(f) - f\|_1 \phi(y) dy \rightarrow 0$.

Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$|\|\mu_{t_n y}(f) - f\|_1 \phi(y)| \leq (\|\mu_{t_n y}(f)\|_1 + \|f\|_1) \phi(y) = 2\|f\|_1 \phi(y)$$

για κάθε n και ότι η συνάρτηση $2\|f\|_1 \phi(y)$ είναι ολοκληρώσιμη. Άρα από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε την παρακάτω εναλλαγή ορίων:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \|\mu_{t_n y}(f) - f\|_1 \phi(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mu_{t_n y}(f) - f\|_1 \phi(y) \right) dy = \int_{\mathbb{R}} 0 \phi(y) dy = 0.$$

□

Ορισμός. Έστω γραμμικός χώρος με νόρμα X και $A \subseteq X$. Λέμε ότι το A είναι **πυκνό** στον X αν για κάθε $x \in X$ και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $\|x - a\| < \epsilon$. Δηλαδή, το A είναι πυκνό στον X αν κάθε στοιχείο του X μπορεί να προσεγγιστεί απεριόριστα με στοιχεία του υποσυνόλου A .

Σχόλιο. Λόγω της Πρότασης 1.11, συμπεραίνουμε ότι το σύνολο όλων των κλιμακωτών συναρτήσεων αποτελεί υποσύνολο του $L^1(\mathbb{R})$ το οποίο είναι πυκνό στον $L^1(\mathbb{R})$.

Πρόταση 1.35. Ο χώρος $C_c^\infty(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $L^1(\mathbb{R})$.

Απόδειξη. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ και $\epsilon > 0$.

Υπάρχει κλιμακωτή συνάρτηση χ ώστε

$$\|\chi - f\|_1 < \frac{\epsilon}{2}.$$

Η χ είναι ολοκληρώσιμη και μηδενίζεται έξω από κάποιο φραγμένο διάστημα. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.34, υπάρχει $t > 0$ ώστε

$$\|\chi * \phi_t - \chi\|_1 < \frac{\epsilon}{2}.$$

Τότε $\chi * \phi_t \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ και

$$\|\chi * \phi_t - f\|_1 \leq \|\chi * \phi_t - \chi\|_1 + \|\chi - f\|_1 < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Σχόλιο. Είπαμε σε κάποιο προηγούμενο σχόλιο ότι δεν είναι προφανές πώς φτιάχνουμε μια μη-μηδενική συνάρτηση στον $C_c^\infty(\mathbb{R})$. Βλέπουμε, όμως, τώρα ότι παρά αυτή τη δυσκολία να βρούμε συγκεκριμένες συναρτήσεις στον $C_c^\infty(\mathbb{R})$, ο χώρος $C_c^\infty(\mathbb{R})$ είναι τόσο μεγάλος ώστε είναι πυκνός στον $L^1(\mathbb{R})$.

Ορισμός. Ένας γραμμικός χώρος με νόρμα X χαρακτηρίζεται **διαχωρίσιμος** αν υπάρχει κάποιο υποσύνολό του το οποίο είναι πυκνό στον X και αριθμήσιμο.

Πρόταση 1.36. Ο $L^1(\mathbb{R})$ είναι διαχωρίσιμος.

Απόδειξη. Έστω διάστημα $I = [a, b]$ και η χαρακτηριστική συνάρτηση χ_I .

Έστω $\epsilon > 0$. Βρίσκουμε ρητούς αριθμούς r, s ώστε $|r - a| < \frac{\epsilon}{2}$ και $|s - b| < \frac{\epsilon}{2}$. Τότε, αν ορίσουμε $J = [r, s]$, έχουμε

$$\|\chi_J - \chi_I\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |\chi_J - \chi_I| = |r - a| + |s - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Κατόπιν, έστω κλιμακωτή συνάρτηση ϕ .

Τότε υπάρχουν αριθμοί c_1, \dots, c_n και διαστήματα I_1, \dots, I_n ώστε $\phi = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{I_k}$.

Έστω $\epsilon > 0$. Θεωρούμε έναν αριθμό M , προσωρινά άγνωστο, που θα τον καθορίσουμε σε λίγο. Για κάθε k υπάρχει ρητός d_k ώστε $|d_k - c_k| < \frac{\epsilon}{M}$ και, βάσει της πρώτης περίπτωσης, υπάρχει διάστημα J_k με ρητά άκρα ώστε $\|\chi_{J_k} - \chi_{I_k}\|_1 < \frac{\epsilon}{M}$.

Ορίζουμε την κλιμακωτή συνάρτηση $\psi = \sum_{k=1}^n d_k \chi_{J_k}$ και έχουμε

$$\begin{aligned} \|\psi - \phi\|_1 &\leq \left\| \sum_{k=1}^n d_k \chi_{J_k} - \sum_{k=1}^n d_k \chi_{I_k} \right\|_1 + \left\| \sum_{k=1}^n d_k \chi_{I_k} - \sum_{k=1}^n c_k \chi_{I_k} \right\|_1 \\ &\leq \sum_{k=1}^n |d_k| \|\chi_{J_k} - \chi_{I_k}\|_1 + \sum_{k=1}^n |d_k - c_k| \|\chi_{I_k}\|_1 \\ &\leq \frac{\epsilon}{M} \sum_{k=1}^n |d_k| + \frac{\epsilon}{M} \sum_{k=1}^n \|\chi_{I_k}\|_1 \\ &\leq \frac{\epsilon}{M} \sum_{k=1}^n (|d_k - c_k| + |c_k|) + \frac{\epsilon}{M} \sum_{k=1}^n l(I_k) \\ &\leq \frac{\epsilon}{M} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\epsilon}{M} + |c_k| \right) + \frac{\epsilon}{M} \sum_{k=1}^n l(I_k). \end{aligned}$$

Σ' αυτό το σημείο, επιλέγουμε τον M αρκετά μεγάλο ώστε να είναι $M > \epsilon$ και $M > \sum_{k=1}^n (1 + |c_k| + l(I_k))$. Τότε, με μια τέτοια επιλογή, θα είναι

$$\|\psi - \phi\|_1 \leq \frac{\epsilon}{M} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\epsilon}{M} + |c_k| \right) + \frac{\epsilon}{M} \sum_{k=1}^n l(I_k) < \frac{\epsilon}{M} \sum_{k=1}^n (1 + |c_k| + l(I_k)) < \epsilon.$$

Τώρα στη γενική περίπτωση, έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει κλιμακωτή συνάρτηση ϕ ώστε

$$\|\phi - f\|_1 < \frac{\epsilon}{2}.$$

Από την προηγούμενη περίπτωση, υπάρχει κλιμακωτή συνάρτηση τύπου $\psi = \sum_{k=1}^n d_k \chi_{J_k}$ με ρητούς συντελεστές d_1, \dots, d_n και με διαστήματα J_1, \dots, J_n με ρητά άκρα ώστε

$$\|\psi - \phi\|_1 < \frac{\epsilon}{2}.$$

Συνεπάγεται

$$\|\psi - f\|_1 \leq \|\psi - \phi\|_1 + \|\phi - f\|_1 < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Τώρα ορίζουμε A να είναι το σύνολο όλων των κλιμακωτών συναρτήσεων τύπου $\psi = \sum_{k=1}^n d_k \chi_{J_k}$ με ρητούς συντελεστές d_1, \dots, d_n και με διαστήματα J_1, \dots, J_n με ρητά άκρα.

Το σύνολο A είναι αριθμήσιμο και μόλις είδαμε ότι για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\psi \in A$ ώστε $\|\psi - f\|_1 < \epsilon$. Άρα το A είναι πυκνό στον $L^1(\mathbb{R})$. \square

Θα δούμε τώρα τα ανάλογα των Προτάσεων 1.33, 1.34, 1.35 και 1.36 για τον χώρο των 1-περιοδικών συναρτήσεων οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες στο $[0, 1)$ ή, ισοδύναμα, για τον χώρο $L^1([0, 1))$.

Πρόταση 1.37. Έστω 1-περιοδική f ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$. Τότε για κάθε h η $\mu_h(f)$ είναι 1-περιοδική και ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$ και

$$\mu_h(f) \rightarrow f \text{ στον } L^1([0, 1)) \quad \text{όταν } h \rightarrow 0.$$

Απόδειξη. Είναι

$$\mu_h(f)(x+1) = f(x+1-h) = f(x-h) = \mu_h(f)(x) \text{ για σ.κ. } x.$$

Άρα η $\mu_h(f)$ είναι 1-περιοδική.

Επίσης, για οποιοδήποτε φραγμένο διάστημα I , είναι απλό να δει κανείς ότι

$$\chi_I \mu_h(f) = \mu_h(\chi_{I-h} f).$$

Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$, οπότε είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε φραγμένο διάστημα και, επομένως, και στο $I-h$. Άρα η $\chi_{I-h} f$ είναι ολοκληρώσιμη. Άρα η $\mu_h(\chi_{I-h} f)$ είναι κι αυτή ολοκληρώσιμη, οπότε και η $\chi_I \mu_h(f)$ είναι ολοκληρώσιμη. Επομένως, η $\mu_h(f)$ είναι ολοκληρώσιμη στο I .

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F = \chi_{[-1, 2]} f.$$

Η F είναι ολοκληρώσιμη και, από την Πρόταση 1.33, $\mu_h(F) \rightarrow F$ στον $L^1(\mathbb{R})$ όταν $h \rightarrow 0$. Επειδή

$$\int_{[0, 1)} |\mu_h(F) - F| \leq \int_{\mathbb{R}} |\mu_h(F) - F|,$$

συνεπάγεται ότι $\mu_h(F) \rightarrow F$ στον $L^1([0, 1))$ όταν $h \rightarrow 0$.

Τώρα, παρατηρούμε ότι $F = f$ στο $[0, 1)$ καθώς και ότι, αν $|h| < 1$, τότε $\mu_h(F) = \mu_h(f)$ στο $[0, 1)$. Άρα $\mu_h(f) \rightarrow f$ στον $L^1([0, 1))$ όταν $h \rightarrow 0$. \square

Πρόταση 1.38. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $\phi_t(x) = \frac{1}{t} \phi(\frac{x}{t})$ ($t > 0$), οι οποίες ορίστηκαν στο δεύτερο σχόλιο μετά από το Λήμμα 1.5.

Έστω 1-περιοδική f ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$. Τότε η

$$(f * \phi_t)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \phi_t(y) dy$$

είναι 1-περιοδική, ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$ και $f * \phi_t \in C^\infty(\mathbb{R})$. Επίσης,

$$f * \phi_t \rightarrow f \text{ στον } L^1([0, 1)) \quad \text{όταν } t \rightarrow 0+.$$

Απόδειξη. Περίπου όπως στην απόδειξη της Πρότασης 1.37, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F = \chi_{(-2t, 1+2t)} f.$$

Η F είναι ολοκληρώσιμη και μηδενίζεται έξω από το διάστημα $(-2t, 1+2t)$, οπότε από την Πρόταση 1.32 συνεπάγεται ότι η $F * \phi_t$ ορίζεται παντού στο \mathbb{R} και $F * \phi_t \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Τώρα παρατηρούμε ότι, για $x \in (-t, 1+t)$, ισχύει $F(x-y) \phi_t(y) = f(x-y) \phi_t(y)$ για σ.κ. y (στο \mathbb{R}). Πράγματι, αν $|y| \geq t$, τότε $\phi_t(y) = 0$, οπότε η ισότητα είναι προφανής και, αν $|y| < t$, τότε $x-y \in (-2t, 1+2t)$, οπότε $F(x-y) = f(x-y)$, οπότε η ισότητα είναι και πάλι προφανής.

Επομένως, επειδή η $F(x-y) \phi_t(y)$ (με μεταβλητή y) είναι ολοκληρώσιμη, συνεπάγεται ότι για $x \in (-t, 1+t)$ και η $f(x-y) \phi_t(y)$ (με μεταβλητή y) είναι ολοκληρώσιμη, οπότε ορίζεται η $(f * \phi_t)(x)$ και

$$(f * \phi_t)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \phi_t(y) dy = \int_{\mathbb{R}} F(x-y) \phi_t(y) dy = (F * \phi_t)(x) \quad \text{για κάθε } x \in (-t, 1+t).$$

Ειδικότερα, η $(f * \phi_t)(x)$ ορίζεται για κάθε $x \in [0, 1)$. Επειδή η f είναι 1-περιοδική, ισχύει $f(x+n-y)\phi_t(y) = f(x-y)\phi_t(y)$ για σ.κ. y , οπότε η $(f * \phi_t)(x+n)$ ορίζεται για κάθε $x \in [0, 1)$ και κάθε ακέραιο n και

$$(f * \phi_t)(x+n) = \int_{\mathbb{R}} f(x+n-y)\phi_t(y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\phi_t(y) dy = (f * \phi_t)(x).$$

Άρα η $f * \phi_t$ ορίζεται παντού στο \mathbb{R} και είναι 1-περιοδική.

Είδαμε προηγουμένως ότι η $f * \phi_t$ ταυτίζεται με την $F * \phi_t$ στο διάστημα $(-t, 1+t)$ και ότι η $F * \phi_t$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . Άρα η $f * \phi_t$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-t, 1+t)$ και, επειδή είναι 1-περιοδική, είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

Από την Πρόταση 1.34 συνεπάγεται ότι $F * \phi_t \rightarrow F$ στον $L^1(\mathbb{R})$ όταν $t \rightarrow 0+$. Επειδή

$$\int_{[0,1)} |F * \phi_t - F| \leq \int_{\mathbb{R}} |F * \phi_t - F|,$$

συνεπάγεται ότι $F * \phi_t \rightarrow F$ στον $L^1([0, 1))$ όταν $t \rightarrow 0+$. Όμως, είδαμε ότι $f * \phi_t = F * \phi_t$ και $f = F$ στο $[0, 1)$. Άρα $f * \phi_t \rightarrow f$ στον $L^1([0, 1))$ όταν $t \rightarrow 0+$. \square

Σχόλι α. [1] Ένα σχόλιο ανάλογο με το σχόλιο που κάναμε αμέσως μετά την Πρόταση 1.29 και τον επακόλουθο ορισμό.

Η απόδειξη της Πρότασης 1.38 είναι κάπως “σκοτεινή” και αυτό οφείλεται στη χρήση της συνάρτησης F . Αυτό έγινε για να αναχθούμε στην Πρόταση 1.34 (διότι η f δεν είναι ολοκληρώσιμη!). Αν θέλουμε να αποφύγουμε τη χρήση της F , θα πρέπει να αποδείξουμε κατ’ ευθείαν ότι η $f * \phi_t$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και, τώρα, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 1.32 (διότι η f δεν είναι ολοκληρώσιμη!). Άρα πρέπει να αποδείξουμε πρώτα μια παραλλαγή της Πρότασης 1.32 για 1-περιοδικές f ολοκληρώσιμες στο $[0, 1)$. Αυτό γίνεται αλλά είναι φασαρία.

Αξίζει, όμως, να δούμε μια πιο “φωτεινή” απόδειξη του ότι $f * \phi_t \rightarrow f$ στον $L^1([0, 1))$ όταν $t \rightarrow 0+$. Θα μιμηθούμε το αντίστοιχο μέρος της απόδειξης της Πρότασης 1.34.

(Ξεκινάμε με τον ίδιο τρόπο.)

$$(f * \phi_t)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\phi_t(y) dy - f(x) \int_{\mathbb{R}} \phi_t(y) dy = \int_{\mathbb{R}} (f(x-y) - f(x))\phi_t(y) dy.$$

(Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο.) Επειδή $\phi_t(y) \geq 0$,

$$|(f * \phi_t)(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|\phi_t(y) dy = \int_{\mathbb{R}} |\mu_y(f)(x) - f(x)|\phi_t(y) dy.$$

(Τώρα έχουμε τη μοναδική αλλαγή: η 1-νόρμα είναι σε σχέση με το διάστημα $[0, 1)$ και όχι με το \mathbb{R} .)

$$\begin{aligned} \|f * \phi_t - f\|_1 &= \int_{[0,1)} |(f * \phi_t)(x) - f(x)| dx \\ &\leq \int_{[0,1)} \left(\int_{\mathbb{R}} |\mu_y(f)(x) - f(x)|\phi_t(y) dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{[0,1)} |\mu_y(f)(x) - f(x)|\phi_t(y) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{[0,1)} |\mu_y(f)(x) - f(x)| dx \right) \phi_t(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|\mu_y(f) - f\|_1 \phi_t(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|\mu_y(f) - f\|_1 \frac{1}{t} \phi\left(\frac{y}{t}\right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|\mu_{ty}(f) - f\|_1 \phi(y) dy. \end{aligned}$$

(Τα υπόλοιπα είναι ταυτόσημα. Μόνο η 1-νόρμα είναι σε σχέση με το $[0, 1)$ και χρησιμοποιούμε την Πρόταση 1.37 αντί την Πρόταση 1.33.) Έστω $t_n \rightarrow 0 +$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\|f * \phi_{t_n} - f\|_1 \rightarrow 0$ και, επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\int_{\mathbb{R}} \|\mu_{t_n y}(f) - f\|_1 \phi(y) dy \rightarrow 0$.

Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\|\mu_{t_n y}(f) - f\|_1 \phi(y) \leq (\|\mu_{t_n y}(f)\|_1 + \|f\|_1) \phi(y) = 2\|f\|_1 \phi(y)$$

για κάθε n και ότι η συνάρτηση $2\|f\|_1 \phi(y)$ είναι ολοκληρώσιμη. Άρα από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε την παρακάτω εναλλαγή ορίων:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \|\mu_{t_n y}(f) - f\|_1 \phi(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mu_{t_n y}(f) - f\|_1 \phi(y) \right) dy = \int_{\mathbb{R}} 0 \phi(y) dy = 0.$$

[2] Προσέξτε ότι η συνέλιξη $f * \phi_t$ που χρησιμοποιήσαμε στην Πρόταση 1.38 είναι η \mathbb{R} -συνέλιξη και όχι η $[0, 1)$ -συνέλιξη. Είμαστε αναγκασμένοι να το κάνουμε αυτό, διότι η συνάρτηση ϕ_t δεν είναι 1-περιοδική.

Αν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε την $[0, 1)$ -συνέλιξη, πρέπει να περιοριστούμε (αν και δεν είναι απολύτως απαραίτητο) σε $0 < t < \frac{1}{2}$ και, αφού παρατηρήσουμε ότι το διάστημα $(-t, t)$ έξω από το οποίο μηδενίζεται η ϕ_t έχει μήκος < 1 , να θεωρήσουμε την περιοδική επέκταση $\tilde{\phi}_t^p$ της ϕ_t και, κατόπιν, να πάρουμε την

$$(f * \tilde{\phi}_t^p)(x) = \int_{[0,1)} f(x-y) \tilde{\phi}_t^p(y) dy.$$

Τα συμπεράσματα της Πρότασης 1.38 εξακολουθούν να ισχύουν: η $f * \tilde{\phi}_t^p$ είναι 1-περιοδική, ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$ και $f * \tilde{\phi}_t^p \in C^\infty(\mathbb{R})$. Επίσης,

$$f * \tilde{\phi}_t^p \rightarrow f \text{ στον } L^1([0, 1)) \quad \text{όταν } t \rightarrow 0 + .$$

Ορισμός. Θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $C_p^k(\mathbb{R})$ για τον χώρο όλων των 1-περιοδικών συναρτήσεων οι οποίες είναι k φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} . Το k μπορεί να είναι οποιοσδήποτε ακέραιος ≥ 0 ή το ∞ .

Πρόταση 1.39. Ο χώρος $C_p^\infty(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $L^1([0, 1))$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση από την Πρόταση 1.38. □

Πρόταση 1.40. Ο χώρος $L^1([0, 1))$ είναι διαχωρίσιμος.

Απόδειξη. Βασισμένοι στην Πρόταση 1.36, θεωρούμε ένα οποιοδήποτε αριθμήσιμο υποσύνολο A του $L^1(\mathbb{R})$ το οποίο είναι πυκνό στον $L^1(\mathbb{R})$, για παράδειγμα το σύνολο A που είδαμε στην απόδειξη της Πρότασης 1.36: το σύνολο όλων των κλιμακωτών συναρτήσεων τύπου $\psi = \sum_{k=1}^n d_k \chi_{J_k}$ με ρητούς συντελεστές d_1, \dots, d_n και με διαστήματα J_1, \dots, J_n με ρητά άκρα.

Τώρα θεωρούμε ως B το σύνολο όλων των περιορισμών στο $[0, 1)$ των συναρτήσεων-στοιχείων του A . Δηλαδή,

$$B = \{g_{|[0,1)} : g \in A\}.$$

Κάθε $g \in A$ είναι ολοκληρώσιμη (στο \mathbb{R}), οπότε κάθε αντίστοιχη $g_{|[0,1)} \in B$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$. Επομένως, $B \subseteq L^1([0, 1))$.

Τώρα, έστω $f \in L^1([0, 1))$ και $\epsilon > 0$.

Θεωρούμε την επέκταση \tilde{f} της f στο \mathbb{R} , η οποία μηδενίζεται έξω από το $[0, 1)$. Τότε $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$, οπότε υπάρχει $g \in A$ ώστε

$$\|g - \tilde{f}\|_1 < \epsilon.$$

Τότε $g_{|[0,1)} \in B$ και

$$\int_{[0,1)} |g_{|[0,1)} - f| = \int_{[0,1)} |g - \tilde{f}| \leq \int_{\mathbb{R}} |g - \tilde{f}| < \epsilon.$$

Άρα το B είναι πυκνό στον $L^1([0, 1))$ και είναι σαφές ότι το B είναι αριθμήσιμο. □

Με την ίδια ακριβώς απόδειξη, όπου θεωρούμε οποιοδήποτε διάστημα I αντί του $[0, 1)$ μας δίνει ότι Ο χώρος $L^1(I)$ είναι διαχωρίσιμος.

1.9 Ο χώρος $L^2(I)$.

Ορισμός. Μια συνάρτηση f ορισμένη σ.π. στο διάστημα I θα λέμε ότι είναι **μετρήσιμη** στο I αν υπάρχει ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων (ϕ_n) ώστε $\phi_n \rightarrow f$ σ.π. στο I .

Παραδείγματα. [1] Από την Πρόταση 1.11 συνεπάγεται ότι κάθε συνάρτηση ολοκληρώσιμη στο I είναι και μετρήσιμη στο I .

[2] Η σταθερή συνάρτηση 1 είναι μετρήσιμη στο \mathbb{R} και, επομένως, και σε κάθε διάστημα I , αλλά δεν είναι ολοκληρώσιμη στο \mathbb{R} .

Πράγματι, οι κλιμακωτές συναρτήσεις $\chi_{[-n,n]}$ έχουν την ιδιότητα: $\chi_{[-n,n]} \rightarrow 1$ (παντού) στο \mathbb{R} . Διότι, για κάθε x , όταν $n \geq |x|$ συνεπάγεται $\chi_{[-n,n]}(x) = 1$, οπότε $\chi_{[-n,n]}(x) \rightarrow 1$.

Δεν θα μελετήσουμε τις μετρήσιμες συναρτήσεις καθ' εαυτές. Θα χρειαστούμε μόνο λίγες ιδιότητές τους.

Πρόταση 1.41. [1] Έστω f, g μετρήσιμες στο I και αριθμός λ . Τότε οι $f + g, \lambda f, |f|, \max\{f, g\}, \min\{f, g\}$ είναι μετρήσιμες στο I .

Αν, επιπλέον, $f \neq 0$ σ.π. στο I , τότε και η $\frac{1}{f}$ είναι μετρήσιμη στο I .

[2] Έστω ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων (f_n) στο I . Αν $f_n \rightarrow f$ σ.π. στο I , τότε και η f είναι μετρήσιμη στο I .

[3] Αν η f είναι μετρήσιμη στο I και $|f| \leq F$, όπου η F είναι ολοκληρώσιμη στο I , τότε και η f είναι ολοκληρώσιμη στο I .

Απόδειξη. [1] Υπάρχουν ακολουθίες κλιμακωτών συναρτήσεων (ϕ_n) και (ψ_n) ώστε $\phi_n \rightarrow f$ και $\psi_n \rightarrow g$ σ.π. στο I . Τότε $\phi_n + \psi_n \rightarrow f + g, \lambda\phi_n \rightarrow \lambda f, |\phi_n| \rightarrow |f|, \max\{\phi_n, \psi_n\} \rightarrow \max\{f, g\}$ και $\min\{\phi_n, \psi_n\} \rightarrow \min\{f, g\}$ σ.π. στο I . Άρα οι $f + g, \lambda f, |f|, \max\{f, g\}, \min\{f, g\}$ είναι μετρήσιμες στο I .

Τώρα ορίζουμε τις κλιμακωτές συναρτήσεις

$$\chi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\phi_n(x)}, & \text{αν } \phi_n(x) \neq 0 \\ 0, & \text{αν } \phi_n(x) = 0 \end{cases}$$

και βλέπουμε ότι, αν $f \neq 0$ σ.π. στο I , τότε $\chi_n \rightarrow \frac{1}{f}$ σ.π. στο I και, επομένως, η $\frac{1}{f}$ είναι μετρήσιμη στο I .

[2] Θεωρούμε οποιαδήποτε συνάρτηση h η οποία είναι (γνησίως) θετική και ολοκληρώσιμη στο I . Για παράδειγμα την

$$h(x) = \frac{1}{x^2+1},$$

η οποία είναι ολοκληρώσιμη (στο \mathbb{R}) και, επομένως, ολοκληρώσιμη και στο I .

Κατόπιν, ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$g_n = \frac{hf_n}{h+|f_n|}, \quad g = \frac{hf}{h+|f|}.$$

Η h είναι μετρήσιμη (δείτε το παράδειγμα μετά από τον ορισμό της μετρησιμότητας). Άρα, από το [1], κάθε g_n είναι μετρήσιμη, οπότε είναι σ.π. (στο I) όριο κάποιας ακολουθίας κλιμακωτών συναρτήσεων, και ισχύει $|g_n| \leq h$ σ.π. στο I . Από το Θεώρημα 1.2 συνεπάγεται ότι κάθε g_n είναι ολοκληρώσιμη στο I . Τέλος, επειδή (και πάλι) $|g_n| \leq h$ σ.π. στο I αλλά και επειδή $g_n \rightarrow g$ σ.π. στο I , από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης συνεπάγεται ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο I και, επομένως, μετρήσιμη στο I . Τώρα βλέπουμε εύκολα ότι

$$f = \frac{hg}{h-|g|},$$

οπότε, από το [1], και η f είναι μετρήσιμη στο I .

[3] Υπάρχει ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων (ϕ_n) ώστε $\phi_n \rightarrow f$ σ.π. στο I . Το αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 1.2. \square

Ορισμός. Μια (μιγαδική) συνάρτηση η οποία είναι μετρήσιμη στο διάστημα I και είναι τέτοια ώστε η f^2 να είναι ολοκληρώσιμη στο I χαρακτηρίζεται **τετραγωνικά ολοκληρώσιμη** στο I . Το σύνολο όλων των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων στο I συναρτήσεων συμβολίζεται

$$L^2(I)$$

και ονομάζεται **ο χώρος των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων στο I συναρτήσεων**.

Πρόταση 1.42. Ο χώρος $L^2(I)$ είναι γραμμικός χώρος (επί του \mathbb{C}).

Απόδειξη. Έστω $f, g \in L^2(I)$ και αριθμός λ .

Κατ' αρχάς, η $f+g$ είναι μετρήσιμη. Επίσης, $|(f+g)^2| = |f+g|^2 \leq 2|f|^2 + 2|g|^2$ σ.π. στο I και οι $|f|^2 = |f^2|$, $|g|^2 = |g^2|$ είναι ολοκληρώσιμες στο I . Επειδή η $(f+g)^2$ είναι κι αυτή μετρήσιμη στο I , από την Πρόταση 1.41 συνεπάγεται ότι η $(f+g)^2$ είναι ολοκληρώσιμη στο I . Άρα $f+g \in L^2(I)$.

Ομοίως, η λf είναι μετρήσιμη στο I . Επίσης, $|(\lambda f)^2| = |\lambda|^2 |f|^2$ σ.π. στο I και η $|f|^2 = |f^2|$ είναι ολοκληρώσιμη στο I . Επειδή η $(\lambda f)^2$ είναι κι αυτή μετρήσιμη στο I , από την Πρόταση 1.41 συνεπάγεται ότι η $(\lambda f)^2$ είναι ολοκληρώσιμη στο I . Άρα $\lambda f \in L^2(I)$. \square

Πρόταση 1.43. Αν $f, g \in L^2(I)$, τότε $fg \in L^1(I)$.

Απόδειξη. Έστω $f, g \in L^2(I)$. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι $f+g, f-g \in L^2(I)$. Επομένως, $(f+g)^2, (f-g)^2 \in L^1(I)$. Άρα $fg = \frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2 \in L^1(I)$. \square

Ορισμός. Αν $f, g \in L^2(I)$, τότε $f, \bar{g} \in L^2(I)$, οπότε $f\bar{g} \in L^1(I)$. Ορίζουμε **εσωτερικό γινόμενο** των f, g και συμβολίζουμε $\langle f, g \rangle_I$ τον μιγαδικό αριθμό

$$\langle f, g \rangle_I = \int_I f\bar{g}.$$

Αν στην εκάστοτε συζήτηση δεν υπάρχει αμφιβολία για το διάστημα I , τότε θα χρησιμοποιούμε το απλούστερο σύμβολο

$$\langle f, g \rangle$$

αντί του $\langle f, g \rangle_I$.

Η συνάρτηση

$$L^2(I) \times L^2(I) \ni (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \langle f, g \rangle \in \mathbb{C}$$

ονομάζεται **εσωτερικό γινόμενο** στον χώρο $L^2(I)$.

Σχόλιο. Λέμε ότι ο $L^2(I)$ είναι **γραμμικός χώρος (επί του \mathbb{C}) με εσωτερικό γινόμενο**.

Πρόταση 1.44. Το εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(I)$ έχει τις εξής ιδιότητες.

- [1] $\langle f, f \rangle \geq 0$ για κάθε $f \in L^2(I)$. Αν $f \in L^2(I)$, τότε: $\langle f, f \rangle = 0$ αν και μόνο αν $f = 0$ σ.π. στο I .
- [2] $\langle f_1 + f_2, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle$ και $\langle f, g_1 + g_2 \rangle = \langle f, g_1 \rangle + \langle f, g_2 \rangle$ για κάθε $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 \in L^2(I)$.
- [3] $\langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle$ και $\langle f, \lambda g \rangle = \bar{\lambda} \langle f, g \rangle$ για κάθε $f, g \in L^2(I)$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$.
- [4] $\langle g, f \rangle = \overline{\langle f, g \rangle}$ για κάθε $f, g \in L^2(I)$.

Απόδειξη. [1] Είναι προφανές, επειδή $\langle f, f \rangle = \int_I f\bar{f} = \int_I |f|^2$.

[2] $\langle f_1 + f_2, g \rangle = \int_I (f_1 + f_2)\bar{g} = \int_I f_1\bar{g} + \int_I f_2\bar{g} = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle$ και $\langle f, g_1 + g_2 \rangle = \int_I f\overline{(g_1 + g_2)} = \int_I f\bar{g}_1 + \int_I f\bar{g}_2 = \langle f, g_1 \rangle + \langle f, g_2 \rangle$.

[3] $\langle \lambda f, g \rangle = \int_I \lambda f\bar{g} = \lambda \int_I f\bar{g} = \lambda \langle f, g \rangle$ και $\langle f, \lambda g \rangle = \int_I f\overline{(\lambda g)} = \bar{\lambda} \int_I f\bar{g} = \bar{\lambda} \langle f, g \rangle$.

[4] $\langle g, f \rangle = \int_I g\bar{f} = \int_I \overline{\overline{g\bar{f}}} = \overline{\int_I \overline{g\bar{f}}} = \overline{\langle f, g \rangle}$. \square

Ορισμός. Για κάθε $f \in L^2(I)$ ονομάζουμε **2-νόρμα** της f και συμβολίζουμε $\|f\|_{I,2}$ τον μη-αρνητικό αριθμό

$$\|f\|_{I,2} = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_I |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Αν στην εκάστοτε συζήτηση δεν υπάρχει αμφιβολία για το διάστημα I , θα χρησιμοποιούμε το απλούστερο σύμβολο

$$\|f\|_2$$

αντί του $\|f\|_{I,2}$.

Η συνάρτηση

$$L^2(I) \ni f \mapsto \|f\|_{I,2} = \|f\|_2 \in \mathbb{R}_0^+$$

ονομάζεται **2-νόρμα** στον χώρο $L^2(I)$.

Πριν αποδείξουμε τις ιδιότητες της 2-νόρμας, θα δούμε μια πολύ σημαντική ανισότητα.

Η ανισότητα των Schwarz, Bunyakovsky. Για κάθε $f, g \in L^2(I)$,

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Απόδειξη. Αν $\|f\|_2 = \langle f, f \rangle = 0$, τότε $f = 0$ σ.π. στο I , οπότε $f\bar{g} = 0$ σ.π. στο I , οπότε $\langle f, g \rangle = \int_I f\bar{g} = 0$. Άρα η ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε ισχύει ως ισότητα $0 = 0$.

Τώρα, έστω $\|f\|_2 > 0$.

Για κάθε μιγαδικό λ ,

$$|\lambda|^2 \|f\|_2^2 + 2\operatorname{Re}(\lambda \langle f, g \rangle) + \|g\|_2^2 = \langle \lambda f, \lambda f \rangle + \langle \lambda f, g \rangle + \langle g, \lambda f \rangle + \langle g, g \rangle = \langle \lambda f + g, \lambda f + g \rangle = \|\lambda f + g\|_2^2.$$

Δηλαδή, έχουμε την (γενικότερα χρήσιμη) ταυτότητα

$$|\lambda|^2 \|f\|_2^2 + 2\operatorname{Re}(\lambda \langle f, g \rangle) + \|g\|_2^2 = \|\lambda f + g\|_2^2.$$

Από αυτήν έχουμε ότι $|\lambda|^2 \|f\|_2^2 + 2\operatorname{Re}(\lambda \langle f, g \rangle) + \|g\|_2^2 \geq 0$ για κάθε μιγαδικό λ και θέτοντας τον $\lambda = -\frac{\langle f, g \rangle}{\|f\|_2^2}$ στην ανισότητα αυτή, προκύπτει η ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε. \square

Πρόταση 1.45. Η 2-νόρμα στον $L^2(I)$ έχει τις εξής ιδιότητες.

[1] $\|f\|_2 \geq 0$ για κάθε $f \in L^2(I)$. Αν $f \in L^2(I)$, τότε: $\|f\|_2 = 0$ αν και μόνο αν $f = 0$ σ.π. στο I .

[2] $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$ για κάθε $f, g \in L^2(I)$.

[3] $\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \|f\|_2$ για κάθε $f \in L^2(I)$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη. [1] Επειδή $\|f\|_2 = \langle f, f \rangle$, το αποτέλεσμα είναι άμεσο από την ιδιότητα [1] του εσωτερικού γινομένου.

[2] Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα που προέκυψε στην απόδειξη της ανισότητας των Schwarz, Bunyakovsky, θέτοντας $\lambda = 1$, καθώς και την ίδια την ανισότητα των Schwarz, Bunyakovsky:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_2^2 &= \|f\|_2^2 + 2\operatorname{Re}\langle f, g \rangle + \|g\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 + 2|\langle f, g \rangle| + \|g\|_2^2 \\ &\leq \|f\|_2^2 + 2\|f\|_2 \|g\|_2 + \|g\|_2^2 = (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2. \end{aligned}$$

Άρα $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$.

[3] $\|\lambda f\|_2^2 = \langle \lambda f, \lambda f \rangle = |\lambda|^2 \langle f, f \rangle = |\lambda|^2 \|f\|_2^2$. Άρα $\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \|f\|_2$. \square

Ορισμός. Αν $f, g \in L^2(I)$, ορίζουμε την 2-απόσταση ανάμεσα στις f, g να είναι ο μη-αρνητικός αριθμός

$$\|f - g\|_{I,2} = \|f - g\|_2 = \left(\int_I |f - g|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Πρόταση 1.46. Η 2-απόσταση ανάμεσα στα στοιχεία του $L^2(I)$ έχει τις εξής ιδιότητες.

[1] $\|f - g\|_2 \geq 0$ για κάθε $f, g \in L^2(I)$. Αν $f, g \in L^2(I)$, τότε: $\|f - g\|_2 = 0$ αν και μόνο αν $f = g$ σ.π. στο I .

[2] $\|f - h\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - h\|_2$ για κάθε $f, g, h \in L^2(I)$.

[3] $\|\lambda f - \lambda g\|_2 = |\lambda| \|f - g\|_2$ για κάθε $f, g \in L^2(I)$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη. Όπως αποδείχτηκαν οι ιδιότητες της 1-απόστασης από τις ιδιότητες της 1-νόρμας. \square

Τα σχόλια που ακολουθούν είναι κατά πολύ όμοια με τα αντίστοιχα σχόλια μετά από την απόδειξη των ιδιοτήτων της 1-νόρμας. Μόνο που τώρα υπάρχει και η έννοια του εσωτερικού γινομένου.

Σχόλι α. [1] Η ιδιότητα [1] της 2-απόστασης λέει ότι η 2-απόσταση ανάμεσα σε δυο στοιχεία του $L^2(I)$ είναι μηδέν αν και μόνο αν τα δυο αυτά στοιχεία ταυτίζονται.

Και πάλι, συμφωνούμε να ταυτίζουμε δυο συναρτήσεις-στοιχεία του $L^2(I)$ όταν οι δυο συναρτήσεις ταυτίζονται σ.π. στο I .

[2] Η ιδιότητα [2] της 2-απόστασης ονομάζεται **τριγωνική ανισότητα** και λέει ότι η 2-απόσταση ανάμεσα σε δυο στοιχεία του $L^2(I)$ δεν είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των αποστάσεών τους από ένα τρίτο στοιχείο του $L^2(I)$.

[3] Η ιδιότητα [3] της 2-απόστασης ονομάζεται **θετική ομογένεια**. Αν $\lambda = -1$, προκύπτει ότι $\|g - f\|_2 = \|f - g\|_2$ και αυτό λέει ότι η 2-απόσταση ανάμεσα σε δυο στοιχεία του $L^2(I)$ είναι **συμμετρική**.

[4] Η λέξη **απόσταση** μας κάνει να σκεφτόμαστε τα στοιχεία του χώρου $L^2(I)$ ως **σημεία** ενός κατά κάποιον τρόπο **γεωμετρικού χώρου** στον οποίο μετράμε αποστάσεις ανάμεσα στα διάφορα σημεία του. Όπως και με τον χώρο $L^1(I)$, για κάθε συνάρτηση-στοιχείο του $L^2(I)$ κάνουμε μια νοητική **αφαίρεση** και την βλέπουμε ως **σημείο** αγνοώντας προσωρινά την ειδικότερη φύση της (ως συνάρτηση). Η 2-απόσταση ανάμεσα σε δυο σημεία-συναρτήσεις του $L^2(I)$ μας δίνει την αίσθηση του πόσο κοντά ή πόσο μακριά είναι αυτά τα δυο σημεία-συναρτήσεις και μπορούμε να ορίσουμε και μια αντίστοιχη έννοια σύγκλισης για σημεία του συγκεκριμένου χώρου. Πριν, όμως, το κάνουμε, πρέπει να πούμε ότι στον χώρο $L^2(I)$, σε αντίθεση με τον $L^1(I)$, έχουμε ορίσει και την έννοια του **εσωτερικού γινομένου** ανάμεσα σε στοιχεία του. Αυτό μας κάνει να βλέπουμε τα στοιχεία f του χώρου $L^2(I)$, όχι ακριβώς ως σημεία αλλά, ως **διανύσματα** με αρχή το σημείο 0 (την σ.π. μηδενική συνάρτηση) και πέρας το σημείο f . Αυτό ακριβώς κάνουμε και στους ευκλείδειους χώρους \mathbb{R}^2 και \mathbb{R}^3 . Αυτό, τώρα, μας επιτρέπει να εισαγάγουμε την έννοια της **ορθογωνιότητας** ανάμεσα στα διανύσματα-συναρτήσεις f, g του $L^2(I)$.

Ορισμός. [1] Έστω $f, g \in L^2(I)$. Λέμε ότι οι f, g είναι **ορθογώνιες** (στον $L^2(I)$) αν $\langle f, g \rangle = 0$.

[2] Έστω $f \in L^2(I)$. Λέμε ότι η f είναι **κανονική** (στον $L^2(I)$) αν $\|f\|_2 = \langle f, f \rangle = 1$.

Σχόλι α. [1] Δηλαδή, οι $f, g \in L^2(I)$ είναι ορθογώνιες αν $\int_I f \bar{g} = 0$. Και η f είναι κανονική αν $\int_I |f|^2 = 1$.

[2] Η ιδιότητα [1] του εσωτερικού γινομένου λέει ότι **ένα διάνυσμα-συνάρτηση του $L^2(I)$ είναι ορθογώνιο με τον εαυτό του αν και μόνο αν είναι το μηδενικό διάνυσμα-συνάρτηση**.

[3] Έστω $f \in L^2(I)$ και $\|f\|_2 > 0$. Δηλαδή, η f δεν είναι 0 σ.π. στο I .

Αν $\|f\|_2 = 1$, τότε η f είναι κανονική. Αν $\|f\|_2 \neq 1$, τότε η f δεν είναι κανονική, αλλά μπορούμε να την **κανονικοποιήσουμε** πολλαπλασιάζοντάς την με έναν κατάλληλο αριθμό. Πράγματι, έστω η συνάρτηση $g = \lambda f$.

Θα δούμε ποιός πρέπει να είναι ο αριθμός λ ώστε η g να είναι κανονική. Η g είναι κανονική αν και μόνο αν $\|g\|_2 = 1$ αν και μόνο αν $|\lambda| \|f\|_2 = 1$ αν και μόνο αν $|\lambda| = \frac{1}{\|f\|_2}$. Δηλαδή, η λf είναι κανονική για κάθε λ που βρίσκεται πάνω στον κύκλο κέντρου 0 και ακτίνας $\frac{1}{\|f\|_2}$. Για παράδειγμα, η $\frac{1}{\|f\|_2} f$ είναι κανονική.

Παράδειγμα. Στον $L^2([0, 1])$ κάθε δυο διαφορετικές συναρτήσεις $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$ και $e_m(x) = e^{2\pi i m x}$ (όπου οι n, m είναι ακέραιοι) είναι ορθογώνιες. Πράγματι, έχουμε αποδείξει ότι, αν $n \neq m$,

$$\langle e_n, e_m \rangle = \int_{[0,1]} e_n(x) \overline{e_m(x)} dx = 0.$$

Επίσης, έχουμε δει ότι

$$\langle e_n, e_n \rangle = \int_{[0,1]} e_n(x) \overline{e_n(x)} dx = \int_{[0,1]} |e_n(x)|^2 dx = \int_{[0,1]} 1 dx = 1.$$

Δηλαδή, κάθε e_n είναι κανονική στον $L^2([0, 1])$.

Ορισμός. Έστω ακολουθία (f_n) στον $L^2(I)$ και f στον $L^2(I)$. Λέμε ότι η (f_n) **συγκλίνει στην f στον χώρο $L^2(I)$** ή ότι **η f είναι το όριο της (f_n) στον χώρο $L^2(I)$** αν $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$ όταν $n \rightarrow +\infty$ ή, ισοδύναμα, $\int_I |f_n - f|^2 \rightarrow 0$ όταν $n \rightarrow +\infty$. Συμβολίζουμε

$$f_n \rightarrow f \text{ στον } L^2(I) \text{ όταν } n \rightarrow +\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f \text{ στον } L^2(I).$$

Πρόταση 1.47. Έστω $f_n \rightarrow f$ και $g_n \rightarrow g$ στον $L^2(I)$ και $\lambda_n \rightarrow \lambda$ στο \mathbb{C} όταν $n \rightarrow +\infty$. Τότε

$$f_n + g_n \rightarrow f + g \quad \text{και} \quad \lambda_n f_n \rightarrow \lambda f \quad \text{στον } L^2(I) \quad \text{όταν } n \rightarrow +\infty.$$

Επίσης,

$$\langle f_n, g_n \rangle \rightarrow \langle f, g \rangle.$$

Απόδειξη. Για όλες τις συγκλίσεις, εκτός της τελευταίας, οι αποδείξεις είναι ταυτόσημες με τις αποδείξεις των αντίστοιχων συγκλίσεων στην Πρόταση 1.23. Μόνο ο δείκτης της νόρμας αλλάζει από 1 σε 2.

Η τελευταία σύγκλιση προκύπτει από την ανισότητα των Schwarz, Bunyakovsky:

$$\begin{aligned} 0 \leq |\langle f_n, g_n \rangle - \langle f, g \rangle| &\leq |\langle f_n - f, g_n - g \rangle| + |\langle f_n - f, g \rangle| + |\langle f, g_n - g \rangle| \\ &\leq \|f_n - f\|_2 \|g_n - g\|_2 + \|f_n - f\|_2 \|g\|_2 + \|f\|_2 \|g_n - g\|_2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

Σχόλιο. Οι πρώτες σχέσεις της Πρότασης 1.47 λένε ότι η πράξη της πρόσθεσης και η πράξη του πολλαπλασιασμού με αριθμό είναι συνεχείς στον $L^2(I)$. Την τελευταία σχέση θα την σχολιάσουμε σε λίγο.

Ορισμός. Η (f_n) χαρακτηρίζεται **ακολουθία Cauchy στον $L^2(I)$** αν $\|f_n - f_m\|_2 \rightarrow 0$ όταν $n, m \rightarrow +\infty$.

Θεώρημα 1.4. Έστω ακολουθία (f_n) στον $L^2(I)$. Τότε, η (f_n) είναι ακολουθία Cauchy στον $L^2(I)$ αν και μόνο αν συγκλίνει σε κάποιο σημείο του $L^2(I)$.

Απόδειξη. Η πρώτη κατεύθυνση.

Έστω ότι $f_n \rightarrow f$ στον $L^2(I)$ όταν $n \rightarrow +\infty$. Τότε

$$0 \leq \|f_n - f_m\|_2 \leq \|f_n - f\|_2 + \|f_m - f\|_2 \rightarrow 0 + 0 = 0$$

όταν $n, m \rightarrow +\infty$.

Η δεύτερη κατεύθυνση.

Έστω $\|f_n - f_m\|_2 \rightarrow 0$ όταν $n, m \rightarrow +\infty$.

Τότε υπάρχει n_1 ώστε

$$\|f_n - f_m\|_2 < \frac{1}{2} \quad \text{για κάθε } n, m \geq n_1.$$

Κατόπιν, υπάρχει $n_2 > n_1$ ώστε

$$\|f_n - f_m\|_2 < \frac{1}{2^2} \quad \text{για κάθε } n, m \geq n_2.$$

Κατόπιν, υπάρχει $n_3 > n_2$ ώστε

$$\|f_n - f_m\|_2 < \frac{1}{2^3} \quad \text{για κάθε } n, m \geq n_3.$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά επ' άπειρον, βλέπουμε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία δεικτών (n_k) ώστε

$$\|f_n - f_m\|_2 < \frac{1}{2^k} \quad \text{για κάθε } n, m \geq n_k$$

για κάθε k .

Έτσι σχηματίζεται υποακολουθία (f_{n_k}) της (f_n) και, παίρνοντας $n = n_{k+1} (\geq n_k)$ και $m = n_k (\geq n_k)$ στην τελευταία σχέση, έχουμε

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_2 < \frac{1}{2^k}$$

για κάθε k .

(Από το σημείο αυτό η απόδειξη είναι παραλλαγή και όχι πιστή επανάληψη της απόδειξης του ανάλογου Θεωρήματος 1.3.)

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$g_k = \left(|f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{k-1} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \right)^2.$$

Προφανώς, κάθε g_k είναι ολοκληρώσιμη στο I και ισχύει

$$0 \leq g_k \leq g_{k+1} \quad \text{σ.π. στο } I.$$

Από την τριγωνική ανισότητα, για κάθε k ,

$$\begin{aligned} \left(\int_I \left(|f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{k-1} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} &= \left\| |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{k-1} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \right\|_2 \\ &\leq \|f_{n_1}\|_2 + \sum_{j=1}^{k-1} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_2 \\ &< \|f_{n_1}\|_2 + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{2^j} < \|f_{n_1}\|_2 + 1, \end{aligned}$$

οπότε

$$\int_I g_k \leq (\|f_{n_1}\|_2 + 1)^2.$$

Από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης συνεπάγεται ότι η (g_k) συγκλίνει σ.π. στο I σε μια συνάρτηση g ολοκληρώσιμη στο I :

$$g_k \rightarrow g \quad \text{σ.π. στο } I.$$

Άρα η σειρά $f_{n_1} + \sum_{k=1}^{+\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ συγκλίνει απολύτως σ.π. στο I , οπότε ορίζεται σ.π. στο I η συνάρτηση

$$f = f_{n_1} + \sum_{k=1}^{+\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}).$$

Το $(k-1)$ -οστό μερικό άθροισμα του δεξιού μέλους της τελευταίας ισότητας είναι ίσο με f_{n_k} , οπότε συμπεραίνουμε ότι

$$f_{n_k} \rightarrow f \quad \text{σ.π. στο } I.$$

Επειδή κάθε f_{n_k} είναι στον $L^2(I)$ και, επομένως, είναι μετρήσιμη στο I , συνεπάγεται ότι και η f είναι μετρήσιμη στο I .

Επειδή

$$|f_{n_k}|^2 = \left| f_{n_1} + \sum_{j=1}^{k-1} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j}) \right|^2 \leq \left(|f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{k-1} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \right)^2 = g_k \leq g \quad \text{σ.π. στο } I$$

και η g είναι ολοκληρώσιμη στο I , από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης συνεπάγεται ότι η f^2 είναι ολοκληρώσιμη στο I και συμπεραίνουμε ότι $f \in L^2(I)$. Μάλιστα, $|f|^2 \leq g$ σ.π. στο I .

Τώρα, παρατηρούμε ότι

$$|f_{n_k} - f|^2 \leq 2|f_{n_k}|^2 + 2|f|^2 \leq 4g,$$

οπότε, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης,

$$\|f_{n_k} - f\|_2^2 = \int_I |f_{n_k} - f|^2 \rightarrow 0.$$

Άρα $\|f_{n_k} - f\|_2 \rightarrow 0$ όταν $k \rightarrow +\infty$ και, επομένως, η υποακολουθία (f_{n_k}) συγκλίνει στην f στον $L^2(I)$. Τώρα, είναι εύκολο να δούμε ότι η (f_n) συγκλίνει στην f στον $L^2(I)$. Επειδή η ακολουθία είναι ακολουθία Cauchy στον $L^2(I)$,

$$0 \leq \|f_k - f\|_2 \leq \|f_k - f_{n_k}\|_2 + \|f_{n_k} - f\|_2 \rightarrow 0 + 0 = 0$$

όταν $k \rightarrow +\infty$ (διότι τότε $n_k \rightarrow +\infty$). □

Ορισμός. Έστω ένα σύνολο H το οποίο είναι γραμμικός χώρος. Δηλαδή στο H ορίζεται η πράξη της πρόσθεσης ανάμεσα στα στοιχεία του H και η πράξη του πολλαπλασιασμού των αριθμών με τα στοιχεία του H έτσι ώστε να ισχύουν οι συνήθεις αλγεβρικές ιδιότητες αυτών των πράξεων.

Υποθέτουμε, επίσης, ότι σε κάθε ζεύγος $x, y \in H$ αντιστοιχεί ένας συγκεκριμένος αριθμός $\langle x, y \rangle$, ο οποίος ονομάζεται εσωτερικό γινόμενο των x, y ώστε

[1] $\langle x, x \rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$. Αν $x \in H$, τότε: $\langle x, x \rangle = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$.

[2] $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$ και $\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle$ για κάθε $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in H$.

[3] $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ και $\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$ για κάθε $x, y \in H$ και κάθε αριθμό λ .

[4] $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ για κάθε $x, y \in X$.

Τότε ο γραμμικός χώρος H χαρακτηρίζεται **γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο**. Αν το σύνολο των αριθμών που χρησιμοποιούμε είναι το \mathbb{R} , τότε λέμε ότι ο H είναι γραμμικός χώρος **επί του \mathbb{R}** με εσωτερικό γινόμενο και υποθέτουμε, επιπλέον, ότι $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$ για κάθε $x, y \in H$. Αν το σύνολο των αριθμών που χρησιμοποιούμε είναι το \mathbb{C} , τότε λέμε ότι ο H είναι γραμμικός χώρος **επί του \mathbb{C}** με εσωτερικό γινόμενο.

Σε έναν γραμμικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο H , όπως παραπάνω, ορίζουμε την **νόρμα** ενός $x \in H$ να είναι ο αριθμός $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Τότε αποδεικνύεται (με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως στον $L^2(I)$) η ανισότητα των Schwarz, Bunyakovsky:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad \text{για κάθε } x, y \in H.$$

Σε έναν γενικό γραμμικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο η ανισότητα αυτή ονομάζεται **ανισότητα των Cauchy, Schwarz, Bunyakovsky**. Κατόπιν, αποδεικνύονται οι τρεις ιδιότητες της νόρμας (με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως στον $L^2(I)$).

Κατόπιν, ορίζουμε την **απόσταση** ανάμεσα σε δυο στοιχεία $x, y \in H$ να είναι ο αριθμός $\|x - y\|$. Επίσης, λέμε ότι η ακολουθία (x_n) στο H συγκλίνει στο $x \in H$ αν $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ όταν $n \rightarrow +\infty$.

Αν ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο (και, επομένως, με νόρμα) H , όπως παραπάνω, είναι **πλήρης**, δηλαδή έχει την ιδιότητα **κάθε ακολουθία Cauchy στον χώρο να συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο του χώρου**, τότε ο H χαρακτηρίζεται **χώρος Hilbert**.

Τέλος, σε έναν γραμμικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο H δυο στοιχεία x, y χαρακτηρίζονται **ορθογώνια** αν $\langle x, y \rangle = 0$ και ένα στοιχείο x χαρακτηρίζεται **κανονικό** αν $\|x\| = 1$. Αν $x \neq 0$ και $|\lambda| = \frac{1}{\|x\|}$, τότε το λx είναι κανονικό.

Σχόλια. [1] Άρα κάθε χώρος Hilbert είναι χώρος Banach.

[2] Οι ιδιότητες της σύγκλισης ακολουθιών στον $L^2(I)$ που αναφέρονται στην Πρόταση 1.47 ισχύουν σε οποιονδήποτε χώρο με εσωτερικό γινόμενο. Οι δυο πρώτες ισχύουν επειδή ισχύουν σε κάθε χώρο με νόρμα. Η τελευταία είναι η

Αν $x_n \rightarrow x$ και $y_n \rightarrow y$ στον H , τότε $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$.

Η απόδειξη είναι πιστή αντιγραφή της απόδειξης της Πρότασης 1.47.

[3] Στον χώρο με εσωτερικό γινόμενο H μπορούμε, για κάθε $y \in H$, να ορίσουμε τη συνάρτηση

$$l_y : H \rightarrow \mathbb{C}$$

με τύπο

$$l_y(x) = \langle x, y \rangle.$$

Τότε η συνάρτηση l_y είναι συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές στον H . Πράγματι:

$$l_y(x_1 + x_2) = \langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle = l_y(x_1) + l_y(x_2), \quad l_y(\lambda x) = \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \lambda l_y(x).$$

Επίσης, αν $x_n \rightarrow x$ στον H ,

$$l_y(x_n) = \langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle = l_y(x).$$

Παρατηρήστε ότι η ανισότητα $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ γράφεται

$$|l_y(x)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Πρόταση 1.48. Ο χώρος $L^2(I)$ με το συγκεκριμένο εσωτερικό γινόμενο που έχουμε ορίσει είναι ένας χώρος Hilbert (επί του \mathbb{C}). Επίσης, για κάθε $g \in L^2(I)$ η συνάρτηση $l_g : L^2(I) \rightarrow \mathbb{C}$ με τύπο

$$l_g(f) = \langle f, g \rangle = \int_I f \bar{g}$$

είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές στον $L^2(I)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη έχει ήδη γίνει. □

Λήμμα 1.6. [1] Αν $f \in L^2(I)$ και το J είναι υποδιάστημα του I , τότε $f \in L^2(J)$ και $\|f\|_{J,2} \leq \|f\|_{I,2}$.
[2] Αν $f \in L^2(I)$ και το J είναι φραγμένο υποδιάστημα του I , τότε $f \in L^1(J)$ και

$$\|f\|_{J,1} \leq \sqrt{l(J)} \|f\|_{I,2}.$$

Απόδειξη. [1] Η f είναι μετρήσιμη στο I και, επομένως, και στο J . Επίσης, η f^2 είναι ολοκληρώσιμη στο I , οπότε είναι ολοκληρώσιμη και στο J . Άρα $f \in L^2(J)$.

Τέλος, $\|f\|_{J,2}^2 = \int_J |f|^2 \leq \int_I |f|^2 = \|f\|_{I,2}^2$. Άρα $\|f\|_{J,2} \leq \|f\|_{I,2}$.

[2] Κατ' αρχάς θα δούμε ότι, επειδή το J είναι φραγμένο, η σταθερή συνάρτηση 1 ανήκει στον $L^2(J)$.

Η 1 είναι μετρήσιμη στο J και η $1^2 = 1$ είναι ολοκληρώσιμη στο J . Άρα $1 \in L^2(J)$ και

$$\|1\|_{J,2} = \left(\int_J 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{l(J)}.$$

Επομένως, αν $f \in L^2(I)$, τότε $f \in L^2(J)$ και, επειδή $1 \in L^2(J)$, από την Πρόταση 1.43 συνεπάγεται $f = 1f \in L^1(J)$ και από την ανισότητα των Schwarz, Bunyakovsky,

$$\|f\|_{J,1} = \int_J |f| = \int_J 1|f| \leq \left(\int_J 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_J |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{l(J)} \|f\|_{J,2} \leq \sqrt{l(J)} \|f\|_{I,2}.$$

□

Σχόλιο. Άρα, αν $f \in L^2(I)$ και το ίδιο το I είναι φραγμένο, τότε $f \in L^1(I)$ και

$$\|f\|_{I,1} \leq \sqrt{l(I)} \|f\|_{I,2}$$

η, πιο απλά,

$$\|f\|_1 \leq \sqrt{l(I)} \|f\|_2.$$

Πρόταση 1.49. Έστω $f \in L^2(I)$. Τότε υπάρχει ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων (χ_n) ώστε $\|\chi_n - f\|_2 \rightarrow 0$ και $\chi_n \rightarrow f$ σ.π. στο I .

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο I και σ.π. φραγμένη στο I , δηλαδή $|f| \leq M$ σ.π. στο I .

Επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη στο I , υπάρχει ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων (ϕ_n) ώστε $\|\phi_n - f\|_1 \rightarrow 0$ και $\phi_n \rightarrow f$ σ.π. στο I .

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$\chi_n(x) = \begin{cases} \phi_n(x), & \text{αν } |\phi_n(x)| \leq M \\ M \frac{\phi_n(x)}{|\phi_n(x)|}, & \text{αν } |\phi_n(x)| \geq M \end{cases}$$

Οι χ_n είναι κι αυτές κλιμακωτές συναρτήσεις και ισχύει $\chi_n \rightarrow f$ σ.π. στο I και $|\chi_n| \leq M$ σ.π. στο I καθώς και $|\chi_n - f| \leq |\phi_n - f|$ σ.π. στο I .

Τότε

$$\|\chi_n - f\|_2^2 = \int_I |\chi_n - f|^2 \leq 2M \int_I |\chi_n - f| \leq 2M \int_I |\phi_n - f| = 2M \|\phi_n - f\|_1 \rightarrow 0,$$

οπότε $\|\chi_n - f\|_2 \rightarrow 0$.

Τώρα η γενική περίπτωση.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in [-n, n] \text{ και } |f(x)| \leq n \\ n \frac{f(x)}{|f(x)|}, & \text{αν } x \in [-n, n] \text{ και } |f(x)| \geq n \\ 0, & \text{αν } x \notin [-n, n] \end{cases}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η f_n είναι μετρήσιμη και ότι $|f_n| \leq n\chi_{[-n,n]}$ σ.π. στο I , οπότε η f_n είναι ολοκληρώσιμη. Ομοίως, και η f_n^2 είναι ολοκληρώσιμη. Επίσης, $|f_n| \leq |f|$ σ.π. στο I και $f_n \rightarrow f$ σ.π. στο I . Άρα $|f_n - f|^2 \leq 4|f|^2$ σ.π. στο I , οπότε, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης,

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_I |f_n - f|^2 \rightarrow 0.$$

Άρα $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$.

Από το πρώτο μέρος, για κάθε f_n υπάρχει κάποια κλιμακωτή συνάρτηση ψ_n ώστε $\|\psi_n - f_n\|_2 < \frac{1}{n}$. Τότε

$$\|\psi_n - f\|_2 \leq \|\psi_n - f_n\|_2 + \|f_n - f\|_2 < \frac{1}{n} + \|f_n - f\|_2 \rightarrow 0.$$

Άρα $\|\psi_n - f\|_2 \rightarrow 0$.

Επομένως, η (ψ_n) είναι ακολουθία Cauchy στον $L^2(I)$. Από την απόδειξη του Θεωρήματος 1.4 γνωρίζουμε ότι υπάρχει υποακολουθία (ψ_{n_k}) ώστε $\psi_{n_k} \rightarrow f$ σ.π. στο I .

Θέτουμε $\chi_k = \psi_{n_k}$ και τότε $\chi_k \rightarrow f$ σ.π. στο I και $\|\chi_k - f\|_2 \rightarrow 0$. □

Τώρα θα μελετήσουμε την πράξη της συνέλιξης σε σχέση με τον χώρο $L^2(\mathbb{R})$.

Πρόταση 1.50. Έστω τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση f και ολοκληρώσιμη συνάρτηση g .

Τότε για σ.κ. x η συνάρτηση (με μεταβλητή y) $f(x-y)g(y)$ είναι ολοκληρώσιμη. Άρα, για σ.κ. x ορίζεται ο αριθμός

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy.$$

Η συνάρτηση h που ορίζεται σ.π. με αυτόν τον τρόπο είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη και

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |h|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |g|.$$

Απόδειξη. Οι συναρτήσεις $|f|^2$ και $|g|$ είναι ολοκληρώσιμες. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.25, για σ.κ. x η συνάρτηση (με μεταβλητή y) $|f(x-y)|^2|g(y)|$ είναι ολοκληρώσιμη και η σ.π. οριζόμενη συνάρτηση

$$H(x) = \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^2|g(y)| dy$$

είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_{\mathbb{R}} H = \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \int_{\mathbb{R}} |g|.$$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_n = f\chi_{[-n,n]}$. Για κάθε n η f_n μηδενίζεται έξω από το διάστημα $[-n, n]$ και ταυτίζεται με την f στο $[-n, n]$. Επίσης, ισχύει $|f_n| \leq |f|$ και $f_n \rightarrow f$ σ.π. στο \mathbb{R} .

Επειδή η f είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη και το $[-n, n]$ είναι φραγμένο, η f και, επομένως, και η f_n είναι

ολοκληρώσιμη στο $[-n, n]$. Και επειδή η f_n μηδενίζεται έξω από το $[-n, n]$, η f_n είναι ολοκληρώσιμη. Άρα, πάλι από την Πρόταση 1.25, για σ.κ. x ορίζεται το ολοκλήρωμα $\int_{\mathbb{R}} f_n(x-y)g(y) dy$ και η σ.π. οριζόμενη συνάρτηση $h_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x-y)g(y) dy$ είναι ολοκληρώσιμη.

Τώρα, από την ανισότητα Schwarz - Bunyakovsky έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x-y)g(y)| dy &= \int_{\mathbb{R}} |f_n(x-y)||g(y)|^{\frac{1}{2}}|g(y)|^{\frac{1}{2}} dy \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f_n(x-y)|^2|g(y)| dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^2|g(y)| dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Επομένως, από το Λήμμα του Fatou συνεπάγεται ότι, για κάθε x για τον οποίο η συνάρτηση (με μεταβλητή y) $|f(x-y)|^2|g(y)|$ είναι ολοκληρώσιμη και, επομένως, για τον οποίο ισχύει $\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^2|g(y)| dy < +\infty$, η συνάρτηση (με μεταβλητή y) $f(x-y)g(y)$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)| dy \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^2|g(y)| dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

και, επομένως,

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)| dy \right)^2 \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^2|g(y)| dy \int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy.$$

Άρα για σ.κ. x η συνάρτηση (με μεταβλητή y) $f(x-y)g(y)$ είναι ολοκληρώσιμη. Άρα ορίζεται για σ.κ. x η συνάρτηση

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy.$$

Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης συνεπάγεται ότι για σ.κ. x ισχύει $h_n(x) \rightarrow h(x)$. Επειδή κάθε h_n είναι μετρήσιμη, η h είναι μετρήσιμη. Επίσης, έχουμε ότι για σ.κ. x ισχύει

$$|h(x)|^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)| dy \right)^2 \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^2|g(y)| dy \int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy \leq H(x) \int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy.$$

Από την Πρόταση 1.41[3] συνεπάγεται ότι η h^2 είναι ολοκληρώσιμη.

Άρα η h τετραγωνικά ολοκληρώσιμη και

$$\int_{\mathbb{R}} |h|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} H \int_{\mathbb{R}} |g| = \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \left(\int_{\mathbb{R}} |g| \right)^2,$$

οπότε

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |h|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |g|.$$

□

Ορισμός. Εστω τετραγωνικά ολοκληρώσιμη f και ολοκληρώσιμη g . Βάσει της Πρότασης 1.50, η συνάρτηση h που ορίζεται με τύπο $h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy$ για σ.κ. x είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη και ισχύει $\left(\int_{\mathbb{R}} |h|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |g|$. Αυτήν την συνάρτηση h τη συμβολίζουμε $f * g$ και την ονομάζουμε **συνέλιξη** των f, g . Επομένως

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy \text{ για σ.κ. } x$$

και

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f * g|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |g|.$$

Άρα ορίζεται μια νέα (εξωτερική) πράξη στον χώρο $L^2(\mathbb{R})$. Η πράξη αυτή με την οποία σε κάθε στοιχείο f του $L^2(\mathbb{R})$ και σε κάθε στοιχείο g του $L^1(\mathbb{R})$ αντιστοιχίζεται το στοιχείο $f * g$ του $L^2(\mathbb{R})$ ονομάζεται **συνέλιξη**.

Σχόλια. [1] Η ανισότητα $(\int_{\mathbb{R}} |f * g|^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\int_{\mathbb{R}} |f|)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |g|$ γράφεται, φυσικά, και

$$\|f * g\|_2 \leq \|f\|_2 \|g\|_1.$$

[2] Η απόδειξη της βασικής ανισότητας $(\int_{\mathbb{R}} |f * g|^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\int_{\mathbb{R}} |f|)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |g|$ η οποία είναι μέρος της απόδειξης της Πρότασης 1.50 “χάθηκε”, δυστυχώς, μέσα στις λεπτομέρειες που επιβάλλονται για λόγους μαθηματικής αυστηρότητας και, κυρίως, “χάθηκε” λόγω της χρήσης της Πρότασης 1.25. Ας δούμε, όμως, μια πιο “διαφανή” (αν και όχι τόσο αυστηρή) απόδειξη αυτής της ανισότητας.

Κατ’ αρχάς, από την ανισότητα Schwarz - Bunyakovsky έχουμε

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)| dy = \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| |g(y)|^{\frac{1}{2}} |g(y)|^{\frac{1}{2}} dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^2 |g(y)| dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

και, επομένως,

$$|(f * g)(x)|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^2 |g(y)| dy \int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |(f * g)(x)|^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^2 |g(y)| dy \right) dx \int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^2 |g(y)| dx \right) dy \int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^2 dx \right) |g(y)| dy \int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right) |g(y)| dy \int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy \right)^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx \right)^2. \end{aligned}$$

Πρόταση 1.51. Η πράξη συνέλιξη που μόλις ορίσαμε έχει τις εξής ιδιότητες.

[1] $f * g = g * f$ για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$.

[2] $(f * g) * h = f * (g * h)$ για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R})$, $g, h \in L^1(\mathbb{R})$.

[3] $(f_1 + f_2) * g = f_1 * g + f_2 * g$ και $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$ για κάθε $f, f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$, $g, g_1, g_2 \in L^1(\mathbb{R})$.

[4] $(\lambda f) * g = \lambda(f * g)$ και $f * (\lambda g) = \lambda(f * g)$ για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$ και $\lambda \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη. Όλα αποδεικνύονται με στοιχειώδεις αλλαγές μεταβλητής. □

Τώρα θα ασχοληθούμε με τον χώρο $L^2([0, 1])$ σε σχέση με την πράξη της “συνέλιξης” κατάλληλα ορισμένης και γι αυτόν τον χώρο.

Η Πρόταση 1.52 είναι το ανάλογο της Πρότασης 1.50 για 1-περιοδικές συναρτήσεις.

Πρόταση 1.52. Έστω 1-περιοδικές συναρτήσεις: f τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$ και g ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$.

Τότε για σ.κ. x η συνάρτηση (με μεταβλητή y) $f(x-y)g(y)$ είναι 1-περιοδική και ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$. Άρα, για σ.κ. x ορίζεται ο αριθμός

$$h(x) = \int_{[0,1)} f(x-y)g(y) dy.$$

Η συνάρτηση h που ορίζεται σ.π. με αυτόν τον τρόπο είναι 1-περιοδική και τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$ και

$$\left(\int_{[0,1)} |h|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{[0,1)} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \int_{[0,1)} |g|.$$

Απόδειξη. Οι συναρτήσεις $|f|^2$ και $|g|$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[0, 1)$. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.29, για σ.κ. x η συνάρτηση (με μεταβλητή y) $|f(x - y)|^2 |g(y)|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$ και η σ.π. οριζόμενη συνάρτηση

$$H(x) = \int_{[0,1)} |f(x - y)|^2 |g(y)| dy$$

είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_{[0,1)} H = \int_{[0,1)} |f|^2 \int_{[0,1)} |g|.$$

Επειδή η f είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$ και το $[0, 1)$ είναι φραγμένο, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$. Άρα, από την Πρόταση 1.29, για σ.κ. x η συνάρτηση (με μεταβλητή y) $f(x - y)g(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$ και η σ.π. οριζόμενη συνάρτηση

$$h(x) = \int_{[0,1)} f(x - y)g(y) dy$$

είναι ολοκληρώσιμη και, επομένως, μετρήσιμη στο $[0, 1)$.

Όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 1.50, από την ανισότητα Schwarz - Bunyakovsky,

$$|h(x)|^2 \leq \left(\int_{[0,1)} |f(x - y)g(y)| dy \right)^2 \leq \int_{[0,1)} |f(x - y)|^2 |g(y)| dy \int_{[0,1)} |g(y)| dy \leq H(x) \int_{[0,1)} |g(y)| dy.$$

Από την Πρόταση 1.41[3] συνεπάγεται ότι η h^2 είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$.

Άρα η h τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$ και

$$\int_{[0,1)} |h|^2 \leq \int_{[0,1)} H \int_{[0,1)} |g| = \int_{[0,1)} |f|^2 \left(\int_{[0,1)} |g| \right)^2,$$

οπότε

$$\left(\int_{[0,1)} |h|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{[0,1)} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \int_{[0,1)} |g|.$$

□

Ορισμός. Εστω 1-περιοδικές συναρτήσεις: f τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$ και g ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$. Βάσει της Πρότασης 1.52, η συνάρτηση h που ορίζεται με τύπο $h(x) = \int_{[0,1)} f(x - y)g(y) dy$ για σ.κ. x είναι 1-περιοδική και τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$ και ισχύει $\left(\int_{[0,1)} |h|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{[0,1)} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \int_{[0,1)} |g|$. Αυτήν την συνάρτηση h τη συμβολίζουμε $f * g$ και την ονομάζουμε **συνέλιξη** των f, g . Επομένως

$$(f * g)(x) = \int_{[0,1)} f(x - y)g(y) dy \text{ για σ.κ. } x$$

και

$$\left(\int_{[0,1)} |f * g|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{[0,1)} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \int_{[0,1)} |g|.$$

Έτσι ορίζεται μια νέα (εξωτερική) πράξη στον χώρο $L^2([0, 1))$. Η πράξη αυτή με την οποία σε κάθε στοιχείο f του $L^2([0, 1))$ και σε κάθε στοιχείο g του $L^1([0, 1))$ αντιστοιχίζεται το στοιχείο $f * g$ του $L^2([0, 1))$ ονομάζεται **συνέλιξη**.

Σχόλιο. Η ανισότητα $(\int_{[0,1]} |f * g|^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\int_{[0,1]} |f|^2)^{\frac{1}{2}} \int_{[0,1]} |g|$ γράφεται

$$\|f * g\|_2 \leq \|f\|_2 \|g\|_1.$$

Η Πρόταση 1.53 είναι ανάλογη της Πρότασης 1.51.

Πρόταση 1.53. Η πράξη συνέλιξη που μόλις ορίσαμε έχει τις εξής ιδιότητες.

[1] $f * g = g * f$ για κάθε $f \in L^2([0, 1]), g \in L^1([0, 1])$.

[2] $(f * g) * h = f * (g * h)$ για κάθε $f \in L^2([0, 1]), g, h \in L^1([0, 1])$.

[3] $(f_1 + f_2) * g = f_1 * g + f_2 * g$ και $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$ για κάθε $f, f_1, f_2 \in L^2([0, 1]), g, g_1, g_2 \in L^1([0, 1])$.

[4] $(\lambda f) * g = \lambda(f * g)$ και $f * (\lambda g) = \lambda(f * g)$ για κάθε $f \in L^2([0, 1]), g \in L^1([0, 1])$ και $\lambda \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη. Όλα αποδεικνύονται με στοιχειώδεις αλλαγές μεταβλητής. □

Παράδειγμα. Οι 1-περιοδικές συναρτήσεις $e_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$e_n(x) = e^{2\pi i n x} = \cos(2\pi n x) + i \sin(2\pi n x)$$

ανήκουν στον $L^2([0, 1])$ και στον $L^1([0, 1])$. Το ίδιο ισχύει και για τους γραμμικούς συνδυασμούς αυτών των συναρτήσεων, δηλαδή για τα εκθετικά πολυώνυμα

$$f(x) = \sum_{k=m}^n a_k e_k(x) = \sum_{k=m}^n a_k e^{2\pi i k x}.$$

Επειδή ο τύπος της συνέλιξης είναι ο ίδιος, αν πάρουμε ένα άλλο εκθετικό πολυώνυμο $g(x) = \sum_{k=m}^n b_k e_k(x)$, τότε, όπως έχουμε ήδη υπολογίσει,

$$f * g = \left(\sum_{k=m}^n a_k e_k \right) * \left(\sum_{l=m}^n b_l e_l \right) = \sum_{k=m}^n \sum_{l=m}^n a_k b_l e_k * e_l = \sum_{k=m}^n a_k b_k e_k.$$

Δηλαδή η $f * g$ είναι ένα νέο εκθετικό πολυώνυμο, του οποίου οι συντελεστές είναι τα γινόμενα των αντίστοιχων συντελεστών των εκθετικών πολυωνύμων f, g .

Πρόταση 1.54. Έστω $f \in L^2(\mathbb{R})$. Τότε

$$\mu_h(f) \rightarrow f \text{ στον } L^2(\mathbb{R}) \quad \text{όταν } h \rightarrow 0.$$

Απόδειξη. Έστω η χαρακτηριστική συνάρτηση χ_I ενός διαστήματος $I = (a, b)$.

Τότε $\mu_h(\chi_I) = \chi_{I+h}$, όπου $I+h = (a+h, b+h)$. Άρα, όταν το h είναι πολύ μικρό και > 0 , η συνάρτηση $|\chi_{I+h} - \chi_I|$ είναι σταθερή 1 στα διαστήματα $(a, a+h]$ και $[b, b+h)$ και σταθερή 0 έξω από αυτά. Ομοίως, αν το h είναι πολύ μικρό και < 0 , η συνάρτηση $|\chi_{I+h} - \chi_I|$ είναι σταθερή 1 στα διαστήματα $(a+h, a]$ και $[b+h, b)$ και σταθερή 0 έξω από αυτά. Άρα, όταν το h είναι πολύ μικρό,

$$\|\mu_h(\chi_I) - \chi_I\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |\chi_{I+h} - \chi_I|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2|h|}$$

και, επομένως,

$$\|\mu_h(\chi_I) - \chi_I\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{όταν } h \rightarrow 0.$$

Το ίδιο ισχύει και σε κάθε άλλη περίπτωση φραγμένου διαστήματος I .

Συνεχίζουμε αυτολεξεί την απόδειξη της Πρότασης 1.33 αλλάζοντας μόνο τις 1-νόρμες σε 2-νόρμες. □

Οι επόμενες προτάσεις είναι παραλλαγές αντίστοιχων προτάσεων για τους χώρους $L^1(\mathbb{R})$ και $L^1([0, 1])$. Όπως είδαμε στην απόδειξη της Πρότασης 1.54 (σε σχέση με την απόδειξη της Πρότασης 1.33) οι αποδείξεις είναι παρόμοιες και γι αυτό δεν θα τις γράψουμε.

Πρόταση 1.55. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $\phi_t(x) = \frac{1}{t}\phi(\frac{x}{t})$ ($t > 0$), οι οποίες ορίστηκαν στο δεύτερο σχόλιο μετά από το Λήμμα 1.5.

Έστω $f \in L^2(\mathbb{R})$ η οποία μηδενίζεται έξω από κάποιο διάστημα $[a, b]$. Τότε η $f * \phi_t$ μηδενίζεται έξω από το διάστημα $[a - t, b + t]$, είναι $f * \phi_t \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ και

$$f * \phi_t \rightarrow f \text{ στον } L^2(\mathbb{R}) \quad \text{όταν } t \rightarrow 0 + .$$

Πρόταση 1.56. Ο χώρος $C_c^\infty(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $L^2(\mathbb{R})$.

Πρόταση 1.57. Ο $L^2(\mathbb{R})$ είναι διαχωρίσιμος.

Πρόταση 1.58. Έστω 1-περιοδική f τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$. Τότε για κάθε h η $\mu_h(f)$ είναι 1-περιοδική και τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$ και

$$\mu_h(f) \rightarrow f \text{ στον } L^2([0, 1)) \quad \text{όταν } h \rightarrow 0 .$$

Πρόταση 1.59. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $\phi_t(x) = \frac{1}{t}\phi(\frac{x}{t})$ ($t > 0$), οι οποίες ορίστηκαν στο δεύτερο σχόλιο μετά από το Λήμμα 1.5.

Έστω 1-περιοδική f τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$. Τότε η

$$(f * \phi_t)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)\phi_t(y) dy$$

είναι 1-περιοδική, τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$ και $f * \phi_t \in C^\infty(\mathbb{R})$. Επίσης,

$$f * \phi_t \rightarrow f \text{ στον } L^2([0, 1)) \quad \text{όταν } t \rightarrow 0 + .$$

Πρόταση 1.60. Ο χώρος $C_p^\infty(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $L^2([0, 1))$.

Πρόταση 1.61. Για κάθε διάστημα I , ο χώρος $L^2(I)$ είναι διαχωρίσιμος.

Από εδώ και πέρα θα δούμε μερικές πολύ σημαντικές ιδιότητες των γενικών χώρων με εσωτερικό γινόμενο, οι οποίες, φυσικά, ισχύουν και στην ειδική περίπτωση των χώρων $L^2(I)$.

Πρόταση 1.62. Έστω χώρος H με εσωτερικό γινόμενο. Αν τα $x, y \in H$ είναι ορθογώνια, τότε

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Απόδειξη. Τα x, y είναι ορθογώνια, οπότε $\langle x, y \rangle = 0$. Άρα

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

□

Σχόλιο. Το περιεχόμενο της τελευταίας πρότασης είναι, ουσιαστικά, το **Πυθαγόρειο θέωρημα** σε γενικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός. Έστω χώρος H με εσωτερικό γινόμενο. Ένα υποσύνολο $A \subseteq H$ χαρακτηρίζεται **ορθοκανονικό** αν όλα τα στοιχεία του είναι ανά δύο ορθογώνια και καθένα από αυτά είναι κανονικό. Δηλαδή: $\langle x, y \rangle = 0$ για κάθε $x, y \in A$ με $x \neq y$ και $\|x\| = 1$ για κάθε $x \in A$.

Πρόταση 1.63. Έστω χώρος H με εσωτερικό γινόμενο. Αν το $A \subseteq H$ είναι ορθοκανονικό, τότε το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Απόδειξη. Έστω $e_1, \dots, e_m \in A$ και αριθμοί $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ώστε

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m = 0,$$

όπου 0 είναι το μηδενικό στοιχείο του H . Τότε για κάθε $n = 1, \dots, m$ ισχύει

$$0 = \langle 0, e_n \rangle = \langle \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m, e_n \rangle = \lambda_1 \langle e_1, e_n \rangle + \dots + \lambda_m \langle e_m, e_n \rangle = \lambda_n,$$

διότι $\langle e_j, e_n \rangle = 0$ για κάθε $j = 1, \dots, m$ με $j \neq n$ και $\langle e_n, e_n \rangle = 1$.

Άρα $\lambda_n = 0$ για κάθε $n = 1, \dots, m$. □

Λήμμα 1.7. Έστω χώρος H με εσωτερικό γινόμενο. Αν το $\{e_1, \dots, e_m\}$ είναι ορθοκανονικό υποσύνολο του H , τότε για οποιουσδήποτε αριθμούς $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ισχύει

$$\|\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m\|^2 = |\lambda_1|^2 + \dots + |\lambda_m|^2.$$

Απόδειξη. Θέτουμε

$$x = \sum_{n=1}^m \lambda_n e_n.$$

Στην προηγούμενη απόδειξη είδαμε ουσιαστικά τον εξής υπολογισμό:

$$\langle x, e_j \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^m \lambda_n e_n, e_j \right\rangle = \sum_{n=1}^m \lambda_n \langle e_n, e_j \rangle = \lambda_j.$$

Με τον ίδιο τρόπο,

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \left\langle x, \sum_{n=1}^m \lambda_n e_n \right\rangle = \sum_{n=1}^m \overline{\lambda_n} \langle x, e_n \rangle = \sum_{n=1}^m |\lambda_n|^2.$$

□

Λήμμα 1.8. Έστω χώρος H με εσωτερικό γινόμενο. Αν το $\{e_1, \dots, e_m\}$ είναι ορθοκανονικό υποσύνολο του H , τότε για οποιουσδήποτε αριθμούς $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ και για κάθε $x \in H$ ισχύει

$$\left\| x - \sum_{n=1}^m \langle x, e_n \rangle e_n \right\| \leq \left\| x - \sum_{n=1}^m \lambda_n e_n \right\|.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\lambda_n = \langle x, e_n \rangle$ για κάθε $n = 1, \dots, m$.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$y = \sum_{n=1}^m \lambda_n e_n, \quad y_0 = \sum_{n=1}^m \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Τότε

$$\langle y_0, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle$$

για κάθε $n = 1, \dots, m$. Άρα

$$\langle x - y_0, e_n \rangle = 0$$

για κάθε $n = 1, \dots, m$. Άρα

$$\begin{aligned} \langle x - y_0, y_0 - y \rangle &= \left\langle x - y_0, \sum_{n=1}^m (\langle x, e_n \rangle - \lambda_n) e_n \right\rangle = \sum_{n=1}^m \overline{(\langle x, e_n \rangle - \lambda_n)} \langle x - y_0, e_n \rangle \\ &= \sum_{n=1}^m \overline{(\langle x, e_n \rangle - \lambda_n)} 0 = 0. \end{aligned}$$

Άρα

$$\|x - y\|^2 = \|(x - y_0) + (y_0 - y)\|^2 = \|x - y_0\|^2 + \|y_0 - y\|^2 \geq \|x - y_0\|^2.$$

Αυτό μας δίνει την ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε.

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\|y_0 - y\|^2 = 0$ αν και μόνο αν $y = y_0$ αν και μόνο αν $\sum_{n=1}^m \lambda_n e_n = \sum_{n=1}^m \langle x, e_n \rangle e_n$ αν και μόνο αν $\lambda_n = \langle x, e_n \rangle$ για κάθε $n = 1, \dots, m$, διότι τα e_1, \dots, e_m είναι γραμμικά ανεξάρτητα. \square

Σχόλιο. Το σύνολο $V = \{y = \sum_{n=1}^m \lambda_n e_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}\}$ είναι ο γραμμικός υπόχωρος του H ο οποίος παράγεται από τα e_1, \dots, e_m . Το $y_0 = \sum_{n=1}^m \langle x, e_n \rangle e_n$ είναι ένα συγκεκριμένο στοιχείο του V . Το Λήμμα 1.8 λέει ότι το y_0 απέχει από το x τη μικρότερη απόσταση απ' ότι οποιοδήποτε άλλο στοιχείο y του V .

Μπορούμε, μάλιστα, να παρατηρήσουμε ότι το y_0 είναι η **ορθογώνια προβολή** του x στον υπόχωρο V . Αυτό σημαίνει ότι

$$x = y_0 + (x - y_0)$$

και το $x - y_0$ είναι ορθογώνιο με τον V , δηλαδή το $x - y_0$ είναι ορθογώνιο με κάθε $y \in V$ (και ειδικότερα με το y_0). Πράγματι, για κάθε $y = \sum_{n=1}^m \lambda_n e_n$ έχουμε

$$\langle x - y_0, y \rangle = \langle x - y_0, \sum_{n=1}^m \lambda_n e_n \rangle = \sum_{n=1}^m \overline{\lambda_n} \langle x - y_0, e_n \rangle = \sum_{n=1}^m \overline{\lambda_n} 0 = 0.$$

Πρόταση 1.64. Έστω χώρος H με εσωτερικό γινόμενο. Αν το $A \subseteq H$ είναι ορθοκανονικό, τότε για κάθε διαφορετικά ανά δύο $e_1, e_2, \dots \in A$ και για κάθε $x \in H$ το άθροισμα μη-αρνητικών όρων $\sum_n |\langle x, e_n \rangle|^2$ συγκλίνει και ισχύει

$$\sum_n |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, έστω ότι το $\{e_1, e_2, \dots\}$ είναι πεπερασμένο, δηλαδή είναι το $\{e_1, \dots, e_m\}$. Τότε το άθροισμα $\sum_n |\langle x, e_n \rangle|^2$ είναι το πεπερασμένο άθροισμα $\sum_{n=1}^m |\langle x, e_n \rangle|^2$, οπότε, προφανώς, συγκλίνει.

Θέτουμε

$$y = \sum_{n=1}^m \langle x, e_n \rangle e_n$$

και τότε, όπως έχουμε δει, για κάθε $n = 1, \dots, m$ ισχύει

$$\langle y, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle,$$

οπότε

$$\langle x - y, e_n \rangle = 0.$$

Άρα

$$\langle x - y, y \rangle = \langle x - y, \sum_{n=1}^m \langle x, e_n \rangle e_n \rangle = \sum_{n=1}^m \overline{\langle x, e_n \rangle} \langle x - y, e_n \rangle = \sum_{n=1}^m \overline{\langle x, e_n \rangle} 0 = 0.$$

Άρα τα $x - y$ και y είναι ορθογώνια, οπότε

$$\sum_{n=1}^m |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|y\|^2 \leq \|y\|^2 + \|x - y\|^2 = \|y + (x - y)\|^2 = \|x\|^2.$$

Αν το $\{e_1, e_2, \dots\}$ είναι άπειρο αριθμησιμο, τότε εφαρμόζουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα σε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{e_1, \dots, e_m\}$ και έχουμε ότι για κάθε m ισχύει

$$\sum_{n=1}^m |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Αφήνοντας το m να τείνει στο $+\infty$, βρίσκουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

□

Σχόλιο. Η ανισότητα $\sum_n |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ ονομάζεται **ανισότητα Bessel**.

Παράδειγμα. Το πιο απλό παράδειγμα χώρου Hilbert είναι ο χώρος \mathbb{R}^n στην περίπτωση που οι αριθμοί που χρησιμοποιούμε για να πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία του χώρου είναι οι πραγματικοί και ο χώρος \mathbb{C}^n στην περίπτωση που οι αριθμοί που χρησιμοποιούμε για να πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία του χώρου είναι οι μιγαδικοί.

Επειδή, ίσως, δεν είμαστε τόσο εξοικειωμένοι με τον \mathbb{C}^n , ας αναφέρουμε ότι είναι ο χώρος με στοιχεία όλες τις n -άδες

$$x = (x_1, \dots, x_n),$$

όπου $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$.

Η πρόσθεση n -άδων και ο πολλαπλασιασμός μιγαδικού αριθμού και n -άδας γίνονται όπως και στον \mathbb{R}^n , δηλαδή “κατά συντεταγμένη”.

Το εσωτερικό γινόμενο στον \mathbb{C}^n ορίζεται με τον τύπο

$$\langle x, y \rangle = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n$$

για κάθε $x = (x_1, \dots, x_n)$ και $y = (y_1, \dots, y_n)$ στον \mathbb{C}^n . Οι ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου αποδεικνύονται πολύ εύκολα (όπως και στον \mathbb{R}^n).

Η νόρμα που ορίζεται από το εσωτερικό γινόμενο είναι παρόμοια με την νόρμα στον \mathbb{R}^n . Δηλαδή,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1 \bar{x}_1 + \dots + x_n \bar{x}_n} = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}.$$

Όπως ο \mathbb{R}^n , έτσι και ο \mathbb{C}^n είναι πλήρης, δηλαδή κάθε ακολουθία Cauchy στον \mathbb{C}^n συγκλίνει σε στοιχείο του \mathbb{C}^n . Η απόδειξη είναι ίδια. Άρα ο \mathbb{C}^n είναι παράδειγμα χώρου Hilbert.

Τα στοιχεία e_1, \dots, e_n του \mathbb{C}^n είναι τα συνήθη διανύσματα

$$e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

όπου το 1 εμφανίζεται στην j -συντεταγμένη και οι άλλες συντεταγμένες είναι όλες 0.

Είναι απλό να δει κανείς (όπως στον \mathbb{R}^n) ότι τα στοιχεία e_1, \dots, e_n αποτελούν **βάση** του γραμμικού χώρου \mathbb{C}^n , οπότε ο χώρος αυτός έχει διάσταση n . Επίσης, είναι φανερό ότι το σύνολο $\{e_1, \dots, e_n\}$ είναι ορθοκανονικό και, επομένως, αποτελεί **ορθοκανονική βάση** του \mathbb{C}^n .

Στην γραμμική άλγεβρα οι γραμμικοί χώροι χωρίζονται σε δυο κατηγορίες: στους χώρους πεπερασμένης διάστασης και στους χώρους άπειρης διάστασης. Οι πρώτοι έχουν βάση η οποία αποτελείται από πεπερασμένου πλήθους στοιχεία ενώ οι δεύτεροι δεν έχουν τέτοια βάση. Το “μοντέλο” για τους χώρους πεπερασμένης διάστασης n είναι ο χώρος \mathbb{R}^n , αν ο χώρος είναι επί του \mathbb{R} , και ο χώρος \mathbb{C}^n , αν ο χώρος είναι επί του \mathbb{C} .

Τώρα, οι χώροι με εσωτερικό γινόμενο χωρίζονται κι αυτοί, ως γραμμικοί χώροι, σε δυο κατηγορίες: στους χώρους πεπερασμένης διάστασης και στους χώρους άπειρης διάστασης. Στα βασικά μαθήματα γραμμικής άλγεβρας αποδεικνύεται ότι κάθε χώρος με εσωτερικό γινόμενο, ο οποίος έχει πεπερασμένη διάσταση, έχει μια ορθοκανονική βάση. Αυτό γίνεται ως εξής: ξεκινάμε με μια οποιαδήποτε βάση $\{a_1, \dots, a_n\}$ του χώρου και από αυτήν δημιουργούμε μια ορθοκανονική βάση $\{b_1, \dots, b_n\}$ με μια συγκεκριμένη διαδικασία, η οποία ονομάζεται **διαδικασία Gram - Schmidt**.

Στις σημειώσεις αυτές μας ενδιαφέρουν κυρίως οι χώροι άπειρης διάστασης, όπως είναι οι χώροι $L^2(I)$. Οπότε θα δούμε πώς εφαρμόζεται η διαδικασία Gram - Schmidt στους χώρους αυτούς. Προηγουμένως, όμως, θα ορίσουμε την έννοια της **ορθοκανονικής βάσης** σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο άπειρης διάστασης. Και για να μην κάνουμε περίπλοκη αυτήν την περιγραφή θα χωρίσουμε τους χώρους με εσωτερικό γινόμενο οι οποίοι

έχουν άπειρη διάσταση σε δυο υποκατηγορίες: τους διαχωρίσιμους και τους μη-διαχωρίσιμους. Οι διαχωρίσιμοι είναι εκείνοι που έχουν αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο. Μάλιστα ο ίδιος ο Hilbert όταν εισήγαγε και μελέτησε τους χώρους αυτούς έθεσε ως επιπλέον υπόθεση (- αξίωμα) να είναι άπειρης διάστασης και διαχωρίσιμοι. Από εδώ και πέρα θα ασχοληθούμε μόνο με τέτοιους χώρους.

Ορισμός. Έστω X χώρος με νόρμα και μια ακολουθία (x_n) στον X . Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει στον X και έχει άθροισμα $s \in X$ αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $(s_n) = (x_1 + \dots + x_n)$ της σειράς συγκλίνει στο s . Δηλαδή: $s_n \rightarrow s$ στον X ή, ισοδύναμα,

$$\|(x_1 + \dots + x_n) - s\| = \|s_n - s\| \rightarrow 0.$$

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \quad \text{στον } X.$$

Ο ορισμός ισχύει και για χώρους με εσωτερικό γινόμενο αφού κι αυτοί είναι χώροι με νόρμα.

Θεώρημα 1.5. Έστω χώρος Hilbert H και ορθοκανονικό σύνολο $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq H$. Τότε για κάθε ακολουθία αριθμών (λ_n) με την ιδιότητα $\sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|^2 < +\infty$ η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n e_n$ συγκλίνει στον H . Αν $x \in H$ είναι το άθροισμα της σειράς, δηλαδή αν $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n e_n = x$, τότε

$$\langle x, e_n \rangle = \lambda_n$$

για κάθε n και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|^2 = \|x\|^2.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα

$$s_m = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m.$$

Για κάθε m, k με $m < k$ έχουμε

$$\|s_k - s_m\|^2 = \|\lambda_{m+1} e_{m+1} + \dots + \lambda_k e_k\|^2 = |\lambda_{m+1}|^2 + \dots + |\lambda_k|^2 \rightarrow 0$$

όταν $m, k \rightarrow +\infty$, ακριβώς επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|^2$ συγκλίνει.

Επειδή ο H είναι χώρος Hilbert, δηλαδή πλήρης, η ακολουθία (s_m) συγκλίνει στον H . Έστω

$$s_m \rightarrow x$$

ή, ισοδύναμα,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n e_n = x.$$

Τώρα, (με σταθερό n) για κάθε $m \geq n$ έχουμε

$$\langle s_m, e_n \rangle = \lambda_n,$$

οπότε, επειδή $s_m \rightarrow x$ όταν $m \rightarrow +\infty$,

$$\langle x, e_n \rangle = \lambda_n.$$

Επίσης,

$$\sum_{n=1}^m |\lambda_n|^2 = \|s_m\|^2 = \langle s_m, s_m \rangle \rightarrow \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

όταν $m \rightarrow +\infty$. Άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|^2 = \|x\|^2.$$

□

Ορισμός. Έστω H χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Ένα ορθοκανονικό σύνολο $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq H$ χαρακτηρίζεται **ορθοκανονική βάση** του H αν για κάθε $x \in H$ η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ συγκλίνει στον H και έχει άθροισμα x , δηλαδή αν για κάθε $x \in H$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n = x.$$

Σχόλιο. Στον τελευταίο ορισμό, το ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ συγκλίνει στον H είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας του Bessel και του Θεωρήματος 1.5. Άρα το πραγματικό περιεχόμενο του ορισμού είναι το να ισχύει η ιδιότητα $\sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n = x$ για κάθε $x \in H$.

Πρόταση 1.65. Έστω H χώρος Hilbert και ορθοκανονικό σύνολο $E = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq H$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- (i) Το E είναι ορθοκανονική βάση του H .
- (ii) Το E είναι μέγιστο ορθοκανονικό σύνολο.
- (iii) Αν $x \in H$ και $\langle x, e_n \rangle = 0$ για κάθε n , τότε $x = 0$.

Απόδειξη. Έστω ότι το E είναι ορθοκανονική βάση του H και έστω ορθοκανονικό σύνολο $E' \subseteq H$ ώστε $E \subseteq E'$. Παίρνουμε, αν υπάρχει, $x \in E' \setminus E$ και, επειδή το E είναι ορθοκανονική βάση, ισχύει

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Επειδή $x \in E' \setminus E$ και το E' είναι ορθοκανονικό, συνεπάγεται $\|x\| = 1$, οπότε $x \neq 0$, καθώς και ότι $\langle x, e_n \rangle = 0$ για κάθε n . Καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε δεν υπάρχει $x \in E' \setminus E$, οπότε $E' = E$. Άρα το E είναι μέγιστο ορθοκανονικό σύνολο. Αποδείξαμε ότι το (i) συνεπάγεται το (ii).

Έστω ότι το E είναι μέγιστο ορθοκανονικό σύνολο και έστω $x \in H$ ώστε $\langle x, e_n \rangle = 0$ για κάθε n . Αν $x \neq 0$, θεωρούμε το κανονικό στοιχείο $x' = \frac{1}{\|x\|}x$ το οποίο είναι ορθογώνιο με κάθε στοιχείο του E , οπότε το σύνολο $E' = E \cup \{x'\}$ είναι ορθοκανονικό και γνησίως μεγαλύτερο του E . Αυτό είναι άτοπο, οπότε $x = 0$. Αποδείξαμε ότι το (ii) συνεπάγεται το (iii).

Έστω ότι: αν $x \in H$ και $\langle x, e_n \rangle = 0$ για κάθε n , τότε $x = 0$. Θεωρούμε τυχόν $x \in H$. Λόγω της ανισότητας του Bessel, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$ συγκλίνει, οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.5 (εδώ χρησιμοποιούμε το ότι ο H είναι χώρος Hilbert και όχι απλώς χώρος με εσωτερικό γινόμενο) η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ συγκλίνει σε στοιχείο του H . Έστω

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n = y.$$

Από το ίδιο Θεώρημα 1.5 έχουμε ότι

$$\langle y, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle$$

για κάθε n . Συνεπάγεται

$$\langle x - y, e_n \rangle = 0$$

για κάθε n . Από την υπόθεσή μας συνεπάγεται $x - y = 0$, οπότε

$$x = y = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Άρα το E είναι ορθοκανονική βάση του H . Αποδείξαμε ότι το (iii) συνεπάγεται το (i). □

Θεώρημα 1.6. Κάθε χώρος H με εσωτερικό γινόμενο, ο οποίος έχει άπειρη διάσταση και είναι διαχωρίσιμος, έχει ορθοκανονική βάση.

Απόδειξη. Έστω $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ ένα αριθμήσιμο, πυκνό υποσύνολο του H .

Ακολουθώντας την αρίθμηση του A , ονομάζουμε $b_1 = a_{n_1}$ το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο του A . Αυτό σημαίνει ότι τα προηγούμενα από το $b_1 = a_{n_1}$ στοιχεία του A είναι όλα 0, οπότε ο υπόχωρος που παράγεται από τα στοιχεία του A μέχρι και το $b_1 = a_{n_1}$ είναι ο ίδιος με τον υπόχωρο που παράγεται από το $b_1 = a_{n_1}$.

Κατόπιν, ονομάζουμε $b_2 = a_{n_2}$, με $n_2 > n_1$, το πρώτο στοιχείο του A μετά από το a_{n_1} το οποίο δεν είναι πολλαπλάσιο του $b_1 = a_{n_1}$. Αυτό σημαίνει ότι τα προηγούμενα από το $b_2 = a_{n_2}$ στοιχεία του A είναι όλα πολλαπλάσια του $b_1 = a_{n_1}$, οπότε ο υπόχωρος που παράγεται από τα στοιχεία του A μέχρι και το $b_2 = a_{n_2}$ είναι ο ίδιος με τον υπόχωρο που παράγεται από τα $b_1 = a_{n_1}$ και $b_2 = a_{n_2}$. Επίσης, τα $b_1 = a_{n_1}$ και $b_2 = a_{n_2}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Κατόπιν, ονομάζουμε $b_3 = a_{n_3}$, με $n_3 > n_2$, το πρώτο στοιχείο του A μετά από το a_{n_2} το οποίο δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των $b_1 = a_{n_1}$ και $b_2 = a_{n_2}$. Αυτό σημαίνει ότι τα προηγούμενα από το $b_3 = a_{n_3}$ στοιχεία του A είναι όλα γραμμικοί συνδυασμοί των $b_1 = a_{n_1}$ και $b_2 = a_{n_2}$, οπότε ο υπόχωρος που παράγεται από τα στοιχεία του A μέχρι και το $b_3 = a_{n_3}$ είναι ο ίδιος με τον υπόχωρο που παράγεται από τα $b_1 = a_{n_1}$, $b_2 = a_{n_2}$ και $b_3 = a_{n_3}$. Επίσης, τα $b_1 = a_{n_1}$, $b_2 = a_{n_2}$ και $b_3 = a_{n_3}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Συνεχίζουμε αυτήν τη διαδικασία επ' άπειρον και δημιουργούμε το σύνολο $B = \{b_1, b_2, \dots\}$, το οποίο είναι υποσύνολο του A , έτσι ώστε για κάθε k ο υπόχωρος που παράγεται από τα στοιχεία του A μέχρι και το $b_k = a_{n_k}$ είναι ο ίδιος με τον υπόχωρο που παράγεται από τα στοιχεία του B μέχρι και το b_k . Αυτό συνεπάγεται ότι ο υπόχωρος V του H που παράγεται από το A είναι ο ίδιος με τον υπόχωρο που παράγεται από το B . Επίσης, το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Τώρα, ο V περιέχει το A και, επειδή το A είναι πυκνό στον H , συνεπάγεται ότι και ο V είναι πυκνός στον H . Τώρα εφαρμόζουμε τη διαδικασία Gram-Schmidt. Αυτή συνίσταται στη διαδοχική δημιουργία των στοιχείων $f_1, e_1, f_2, e_2, \dots$ με τους τύπους:

$$\begin{aligned} f_1 &= b_1 & e_1 &= \frac{1}{\|f_1\|} f_1 \\ f_2 &= b_2 - \langle b_2, e_1 \rangle e_1 & e_2 &= \frac{1}{\|f_2\|} f_2 \\ f_3 &= b_3 - \langle b_3, e_1 \rangle e_1 - \langle b_3, e_2 \rangle e_2 & e_3 &= \frac{1}{\|f_3\|} f_3 \\ f_4 &= b_4 - \langle b_4, e_1 \rangle e_1 - \langle b_4, e_2 \rangle e_2 - \langle b_4, e_3 \rangle e_3 & e_4 &= \frac{1}{\|f_4\|} f_4 \\ &\dots & &\dots \end{aligned}$$

Τώρα, μπορεί να δει κανείς πολύ εύκολα ότι το σύνολο $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ είναι ορθοκανονικό, παρατηρώντας ότι, προφανώς, τα e_1, e_2, \dots είναι κανονικά και μετά ότι το e_2 είναι ορθογώνιο με το e_1 , το e_3 είναι ορθογώνιο με τα e_1, e_2 , το e_4 είναι ορθογώνιο με τα e_1, e_2, e_3 και ούτω καθεξής.

Τέλος, ο υπόχωρος που παράγεται από το E είναι ο ίδιος με τον υπόχωρο που παράγεται από το B , δηλαδή είναι ο V . Πράγματι, παρατηρούμε επαγωγικά, όπως στην προηγούμενη παράγραφο, ότι για κάθε k κάθε γραμμικός συνδυασμός των b_1, \dots, b_k είναι γραμμικός συνδυασμός των e_1, \dots, e_k και αντιστρόφως.

Τώρα θα δούμε ότι, επειδή ο υπόχωρος V που παράγεται από το ορθοκανονικό σύνολο E είναι πυκνός στον H , το E είναι ορθοκανονική βάση του H .

Έστω $x \in H$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $y \in V$ ώστε $\|x - y\| < \epsilon$. Επειδή $y \in V$, υπάρχει m_0 και αριθμοί $\lambda_1, \dots, \lambda_{m_0}$ ώστε

$$y = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{m_0} e_{m_0}.$$

Από το Λήμμα 1.8 συνεπάγεται ότι για κάθε $m \geq m_0$ ισχύει

$$\left\| x - \sum_{n=1}^m \langle x, e_n \rangle e_n \right\| \leq \left\| x - \left(\sum_{n=1}^{m_0} \lambda_n e_n + \sum_{n=m_0+1}^m 0 e_n \right) \right\| = \|x - y\| < \epsilon.$$

Άρα $\sum_{n=1}^m \langle x, e_n \rangle e_n \rightarrow x$ όταν $m \rightarrow +\infty$, οπότε

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

□

Στην περίπτωση του χώρου Hilbert $L^2([0, 1])$, δηλαδή του χώρου των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων 1-περιοδικών συναρτήσεων, γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις e_n με τύπους $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύνολο. Αυτό που θα πρέπει να απαντήσουμε είναι αν αυτό το σύνολο αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L^2([0, 1])$.

Κεφάλαιο 2

Σειρές Fourier.

2.1 Σειρές Fourier στον $L^1([0, 1])$.

Ορισμός. Έστω 1-περιοδική συνάρτηση f ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0, 1)$, δηλαδή $f \in L^1([0, 1])$. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τον n -οστό συντελεστή Fourier $\widehat{f}(n)$ της f με τύπο

$$\widehat{f}(n) = \int_{[0,1)} f(x)e^{-2\pi inx} dx.$$

Σχόλι α. [1] Αν θυμηθούμε τις συναρτήσεις $e_n(x) = e^{2\pi inx}$, τότε

$$\widehat{f}(n) = \int_{[0,1)} f(x)\overline{e_n(x)} dx = \int_{[0,1)} f(x)e_{-n}(x) dx.$$

[2] Επειδή, εκτός από την f , και οι συναρτήσεις e_n είναι 1-περιοδικές, το ολοκλήρωμα μπορεί να θεωρηθεί σε οποιοδήποτε διάστημα μήκους 1 χωρίς να αλλάξει η τιμή του.

[3] Η συνάρτηση $e_n(x) = e^{2\pi inx}$ είναι 1-περιοδική μόνο αν ο n είναι ακέραιος. Αυτό είναι απλό να αποδειχθεί: προκύπτει αμέσως από την ισότητα $e_n(1) = e_n(0)$.

Ορισμός. Έστω 1-περιοδική συνάρτηση f ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0, 1)$. Ορίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier της f και τον σύμβολίζουμε $\mathcal{F}(f)$ ή \widehat{f} να είναι συνάρτηση

$$\mathcal{F}(f) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{ή} \quad \widehat{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$$

με τύπο

$$\mathcal{F}(f)(n) = \widehat{f}(n) = \int_{[0,1)} f(x)e^{-2\pi inx} dx$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Επειδή η συνάρτηση $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ έχει ως πεδίο ορισμού το \mathbb{Z} , μπορούμε να την γράψουμε και με τη μορφή ακολουθίας

$$\mathcal{F}(f) = \widehat{f} = (\widehat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Πρόταση 2.1. Για κάθε $f, g \in L^1([0, 1])$ και αριθμό λ ισχύει

(i) $\widehat{(f + g)}(n) = \widehat{f}(n) + \widehat{g}(n)$ για κάθε n .

(ii) $\widehat{(\lambda f)}(n) = \lambda \widehat{f}(n)$ για κάθε n .

(iii) $\widehat{(f * g)}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$ για κάθε n .

Απόδειξη. (i) Για κάθε n ,

$$\widehat{(f + g)}(n) = \int_{[0,1)} (f(x) + g(x))e^{-2\pi inx} dx = \int_{[0,1)} f(x)e^{-2\pi inx} dx + \int_{[0,1)} g(x)e^{-2\pi inx} dx = \widehat{f}(n) + \widehat{g}(n).$$

(ii) Για κάθε n ,

$$(\widehat{\lambda f})(n) = \int_{[0,1)} \lambda f(x) e^{-2\pi i n x} dx = \lambda \int_{[0,1)} f(x) e^{-2\pi i n x} dx = \lambda \widehat{f}(n).$$

(iii) Για κάθε n ,

$$\begin{aligned} (\widehat{f * g})(n) &= \int_{[0,1)} (f * g)(x) e^{-2\pi i n x} dx = \int_{[0,1)} \left(\int_{[0,1)} f(x-y) g(y) dy \right) e^{-2\pi i n x} dx \\ &= \int_{[0,1)} \left(\int_{[0,1)} f(x-y) g(y) e^{-2\pi i n x} dx \right) dy \\ &= \int_{[0,1)} \left(\int_{[0,1)} f(x-y) e^{-2\pi i n (x-y)} dx \right) g(y) e^{-2\pi i n y} dy \\ &= \int_{[0,1)} \left(\int_{[-y, 1-y)} f(x) e^{-2\pi i n x} dx \right) g(y) e^{-2\pi i n y} dy \\ &= \int_{[0,1)} \left(\int_{[0,1)} f(x) e^{-2\pi i n x} dx \right) g(y) e^{-2\pi i n y} dy \\ &= \int_{[0,1)} \widehat{f}(n) g(y) e^{-2\pi i n y} dy = \widehat{f}(n) \int_{[0,1)} g(y) e^{-2\pi i n y} dy \\ &= \widehat{f}(n) \widehat{g}(n). \end{aligned}$$

□

Πρόταση 2.2. Για κάθε $f \in L^1([0, 1))$ και αριθμό h και ακέραιο m ισχύει

(i) $(\widehat{e_m f})(n) = \mu_m(\widehat{f})(n)$ για κάθε n .

(ii) $(\widehat{\mu_h f})(n) = e_{-h}(n) \widehat{f}(n)$ για κάθε n .

Απόδειξη. (i) Για κάθε n ,

$$(\widehat{e_m f})(n) = \int_{[0,1)} e^{2\pi i m x} f(x) e^{-2\pi i n x} dx = \int_{[0,1)} f(x) e^{-2\pi i (n-m)x} dx = \widehat{f}(n-m) = \mu_m(\widehat{f})(n).$$

(ii) Για κάθε n ,

$$\begin{aligned} (\widehat{\mu_h f})(n) &= \int_{[0,1)} f(x-h) e^{-2\pi i n x} dx = e^{-2\pi i n h} \int_{[0,1)} f(x-h) e^{-2\pi i n (x-h)} dx \\ &= e_{-h}(n) \int_{[-h, 1-h)} f(x) e^{-2\pi i n x} dx = e_{-h}(n) \int_{[0,1)} f(x) e^{-2\pi i n x} dx \\ &= e_{-h}(n) \widehat{f}(n). \end{aligned}$$

□

Πρόταση 2.3. Για κάθε $f \in L^1([0, 1))$ ισχύει

(i) $\sup_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| \leq \|f\|_1$.

(ii) $\widehat{f}(n) \rightarrow 0$ όταν $n \rightarrow \pm\infty$.

Απόδειξη. (i) Για κάθε n ,

$$|\widehat{f}(n)| = \left| \int_{[0,1)} f(x) e^{-2\pi i n x} dx \right| \leq \int_{[0,1)} |f(x)| |e^{-2\pi i n x}| dx = \int_{[0,1)} |f(x)| dx = \|f\|_1.$$

Άρα $\sup_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| \leq \|f\|_1$.
(ii) Επειδή, $e^{-2\pi i n \frac{1}{2n}} = -1$,

$$\begin{aligned}\widehat{f}(n) &= - \int_{[0,1)} f(x) e^{-2\pi i n (x + \frac{1}{2n})} dx = - \int_{[\frac{1}{2n}, 1 + \frac{1}{2n})} f(x - \frac{1}{2n}) e^{-2\pi i n x} dx \\ &= - \int_{[0,1)} f(x - \frac{1}{2n}) e^{-2\pi i n x} dx = - \widehat{\mu_{\frac{1}{2n}}(f)}(n).\end{aligned}$$

Άρα

$$2\widehat{f}(n) = \widehat{f}(n) - \widehat{\mu_{\frac{1}{2n}}(f)}(n) = (f - \mu_{\frac{1}{2n}}(f))(n),$$

οπότε

$$2|\widehat{f}(n)| = |(f - \mu_{\frac{1}{2n}}(f))(n)| \leq \|f - \mu_{\frac{1}{2n}}(f)\|_1 \rightarrow 0$$

όταν $n \rightarrow \pm\infty$.

Άρα $\widehat{f}(n) \rightarrow 0$ όταν $n \rightarrow \pm\infty$. □

Σχόλιο. Η ιδιότητα $\widehat{f}(n) \rightarrow 0$ αναφέρεται στην βιβλιογραφία ως **λήμμα Riemann - Lebesgue**.

Στο σημείο αυτό θα ήταν καλό να ορίσουμε μερικούς χώρους ακολουθιών, δηλαδή σύνολα τα στοιχεία των οποίων είναι ακολουθίες.

Ορισμός. Συμβολίζουμε l^∞ τον χώρο τα στοιχεία του οποίου είναι όλες οι φραγμένες ακολουθίες:

$$l^\infty = \{a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid \text{υπάρχει } M \text{ ώστε } |a_n| \leq M \text{ για κάθε } n \in \mathbb{Z}\}.$$

Συμβολίζουμε c_0 τον χώρο τα στοιχεία του οποίου είναι όλες οι μηδενικές ακολουθίες:

$$c_0 = \{a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid a_n \rightarrow 0 \text{ όταν } n \rightarrow \pm\infty\}.$$

Σχόλιο. [1] Οι ακολουθίες που εξετάζουμε είναι “διπλής κατεύθυνσης”. Με τα ίδια σύμβολα, l^∞ και c_0 , έχουμε και τους αντίστοιχους χώρους με στοιχεία συνηθισμένες ακολουθίες “μονής κατεύθυνσης”. Μπορούμε να θεωρούμε ότι μια ακολουθία διπλής κατεύθυνσης είναι “συγκόληση” δυο ακολουθιών μονής κατεύθυνσης.

[2] Οι ακολουθίες που εξετάζουμε είναι μιγαδικές. Με τα ίδια σύμβολα έχουμε και τους αντίστοιχους χώρους με στοιχεία πραγματικές ακολουθίες.

Επειδή κάθε μηδενική ακολουθία είναι φραγμένη, ισχύει

$$c_0 \subseteq l^\infty.$$

Στους χώρους l^∞ και c_0 ορίζουμε τρεις πράξεις: την πρόσθεση ακολουθιών, τον πολλαπλασιασμό αριθμού και ακολουθίας και τον πολλαπλασιασμό ακολουθιών. Και οι τρεις πράξεις γίνονται “κατά συντεταγμένη”. Δηλαδή, αν

$$a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}, \quad b = (b_n)_{n \in \mathbb{Z}},$$

τότε

$$a + b = (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{Z}}, \quad \lambda a = (\lambda a_n)_{n \in \mathbb{Z}}, \quad ab = (a_n b_n)_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Το άθροισμα φραγμένων ακολουθιών, το γινόμενο αριθμού και φραγμένης ακολουθίας και το γινόμενο φραγμένων ακολουθιών είναι όλα φραγμένες ακολουθίες. Άρα ο l^∞ είναι μεταθετική άλγεβρα. Το ίδιο ισχύει και για τον c_0 : είναι κι αυτός μεταθετική άλγεβρα. Ο c_0 είναι υποάλγεβρα του l^∞ . (Στην πραγματικότητα, ο c_0 είναι κάτι ισχυρότερο: είναι ιδεώδες στον l^∞ . Πράγματι, το γινόμενο φραγμένης ακολουθίας και μηδενικής ακολουθίας είναι μηδενική ακολουθία.)

Στους χώρους l^∞ και c_0 μπορούμε να ορίσουμε νόρμα. Αν η ακολουθία $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ είναι στοιχείο του l^∞ , δηλαδή αν το σύνολο των όρων της είναι φραγμένο, τότε ορίζουμε

$$\|a\|_\infty = \sup\{|a_n| \mid n \in \mathbb{Z}\} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|.$$

Δηλαδή, το $\|a\|_\infty$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου των μέτρων των όρων της a . Τότε:

[1] Προφανώς, $0 \leq \|a\|_\infty < +\infty$ και, αν $\|a\|_\infty = 0$, τότε $\sup\{|a_n| \mid n \in \mathbb{Z}\} = 0$, οπότε $a_n = 0$ για κάθε n , οπότε $a = (0)_{n \in \mathbb{Z}}$.

[2] Για κάθε n ισχύει

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| \leq \|a\|_\infty + \|b\|_\infty,$$

οπότε

$$\|a + b\|_\infty \leq \|a\|_\infty + \|b\|_\infty.$$

[3] Για κάθε n ισχύει

$$|\lambda a_n| = |\lambda| |a_n| \leq |\lambda| \|a\|_\infty,$$

οπότε

$$\|\lambda a\|_\infty \leq |\lambda| \|a\|_\infty.$$

Επίσης, εφαρμόζοντας αυτήν την ανισότητα στην ακολουθία λa και στον αριθμό $\frac{1}{\lambda}$, έχουμε

$$\|a\|_\infty = \left\| \frac{1}{\lambda} \lambda a \right\|_\infty \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda a\|_\infty,$$

οπότε

$$|\lambda| \|a\|_\infty \leq \|\lambda a\|_\infty.$$

Από τις δυο αντίθετες ανισότητες προκύπτει η $\|\lambda a\|_\infty = |\lambda| \|a\|_\infty$.

Άρα η νόρμα $\|a\|_\infty$, όπως την ορίσαμε για κάθε στοιχείο a του l^∞ , έχει τις τρεις ιδιότητες που την κάνουν να είναι πραγματικά νόρμα στον χώρο l^∞ .

Επειδή κάθε στοιχείο του c_0 είναι και στοιχείο του l^∞ , ορίζεται η $\|a\|_\infty$ και για κάθε στοιχείο a του c_0 . Άρα με τον ίδιο τύπο έχουμε μια νόρμα και στον c_0 . Δηλαδή, οι l^∞ και c_0 είναι γραμμικοί χώροι με νόρμα. Παρατηρήστε ότι και στους δυο χώρους έχουμε ορίσει την ίδια νόρμα. Η νόρμα του c_0 είναι ο περιορισμός της νόρμας του l^∞ στον μικρότερο χώρο c_0 .

Η νόρμα που ορίσαμε έχει και μια τέταρτη ιδιότητα:

[4] Για κάθε n ισχύει

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| \leq \|a\|_\infty \|b\|_\infty,$$

οπότε

$$\|ab\|_\infty \leq \|a\|_\infty \|b\|_\infty.$$

Αυτό σημαίνει ότι οι l^∞ και c_0 είναι μεταθετικές άλγεβρες με νόρμα.

Ισχύει, αλλά δεν θα το αποδείξουμε (όχι διότι είναι πολύ δύσκολο, αλλά διότι δεν θα το χρειαστούμε), ότι οι χώροι l^∞ και c_0 είναι πλήρεις, δηλαδή ότι είναι μεταθετικές άλγεβρες Banach.

Όπως είδαμε, ο μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ μιας 1-περιοδικής $f \in L^1([0, 1])$ είναι η ακολουθία $(\widehat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$. Τώρα, η Πρόταση 2.3 λέει ότι η ακολουθία αυτή είναι φραγμένη και μάλιστα μηδενική. Δηλαδή $\mathcal{F}(f) = \widehat{f} \in c_0$. Επίσης,

$$\|\mathcal{F}(f)\|_\infty = \|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

Άρα έχουμε την απεικόνιση

$$\mathcal{F} : L^1([0, 1]) \rightarrow c_0.$$

Μάλιστα, η Πρόταση 2.1 λέει ότι η απεικόνιση αυτή “διατηρεί τις πράξεις” των αλγεβρών $L^1([0, 1])$ και c_0 . Δηλαδή, ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένας **ομομορφισμός** αλγεβρών. Ειδικότερα, ο μετασχηματισμός Fourier είναι γραμμική απεικόνιση από τον γραμμικό χώρο $L^1([0, 1])$ στον γραμμικό χώρο c_0 . Πράγματι,

$$\mathcal{F}(f + g) = ((f + g)(n))_{n \in \mathbb{Z}} = (\widehat{f}(n) + \widehat{g}(n))_{n \in \mathbb{Z}} = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g).$$

$$\mathcal{F}(\lambda f) = ((\lambda f)(n))_{n \in \mathbb{Z}} = (\lambda \widehat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}} = \lambda \mathcal{F}(f).$$

$$\mathcal{F}(f * g) = ((f * g)(n))_{n \in \mathbb{Z}} = (\widehat{f}(n) \widehat{g}(n))_{n \in \mathbb{Z}} = \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g).$$

Στην Συναρτησιακή Ανάλυση, όταν έχουμε δυο γραμμικούς χώρους με νόρμα, τον X και τον Y , και μια γραμμική απεικόνιση ή **γραμμικό τελεστή** $T : X \rightarrow Y$ έτσι ώστε να υπάρχει αριθμός M ώστε να ισχύει

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|$$

για κάθε $x \in X$ (προσέξτε: η νόρμα $\|T(x)\|$ είναι η νόρμα του $T(x)$ στον χώρο Y και η $\|x\|$ είναι η νόρμα του x στον χώρο X), τότε λέμε ότι ο T είναι ένας **φραγμένος γραμμικός τελεστής**. Άρα, στην περίπτωση μας, ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής από τον $L^1([0, 1])$ στον c_0 με $M = 1$, διότι ισχύει $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_1$ για κάθε $f \in L^1([0, 1])$. Σε τέτοια περίπτωση ο T είναι **συνεχής** απεικόνιση από τον X στον Y . Πράγματι, έστω ακολουθία (x_n) στον X ώστε $x_n \rightarrow x$ στον X . Δηλαδή $\|x_n - x\| \rightarrow 0$. Τότε

$$\|T(x_n) - T(x)\| = \|T(x_n - x)\| \leq M\|x_n - x\|$$

και, επομένως, $T(x_n) \rightarrow T(x)$ στον Y . (Η ισότητα $T(x_n) - T(x) = T(x_n - x)$ ισχύει επειδή ο T είναι γραμμικός τελεστής.) Άρα, και στην περίπτωση μας, ο μετασχηματισμός Fourier είναι **συνεχής** απεικόνιση από τον $L^1([0, 1])$ στον c_0 . Δηλαδή, όταν η ακολουθία (f_n) συγκλίνει στην f στον $L^1([0, 1])$, τότε η ακολουθία $(\mathcal{F}(f_n))$ συγκλίνει στην $\mathcal{F}(f)$ στον c_0 . Προσέξτε: η $(\mathcal{F}(f_n))$ είναι ακολουθία ακολουθιών!!! Κάθε $\mathcal{F}(f_n)$ είναι μια ακολουθία στον c_0 .

Κάτι που θα μας ενδιέφερε να δούμε, είναι αν ο $\mathcal{F} : L^1([0, 1]) \rightarrow c_0$ είναι απεικόνιση ένα-προς-ένα και επί. Αποδεικνύεται ότι **δεν είναι επί** (αυτό δεν θα το δούμε) και ότι **είναι ένα-προς-ένα**. Αυτό το τελευταίο θα το αποδείξουμε σε λίγο.

Το κεντρικό πρόβλημα στην Αρμονική Ανάλυση είναι το εξής:

Πώς θα βρούμε την 1-περιοδική $f \in L^1([0, 1])$ όταν γνωρίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier της f , δηλαδή την ακολουθία $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ των συντελεστών Fourier της f ; Δηλαδή, έχουμε το πρόβλημα ανακατασκευής της συνάρτησης από τον μετασχηματισμό Fourier της.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα. Κατ' αρχάς να πούμε ότι ο ακέραιος n ονομάζεται **συχνότητα** της εκθετικής συνάρτησης $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$.

Παράδειγμα. Έστω ότι η f είναι ένα εκθετικό πολυώνυμο:

$$f(x) = \sum_{j=m}^n a_j e_j(x) = \sum_{j=m}^n a_j e^{2\pi i j x}.$$

Τότε

$$\hat{f}(k) = \int_{[0,1]} f(x) \overline{e_k(x)} dx = \sum_{j=m}^n a_j \int_{[0,1]} e_j(x) \overline{e_k(x)} dx = \begin{cases} a_k, & \text{αν } m \leq k \leq n \\ 0, & \text{αν } k < m \text{ ή } n < k \end{cases}$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε

$$f(x) = \sum_{j=m}^n \hat{f}(j) e_j(x) = \sum_{j=m}^n \hat{f}(j) e^{2\pi i j x} \quad \text{για κάθε } x.$$

Δηλαδή, στην περίπτωση αυτή το πρόβλημά μας έχει απλή λύση. Αν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι η f είναι εκθετικό πολυώνυμο και γνωρίζουμε και όλους τους συντελεστές Fourier $\hat{f}(k)$ της f , τότε (i) επιβεβαιώνουμε ότι η f είναι εκθετικό πολυώνυμο, αφού πρέπει να είναι $\hat{f}(k) = 0$ για κάθε k που είναι έξω από κάποιο φραγμένο εύρος συχνοτήτων $[m, n]$ και (ii) αναγνωρίζουμε τους συντελεστές a_k της f στο εύρος συχνοτήτων $[m, n]$ αφού πρέπει να είναι $a_k = \hat{f}(k)$ για κάθε k με $m \leq k \leq n$ και, επίσης, είναι $a_k = \hat{f}(k) = 0$ για κάθε k με $k < m$ ή $n < k$ και άρα (iii) η f είναι ακριβώς το εκθετικό πολυώνυμο που δίνεται από τον προηγούμενο τύπο. Μάλιστα, στην περίπτωση αυτή μπορούμε να γράψουμε

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{f}(j) e_j(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{f}(j) e^{2\pi i j x} \quad \text{για κάθε } x$$

αφού το άθροισμα είναι πεπερασμένο και δεν υπάρχει πρόβλημα σύγκλισης.

Το παράδειγμα αυτό υποβάλλει μια ιδέα και έναν αντίστοιχο ορισμό. Ο ορισμός είναι ο εξής.

Ορισμός. Για κάθε 1-περιοδική $f \in L^1([0, 1])$ σχηματίζουμε την σειρά

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e_n(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}.$$

Η σειρά αυτή ονομάζεται **σειρά Fourier** της f .

Και τώρα η ιδέα.

Μήπως για κάθε 1-περιοδική $f \in L^1([0, 1])$ ισχύει ο εξής τύπος;

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e_n(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}.$$

Είδαμε ότι ο τύπος αυτός ισχύει για κάθε x όταν η f είναι εκθετικό πολυώνυμο. Όμως, στη γενική περίπτωση, η σειρά Fourier της f δεν είναι πεπερασμένο άθροισμα και δεν είναι βέβαιο αν η σειρά Fourier συγκλίνει για κάποιους (αν όχι για όλους) τους x και αν, για οποιονδήποτε x για τον οποίο συγκλίνει, το άθροισμά της είναι ίσο με την αντίστοιχη τιμή $f(x)$ της f .

Η επόμενη πρόταση μας δίνει μια κατηγορία παραδειγμάτων η οποία περιλαμβάνει τα παραδείγματα των εκθετικών πολυωνύμων ως ειδική περίπτωση.

Πρόταση 2.4. Έστω

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n| < +\infty.$$

Τότε η εκθετική σειρά $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e_n(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n x}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο \mathbb{R} και ορίζει μια 1-περιοδική, συνεχή στο \mathbb{R} συνάρτηση f . Επίσης, ισχύει $\hat{f}(n) = a_n$ για κάθε n , οπότε η σειρά Fourier της f ταυτίζεται με την εκθετική σειρά και, επομένως, η συνάρτηση f ισούται με το άθροισμα της σειράς Fourier της παντού στο \mathbb{R} . Δηλαδή, ισχύει

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} \quad \text{για κάθε } x.$$

Απόδειξη. Έστω η εκθετική σειρά

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e_n(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n x}$$

με την υπόθεση ότι $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n| < +\infty$.

Επειδή $|a_n e^{2\pi i n x}| = |a_n|$ για κάθε n και για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από το κριτήριο του Weierstrass συνεπάγεται ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n x}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο \mathbb{R} και, επειδή κάθε $a_n e^{2\pi i n x}$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} , το άθροισμα της σειράς είναι συνάρτηση συνεχής στο \mathbb{R} . Δηλαδή ορίζεται συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n x} \quad \text{για κάθε } x$$

και η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} . Η f είναι, προφανώς, 1-περιοδική, αφού κάθε $e^{2\pi i n x}$ είναι 1-περιοδική συνάρτηση. Τώρα, θεωρούμε τα “συμμετρικά” μερικά αθροίσματα της σειράς:

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{2\pi i k x}.$$

Όπως είπαμε ισχύει $s_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο \mathbb{R} . Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |s_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

όταν $n \rightarrow +\infty$.

Τώρα, έστω $n \geq |k|$, οπότε ο k είναι μέσα στο εύρος συχνοτήτων $[-n, n]$ του εκθετικού πολυωνύμου s_n . Τότε $\widehat{s}_n(k) = a_k$, οπότε

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(k) - a_k| &= |\widehat{f}(k) - \widehat{s}_n(k)| = |(\widehat{f - s_n})(k)| \leq \|f - s_n\|_1 = \int_{[0,1]} |f(x) - s_n(x)| dx \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - s_n(x)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

όταν $n \rightarrow +\infty$ και, επομένως,

$$\widehat{f}(k) = a_k.$$

Αυτό ισχύει για κάθε k , οπότε

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x} \quad \text{για κάθε } x.$$

□

Παράδειγμα. Έστω η $f(x) = 1 - 4x^2$ στο διάστημα $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, επεκτεταμένη περιοδικά στο \mathbb{R} . Η f είναι 1-περιοδική και συνεχής στο \mathbb{R} . Υπολογίζουμε:

$$\widehat{f}(0) = \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} (1 - 4x^2) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 4x^2) dx = \frac{2}{3}$$

και, για $n \neq 0$,

$$\widehat{f}(n) = \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} (1 - 4x^2) e^{2\pi i n x} dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 4x^2) \cos(2\pi n x) dx = -\frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2}$$

μετά από μερικές ολοκληρώσεις κατά μέρη.

Τώρα θεωρούμε την εκθετική σειρά

$$\frac{2}{3} - \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2} e^{2\pi i n x} = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(2\pi n x),$$

δηλαδή ακριβώς τη σειρά Fourier της f . Προσέξτε ότι, επειδή η f είναι άρτια, προέκυψαν συντελεστές Fourier που ικανοποιούν την $\widehat{f}(-n) = \widehat{f}(n)$ για κάθε n , οπότε η εκθετική σειρά ισούται με σειρά συνημιτόνων.

Επειδή

$$\frac{2}{3} + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \left| \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2} \right| = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

από την Πρόταση 2.4 συνεπάγεται ότι η εκθετική σειρά που έχουμε, δηλαδή η σειρά Fourier της f , συγκλίνει ομοιόμορφα στο \mathbb{R} και ορίζει μια 1-περιοδική, συνεχή στο \mathbb{R} συνάρτηση g . Επίσης, ισχύει

$$\widehat{g}(n) = \widehat{f}(n)$$

για κάθε n και, επομένως, η σειρά Fourier της g ταυτίζεται με τη σειρά Fourier της f . Επίσης (όλα αυτά από την Πρόταση 2.4) η συνάρτηση g ισούται με το άθροισμα της σειράς Fourier της, δηλαδή με το άθροισμα της σειράς Fourier της f , παντού στο \mathbb{R} . Δηλαδή, ισχύει

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(n) e^{2\pi i n x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x} = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(2\pi n x) \quad \text{για κάθε } x.$$

Τώρα, προσέξτε: η Πρόταση 2.4 δεν μας δίνει κάποια πληροφορία για τον τύπο της g πέρα από το ότι ισούται με την εκθετική σειρά. Ειδικότερα, δεν μας λέει ποιά είναι η σχέση του τύπου της g με τον τύπο της f . Για

παράδειγμα, θα θέλαμε να ισχύει $g(x) = f(x) = 1 - 4x^2$ για $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, διότι αυτό θα μας έλεγε ότι η αρχική συνάρτηση f είναι ίση με την σειρά Fourier της παντού στο $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ και, επομένως, λόγω 1-περιοδικότητας, παντού στο \mathbb{R} . Ένα τέτοιο συμπέρασμα θα το είχαμε αν γνωρίζαμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένα-προς-ένα. Πράγματι, τότε θα συμπεραίναμε ότι η g είναι ίδια με την f διότι έχουν τους ίδιους συντελεστές Fourier. Κάτι τέτοιο, προς το παρόν, δεν το έχουμε αποδείξει.

Πρόταση 2.5. Έστω 1-περιοδική f η οποία είναι k φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , όπου $k \geq 1$. Τότε ισχύει

(i) $(-2\pi in)^k \widehat{f}(n) = \widehat{f^{(k)}}(n)$ για κάθε n .

(ii) $|\widehat{f}(n)| \leq \frac{c_k(f)}{|n|^k}$ για κάθε $n \neq 0$, όπου $c_k(f)$ είναι μη-αρνητική σταθερά που εξαρτάται μόνο από την f και τον k .

Απόδειξη. (i) Με ολοκλήρωση κατά μέρη, και επειδή $f(1) = f(0)$,

$$\widehat{f}'(n) = \int_{[0,1)} f'(x)e^{2\pi inx} dx = f(1)e^{2\pi in} - f(0) - 2\pi in \int_{[0,1)} f(x)e^{2\pi inx} dx = -2\pi in \widehat{f}(n).$$

Τώρα, επαγωγικά,

$$\widehat{f}''(n) = -2\pi in \widehat{f}'(n) = (-2\pi in)(-2\pi in)\widehat{f}(n) = (-2\pi in)^2 \widehat{f}(n),$$

κλπ, μέχρι,

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = -2\pi in \widehat{f^{(k-1)}}(n) = (-2\pi in)(-2\pi in)^{k-1} \widehat{f}(n) = (-2\pi in)^k \widehat{f}(n),$$

(ii) Τώρα, αν $n \neq 0$, έχουμε

$$|\widehat{f}(n)| = \frac{1}{2^k \pi^k |n|^k} |\widehat{f^{(k)}}(n)| \leq \frac{1}{2^k \pi^k |n|^k} \|f^{(k)}\|_1$$

οπότε ισχύει $|\widehat{f}(n)| \leq \frac{c_k(f)}{|n|^k}$ με $c_k(f) = \frac{1}{2^k \pi^k} \|f^{(k)}\|_1$. □

Πόρισμα 2.1. Έστω 1-περιοδική f η οποία είναι k φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , όπου $k \geq 2$. Τότε η σειρά Fourier της f είναι απολύτως αθροίσιμη, δηλαδή $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < +\infty$.

Άρα για μια συνάρτηση όπως στο πόρισμα ισχύουν όσα είπαμε στο προηγούμενο παράδειγμα σε σχέση με την Πρόταση 2.4.

Τώρα θα μελετήσουμε την σύγκλιση της σειράς Fourier μιας 1-περιοδικής $f \in L^1([0, 1))$.

Ορισμός. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ με $n \geq 0$ ορίζουμε την 1-περιοδική συνάρτηση

$$D_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi(2n+1)x)}{\sin(\pi x)}, & \text{αν } x \notin \mathbb{Z} \\ 2n+1, & \text{αν } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Το σύνολο των συναρτήσεων $\{D_n \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$ ονομάζεται **πυρήνας Dirichlet**.

Κάθε D_n είναι συνεχής στο \mathbb{R} εκτός ίσως στα σημεία του \mathbb{Z} . Αρκεί, λόγω 1-περιοδικότητας, να δούμε αν η D_n είναι συνεχής στον 0 και, πράγματι,

$$\lim_{x \rightarrow 0} D_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi(2n+1)x)}{\sin(\pi x)} = 2n+1 = D_n(0).$$

Άρα κάθε D_n είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

Λήμμα 2.1. Για κάθε n ισχύει

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{2\pi ikx} \quad \text{για κάθε } x.$$

Απόδειξη. Αν $x \in \mathbb{Z}$, τότε $e^{2\pi ix} = 1$ και

$$\sum_{k=-n}^n e^{2\pi ikx} = \sum_{k=-n}^n 1 = 2n + 1 = D_n(x).$$

Αν $x \notin \mathbb{Z}$, τότε $e^{2\pi ix} \neq 1$. Θέτουμε, για συντομία, $z = e^{2\pi ix} \neq 1$ και έχουμε

$$\sum_{k=-n}^n e^{2\pi ikx} = \sum_{k=-n}^n z^k = z^{-n} \sum_{k=-n}^n z^{k+n} = z^{-n} \sum_{k=0}^{2n} z^k = z^{-n} \frac{z^{2n+1} - 1}{z - 1}.$$

Τώρα, θέτουμε $w = e^{\pi ix} \neq \pm 1$, οπότε $z = w^2$ και

$$\sum_{k=-n}^n e^{2\pi ikx} = w^{-2n} \frac{w^{4n+2} - 1}{w^2 - 1} = \frac{w^{2n+1} - w^{-(2n+1)}}{w - w^{-1}} = \frac{2i \sin(\pi(2n+1)x)}{2i \sin(\pi x)} = D_n(x).$$

□

Άρα κάθε D_n είναι ένα εκθετικό πολυώνυμο με εύρος συχνοτήτων ακριβώς $[-n, n]$ και συντελεστές Fourier $\widehat{D}_n(k) = 1$ για κάθε k στο $[-n, n]$ και $\widehat{D}_n(k) = 0$ για κάθε k έξω από το $[-n, n]$. Ειδικότερα,

$$\int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} D_n(x) dx = \widehat{D}_n(0) = 1.$$

Ορισμός. Έστω 1-περιοδική $f \in L^1([0, 1))$. Για κάθε $n \geq 0$ συμβολίζουμε

$$s_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{2\pi ikx}$$

το n -οστό συμμετρικό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της f .

Πρόταση 2.6. Έστω 1-περιοδική $f \in L^1([0, 1))$. Τότε για κάθε n

$$s_n(f)(x) = (f * D_n)(x) = \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} f(x-y) D_n(y) dy \quad \text{για κάθε } x.$$

Σχόλιο. Στο $\int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} f(x-y) D_n(y) dy$ προτιμάμε το συμμετρικό διάστημα $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, διότι η $D_n(y)$ είναι άρτια.

Απόδειξη. Είναι

$$\begin{aligned} s_n(f)(x) &= \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{2\pi ikx} = \sum_{k=-n}^n \left(\int_{[0,1)} f(y) e^{-2\piiky} dy \right) e^{2\pi ikx} \\ &= \sum_{k=-n}^n \int_{[0,1)} f(y) e^{2\pi ik(x-y)} dy = \int_{[0,1)} f(y) \left(\sum_{k=-n}^n e^{2\pi ik(x-y)} \right) dy \\ &= \int_{[0,1)} f(y) D_n(x-y) dy = (f * D_n)(x). \end{aligned}$$

□

Αποδεικνύεται, όχι πολύ δύσκολα αλλά θα αποφύγουμε να το κάνουμε, ότι υπάρχουν δυο θετικές σταθερές c_1, c_2 ανεξάρτητες του n ώστε

$$c_1 \log(n+1) \leq \|D_n\|_1 = \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} |D_n(x)| dx \leq c_2 \log(n+1)$$

για κάθε $n \geq 1$. Από την αριστερή ανισότητα συνεπάγεται ότι

$$\|D_n\|_1 \rightarrow +\infty$$

όταν $n \rightarrow +\infty$. Το ότι οι 1-νόρμες των D_n δεν είναι φραγμένες δημιουργεί προβλήματα όταν θέλει κάποιος να αποδείξει ότι τα μερικά αθροίσματα $s_n(f)$ συγκλίνουν στην f . Μάλιστα, υπάρχουν παραδείγματα συναρτήσεων f όπου τα μερικά αθροίσματα $s_n(f)$ δεν συγκλίνουν στην f . Γι αυτό ακολουθούμε μια λίγο διαφορετική πορεία και αντί να μελετήσουμε τη σύγκλιση των μερικών αθροισμάτων $s_n(f)$ μελετάμε τη σύγκλιση των μέσων όρων των μερικών αθροισμάτων.

Ορισμός. Έστω 1-περιοδική $f \in L^1([0, 1])$. Για κάθε $n \geq 0$ συμβολίζουμε

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n+1} (s_0(f)(x) + s_1(f)(x) + \dots + s_n(f)(x))$$

τον μέσο όρο των $n+1$ αρχικών συμμετρικών μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier της f . Το $\sigma_n(f)$ ονομάζεται **n -οστός Cesàro μέσος** της σειράς Fourier της f .

Ορισμός. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ με $n \geq 0$ ορίζουμε την 1-περιοδική συνάρτηση

$$K_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin(\pi(n+1)x)}{\sin(\pi x)} \right)^2, & \text{αν } x \notin \mathbb{Z} \\ n+1, & \text{αν } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Το σύνολο των συναρτήσεων $\{K_n \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$ ονομάζεται **πυρήνας Fejer**.

Κάθε K_n είναι συνεχής στο \mathbb{R} . Αυτό το βλέπουμε εύκολα, όπως και για τις D_n .

Λήμμα 2.2. Για κάθε n ισχύει

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} (D_0(x) + D_1(x) + \dots + D_n(x)) \quad \text{για κάθε } x$$

και

$$K_n(x) = \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{2\pi i k x} \quad \text{για κάθε } x.$$

Απόδειξη. Για την πρώτη ισότητα: Αν $x \in \mathbb{Z}$, τότε

$$\frac{1}{n+1} (D_0(x) + D_1(x) + \dots + D_n(x)) = \frac{1}{n+1} (1 + 3 + \dots + (2n+1)) = n+1.$$

Αν $x \notin \mathbb{Z}$, χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$ για να πάρουμε

$$2 \sin(\pi(2k+1)x) \sin(\pi x) = \cos(\pi 2kx) - \cos(\pi 2(k+1)x).$$

Αθροίζοντας αυτές τις ισότητες για $k = 0, 1, \dots, n$, βρίσκουμε

$$2 \sin(\pi x) \sum_{k=0}^n \sin(\pi(2k+1)x) = \sum_{k=0}^n (\cos(\pi 2kx) - \cos(\pi 2(k+1)x)) = 1 - \cos(\pi 2(n+1)x)$$

επειδή το δεύτερο άθροισμα είναι τηλεσκοπικό.

Επειδή $\sin(\pi(2k+1)x) = \sin(\pi x) D_k(x)$, βρίσκουμε

$$\sum_{k=0}^n D_k(x) = \frac{1 - \cos(\pi 2(n+1)x)}{2 \sin^2(\pi x)} = \frac{\sin^2(\pi(n+1)x)}{\sin^2(\pi x)}$$

και, επομένως,

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x) = K_n(x).$$

Για την δεύτερη ισότητα: Από την πρώτη ισότητα βλέπουμε ότι κάθε K_n είναι γραμμικός συνδυασμός εκθετικών πολυωνύμων, οπότε είναι εκθετικό πολυώνυμο. Άρα, όπως έχουμε δει σε ένα από τα τελευταία παραδείγματα, κάθε K_n ισούται με την σειρά Fourier του. Θα βρούμε, λοιπόν, τη σειρά Fourier του εκθετικού πολυωνύμου K_n , δηλαδή τους συντελεστές Fourier του. Από την Πρόταση 2.1 και την πρώτη ισότητα έχουμε για κάθε k

$$\widehat{K}_n(k) = \frac{1}{n+1} (\widehat{D}_0(k) + \widehat{D}_1(k) + \dots + \widehat{D}_n(k)).$$

Έχουμε δει ότι, αν $0 \leq j < |k|$, τότε $\widehat{D}_j(k) = 0$ και, αν $|k| \leq j$, τότε $\widehat{D}_j(k) = 1$. Άρα, αν $|k| \leq n$, τότε

$$\widehat{K}_n(k) = \frac{1}{n+1} (\widehat{D}_{|k|}(k) + \dots + \widehat{D}_n(k)) = \frac{n-(|k|-1)}{n+1} = 1 - \frac{|k|}{n+1}.$$

Και, αν $n < |k|$, τότε όλοι οι όροι του αθροίσματος $\widehat{D}_0(k) + \widehat{D}_1(k) + \dots + \widehat{D}_n(k)$ είναι 0, οπότε

$$\widehat{K}_n(k) = 0.$$

Άρα το εύρος συχνοτήτων του εκθετικού πολυωνύμου K_n είναι $[-n, n]$ και

$$K_n(x) = \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{2\pi i k x} \quad \text{για κάθε } x.$$

□

Πρόταση 2.7. Έστω 1-περιοδική $f \in L^1([0, 1])$. Τότε για κάθε n

$$\sigma_n(f)(x) = (f * K_n)(x) = \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} f(x-y) K_n(y) dy \quad \text{για κάθε } x$$

και

$$\sigma_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x} \quad \text{για κάθε } x.$$

Απόδειξη. Από τις ιδιότητες της συνέλιξης, έχουμε

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k(f)(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (f * D_k)(x) = (f * \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k)(x) = (f * K_n)(x).$$

Αυτή είναι η πρώτη ισότητα.

Από αυτήν και από την ισότητα $K_n(x) = \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e_k(x)$ του Λήμματος 2.2, έχουμε

$$\sigma_n(f)(x) = (f * K_n)(x) = \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) (f * e_k)(x) = \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x} \quad \text{για κάθε } x.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει διότι

$$(f * e_k)(x) = \int_{[0,1)} f(y) e^{2\pi i k(x-y)} dy = \int_{[0,1)} f(y) e^{-2\pi i k y} dy e^{2\pi i k x} = \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x}.$$

Η τελευταία ισότητα αποδεικνύεται και με άλλο τρόπο ως εξής. Επειδή το $\sigma_n(f)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των εκθετικών πολυωνύμων $s_0(f), s_1(f), \dots, s_n(f)$ είναι κι αυτό εκθετικό πολυώνυμο. Άρα το $\sigma_n(f)$ ισούται με τη σειρά Fourier του. Για να βρούμε τη σειρά Fourier του $\sigma_n(f)$ θα βρούμε τους συντελεστές Fourier του:

$$\widehat{\sigma_n(f)}(k) = \widehat{(f * K_n)}(k) = \widehat{f}(k) \widehat{K}_n(k)$$

και, επομένως,

$$\widehat{\sigma_n(f)}(k) = \widehat{f}(k) \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right),$$

αν $|k| \leq n$, και

$$\widehat{\sigma_n(f)}(k) = 0,$$

αν $n < |k|$.

Άρα

$$\sigma_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n \widehat{\sigma_n(f)}(k) e^{2\pi i k x} = \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x} \quad \text{για κάθε } x.$$

□

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } |x| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4x^2}, & \text{αν } |x| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Η Φ είναι άρτια, μη-αρνητική, συνεχής και ολοκληρώσιμη στο \mathbb{R} . Πράγματι,

$$\int_{\mathbb{R}} |\Phi(x)| dx = 2 \int_0^{+\infty} |\Phi(x)| dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 2 < +\infty.$$

Θα χρειαστούμε και την ανισότητα

$$|\sin(kx)| \leq k |\sin x| \quad (2.1)$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και κάθε x . Αυτή αποδεικνύεται επαγωγικά. Για $k = 1$ είναι προφανής και, αν ισχύει για κάποιον k , τότε $|\sin((k+1)x)| = |\sin(kx) \cos x + \cos(kx) \sin x| \leq |\sin(kx)| |\cos x| + |\cos(kx)| |\sin x| \leq k |\sin x| + |\sin x| = (k+1) |\sin x|$. Επίσης,

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi} x \quad \text{για } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \quad (2.2)$$

Αυτό ισχύει διότι η $\sin x$ είναι κοίλη στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Πρόταση 2.8. Για κάθε n η συνάρτηση K_n έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) η K_n είναι άρτια,

(ii) $0 \leq K_n(x) \leq \Phi_{\frac{1}{n+1}}(x)$ για κάθε x , όπου $\Phi_{\frac{1}{n+1}}(x) = (n+1)\Phi((n+1)x)$,

(iii) $\|K_n\|_1 = \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} K_n(x) dx = 1$.

Απόδειξη. Το (i) και το $K_n(x) \geq 0$ από το (ii) είναι προφανή. Για το (iii), λόγω του (ii), έχουμε

$$\|K_n\|_1 = \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} |K_n(x)| dx = \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} K_n(x) dx = \widehat{K_n}(0) = 1.$$

Τώρα, έχουμε

$$\Phi_{\frac{1}{n+1}}(x) = (n+1)\Phi((n+1)x) = \begin{cases} n+1, & \text{αν } |(n+1)x| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{n+1}{4(n+1)^2 x^2}, & \text{αν } |(n+1)x| \geq \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} n+1, & \text{αν } |x| \leq \frac{1}{2(n+1)} \\ \frac{1}{(n+1)4x^2}, & \text{αν } |x| \geq \frac{1}{2(n+1)} \end{cases}$$

Επίσης, αν $|x| \leq \frac{1}{2(n+1)}$, τότε από την (2.1)

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2(\pi(n+1)x)}{\sin^2(\pi x)} \leq \frac{1}{n+1} \frac{(n+1)^2 \sin^2(\pi x)}{\sin^2(\pi x)} = n+1.$$

Και, αν $|x| \geq \frac{1}{(n+1)\pi}$, τότε από την (2.2)

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2(\pi(n+1)x)}{\sin^2(\pi x)} \leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin^2(\pi x)} \leq \frac{1}{(n+1)4x^2}.$$

Άρα $K_n(x) \leq \Phi_{\frac{1}{n+1}}(x)$ για κάθε x .

□

Θεώρημα 2.1. Έστω 1-περιοδική $f \in L^1([0, 1))$. Τότε:

$$\|\sigma_n(f) - f\|_1 \rightarrow 0$$

όταν $n \rightarrow +\infty$.

Δηλαδή $\sigma_n(f) \rightarrow f$ στον $L^1([0, 1))$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\sigma_n(f)(x) - f(x) = \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} f(x-y)K_n(y) dy - f(x) \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} K_n(y) dy = \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} (f(x-y) - f(x))K_n(y) dy.$$

Άρα

$$|\sigma_n(f)(x) - f(x)| \leq \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} |f(x-y) - f(x)|K_n(y) dy.$$

Ολοκληρώνουμε την τελευταία ανισότητα στο $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ και, αφού κάνουμε εναλλαγή ολοκληρωμάτων, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \|\sigma_n(f) - f\|_1 &= \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} |\sigma_n(f)(x) - f(x)| dx \\ &\leq \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \left(\int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} |f(x-y) - f(x)| dx \right) K_n(y) dy \\ &= \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \|\mu_y(f) - f\|_1 K_n(y) dy \\ &\leq \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \|\mu_y(f) - f\|_1 \Phi_{\frac{1}{n+1}}(y) dy \\ &= (n+1) \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \|\mu_y(f) - f\|_1 \Phi((n+1)y) dy \\ &= \int_{(-\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}]} \|\mu_{\frac{y}{n+1}}(f) - f\|_1 \Phi(y) dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \|\mu_{\frac{y}{n+1}}(f) - f\|_1 \Phi(y) dy. \end{aligned}$$

Τώρα θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης. Πράγματι, έχουμε

$$\|\mu_{\frac{y}{n+1}}(f) - f\|_1 \Phi(y) \leq 2\|f\|_1 \Phi(y)$$

για κάθε n και η τελευταία συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη στο \mathbb{R} . Άρα

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \|\mu_{\frac{y}{n+1}}(f) - f\|_1 \Phi(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mu_{\frac{y}{n+1}}(f) - f\|_1 \Phi(y) dy = 0,$$

διότι $\frac{y}{n+1} \rightarrow 0$ όταν $n \rightarrow +\infty$ και, επομένως, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mu_{\frac{y}{n+1}}(f) - f\|_1 = 0$.

Άρα $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_1 = 0$. □

Θεώρημα 2.2. Έστω 1-περιοδική $f \in L^1([0, 1))$. Αν $\widehat{f}(n) = 0$ για κάθε n , τότε $f(x) = 0$ για σ.κ. x . Επομένως, ο μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F} : L^1([0, 1)) \rightarrow c_0$ είναι ένα-προς-ένα.

Απόδειξη. Έστω $\widehat{f}(n) = 0$ για κάθε n . Τότε για κάθε n ,

$$\sigma_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x} = 0 \quad \text{για κάθε } x.$$

Άρα

$$\|f\|_1 = \|\sigma_n(f) - f\|_1 \rightarrow 0$$

όταν $n \rightarrow +\infty$, οπότε $\|f\|_1 = 0$. Άρα $f(x) = 0$ για σ.κ. x .

Κατόπιν, έστω 1-περιοδικές $f, g \in L^1([0, 1])$ και έστω $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g)$. Αυτό σημαίνει ότι $(\widehat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}} = (\widehat{g}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$, οπότε $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ για κάθε n . Άρα $(\widehat{f-g})(n) = 0$ για κάθε n . Άρα $(f-g)(x) = 0$ για σ.κ. x και, επομένως, $f(x) = g(x)$ για σ.κ. x . Άρα οι f, g είναι η ίδια συνάρτηση του $L^1([0, 1])$. \square

Τώρα θα δούμε ένα αποτέλεσμα το οποίο ισχύει σε γενικό χώρο με νόρμα και αφορά σύγκλιση ακολουθίας σε σχέση με τη σύγκλιση των μέσων όρων της ίδιας ακολουθίας. Το αποτέλεσμα είναι το εξής: *Είναι πιο "εύκολο" να συγκλίνουν οι μέσοι όροι μιας ακολουθίας από το να συγκλίνει η ίδια η ακολουθία.*

Λήμμα 2.3. Έστω γραμμικός χώρος με νόρμα X και ακολουθία (x_n) στον X . Αν $x_n \rightarrow x$ στον X , τότε $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \rightarrow x$ στον X .

Απόδειξη. Έστω $x_n \rightarrow x$ στον X . Δηλαδή $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

Τότε υπάρχει M ώστε να είναι $\|x_n - x\| \leq M$ για κάθε n .

Επίσης

$$\left\| \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} - x \right\| = \left\| \frac{(x_1 - x) + \dots + (x_n - x)}{n} \right\| \leq \frac{\|x_1 - x\| + \dots + \|x_n - x\|}{n}.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να είναι $\|x_n - x\| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$.

Τότε, για $n \geq n_0$,

$$\frac{\|x_1 - x\| + \dots + \|x_n - x\|}{n} = \frac{\|x_1 - x\| + \dots + \|x_{n_0-1} - x\|}{n} + \frac{\|x_{n_0} - x\| + \dots + \|x_n - x\|}{n} < \frac{(n_0 - 1)M}{n} + \frac{(n - n_0 + 1)\frac{\epsilon}{2}}{n}$$

Θεωρούμε τον $n'_0 = \max\{n_0, \frac{2n_0M}{\epsilon}\}$. Τότε για $n \geq n'_0$ συνεπάγεται $n \geq n_0$ και $n \geq \frac{2n_0M}{\epsilon}$, οπότε

$$\frac{\|x_1 - x\| + \dots + \|x_n - x\|}{n} < \frac{n_0M}{n} + \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Άρα $\frac{\|x_1 - x\| + \dots + \|x_n - x\|}{n} \rightarrow 0$, οπότε $\left\| \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} - x \right\| \rightarrow 0$. \square

Πρόταση 2.9. Έστω 1-περιοδική $f \in L^1([0, 1])$. Αν η σειρά Fourier της f συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση στον $L^1([0, 1])$, τότε αυτή η συνάρτηση είναι η f .

Απόδειξη. Έστω ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση g στον $L^1([0, 1])$. Αυτό σημαίνει ότι $s_n(f) \rightarrow g$ στον $L^1([0, 1])$. Άρα, από το Λήμμα 2.3 έχουμε ότι $\sigma_n(f) = \frac{s_0(f) + s_1(f) + \dots + s_n(f)}{n+1} \rightarrow g$ στον $L^1([0, 1])$. Όμως από το Θεώρημα 2.1, $\sigma_n(f) \rightarrow f$ στον $L^1([0, 1])$. Άρα $g = f$ στον $L^1([0, 1])$. \square

Πρόταση 2.10. Έστω 1-περιοδική $f \in L^1([0, 1])$. Αν η σειρά Fourier της f είναι απολύτως αθροίσιμη, δηλαδή αν $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < +\infty$, τότε η σειρά Fourier της f συγκλίνει και έχει άθροισμα $f(x)$ για σ.κ. x . Δηλαδή

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x} \quad \text{για σ.κ. } x.$$

Ειδικότερα, η ισότητα ισχύει για κάθε x στον οποίο η f είναι συνεχής.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 2.4 συνεπάγεται ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στο \mathbb{R} και ορίζει μια 1-περιοδική, συνεχή συνάρτηση g . Δηλαδή

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x} \quad \text{για κάθε } x.$$

Επίσης, έχουμε ότι $\widehat{g}(n) = \widehat{f}(n)$ για κάθε n , οπότε από το Θεώρημα 2.2 συνεπάγεται ότι $f = g$ σ.π. στο \mathbb{R} . Άρα

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x} \quad \text{για σ.κ. } x.$$

Τέλος, έστω ότι η f είναι συνεχής σε κάποιον x . Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο στο διάστημα $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ στο οποίο ταυτίζονται οι τιμές των f, g . Αν δεν ίσχυε αυτό, τότε το $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ θα ήταν υποσύνολο του συνόλου στο οποίο διαφέρουν οι f, g , οπότε το διάστημα αυτό θα ήταν μηδενικού μέτρου. Αυτό είναι άτοπο, διότι το διάστημα έχει θετικό μήκος. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ ώστε $f(x_n) = g(x_n)$. Επειδή $x_n \rightarrow x$ και οι f, g είναι συνεχείς στον x , συνεπάγεται $f(x) = g(x)$ και, επομένως,

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x}.$$

□

Παράδειγμα. Τώρα βλέπουμε ότι για τη συνάρτηση του παραδείγματος αμέσως μετά από την Πρόταση 2.4 έχουμε

$$1 - 4x^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x} = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(2\pi n x) \quad \text{για κάθε } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

Πράγματι, η 1-περιοδική συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 1 - 4x^2$ στο $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} και η σειρά Fourier της είναι απολύτως αθροίσιμη.

Παράδειγμα. Βάσει του Πορίσματος 2.1 της Πρότασης 2.5, για κάθε 1-περιοδική f η οποία είναι τουλάχιστον δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} συνεπάγεται η ισότητα

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x} \quad \text{για κάθε } x.$$

Έχουμε και τα εξής συμπεράσματα για την κατά σημείο σύγκλιση της σειράς Fourier μιας συνάρτησης.

Θεώρημα 2.3. Έστω 1-περιοδική $f \in L^1([0, 1])$. Αν σε κάποιον x_0 υπάρχουν τα πλευρικά όρια $f(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ και $f(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ της f , τότε ισχύει

$$\sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x_0} = \sigma_n(f)(x_0) \rightarrow \frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2}$$

όταν $n \rightarrow +\infty$.

Ειδικότερα, αν η f είναι συνεχής στον x_0 , τότε $\sigma_n(f)(x_0) \rightarrow f(x_0)$ όταν $n \rightarrow +\infty$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} K_n(x) dx = 1$$

και, επειδή η K_n είναι άρτια,

$$\int_{(-\frac{1}{2}, 0)} K_n(x) dx = \int_{(0, \frac{1}{2})} K_n(x) dx = \frac{1}{2}. \quad (2.3)$$

Τώρα,

$$\sigma_n(f)(x_0) = \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} f(x_0 - y) K_n(y) dy = \int_{(-\frac{1}{2}, 0)} f(x_0 - y) K_n(y) dy + \int_{(0, \frac{1}{2})} f(x_0 - y) K_n(y) dy.$$

Επίσης, λόγω της (2.3),

$$\int_{(-\frac{1}{2}, 0)} f(x_0 - y)K_n(y) dy - \frac{f(x_0+)}{2} = \int_{(-\frac{1}{2}, 0)} (f(x_0 - y) - f(x_0+))K_n(y) dy.$$

Ομοίως,

$$\int_{(0, \frac{1}{2})} f(x_0 - y)K_n(y) dy - \frac{f(x_0-)}{2} = \int_{(0, \frac{1}{2})} (f(x_0 - y) - f(x_0-))K_n(y) dy.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δυο αυτές σχέσεις,

$$\sigma_n(f)(x_0) - \frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2} = \int_{(-\frac{1}{2}, 0)} (f(x_0 - y) - f(x_0+))K_n(y) dy + \int_{(0, \frac{1}{2})} (f(x_0 - y) - f(x_0-))K_n(y) dy.$$

Τώρα, ορίζουμε την συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} f(x_0 - y) - f(x_0-), & \text{αν } 0 < y < \frac{1}{2} \\ f(x_0 - y) - f(x_0+), & \text{αν } -\frac{1}{2} < y < 0 \end{cases}$$

και την επεκτείνουμε ώστε να είναι 1-περιοδική.

Η g είναι ολοκληρώσιμη στο $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ και, από την υπόθεση, ισχύει

$$\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 0.$$

Τώρα, προφανώς,

$$\sigma_n(f)(x_0) - \frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2} = \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} g(y)K_n(y) dy,$$

οπότε

$$|\sigma_n(f)(x_0) - \frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2}| \leq \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} |g(y)|K_n(y) dy.$$

Τώρα, έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ ώστε να ισχύει $|g(y)| < \frac{\epsilon}{2}$ όταν $0 < |y| < \delta$.

Συνεπάγεται

$$\int_{(-\delta, \delta)} |g(y)|K_n(y) dy < \frac{\epsilon}{2} \int_{(-\delta, \delta)} K_n(y) dy \leq \frac{\epsilon}{2} \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} K_n(y) dy = \frac{\epsilon}{2}.$$

Επίσης, αν Φ είναι η συνάρτηση που χρησιμοποιήσαμε και στην Πρόταση 2.8,

$$\int_{(\delta, \frac{1}{2})} |g(y)|K_n(y) dy \leq (n+1) \int_{(\delta, \frac{1}{2})} |g(y)|\Phi((n+1)y) dy \leq (n+1)\Phi((n+1)\delta) \int_{(\delta, \frac{1}{2})} |g(y)| dy.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι η Φ είναι φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Τώρα, αν ο n είναι αρκετά μεγάλος ώστε να ισχύει $(n+1)\delta \geq \frac{1}{2}$, από τον τύπο της Φ έχουμε

$$\int_{(\delta, \frac{1}{2})} |g(y)|K_n(y) dy \leq \frac{1}{4(n+1)\delta^2} \int_{(\delta, \frac{1}{2})} |g(y)| dy.$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε

$$\int_{(-\frac{1}{2}, -\delta)} |g(y)|K_n(y) dy \leq \frac{1}{4(n+1)\delta^2} \int_{(-\frac{1}{2}, -\delta)} |g(y)| dy.$$

Συγκεντρώνοντας όσα έχουμε μέχρι τώρα,

$$|\sigma_n(f)(x_0) - \frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2}| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{4(n+1)\delta^2} \left(\int_{(-\frac{1}{2}, -\delta)} |g(y)| dy + \int_{(\delta, \frac{1}{2})} |g(y)| dy \right) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{4(n+1)\delta^2} \|g\|_1.$$

Τέλος, αν ο n είναι αρκετά μεγάλος ώστε να ισχύει $(n+1)\delta \geq \frac{1}{2}$ και $\frac{1}{4(n+1)\delta^2} \|g\|_1 < \frac{\epsilon}{2}$, καταλήγουμε στο

$$\left| \sigma_n(f)(x_0) - \frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2} \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Άρα $\sigma_n(f)(x_0) \rightarrow \frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2}$ όταν $n \rightarrow +\infty$. □

Θεώρημα 2.4. Έστω 1-περιοδική $f \in L^1([0, 1])$. Αν σε κάποιον x_0 υπάρχουν τα πλευρικά όρια $f(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ και $f(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ της f , και $\int_{(x_0, x_0 + \frac{1}{2})} \left| \frac{f(x) - f(x_0+)}{x - x_0} \right| dx < +\infty$ και $\int_{(x_0 - \frac{1}{2}, x_0)} \left| \frac{f(x) - f(x_0-)}{x - x_0} \right| dx < +\infty$ τότε η σειρά Fourier της f συγκλίνει στον x_0 και το άθροισμά της στον x_0 είναι ίσο με το $\frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2}$. Δηλαδή

$$\sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x_0} = s_n(f)(x_0) \rightarrow \frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2}$$

όταν $n \rightarrow +\infty$ ή, ισοδύναμα,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x_0} = \frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2}.$$

Ειδικότερα, αν η f είναι παραγωγίσιμη στον x_0 , τότε $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x_0} = f(x_0)$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x_0-x) - f(x_0-)}{\sin(\pi x)}, & \text{αν } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{f(x_0-x) - f(x_0+)}{\sin(\pi x)}, & \text{αν } -\frac{1}{2} < x < 0 \end{cases}$$

και την επεκτείνουμε ώστε να είναι 1-περιοδική.

Από τις υποθέσεις έχουμε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Πράγματι, από την ανισότητα (2.2) έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{(0, \frac{1}{2})} |g(x)| dx &= \int_{(0, \frac{1}{2})} \left| \frac{f(x_0-x) - f(x_0-)}{\sin(\pi x)} \right| dx \leq \frac{1}{2} \int_{(0, \frac{1}{2})} \left| \frac{f(x_0-x) - f(x_0-)}{x} \right| dx \\ &= \int_{(x_0 - \frac{1}{2}, x_0)} \left| \frac{f(x) - f(x_0-)}{x - x_0} \right| dx < +\infty \end{aligned}$$

και, ομοίως,

$$\begin{aligned} \int_{(-\frac{1}{2}, 0)} |g(x)| dx &= \int_{(-\frac{1}{2}, 0)} \left| \frac{f(x_0-x) - f(x_0+)}{\sin(\pi x)} \right| dx \leq \frac{1}{2} \int_{(-\frac{1}{2}, 0)} \left| \frac{f(x_0-x) - f(x_0+)}{x} \right| dx \\ &= \int_{(x_0, x_0 + \frac{1}{2})} \left| \frac{f(x) - f(x_0+)}{x - x_0} \right| dx < +\infty. \end{aligned}$$

Ακόμη, έχουμε ότι

$$\int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} D_n(x) dx = 1$$

και, επειδή η D_n είναι άρτια,

$$\int_{(-\frac{1}{2}, 0)} D_n(x) dx = \int_{(0, \frac{1}{2})} D_n(x) dx = \frac{1}{2}. \quad (2.4)$$

Τώρα,

$$s_n(f)(x_0) = \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} f(x_0 - y) D_n(y) dy = \int_{(-\frac{1}{2}, 0)} f(x_0 - y) D_n(y) dy + \int_{(0, \frac{1}{2})} f(x_0 - y) D_n(y) dy.$$

Επίσης, λόγω της (2.4),

$$\begin{aligned} \int_{(-\frac{1}{2}, 0)} f(x_0 - y) D_n(y) dy - \frac{f(x_0+)}{2} &= \int_{(-\frac{1}{2}, 0)} (f(x_0 - y) - f(x_0+)) D_n(y) dy \\ &= \int_{(-\frac{1}{2}, 0)} g(y) \sin(\pi(2n+1)y) dy. \end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\begin{aligned} \int_{(0, \frac{1}{2})} f(x_0 - y) D_n(y) dy - \frac{f(x_0-)}{2} &= \int_{(0, \frac{1}{2})} (f(x_0 - y) - f(x_0-)) D_n(y) dy \\ &= \int_{(0, \frac{1}{2})} g(y) \sin(\pi(2n+1)y) dy. \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δυο αυτές σχέσεις,

$$\begin{aligned} s_n(f)(x_0) - \frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2} &= \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} g(y) \sin(\pi(2n+1)y) dy \\ &= \frac{1}{2i} \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} g(y) e^{\pi i(2n+1)y} dy - \frac{1}{2i} \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} g(y) e^{-\pi i(2n+1)y} dy \\ &= \frac{1}{2i} \widehat{h}(-n) - \frac{1}{2i} \widehat{k}(n), \end{aligned}$$

όπου h, k είναι οι συναρτήσεις

$$h(y) = g(y) e^{\pi i y}, \quad k(y) = g(y) e^{-\pi i y}$$

στο διάστημα $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ και επεκτεταμένες ώστε να είναι 1-περιοδικές. Οι h, k είναι ολοκληρώσιμες στο $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ διότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ και από την Πρόταση 2.3 συνεπάγεται

$$\widehat{h}(-n) \rightarrow 0, \quad \widehat{k}(n) \rightarrow 0$$

όταν $n \rightarrow +\infty$.

Άρα $s_n(f)(x_0) \rightarrow \frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2}$ όταν $n \rightarrow +\infty$. □

2.2 Σειρές Fourier στον $L^2([0, 1])$.

Γνωρίζουμε ότι αν μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$ τότε αυτή είναι και τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο $[0, 1)$. Άρα ό,τι είπαμε στην προηγούμενη ενότητα για 1-περιοδικές συναρτήσεις $f \in L^1([0, 1])$ ισχύει και για 1-περιοδικές συναρτήσεις $f \in L^2([0, 1])$. Ειδικότερα, για μια 1-περιοδική συνάρτηση $f \in L^2([0, 1])$ ορίζονται οι συντελεστές Fourier

$$\widehat{f}(n) = \int_{[0,1)} f(x) e^{-2\pi i n x} dx = \int_{[0,1)} f(x) \overline{e_n(x)} dx$$

και η σειρά Fourier της f ,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e_n(x).$$

Τώρα, βέβαια, επειδή ο $L^2([0, 1])$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, μπορούμε να γράφουμε

$$\widehat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle$$

και

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, e_n \rangle e_n.$$

Γνωρίζουμε ήδη ότι το σύνολο

$$\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

είναι ορθοκανονικό σύνολο στον $L^2([0, 1])$. Ένα από τα πορίσματα αυτού του γεγονότος είναι η ανισότητα Bessel στην Πρόταση 1.64. Αυτή λέει ότι

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, e_n \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2$$

που για τον χώρο μας γράφεται πιο συγκεκριμένα

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Θα δούμε τώρα ότι το $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση. Αυτό ήταν το τελευταίο ερώτημα που διατυπώσαμε στην ενότητα 1.9.

Θεώρημα 2.5. Το $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L^2([0, 1])$.

Απόδειξη. Έστω $f \in L^2([0, 1])$. Υποθέτουμε ότι $\widehat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle = 0$ για κάθε n και θα αποδείξουμε ότι $f = 0$ σ.π. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.65, αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι το $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L^2([0, 1])$.

Όμως, αυτό είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.2 διότι $f \in L^2([0, 1])$. □

Τώρα, επειδή το $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L^2([0, 1])$, συνεπάγεται ότι η σειρά Fourier της οποιασδήποτε $f \in L^2([0, 1])$ συγκλίνει στην f στον $L^2([0, 1])$. Δηλαδή

$$\|s_n(f) - f\|_2 \rightarrow 0$$

όταν $n \rightarrow +\infty$. Ισοδύναμα

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, e_n \rangle e_n = f \quad \text{στον } L^2([0, 1]).$$

Επίσης, από το Θεώρημα 1.5 έχουμε ότι η ανισότητα Bessel ισχύει ως ισότητα για κάθε $f \in L^2([0, 1])$. Δηλαδή

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 = \|f\|_2^2 = \int_{[0,1]} |f(x)|^2 dx.$$

Η ισότητα αυτή ονομάζεται **ταυτότητα Parseval**. Μάλιστα μπορούμε να της δώσουμε μια πιο γενική μορφή ως εξής.

Γενικότερα, έστω x, y σε χώρο H με εσωτερικό γινόμενο και με ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$. Τότε γράφουμε την ταυτότητα Parseval για τα $x, y, x + y$ και από την

$$\|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$$

έχουμε ότι

$$\sum_n |\langle x, e_n \rangle|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \sum_n |\langle y, e_n \rangle|^2 = \sum_n |\langle x + y, e_n \rangle|^2,$$

οπότε

$$\sum_n |\langle x, e_n \rangle|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \sum_n |\langle y, e_n \rangle|^2 = \sum_n |\langle x, e_n \rangle|^2 + 2\operatorname{Re} \sum_n \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle} + \sum_n |\langle y, e_n \rangle|^2,$$

και, επομένως,

$$\operatorname{Re}\langle x, y \rangle = \operatorname{Re} \sum_n \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}.$$

Εφαρμόζοντας αυτήν την ισότητα για στα x, iy , βρίσκουμε

$$\operatorname{Im}\langle x, y \rangle = \operatorname{Im} \sum_n \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}.$$

Άρα

$$\langle x, y \rangle = \sum_n \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}.$$

Αντιστρόφως, από αυτήν την ταυτότητα παίρνουμε την ταυτότητα Parseval ως ειδική περίπτωση, θέτοντας $y = x$. Άρα η ταυτότητα Parseval και η τελευταία ταυτότητα είναι ισοδύναμες, αν και η δεύτερη μοιάζει πιο γενική. Και οι δυο ταυτότητες ονομάζονται ταυτότητες Parseval.

Στον χώρο $L^2([0, 1])$ έχουμε, λοιπόν, και την

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{g}(n)} = \langle f, g \rangle = \int_{[0,1]} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Παράδειγμα. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = x \quad \text{για} \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

και επεκτεταμένη ώστε να είναι 1-περιοδική. Η f είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ και έχουμε ότι

$$\widehat{f}(0) = \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} x dx = 0$$

διότι η f είναι περιττή. Για τον ίδιο λόγο, αν $n \neq 0$,

$$\widehat{f}(n) = \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} x e^{-2\pi i n x} dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} x \sin(2\pi n x) dx = -\frac{(-1)^n}{2\pi n}$$

μετά από μια ολοκλήρωση κατά μέρη.

Επίσης,

$$\int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} |f(x)|^2 dx = \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} x^2 dx = \frac{1}{12}.$$

Από την ταυτότητα Parseval έχουμε

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{1}{4\pi^2 n^2} = \frac{1}{12}$$

και, επομένως,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Στο σημείο αυτό θα ορίσουμε έναν ακόμη χώρο ακολουθιών.

Ορισμός. Συμβολίζουμε l^2 τον χώρο:

$$l^2 = \{a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 < +\infty\}.$$

Σχόλι α. [1] Με το ίδιο σύμβολο, l^2 , έχουμε και τον αντίστοιχο χώρο με στοιχεία συνηθισμένες ακολουθίες “μονής κατεύθυνσης”.

[2] Οι ακολουθίες που εξετάζουμε είναι μιγαδικές. Με το ίδιο σύμβολο έχουμε και τον αντίστοιχο χώρο με στοιχεία πραγματικές ακολουθίες.

Στον χώρο l^2 ορίζουμε δυο πράξεις: την πρόσθεση ακολουθιών και τον πολλαπλασιασμό αριθμού και ακολουθίας. Και οι δυο πράξεις γίνονται “κατά συντεταγμένη”. Δηλαδή, αν

$$a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}, \quad b = (b_n)_{n \in \mathbb{Z}},$$

τότε

$$a + b = (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{Z}}, \quad \lambda a = (\lambda a_n)_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Το άθροισμα δυο ακολουθιών στον l^2 , και το γινόμενο αριθμού και ακολουθίας στον l^2 είναι ακολουθίες στον l^2 . Πράγματι, αν $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 < +\infty$ και $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |b_n|^2 < +\infty$, τότε

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n + b_n|^2 \leq 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 + 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |b_n|^2 < +\infty$$

και

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\lambda a_n|^2 = |\lambda|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 < +\infty.$$

Άρα ο l^2 είναι γραμμικός χώρος.

Στον χώρο l^2 ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο. Αν οι $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ και $b = (b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ανήκουν στον l^2 , τότε ορίζουμε

$$\langle a, b \rangle_2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \bar{b}_n.$$

Η τελευταία σειρά συγκλίνει και μάλιστα απολύτως διότι

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n \bar{b}_n| \leq \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |b_n|^2 < +\infty.$$

Άρα το $\langle a, b \rangle_2$ είναι καλά ορισμένο ως μιγαδικός αριθμός.

Τώρα, είναι πολύ εύκολο να δει κανείς ότι το εσωτερικό γινόμενο που ορίσαμε έχει όλες τις ιδιότητες που το καθιστούν πράγματι εσωτερικό γινόμενο στον l^2 . Ο έλεγχος είναι στοιχειώδης και θα τον αποφύγουμε.

Η νόρμα που ορίζεται από το εσωτερικό γινόμενο δίνεται από τον τύπο

$$\|a\|_2^2 = \langle a, a \rangle_2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2.$$

Ισχύει, αλλά δεν θα το αποδείξουμε, ότι ο χώρος l^2 είναι πλήρης, δηλαδή ότι είναι χώρος Hilbert.

Ο μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ μιας 1-περιοδικής $f \in L^2([0, 1])$ είναι η ακολουθία $\mathcal{F}(f) = (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ και είδαμε ότι

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 < +\infty,$$

οπότε $\mathcal{F}(f) \in l^2$. Άρα ο μετασχηματισμός Fourier απεικονίζει τον $L^2([0, 1])$ στον l^2 . Δηλαδή

$$\mathcal{F} : L^2([0, 1]) \rightarrow l^2.$$

Μάλιστα, η Πρόταση 2.1 λέει ότι η απεικόνιση αυτή “διατηρεί τις πράξεις” των γραμμικών χώρων $L^2([0, 1])$ και l^2 . Δηλαδή, ο μετασχηματισμός Fourier είναι γραμμικός τελεστής από τον γραμμικό χώρο $L^2([0, 1])$ στον γραμμικό χώρο l^2 .

Στην Συναρτησιακή Ανάλυση, όταν έχουμε δυο χώρους με εσωτερικό γινόμενο, τον H και τον K , και έναν γραμμικό τελεστή $T : H \rightarrow K$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

για κάθε $x, y \in H$ (όπου το $\langle T(x), T(y) \rangle$ είναι το εσωτερικό γινόμενο των $T(x), T(y)$ στον χώρο K και το $\langle x, y \rangle$ είναι το εσωτερικό γινόμενο των x, y στον χώρο H), τότε λέμε ότι ο T είναι **ισομετρία**. Από την ταυτότητα Parseval συνεπάγεται ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι ισομετρία από τον $L^2([0, 1])$ στον l^2 .

Γενικά, αν ο $T : H \rightarrow K$ είναι ισομετρία, τότε είναι συνεχής. Πράγματι, για κάθε $x \in H$ ισχύει

$$\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x) \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

και, επομένως,

$$\|T(x)\| = \|x\|.$$

Κάτι τελευταίο. Είναι ο $\mathcal{F} : L^2([0, 1]) \rightarrow l^2$ απεικόνιση επί; Το Θεώρημα 1.5 δίνει καταφατική απάντηση. Αν η $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ανήκει στον l^2 , δηλαδή αν $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 < +\infty$, τότε η σειρά $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e_n$ συγκλίνει στον $L^2([0, 1])$ σε κάποια συνάρτηση $f \in L^2([0, 1])$ και ισχύει $\widehat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle = a_n$ για κάθε n . Αυτό σημαίνει ότι $\mathcal{F}(f) = a$. Άρα

Θεώρημα 2.6. Ο μετασχηματισμός Fourier

$$\mathcal{F} : L^2([0, 1]) \rightarrow l^2$$

είναι ισομετρία επί του l^2 .

Κεφάλαιο 3

Ο μετασχηματισμός Fourier.

3.1 Ο μετασχηματισμός Fourier στον $L^1(\mathbb{R})$.

Ορισμός. Έστω συνάρτηση f ολοκληρώσιμη στο \mathbb{R} , δηλαδή $f \in L^1(\mathbb{R})$. Για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i\xi x} dx.$$

Σχόλια. [1] Αν θέσουμε $e_{\xi}(x) = e^{2\pi i\xi x}$, τότε

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{e_{\xi}(x)} dx = \int_{[0,1)} f(x)e_{-\xi}(x) dx.$$

[2] Η συνάρτηση $e_{\xi}(x) = e^{2\pi i\xi x}$ δεν είναι 1-περιοδική (εκτός αν $\xi \in \mathbb{Z}$). Αυτό δεν μας ενοχλεί διότι δεν ασχολούμαστε τώρα με 1-περιοδικές συναρτήσεις. Ούτε η f είναι 1-περιοδική.

[3] Η f είναι ολοκληρώσιμη, οπότε είναι μετρήσιμη. Επίσης, η $e^{2\pi i\xi x}$ είναι μετρήσιμη επειδή είναι συνεχής. Άρα το γινόμενο $f(x)e^{-2\pi i\xi x}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Επιπλέον, ισχύει $|f(x)e^{-2\pi i\xi x}| \leq |f(x)|$ και η $|f(x)|$ είναι ολοκληρώσιμη. Άρα, από την Πρόταση 1.41[3], και η $f(x)e^{-2\pi i\xi x}$ είναι ολοκληρώσιμη και, επομένως, το $\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i\xi x} dx$ έχει νόημα.

Ορισμός. Έστω συνάρτηση f ολοκληρώσιμη στο \mathbb{R} . Ορίζουμε τον **μετασχηματισμό Fourier** της f και τον σύμβολίζουμε $\mathcal{F}(f)$ ή \widehat{f} να είναι η συνάρτηση

$$\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{ή} \quad \widehat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

με τύπο

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i\xi x} dx$$

για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 3.1. Για κάθε $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ και αριθμό λ ισχύει

(i) $\widehat{(f+g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi) + \widehat{g}(\xi)$ για κάθε ξ .

(ii) $\widehat{(\lambda f)}(\xi) = \lambda \widehat{f}(\xi)$ για κάθε ξ .

(iii) $\widehat{(f * g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$ για κάθε ξ .

Απόδειξη. (i) Για κάθε ξ ,

$$\widehat{(f+g)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (f(x) + g(x))e^{-2\pi i\xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i\xi x} dx + \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-2\pi i\xi x} dx = \widehat{f}(\xi) + \widehat{g}(\xi).$$

(ii) Για κάθε ξ ,

$$\widehat{(\lambda f)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \lambda f(x)e^{-2\pi i\xi x} dx = \lambda \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i\xi x} dx = \lambda \widehat{f}(\xi).$$

(iii) Για κάθε ξ ,

$$\begin{aligned}
 \widehat{(f * g)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy \right) e^{-2\pi i \xi x} dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) e^{-2\pi i \xi x} dx \right) dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y) e^{-2\pi i \xi (x-y)} dx \right) g(y) e^{-2\pi i \xi y} dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \right) g(y) e^{-2\pi i \xi y} dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) g(y) e^{-2\pi i \xi y} dy = \widehat{f}(\xi) \int_{\mathbb{R}} g(y) e^{-2\pi i \xi y} dy \\
 &= \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi).
 \end{aligned}$$

□

Πρόταση 3.2. Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ και αριθμό h ισχύει

(i) $\widehat{(e_h f)}(\xi) = \mu_h(\widehat{f})(\xi)$ για κάθε ξ .

(ii) $\widehat{\mu_h(f)}(\xi) = e_{-h}(\xi) \widehat{f}(\xi)$ για κάθε ξ .

Απόδειξη. (i) Για κάθε ξ ,

$$\widehat{(e_h f)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i h x} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i (\xi-h)x} dx = \widehat{f}(\xi-h) = \mu_h(\widehat{f})(\xi).$$

(ii) Για κάθε ξ ,

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mu_h(f)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-h) e^{-2\pi i \xi x} dx = e^{-2\pi i \xi h} \int_{\mathbb{R}} f(x-h) e^{-2\pi i \xi (x-h)} dx \\
 &= e_{-h}(\xi) \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \\
 &= e_{-h}(\xi) \widehat{f}(\xi).
 \end{aligned}$$

□

Με άλλα λόγια:

$$\widehat{(e_h f)} = \mu_h(\widehat{f}), \quad \widehat{\mu_h(f)} = e_{-h} \widehat{f}.$$

Πρόταση 3.3. Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ ισχύει

(i) $\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$.

(ii) $\widehat{f}(\xi) \rightarrow 0$ όταν $\xi \rightarrow \pm\infty$.

Απόδειξη. (i) Για κάθε ξ ,

$$|\widehat{f}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| |e^{-2\pi i \xi x}| dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \|f\|_1.$$

Άρα $\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$.

(ii) Επειδή, $e^{-2\pi i \xi \frac{1}{2\xi}} = -1$,

$$\widehat{f}(\xi) = - \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi (x + \frac{1}{2\xi})} dx = - \int_{\mathbb{R}} f(x - \frac{1}{2\xi}) e^{-2\pi i \xi x} dx = -\widehat{\mu_{\frac{1}{2\xi}}(f)}(\xi).$$

Άρα

$$2\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(\xi) - \widehat{\mu_{\frac{1}{2\xi}}(f)}(\xi) = \widehat{(f - \mu_{\frac{1}{2\xi}}(f))}(\xi),$$

οπότε

$$2|\widehat{f}(\xi)| = |(f - \widehat{\mu_{\frac{1}{2\xi}}}(f))(\xi)| \leq \|f - \mu_{\frac{1}{2\xi}}(f)\|_1.$$

Άρα $\widehat{f}(\xi) \rightarrow 0$ όταν $\xi \rightarrow \pm\infty$. □

Σχόλιο. Η ιδιότητα $\widehat{f}(\xi) \rightarrow 0$ είναι γνωστή ως **λήμμα Riemann - Lebesgue**.

Μέχρι τώρα, τα αποτελέσματα ήταν τελείως ανάλογα με αποτελέσματα για σειρές Fourier. Το αποτέλεσμα που ακολουθεί είναι “καινούργιο”.

Πρόταση 3.4. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Τότε η συνάρτηση \widehat{f} είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

Απόδειξη. Έστω $\xi_n \rightarrow \xi$. Ισχύει $|f(x)e^{-2\pi i\xi_n x}| \leq |f(x)|$ για κάθε n και η $|f(x)|$ είναι ολοκληρώσιμη. Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης συνεπάγεται

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \widehat{f}(\xi_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i\xi_n x} dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi_n x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i\xi x} dx = \widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Άρα η \widehat{f} είναι συνεχής. □

Ορισμός. Συμβολίζουμε $L^\infty(\mathbb{R})$ τον χώρο τα στοιχεία του οποίου είναι όλες οι σ.π. φραγμένες μετρήσιμες συναρτήσεις:

$$L^\infty(\mathbb{R}) = \{a \mid \text{υπάρχει } M \text{ ώστε } |a(\xi)| \leq M \text{ για σ. κ. } \xi \in \mathbb{R}\}.$$

Συμβολίζουμε $C_0(\mathbb{R})$ τον χώρο τα στοιχεία του οποίου είναι όλες οι συνεχείς συναρτήσεις στο \mathbb{R} οι οποίες τείνουν στο 0 στα $\pm\infty$:

$$C_0(\mathbb{R}) = \{a \mid a \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \text{ και } a(\xi) \rightarrow 0 \text{ όταν } \xi \rightarrow \pm\infty\}.$$

Είναι γνωστό από τα βασικά μαθήματα Ανάλυσης ότι κάθε συνεχής στο \mathbb{R} συνάρτηση a η οποία τείνει στο 0 στα $\pm\infty$ είναι φραγμένη. Άρα

$$C_0(\mathbb{R}) \subseteq L^\infty(\mathbb{R}).$$

Στους χώρους $L^\infty(\mathbb{R})$ και $C_0(\mathbb{R})$ ορίζουμε τις γνωστές τρεις πράξεις: την πρόσθεση συναρτήσεων, τον πολλαπλασιασμό αριθμού και συνάρτησης και τον πολλαπλασιασμό συναρτήσεων. Με αυτές τις πράξεις, οι $L^\infty(\mathbb{R})$ και $C_0(\mathbb{R})$ είναι μεταθετικές άλγεβρες.

Στους χώρους $L^\infty(\mathbb{R})$ και $C_0(\mathbb{R})$ μπορούμε να ορίσουμε νόρμα. Για κάθε συνάρτηση $a \in L^\infty(\mathbb{R})$ ορίζουμε

$$\|a\|_\infty = \inf\{M \mid |a(\xi)| \leq M \text{ για σ. κ. } \xi \in \mathbb{R}\}.$$

Αποδεικνύεται ότι το infimum είναι minimum. Δηλαδή, η νόρμα $\|a\|_\infty$ είναι ο ελάχιστος αριθμός M ώστε να ισχύει $|a(\xi)| \leq M$ για σ.κ. ξ . Έχουμε, λοιπόν, ότι

$$|a(\xi)| \leq \|a\|_\infty \quad \text{για σ.κ. } \xi.$$

Αποδεικνύεται ότι η νόρμα $\|a\|_\infty$, όπως την ορίσαμε για κάθε $a \in L^\infty(\mathbb{R})$, έχει τις τρεις ιδιότητες που την κάνουν να είναι πραγματικά νόρμα στον χώρο $L^\infty(\mathbb{R})$.

Επειδή κάθε στοιχείο του $C_0(\mathbb{R})$ είναι και στοιχείο του $L^\infty(\mathbb{R})$, ορίζεται η $\|a\|_\infty$ και για κάθε $a \in C_0(\mathbb{R})$. Μάλιστα, αποδεικνύεται ότι, ειδικά για $a \in C_0(\mathbb{R})$, ισχύει

$$\|a\|_\infty = \max\{|a(\xi)| \mid \xi \in \mathbb{R}\}.$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι οι $L^\infty(\mathbb{R})$ και $C_0(\mathbb{R})$ είναι γραμμικοί χώροι με νόρμα. Παρατηρήστε ότι και στους δυο χώρους έχουμε ορίσει την ίδια νόρμα. Η νόρμα του $C_0(\mathbb{R})$ είναι ο περιορισμός της νόρμας του $L^\infty(\mathbb{R})$ στον μικρότερο χώρο $C_0(\mathbb{R})$.

Η νόρμα που ορίσαμε έχει και την κατάλληλη τέταρτη ιδιότητα ώστε οι $L^\infty(\mathbb{R})$ και $C_0(\mathbb{R})$ να είναι μεταθετικές άλγεβρες με νόρμα.

Επίσης, αποδεικνύεται ότι οι χώροι $L^\infty(\mathbb{R})$ και $C_0(\mathbb{R})$ είναι πλήρεις, δηλαδή ότι είναι μεταθετικές άλγεβρες Banach.

Οι Προτάσεις 3.3 και 3.4 λένε ότι ο μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ μιας $f \in L^1(\mathbb{R})$ ανήκει στον $C_0(\mathbb{R})$. Δηλαδή $\mathcal{F}(f) = \widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$. Επίσης,

$$\|\mathcal{F}(f)\|_\infty = \|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

Άρα έχουμε την απεικόνιση

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R}).$$

Τώρα η Πρόταση 3.1 λέει ότι η απεικόνιση αυτή “διατηρεί τις πράξεις” των αλγεβρών $L^1(\mathbb{R})$ και $C_0(\mathbb{R})$. Δηλαδή, ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένας **ομομορφισμός** αλγεβρών. Ειδικότερα, ο μετασχηματισμός Fourier είναι γραμμική απεικόνιση από τον γραμμικό χώρο $L^1(\mathbb{R})$ στον γραμμικό χώρο $C_0(\mathbb{R})$. Πράγματι,

$$\mathcal{F}(f+g)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) + \mathcal{F}(g)(\xi) \text{ για κάθε } \xi, \text{ οπότε } \mathcal{F}(f+g) = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g).$$

$$\mathcal{F}(\lambda f)(\xi) = \lambda \mathcal{F}(f)(\xi) \text{ για κάθε } \xi, \text{ οπότε } \mathcal{F}(\lambda f) = \lambda \mathcal{F}(f).$$

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)\mathcal{F}(g)(\xi) \text{ για κάθε } \xi, \text{ οπότε } \mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g).$$

Ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής από τον $L^1(\mathbb{R})$ στον $C_0(\mathbb{R})$, διότι ισχύει $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_1$ για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$. Άρα ο \mathcal{F} είναι *συνεχής* απεικόνιση από τον $L^1(\mathbb{R})$ στον $C_0(\mathbb{R})$. Δηλαδή, όταν η ακολουθία (f_n) συγκλίνει στην f στον $L^1(\mathbb{R})$, τότε η ακολουθία $(\mathcal{F}(f_n))$ συγκλίνει στην $\mathcal{F}(f)$ στον $C_0(\mathbb{R})$. Πράγματι,

$$\max_{\xi \in \mathbb{R}} |\mathcal{F}(f_n)(\xi) - \mathcal{F}(f)(\xi)| = \|\mathcal{F}(f_n) - \mathcal{F}(f)\|_\infty = \|\mathcal{F}(f_n - f)\|_\infty \leq \|f_n - f\|_1 \rightarrow 0,$$

οπότε $\mathcal{F}(f_n) \rightarrow \mathcal{F}(f)$ ομοιόμορφα στο \mathbb{R} .

Όπως και στο πλαίσιο των σειρών Fourier, το κεντρικό πρόβλημα στην Αρμονική Ανάλυση είναι το εξής:

Πώς θα βρούμε την $f \in L^1(\mathbb{R})$ όταν γνωρίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier της f , δηλαδή την συνάρτηση $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$; Δηλαδή, έχουμε το πρόβλημα ανακατασκευής της συνάρτησης από τον μετασχηματισμό Fourier της.

Υπάρχει μια αναλογία με το τί συμβαίνει στο πλαίσιο των σειρών Fourier και αν την δούμε θα καταλάβουμε προς τα πού πρέπει να αναζητήσουμε την απάντηση στο παραπάνω ερώτημα.

Δείτε πόσο μοιάζει ο τύπος για τους συντελεστές Fourier μιας $f \in L^1([0, 1])$ με τον τύπο για τον μετασχηματισμό Fourier μιας $f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\widehat{f}(n) = \int_{[0,1]} f(x)e^{-2\pi i n x} dx \qquad \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

Θυμηθείτε ότι ο τρόπος να ανακατασκευάσουμε μια $f \in L^1([0, 1])$ από την συνάρτηση \widehat{f} είναι μέσω της σειράς Fourier:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{2\pi i n x}.$$

Κάτι παρόμοιο πρέπει να ισχύει και για συναρτήσεις $f \in L^1(\mathbb{R})$. Αλλά τί;

Στην περίπτωση μιας $f \in L^1([0, 1])$ ο μετασχηματισμός Fourier \widehat{f} ορίζεται στο \mathbb{Z} και γι αυτό *αθροίζουμε* τις τιμές $\widehat{f}(n)$. Όμως, στην περίπτωση μιας $f \in L^1(\mathbb{R})$ ο μετασχηματισμός Fourier \widehat{f} ορίζεται στο \mathbb{R} και γι αυτό πρέπει να *ολοκληρώσουμε* τις τιμές $\widehat{f}(\xi)$. Άρα ο αντίστοιχος τύπος ανακατασκευής “πρέπει να είναι” ο

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

Τώρα, όπως μια σειρά Fourier μπορεί να μην συγκλίνει (δηλαδή να μην ορίζεται το άθροισμά της), έτσι και το ολοκλήρωμα $\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$ μπορεί να μην ορίζεται. Η συνάρτηση \widehat{f} μπορεί να μην είναι ολοκληρώσιμη στο \mathbb{R} .

Όπως εξετάσαμε τη σύγκλιση της σειράς Fourier μιας $f \in L^1([0, 1])$ θεωρώντας τα συμμετρικά μερικά αθροίσματα

$$s_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x}$$

και εξετάζοντας κατά πόσο ισχύει

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(f)(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x},$$

τώρα, για μια $f \in L^1(\mathbb{R})$, θα θεωρήσουμε τα συμμετρικά “μερικά” ολοκληρώματα

$$s_\eta(f)(x) = \int_{-\eta}^{\eta} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$$

και θα εξετάσουμε κατά πόσο ισχύει

$$f(x) = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} s_\eta(f)(x) = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_{-\eta}^{\eta} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

Σχόλια. [1] Προσέξτε: η μεταβλητή η δεν έχει διακριτές ακέραιες τιμές ≥ 0 αλλά συνεχείς τιμές ≥ 0 .

[2] Γράψαμε το ολοκλήρωμα που ορίζει το $s_\eta(f)(x)$ με τον τύπο $\int_{-\eta}^{\eta} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε διότι η συνάρτηση που ολοκληρώνουμε στο διάστημα $[-\eta, \eta]$ είναι συνεχής και, επομένως, Riemann ολοκληρώσιμη. Άρα δεν είναι ανάγκη να γράψουμε το ολοκλήρωμα με τη μορφή $\int_{[-\eta, \eta]} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$.

Ορισμός. Για κάθε $\eta \geq 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση

$$D_\eta(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2\eta\pi x)}{\pi x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 2\eta, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Το σύνολο των συναρτήσεων $\{D_\eta \mid \eta \geq 0\}$ ονομάζεται **πυρήνας Dirichlet** (για το \mathbb{R}).

Κάθε D_η είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

Λήμμα 3.1. Για κάθε $\eta \geq 0$ ισχύει

$$D_\eta(x) = \int_{-\eta}^{\eta} e^{2\pi i \xi x} d\xi \quad \text{για κάθε } x.$$

Απόδειξη. Αν $x = 0$, τότε

$$\int_{-\eta}^{\eta} e^{2\pi i \xi 0} d\xi = \int_{-\eta}^{\eta} 1 d\xi = 2\eta = D_\eta(0).$$

Αν $x \neq 0$, τότε

$$\int_{-\eta}^{\eta} e^{2\pi i \xi x} d\xi = \frac{e^{2\pi i \eta x} - e^{-2\pi i \eta x}}{2\pi i x} = \frac{\sin(2\eta\pi x)}{\pi x}.$$

□

Πρόταση 3.5. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Τότε για κάθε $\eta \geq 0$

$$s_\eta(f)(x) = (f * D_\eta)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) D_\eta(y) dy \quad \text{για κάθε } x.$$

Απόδειξη. Είναι

$$\begin{aligned} s_\eta(f)(x) &= \int_{-\eta}^{\eta} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = \int_{-\eta}^{\eta} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i \xi y} dy \right) e^{2\pi i \xi x} d\xi \\ &= \int_{-\eta}^{\eta} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{2\pi i \xi(x-y)} dy \right) d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\int_{-\eta}^{\eta} e^{2\pi i \xi(x-y)} d\xi \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) D_\eta(x-y) dy = (f * D_\eta)(x). \end{aligned}$$

□

Αν $\eta > 0$, αποδεικνύεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}} |D_\eta(x)| dx = 2 \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin(2\eta\pi x)}{\pi x} \right| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty,$$

οπότε η D_η δεν είναι ολοκληρώσιμη. Αυτό έχει ως συνέπεια ότι υπάρχουν παραδείγματα συναρτήσεων f όπου τα μερικά ολοκληρώματα $s_\eta(f)$ δεν συγκλίνουν στην f . Γι αυτό, όπως και στο πλαίσιο των σειρών Fourier, μελετάμε τη σύγκλιση των “μέσων όρων” των μερικών ολοκληρωμάτων.

Ορισμός. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Για κάθε $\eta \geq 0$ συμβολίζουμε

$$\sigma_\eta(f)(x) = \frac{1}{\eta} \int_0^\eta s_\xi(f)(x) d\xi.$$

Προσέξτε πόσο μοιάζει αυτός ο τύπος με τον ανάλογο τύπο $\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k(f)(x)$ που είχαμε στις σειρές Fourier.

Ορισμός. Για κάθε $\eta \geq 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση

$$K_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\eta} \left(\frac{\sin(\eta\pi x)}{\pi x} \right)^2, & \text{αν } x \neq 0 \\ \eta, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Το σύνολο των συναρτήσεων $\{K_\eta \mid \eta \geq 0\}$ ονομάζεται **πυρήνας Fejer** (για το \mathbb{R}).

Κάθε K_η είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

Λήμμα 3.2. Για κάθε $\eta \geq 0$ ισχύει

$$K_\eta(x) = \frac{1}{\eta} \int_0^\eta D_\xi(x) d\xi \quad \text{για κάθε } x$$

και

$$K_\eta(x) = \int_{-\eta}^\eta \left(1 - \frac{|\xi|}{\eta}\right) e^{2\pi i \xi x} d\xi \quad \text{για κάθε } x.$$

Απόδειξη. Για την πρώτη ισότητα: Αν $x = 0$, τότε

$$\frac{1}{\eta} \int_0^\eta D_\xi(0) d\xi = \frac{2}{\eta} \int_0^\eta \xi d\xi = \eta = K_\eta(0).$$

Αν $x \neq 0$,

$$\frac{1}{\eta} \int_0^\eta D_\xi(x) d\xi = \frac{1}{\eta\pi x} \int_0^\eta \sin(2\xi\pi x) d\xi = \frac{1 - \cos(2\eta\pi x)}{2\eta\pi^2 x^2} = \frac{\sin^2(\eta\pi x)}{\eta\pi^2 x^2} = K_\eta(x).$$

Για την δεύτερη ισότητα: Αν $x = 0$, τότε

$$\int_{-\eta}^\eta \left(1 - \frac{|\xi|}{\eta}\right) e^{2\pi i \xi \cdot 0} d\xi = 2 \int_0^\eta \left(1 - \frac{\xi}{\eta}\right) d\xi = \eta = K_\eta(0).$$

Αν $x \neq 0$,

$$\int_{-\eta}^{\eta} \left(1 - \frac{|\xi|}{\eta}\right) e^{2\pi i \xi x} d\xi = 2 \int_0^{\eta} \left(1 - \frac{\xi}{\eta}\right) \cos(2\pi \xi x) d\xi = \frac{\sin^2(\eta \pi x)}{\eta \pi^2 x^2} = K_{\eta}(x)$$

μετά από μια ολοκλήρωση κατά μέρη. □

Πρόταση 3.6. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Τότε για κάθε $\eta \geq 0$

$$\sigma_{\eta}(f)(x) = (f * K_{\eta})(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) K_{\eta}(y) dy \quad \text{για κάθε } x$$

και

$$\sigma_{\eta}(f)(x) = \int_{-\eta}^{\eta} \left(1 - \frac{|\xi|}{\eta}\right) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \quad \text{για κάθε } x.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta}(f)(x) &= \frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} s_{\xi}(f)(x) d\xi = \frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} (f * D_{\xi})(x) d\xi = \frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y) D_{\xi}(y) dy \right) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \left(\frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} D_{\xi}(y) d\xi \right) dy = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) K_{\eta}(y) dy. \end{aligned}$$

Αυτή είναι η πρώτη ισότητα.

Τώρα,

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta}(f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y) K_{\eta}(y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \left(\int_{-\eta}^{\eta} \left(1 - \frac{|\xi|}{\eta}\right) e^{2\pi i \xi y} d\xi \right) dy \\ &= \int_{-\eta}^{\eta} \left(1 - \frac{|\xi|}{\eta}\right) \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y) e^{2\pi i \xi y} dy \right) d\xi = \int_{-\eta}^{\eta} \left(1 - \frac{|\xi|}{\eta}\right) \left(\int_{\mathbb{R}} f(x+y) e^{-2\pi i \xi y} dy \right) d\xi \\ &= \int_{-\eta}^{\eta} \left(1 - \frac{|\xi|}{\eta}\right) \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i \xi y} dy \right) e^{2\pi i \xi x} d\xi = \int_{-\eta}^{\eta} \left(1 - \frac{|\xi|}{\eta}\right) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi. \end{aligned}$$

□

Τώρα θα υπολογίσουμε δυο σημαντικά γενικευμένα ολοκληρώματα. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι υπολογισμού τους και μάλιστα κάποιοι χρησιμοποιούν μεθόδους αρμονικής ανάλυσης τις οποίες έχουμε ήδη δει. Προκρίνουμε, όμως, μια μέθοδο μιγαδικής ανάλυσης και, συγκεκριμένα, τη μέθοδο των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων, διότι αυτή βοηθά έτσι κι αλλιώς στον υπολογισμό κι άλλων σημαντικών ολοκληρωμάτων.

Λήμμα 3.3. [α] $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

[β] $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$.

Απόδειξη. [α] Θεωρούμε τη συνάρτηση $\frac{e^{iz}-1}{z}$ η οποία είναι αναλυτική στο \mathbb{C} και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C \frac{e^{iz}-1}{z} dz$, όπου C είναι η κλειστή καμπύλη η οποία αποτελείται από το ημικύκλιο C_R με παραμετρικοποίηση $z(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, και από το ευθύγραμμο τμήμα $I_{-R,R}$ με παραμετρικοποίηση $z(t) = t$, $-R \leq t \leq R$. Η συνάρτηση $\frac{e^{iz}-1}{z}$ είναι αναλυτική στο εσωτερικό της καμπύλης C , οπότε από το Θεώρημα του Cauchy συνεπάγεται

$$0 = \int_C \frac{e^{iz}-1}{z} dz = \int_{C_R} \frac{e^{iz}-1}{z} dz + \int_{I_{-R,R}} \frac{e^{iz}-1}{z} dz. \quad (3.1)$$

Τώρα

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}-1}{z} dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{-R \sin t + iR \cos t} - 1}{Re^{it}} iRe^{it} dt = i \int_0^{\pi} (e^{-R \sin t + iR \cos t} - 1) dt = i \int_0^{\pi} e^{-R \sin t + iR \cos t} dt - i\pi$$

και

$$|i \int_0^\pi e^{-R \sin t + iR \cos t} dt| \leq \int_0^\pi |e^{-R \sin t + iR \cos t}| dt = \int_0^\pi e^{-R \sin t} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin t} dt \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi} t} dt \leq \frac{\pi}{R}$$

και, επομένως,

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz \rightarrow -i\pi \quad \text{όταν } R \rightarrow +\infty.$$

Επίσης,

$$\int_{I_{-R,R}} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{it} - 1}{t} dt = \int_{-R}^R \frac{\cos t - 1}{t} dt + i \int_{-R}^R \frac{\sin t}{t} dt = 2i \int_0^R \frac{\sin t}{t} dt.$$

Παίρνοντας, λοιπόν, το όριο της (3.1) όταν $R \rightarrow +\infty$, βρίσκουμε

$$-i\pi + 2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = 0$$

και από αυτό προκύπτει το [α].

[β] Τώρα, με ολοκλήρωση κατά μέρη και χρησιμοποιώντας το [α], έχουμε

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = - \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x}\right) \sin^2 x dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{2}.$$

□

Σχόλια. [1] Στην τελευταία ολοκλήρωση κατά μέρη χρησιμοποιήσαμε ότι $\frac{\sin^2 x}{x} \rightarrow 0$ όταν $x \rightarrow 0+$ και όταν $x \rightarrow +\infty$. Αυτό δεν αναφέρθηκε και δεν θα αναφέρεται σε ανάλογους υπολογισμούς.

[2] Παρατηρήστε ότι το όριο $\int_{C_R} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz \rightarrow -i\pi$ όταν $R \rightarrow +\infty$ μπορεί να αποδειχθεί πολύ πιο σύντομα με το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης. Βρείτε πώς.

[3] Η συνάρτηση $\frac{\sin x}{x}$ δεν είναι ολοκληρώσιμη, οπότε το $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ έχει το νόημα γενικευμένου ολοκληρώματος και όχι ολοκληρώματος Lebesgue. Αντιθέτως, το $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$ έχει και το νόημα ολοκληρώματος Lebesgue, διότι η συνάρτηση $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ είναι ολοκληρώσιμη. Γιατί;

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } |x| \leq \frac{1}{\pi} \\ \frac{1}{\pi^2 x^2}, & \text{αν } |x| \geq \frac{1}{\pi} \end{cases}$$

Η Ψ είναι άρτια, μη-αρνητική, συνεχής και ολοκληρώσιμη στο \mathbb{R} .

Πρόταση 3.7. Για κάθε $\eta \geq 0$ η συνάρτηση K_η έχει τις εξής ιδιότητες:

- (i) η K_η είναι άρτια,
- (ii) $0 \leq K_\eta(x) \leq \Psi_{\frac{1}{\eta}}(x)$ για κάθε x , όπου $\Psi_{\frac{1}{\eta}}(x) = \eta \Psi(\eta x)$,
- (iii) $\|K_\eta\|_1 = \int_{\mathbb{R}} K_\eta(x) dx = 1$.

Απόδειξη. Το (i) και το $K_\eta(x) \geq 0$ από το (ii) είναι προφανή. Για το (iii), λόγω του (ii) και του Λήμματος 3.3, έχουμε

$$\|K_\eta\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |K_\eta(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} K_\eta(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\eta} \left(\frac{\sin(\eta\pi x)}{\pi x}\right)^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = 1.$$

Τώρα, έχουμε

$$\Psi_{\frac{1}{\eta}}(x) = \eta \Psi(\eta x) = \begin{cases} \eta, & \text{αν } |\eta x| \leq \frac{1}{\pi} \\ \frac{\eta}{\pi^2 \eta^2 x^2}, & \text{αν } |\eta x| \geq \frac{1}{\pi} \end{cases} = \begin{cases} \eta, & \text{αν } |x| \leq \frac{1}{\pi\eta} \\ \frac{1}{\eta\pi^2 x^2}, & \text{αν } |x| \geq \frac{1}{\pi\eta} \end{cases}$$

Επίσης, αν $|x| \leq \frac{1}{\pi\eta}$,

$$K_\eta(x) = \frac{1}{\eta} \frac{\sin^2(\pi\eta x)}{\pi^2 x^2} \leq \frac{1}{\eta} \frac{\pi^2 \eta^2 x^2}{\pi^2 x^2} = \eta.$$

Και, αν $|x| \geq \frac{1}{\pi\eta}$,

$$K_\eta(x) = \frac{1}{\eta} \frac{\sin^2(\pi\eta x)}{\pi^2 x^2} \leq \frac{1}{\eta} \frac{1}{\pi^2 x^2} = \frac{1}{\eta\pi^2 x^2}.$$

Άρα $K_\eta(x) \leq \Psi_{\frac{1}{\eta}}(x)$ για κάθε x . □

Θεώρημα 3.1. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Τότε:

$$\|\sigma_\eta(f) - f\|_1 \rightarrow 0,$$

δηλαδή $\sigma_\eta(f) \rightarrow f$ στον $L^1(\mathbb{R})$, όταν $\eta \rightarrow +\infty$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\sigma_\eta(f)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)K_\eta(y) dy - f(x) \int_{\mathbb{R}} K_\eta(y) dy = \int_{\mathbb{R}} (f(x-y) - f(x))K_\eta(y) dy.$$

Άρα

$$|\sigma_\eta(f)(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|K_\eta(y) dy.$$

Ολοκληρώνουμε την τελευταία ανισότητα στο \mathbb{R} και, αφού κάνουμε εναλλαγή ολοκληρωμάτων, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \|\sigma_\eta(f) - f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |\sigma_\eta(f)(x) - f(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)| dx \right) K_\eta(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|\mu_y(f) - f\|_1 K_\eta(y) dy \leq \int_{\mathbb{R}} \|\mu_y(f) - f\|_1 \Psi_{\frac{1}{\eta}}(y) dy \\ &= \eta \int_{\mathbb{R}} \|\mu_{\frac{y}{\eta}}(f) - f\|_1 \Psi(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \|\mu_{\frac{y}{\eta}}(f) - f\|_1 \Psi(y) dy \end{aligned}$$

και εφαρμόζουμε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης. Έχουμε

$$|\|\mu_{\frac{y}{\eta}}(f) - f\|_1 \Psi(y)| \leq 2\|f\|_1 \Psi(y)$$

για κάθε η και η τελευταία συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη στο \mathbb{R} . Άρα

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \|\mu_{\frac{y}{\eta}}(f) - f\|_1 \Psi(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \|\mu_{\frac{y}{\eta}}(f) - f\|_1 \Psi(y) dy = 0.$$

Άρα $\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \|\sigma_\eta(f) - f\|_1 = 0$. □

Θεώρημα 3.2. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Αν $\widehat{f}(\xi) = 0$ για κάθε ξ , τότε $f(x) = 0$ για σ.κ. x . Επομένως, ο μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R})$ είναι ένα-προς-ένα.

Απόδειξη. Έστω $\widehat{f}(\xi) = 0$ για κάθε ξ . Τότε για κάθε $\eta \geq 0$,

$$\sigma_\eta(f)(x) = \int_{-\eta}^{\eta} \left(1 - \frac{|\xi|}{\eta}\right) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = 0 \quad \text{για κάθε } x.$$

Άρα

$$\|f\|_1 = \|\sigma_\eta(f) - f\|_1 \rightarrow 0$$

όταν $\eta \rightarrow +\infty$, οπότε $\|f\|_1 = 0$. Άρα $f(x) = 0$ για σ.κ. x .

Τώρα, έστω $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ και έστω $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g)$. Δηλαδή, $\widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi)$ για κάθε ξ . Άρα $\widehat{(f-g)}(\xi) = 0$ για κάθε ξ . Άρα $(f-g)(x) = 0$ για σ.κ. x και, επομένως, $f(x) = g(x)$ για σ.κ. x . Άρα οι f, g είναι η ίδια συνάρτηση του $L^1(\mathbb{R})$. □

Το Θεώρημα 3.3 περιέχει μια σημαντική περίπτωση όπου ισχύει ο τύπος ανακατασκευής της f από τον μετασχηματισμό Fourier \widehat{f} .

Θεώρημα 3.3. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Τότε

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \quad \text{για σ.κ. } x.$$

Ειδικότερα, η ισότητα ισχύει για κάθε x στον οποίο η f είναι συνεχής. Συμπεραίνουμε ότι η f είναι ίση σ.π. με κάποια συνάρτηση στον $C_0(\mathbb{R})$.

Απόδειξη. Επειδή $\sigma_\eta(f) \rightarrow f$ στον $L^1(\mathbb{R})$ όταν $\eta \rightarrow +\infty$, υπάρχει κάποια ακολουθία (η_k) ώστε $\eta_k \rightarrow +\infty$ και

$$\sigma_{\eta_k}(f)(x) \rightarrow f(x) \quad \text{για σ.κ. } x.$$

Ορίζουμε

$$g_k(\xi) = \begin{cases} (1 - \frac{|\xi|}{\eta_k}) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x}, & \text{αν } |\xi| \leq \eta_k \\ 0, & \text{αν } |\xi| \geq \eta_k \end{cases}$$

Τώρα, για κάθε k ισχύει

$$|g_k(\xi)| \leq |\widehat{f}(\xi)|$$

και η $|\widehat{f}(\xi)|$ είναι ολοκληρώσιμη. Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης συνεπάγεται

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-\eta_k}^{\eta_k} (1 - \frac{|\xi|}{\eta_k}) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} g_k(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \lim_{k \rightarrow +\infty} g_k(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

Αυτό ισχύει για κάθε x .

Δηλαδή,

$$\sigma_{\eta_k}(f)(x) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \quad \text{για κάθε } x.$$

Άρα

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \quad \text{για σ.κ. } x.$$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(-\xi) e^{-2\pi i \xi x} d\xi$$

ανήκει στον $C_0(\mathbb{R})$, διότι είναι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $\widehat{f}(-\xi)$.

Τώρα, έστω ότι η f είναι συνεχής σε κάποιον x . Δηλαδή, οι f, h είναι και οι δυο συνεχείς στον x . Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο στο διάστημα $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ στο οποίο ταυτίζονται οι τιμές των f, h (αυτό το έχουμε δει στην απόδειξη της Πρότασης 2.10). Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ ώστε $f(x_n) = h(x_n)$. Επειδή $x_n \rightarrow x$ και οι f, h είναι συνεχείς στον x , συνεπάγεται $f(x) = h(x)$ και, επομένως,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

□

Η Πρόταση 3.8 είναι πηγή παραδειγμάτων. Στην ουσία δεν διαφέρει από το Θεώρημα 3.3.

Πρόταση 3.8. Έστω $a \in L^1(\mathbb{R})$. Ορίζουμε

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} a(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$$

για κάθε x .

Τότε $f \in C_0(\mathbb{R})$.

Αν υποθέσουμε, επιπλέον, ότι $f \in L^1(\mathbb{R})$, τότε η a είναι ίση σ.π. με κάποια συνάρτηση στον $C_0(\mathbb{R})$ και ισχύει

$$\widehat{f}(\xi) = a(\xi) \quad \text{για σ.κ. } \xi.$$

Ειδικότερα, η ισότητα ισχύει για κάθε ξ στον οποίο η a είναι συνεχής.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} a(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = \widehat{a}(-x)$$

για κάθε x . Επειδή $\widehat{a} \in C_0(\mathbb{R})$, συνεπάγεται ότι $f \in C_0(\mathbb{R})$.

Τώρα, είναι $\widehat{a}(x) = f(-x)$ για κάθε x , οπότε, λόγω της επιπλέον υπόθεσης, $\widehat{a} \in L^1(\mathbb{R})$. Από το Θεώρημα 3.3 συνεπάγεται ότι ισχύει

$$a(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{a}(x) e^{2\pi i \xi x} dx \quad \text{για σ.κ. } \xi.$$

Άρα

$$a(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(-x) e^{2\pi i \xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \widehat{f}(\xi) \quad \text{για σ.κ. } \xi.$$

Επειδή $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$, η a είναι ίση σ.π. με κάποια συνάρτηση στον $C_0(\mathbb{R})$. □

Τώρα θα δούμε τρία παραδείγματα. Τα δύο τελευταία είναι σημαντικά.

Παράδειγμα. Έστω $\eta > 0$ και η συνάρτηση

$$a(\xi) = \begin{cases} 1 - \frac{|\xi|}{\eta}, & \text{αν } |\xi| \leq \eta \\ 0, & \text{αν } |\xi| \geq \eta \end{cases}$$

Η a ανήκει στον $L^1(\mathbb{R})$ διότι είναι συνεχής και μηδενίζεται έξω από το $[-\eta, \eta]$.

Από το Λήμμα 3.2.

$$\int_{\mathbb{R}} a(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = \int_{-\eta}^{\eta} \left(1 - \frac{|\xi|}{\eta}\right) e^{2\pi i \xi x} d\xi = K_{\eta}(x)$$

για κάθε x .

Επειδή $K_{\eta} \in L^1(\mathbb{R})$, από την Πρόταση 3.8 συνεπάγεται

$$\widehat{K_{\eta}}(\xi) = a(\xi) = \begin{cases} 1 - \frac{|\xi|}{\eta}, & \text{αν } |\xi| \leq \eta \\ 0, & \text{αν } |\xi| \geq \eta \end{cases}$$

για κάθε ξ .

Έτσι βλέπουμε ότι ο δεύτερος τύπος της Πρότασης 3.6 γράφεται ισοδύναμα

$$\sigma_{\eta}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{K_{\eta}}(\xi) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = \int_{\mathbb{R}} (\widehat{f * K_{\eta}})(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$$

και, σε συνδυασμό με τον πρώτο τύπο της Πρότασης 3.6,

$$(f * K_{\eta})(x) = \int_{\mathbb{R}} (\widehat{f * K_{\eta}})(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

Αυτό δεν είναι παράξενο, αφού συμφωνεί με τον αναμενόμενο τύπο ανακατασκευής της $f * K_{\eta}$ από τον μετασχηματισμό Fourier της.

Παράδειγμα. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$a(\xi) = e^{-2\pi|\xi|}.$$

Η a ανήκει στον $L^1(\mathbb{R})$ και στον $C_0(\mathbb{R})$.

Τώρα,

$$\int_{\mathbb{R}} a(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = 2 \int_0^{+\infty} e^{-2\pi\xi} \cos(2\pi\xi x) d\xi = \frac{1}{\pi} - 2x^2 \int_0^{+\infty} e^{-2\pi\xi} \cos(2\pi\xi x) d\xi$$

μετά από δυο ολοκληρώσεις κατά μέρη. Λύνουμε την τελευταία ισότητα ως προς το ολοκλήρωμα και βρίσκουμε

$$\int_{\mathbb{R}} a(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}.$$

Η συνάρτηση $\frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ ανήκει στον $L^1(\mathbb{R})$, οπότε από την Πρόταση 3.8 συνεπάγεται ότι ο μετασχηματισμός Fourier της $\frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ είναι η $a(\xi) = e^{-2\pi|\xi|}$.

Ορισμός. Ορίζουμε

$$P(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

για κάθε x .

Αποδείξαμε ότι

$$\widehat{P}(\xi) = e^{-2\pi|\xi|}$$

για κάθε ξ .

Ορισμός. Το σύνολο των συναρτήσεων $\{P_t \mid t > 0\}$ ονομάζεται **πυρήνας Poisson**.

Είναι

$$P_t(x) = \frac{1}{t} P\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2+x^2}$$

για κάθε x και

$$\widehat{P}_t(\xi) = e^{-2\pi t|\xi|}$$

για κάθε ξ .

Πρόταση 3.9. [α] $f * P_t \rightarrow f$ στον $L^1(\mathbb{R})$ όταν $t \rightarrow 0+$.

[β] Η συνάρτηση $g(x, t) = (f * P_t)(x)$, ως συνάρτηση δυο μεταβλητών ορισμένη στο άνω ημιεπίπεδο $H_+ = \{(x, t) \mid t > 0\}$, ικανοποιεί την μερική διαφορική εξίσωση του δυναμικού:

$$\Delta g(x, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) g(x, t) = 0 \quad \text{για κάθε } (x, t) \in H_+.$$

Δηλαδή, η g είναι αρμονική συνάρτηση στο H_+ .

Απόδειξη. [α] Έχουμε

$$(f * P_t)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) P_t(y) dy - f(x) \int_{\mathbb{R}} P_t(y) dy = \int_{\mathbb{R}} (f(x-y) - f(x)) P_t(y) dy.$$

Άρα

$$|(f * P_t)(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)| P_t(y) dy.$$

Ολοκληρώνουμε την τελευταία ανισότητα στο \mathbb{R} και, αφού κάνουμε εναλλαγή ολοκληρωμάτων, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \|f * P_t - f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |(f * P_t)(x) - f(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)| dx \right) P_t(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|\mu_y(f) - f\|_1 P_t(y) dy = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} \|\mu_y(f) - f\|_1 P\left(\frac{y}{t}\right) dy = \int_{\mathbb{R}} \|\mu_{ty}(f) - f\|_1 P(y) dy \end{aligned}$$

και, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \|\mu_{ty}(f) - f\|_1 P(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \|\mu_{ty}(f) - f\|_1 P(y) dy = 0.$$

Άρα $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|f * P_t - f\|_1 = 0$.

[β] Με πράξεις, βρίσκουμε ότι

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)P_t(x) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \frac{t}{t^2 + x^2} = 0$$

για κάθε $(x, t) \in H_+$.

Τώρα,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)g(x, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \int_{\mathbb{R}} f(y)P_t(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)P_t(x - y) dy = 0.$$

Η εναλλαγή παραγώγων και ολοκληρώματος δικαιολογείται παίρνοντας λόγους διαφορών και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης όπως στην απόδειξη της Πρότασης 1.32[3]. Θα αποφύγουμε τις βαρετές λεπτομέρειες. \square

Παράδειγμα. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$a(\xi) = e^{-\pi\xi^2}.$$

Η a ανήκει στον $L^1(\mathbb{R})$, διότι ισχύει $\xi^2 + 1 \geq 2\xi$ για κάθε $\xi \geq 0$, οπότε

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi\xi^2} d\xi = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\pi\xi^2} d\xi \leq 2e^\pi \int_0^{+\infty} e^{-2\pi\xi} d\xi = \frac{e^\pi}{\pi} < +\infty.$$

Επίσης, η a ανήκει και στον $C_0(\mathbb{R})$.

Εστω $x > 0$. Θεωρούμε την αναλυτική συνάρτηση $e^{-\pi z^2}$ στο \mathbb{C} και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C e^{-\pi z^2} dz,$$

όπου C είναι η κλειστή καμπύλη η οποία αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα $I_{-R,R}$ με παραμετρικοποίηση $z(t) = t$, $-R \leq t \leq R$, από το ευθ. τμήμα I_R με παραμετρικοποίηση $z(t) = R + it$, $0 \leq t \leq x$, από το ευθύγραμμο τμήμα $I_{-R,R,x}$ με παραμετρικοποίηση $z(t) = -t + ix$, $-R \leq t \leq R$, και από το ευθ. τμήμα I_{-R} με παραμετρικοποίηση $z(t) = -R + i(x - t)$, $0 \leq t \leq x$. Επειδή η $e^{-\pi z^2}$ είναι αναλυτική στο εσωτερικό της C , από το Θεώρημα του Cauchy συνεπάγεται

$$0 = \int_C e^{-\pi z^2} dz = \int_{I_{-R,R}} e^{-\pi z^2} dz + \int_{I_{-R,R,x}} e^{-\pi z^2} dz + \int_{I_R} e^{-\pi z^2} dz + \int_{I_{-R}} e^{-\pi z^2} dz. \quad (3.2)$$

Τώρα,

$$\left| \int_{I_R} e^{-\pi z^2} dz \right| = \left| \int_0^x e^{-\pi R^2 + \pi t^2 - 2\pi i R t} dt \right| \leq \int_0^x e^{-\pi R^2 + \pi t^2} dt = e^{-\pi R^2} \int_0^x e^{\pi t^2} dt.$$

Επομένως,

$$\int_{I_R} e^{-\pi z^2} dz \rightarrow 0 \quad \text{όταν } R \rightarrow +\infty.$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$\int_{I_{-R}} e^{-\pi z^2} dz \rightarrow 0 \quad \text{όταν } R \rightarrow +\infty.$$

Επίσης,

$$\int_{I_{-R,R}} e^{-\pi z^2} dz = \int_{-R}^R e^{-\pi t^2} dt, \quad \int_{I_{-R,R,x}} e^{-\pi z^2} dz = -e^{-\pi x^2} \int_{-R}^R e^{-\pi t^2} e^{2\pi i t x} dt.$$

Παίρνοντας όριο της (3.2) όταν $R \rightarrow +\infty$, βρίσκουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{2\pi i t x} dt = e^{-\pi x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt. \quad (3.3)$$

Τώρα θα υπολογίσουμε το λεγόμενο **ολοκλήρωμα του Gauss**

$$G = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt.$$

Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση δύο μεταβλητών $e^{-\pi(x^2+y^2)}$ στον \mathbb{R}^2 με δυο τρόπους: με καρτεσιανές συντεταγμένες και διαδοχική ολοκλήρωση και με πολικές συντεταγμένες.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi(x^2+y^2)} dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi x^2} e^{-\pi y^2} dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx \right) e^{-\pi y^2} dy = G \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2} dy = G^2.$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\pi r^2} r dr \right) d\theta = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-\pi r^2} r dr = - \int_0^{+\infty} \frac{d}{dr} (e^{-\pi r^2}) dr = 1.$$

Άρα $G^2 = 1$ και, επομένως,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt = G = 1.$$

Άρα η (3.3) γίνεται

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{2\pi i t x} dt = e^{-\pi x^2} \quad (3.4)$$

για κάθε $x > 0$. Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από t σε $-t$, προκύπτει ο ίδιος τύπος και για $x < 0$. Τέλος, για $x = 0$ ο τύπος γίνεται $G = 1$ και ισχύει. Άρα ο τύπος αυτός ισχύει για κάθε x .

Τώρα, επειδή η $e^{-\pi x^2}$ ανήκει, όπως είπαμε στην αρχή, στον $L^1(\mathbb{R})$, από την Πρόταση 3.8 συνεπάγεται ότι ο μετασχηματισμός Fourier της $e^{-\pi x^2}$ είναι η $e^{-\pi \xi^2}$. Δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx = e^{-\pi \xi^2}.$$

Βέβαια, η χρήση της Πρότασης 3.8 είναι τελείως περιττή, διότι ο τελευταίος τύπος είναι ακριβώς ο (3.4) μετά από αλλαγή μεταβλητής από t σε $-t$ (και αλλαγή συμβόλων).

Ορισμός. Ορίζουμε

$$G(x) = e^{-\pi x^2}$$

για κάθε x . Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **συνάρτηση του Gauss**.

Αποδείξαμε ότι

$$\widehat{G}(\xi) = e^{-\pi \xi^2} = G(\xi)$$

για κάθε ξ .

Τώρα ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

για $t > 0$. Προσέξτε, στο σημείο αυτό δεν ακολουθούμε τον “καθιερωμένο” συμβολισμό $G_t(x) = \frac{1}{t} G(\frac{x}{t})$, αλλά μια μικρή παραλλαγή: $G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} G(\frac{x}{\sqrt{4\pi t}})$. Αντί του t χρησιμοποιούμε το $\sqrt{4\pi t}$.

Ορισμός. Το σύνολο των συναρτήσεων $\{G_t \mid t > 0\}$ ονομάζεται **πυρήνας του Gauss**.

Είναι

$$\widehat{G}_t(\xi) = e^{-4\pi t \xi^2}$$

για κάθε ξ .

Πρόταση 3.10. [α] $f * G_t \rightarrow f$ στον $L^1(\mathbb{R})$ όταν $t \rightarrow 0+$.

[β] Η συνάρτηση $g(x, t) = (f * G_t)(x)$, ως συνάρτηση δυο μεταβλητών ορισμένη στο άνω ημιεπίπεδο $H_+ = \{(x, t) \mid t > 0\}$, ικανοποιεί την μερική διαφορική εξίσωση της θερμότητας:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right)g(x, t) = 0 \quad \text{για κάθε } (x, t) \in H_+.$$

Απόδειξη. [α] Το μέρος αυτό είναι πιστή επανάληψη της απόδειξης του [α] της Πρότασης 3.9.

[β] Με πράξεις, βρίσκουμε

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right)G_t(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} = 0$$

για κάθε $(x, t) \in H_+$ και τότε

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right)g(x, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right)\int_{\mathbb{R}} f(y)G_t(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right)G_t(x-y)dy = 0.$$

□

Πρόταση 3.11. Έστω f η οποία είναι k φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , όπου $k \geq 1$, και για κάθε m με $0 \leq m \leq k$ είναι $f^{(m)} \in C_0(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Τότε ισχύει

(i) $(2\pi i \xi)^k \widehat{f}(\xi) = \widehat{f^{(k)}}(\xi)$ για κάθε ξ .

(ii) $|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{c_k(f)}{|\xi|^k}$ για κάθε $\xi \neq 0$, όπου $c_k(f)$ είναι μη-αρνητική σταθερά που εξαρτάται μόνο από την f και τον k .

Απόδειξη. (i) Με ολοκλήρωση κατά μέρη, και επειδή $f(x) \rightarrow 0$ όταν $x \rightarrow \pm\infty$,

$$\widehat{f}'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)e^{-2\pi i \xi x} dx = 2\pi i \xi \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{2\pi i \xi x} dx = 2\pi i \xi \widehat{f}(\xi).$$

Επαγωγικά,

$$\widehat{f}''(\xi) = 2\pi i \xi \widehat{f}'(\xi) = (2\pi i \xi)(2\pi i \xi) \widehat{f}(\xi) = (2\pi i \xi)^2 \widehat{f}(\xi),$$

κλπ, μέχρι,

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = 2\pi i \xi \widehat{f^{(k-1)}}(\xi) = (2\pi i \xi)(2\pi i \xi)^{k-1} \widehat{f}(\xi) = (2\pi i \xi)^k \widehat{f}(\xi),$$

(ii) Αν $\xi \neq 0$,

$$|\widehat{f}(\xi)| = \frac{1}{2^k \pi^k |\xi|^k} |\widehat{f^{(k)}}(\xi)| \leq \frac{1}{2^k \pi^k |\xi|^k} \|f^{(k)}\|_1$$

οπότε ισχύει $|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{c_k(f)}{|\xi|^k}$ με $c_k(f) = \frac{1}{2^k \pi^k} \|f^{(k)}\|_1$. □

Το αποτέλεσμα που ακολουθεί, δίνει παραδείγματα συναρτήσεων που ικανοποιούν την υπόθεση του Θεωρήματος 3.3, δηλαδή οι f και \widehat{f} να ανήκουν και οι δυο στον $L^1(\mathbb{R})$.

Πόρισμα 3.1. Έστω ότι η f ικανοποιεί τις υποθέσεις της Πρότασης 3.11 με $k \geq 2$. Τότε $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

Απόδειξη. Πράγματι, ισχύει $|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{c_2(f)}{|\xi|^2}$ για κάθε $\xi \neq 0$, οπότε η \widehat{f} είναι ολοκληρώσιμη στα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$. Επίσης, είναι ολοκληρώσιμη και στο $[-1, 1]$, διότι είναι συνεχής. □

Θα αναφέρουμε δυο θεωρήματα για κατά σημείο σύγκλιση. Τα θεωρήματα αυτά είναι ανάλογα των Θεωρημάτων 2.3 και 2.4 για σειρές Fourier. Η απόδειξή τους είναι ουσιαστικά, επανάληψη των αποδείξεων των Θεωρημάτων 2.3. και 2.4 και δεν θα τις γράψουμε.

Θεώρημα 3.4. Έστω $a, b \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$ ώστε $\widehat{b} = a$ και $\int_{\mathbb{R}} b(x) dx = a(0) = 1$ και ώστε να υπάρξει $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ η οποία είναι αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ με $|b| \leq \phi$ στο \mathbb{R} . Έστω $f \in L^1([0, 1])$. Αν σε κάποιον x_0 υπάρχουν τα πλευρικά όρια $f(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ και $f(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ της f , τότε ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}} a(t\xi) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x_0} d\xi = (f * b_t)(x_0) \rightarrow \frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2}$$

όταν $t \rightarrow 0+$.

Ειδικότερα, αν η f είναι συνεχής στον x_0 , τότε $(f * b_t)(x_0) \rightarrow f(x_0)$ όταν $t \rightarrow 0+$.

Σχόλιο. Ας δούμε μόνο γιατί ισχύει ο τύπος $\int_{\mathbb{R}} a(t\xi) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x_0} d\xi = (f * b_t)(x_0)$ και μάλιστα, γενικότερα,

$$\int_{\mathbb{R}} a(t\xi) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = (f * b_t)(x)$$

για κάθε x . Ο τύπος ισχύει διότι $f * b_t \in L^1(\mathbb{R})$ και $(\widehat{f * b_t})(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{b_t}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{a}(t\xi) \in L^1(\mathbb{R})$, διότι η \widehat{f} είναι φραγμένη και $\widehat{a} \in L^1(\mathbb{R})$.

Πόρισμα 3.2. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Αν σε κάποιον x_0 υπάρχουν τα $f(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ και $f(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ της f , τότε ισχύουν τα όρια

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi t|\xi|} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x_0} d\xi = (f * P_t)(x_0) \rightarrow \frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2}$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-4\pi t\xi^2} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x_0} d\xi = (f * G_t)(x_0) \rightarrow \frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2}$$

όταν $t \rightarrow 0+$, όπου P_t και G_t είναι οι πυρήνες του Poisson και του Gauss.

Αν συνδυάσουμε αυτό το αποτέλεσμα με τις Προτάσεις 3.9 και 3.10, έχουμε δυο σημαντικά αποτελέσματα της περιοχής των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων.

Αν η f ανήκει στον $L^1(\mathbb{R})$ και είναι συνεχής, τότε η συνάρτηση $(f * P_t)(x)$ η οποία είναι αρμονική συνάρτηση στο άνω ημιεπίπεδο H_+ έχει “συνοριακή συνάρτηση” την f , δηλαδή ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow 0+} (f * P_t)(x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x.$$

Αν η f ανήκει στον $L^1(\mathbb{R})$ και είναι συνεχής, τότε η συνάρτηση $(f * G_t)(x)$ η οποία ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση της θερμότητας στο άνω ημιεπίπεδο H_+ έχει “συνοριακή συνάρτηση” την f , δηλαδή ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow 0+} (f * G_t)(x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x.$$

Θεώρημα 3.5. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Αν σε κάποιον x_0 υπάρχουν τα $f(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ και $f(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ και $\int_{(x_0, x_0+1)} \left| \frac{f(x) - f(x_0+)}{x - x_0} \right| dx < +\infty$ και $\int_{(x_0-1, x_0)} \left| \frac{f(x) - f(x_0-)}{x - x_0} \right| dx < +\infty$ τότε

$$\int_{-\eta}^{\eta} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x_0} d\xi \rightarrow \frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2}$$

όταν $\eta \rightarrow +\infty$. Ειδικότερα, το όριο αυτό ισχύει αν η f είναι παραγωγίσιμη στον x_0 .

3.2 Ο μετασχηματισμός Fourier στον $L^2(\mathbb{R})$.

Αν έχουμε μια συνάρτηση $f \in L^2(\mathbb{R})$, τότε η f μπορεί να μην ανήκει στον $L^1(\mathbb{R})$. Σ' αυτήν την περίπτωση, δεν ορίζεται το ολοκλήρωμα $\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i\xi x} dx$ και δεν μπορούμε να ορίσουμε το $\widehat{f}(\xi)$ όπως κάναμε στην περίπτωση που η f είναι ολοκληρώσιμη.

Παράδειγμα. Η συνάρτηση $\frac{x}{x^2+1}$ ανήκει στον $L^2(\mathbb{R})$ αλλά όχι στον $L^1(\mathbb{R})$.

Αλλά και το αντίστροφο: η $\frac{1}{\sqrt{|x|(|x|+1)}}$ ανήκει στον $L^1(\mathbb{R})$ αλλά όχι στον $L^2(\mathbb{R})$.

Άρα για συναρτήσεις στον $L^2(\mathbb{R})$ πρέπει να βρεθεί άλλος τρόπος να ορισθεί ο μετασχηματισμός Fourier.

Γνωρίζουμε ότι ο χώρος $C_c^\infty(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $L^2(\mathbb{R})$ και στον $L^1(\mathbb{R})$. Ο $C_c^\infty(\mathbb{R})$ αποτελείται από τις συναρτήσεις που είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} και μηδενίζονται έξω από κάποιο φραγμένο διάστημα. Θυμόμαστε το Πρόσχημα 3.1 και για τέτοιες συναρτήσεις έχουμε ένα σωρό καλά αποτελέσματα: κάθε συνάρτηση $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ανήκει στους $L^1(\mathbb{R})$ και $L^2(\mathbb{R})$ και $C_0(\mathbb{R})$ και, επίσης, ο μετασχηματισμός Fourier \widehat{f} ανήκει κι αυτός στους $L^1(\mathbb{R})$ και $C_0(\mathbb{R})$ και ισχύουν οι "αντίστροφοι" τύποι:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i\xi x} dx, \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x} d\xi. \quad (3.5)$$

Είναι, επίσης, απλό να δούμε ότι (για αυτές τις f) η \widehat{f} ανήκει και στον $L^2(\mathbb{R})$. Πράγματι, επειδή η \widehat{f} είναι φραγμένη και ανήκει στον $L^1(\mathbb{R})$, συνεπάγεται

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}} \|\widehat{f}\|_\infty |\widehat{f}(\xi)| d\xi \leq \|\widehat{f}\|_\infty \|\widehat{f}\|_1 < +\infty.$$

Θα δούμε, όμως, τώρα ότι ισχύει κάτι πολύ πιο συγκεκριμένο.

Θεώρημα 3.6. Έστω $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Τότε

$$\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle_2 = \langle f, g \rangle_2.$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους (3.5).

$$\begin{aligned} \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle_2 &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{\left(\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-2\pi i\xi x} dx \right)} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{g(x)} e^{2\pi i\xi x} dx \right) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i\xi x} d\xi \right) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx \\ &= \langle f, g \rangle_2. \end{aligned}$$

□

Σχόλιο. Φυσικά, η ταυτότητα στο Θεώρημα 3.6 με $g = f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ δίνει

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

Θεωρούμε, τώρα, οποιαδήποτε $f \in L^2(\mathbb{R})$. Τότε υπάρχει ακολουθία (f_n) στον $C_c^\infty(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε

$$\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0.$$

Επειδή η (f_n) είναι συγκλίνουσα ακολουθία στον $L^2(\mathbb{R})$, συνεπάγεται ότι είναι και ακολουθία Cauchy στον $L^2(\mathbb{R})$. Δηλαδή

$$\|f_n - f_m\|_2 \rightarrow 0.$$

Τώρα, η $f_n - f_m$ ανήκει στον $C_c^\infty(\mathbb{R})$, οπότε, από το Θεώρημα 3.6, και η $\widehat{f_n - f_m}$, δηλαδή η $\widehat{f_n} - \widehat{f_m}$, ανήκει στον $L^2(\mathbb{R})$ και

$$\|\widehat{f_n} - \widehat{f_m}\|_2 = \|f_n - f_m\|_2 \rightarrow 0.$$

Άρα και η ακολουθία $(\widehat{f_n})$ είναι ακολουθία Cauchy στον $L^2(\mathbb{R})$. Επειδή ο $L^2(\mathbb{R})$ είναι πλήρης, η $(\widehat{f_n})$ πρέπει να συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο του $L^2(\mathbb{R})$. Δηλαδή, υπάρχει $g \in L^2(\mathbb{R})$ ώστε

$$\|\widehat{f_n} - g\|_2 \rightarrow 0.$$

Για την ίδια αρχική $f \in L^2(\mathbb{R})$ θεωρούμε και μια οποιαδήποτε άλλη ακολουθία (f_n^*) στον $C_c^\infty(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε

$$\|f_n^* - f\|_2 \rightarrow 0.$$

Τότε

$$\|f_n^* - f_n\|_2 \leq \|f_n^* - f\|_2 + \|f_n - f\|_2 \rightarrow 0.$$

Επομένως,

$$\|\widehat{f_n^*} - \widehat{f_n}\|_2 = \|f_n^* - f_n\|_2 \rightarrow 0$$

και άρα

$$\|\widehat{f_n^*} - g\|_2 \leq \|\widehat{f_n^*} - \widehat{f_n}\|_2 + \|\widehat{f_n} - g\|_2 \rightarrow 0.$$

Συμπέρασμα: Για οποιαδήποτε $f \in L^2(\mathbb{R})$ υπάρχει κάποια $g \in L^2(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε για κάθε ακολουθία (f_n) στον $C_c^\infty(\mathbb{R})$ με $f_n \rightarrow f$ στον $L^2(\mathbb{R})$ να συνεπάγεται $\widehat{f_n} \rightarrow g$ στον $L^2(\mathbb{R})$.

Ορισμός. Έστω $f \in L^2(\mathbb{R})$. Την συνάρτηση $g \in L^2(\mathbb{R})$, στην οποία μόλις καταλήξαμε, την ονομάζουμε **μετασχηματισμό Fourier** της f και τη συμβολίζουμε

$$\mathcal{F}(f).$$

Δηλαδή, η συνάρτηση \mathcal{F} έχει τις εξής ιδιότητες βάσει του ορισμού της: $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R})$ και για κάθε ακολουθία (f_n) στον $C_c^\infty(\mathbb{R})$ με $f_n \rightarrow f$ στον $L^2(\mathbb{R})$ συνεπάγεται $\widehat{f_n} \rightarrow \mathcal{F}(f)$ στον $L^2(\mathbb{R})$.

Σχόλιο. Για συναρτήσεις $f \in L^1(\mathbb{R})$ χρησιμοποιούσαμε στην προηγούμενη ενότητα δυο σύμβολα για τον μετασχηματισμό Fourier τους: το \widehat{f} και το $\mathcal{F}(f)$. Για να μην υπάρξει σύγχυση, θα συμφωνήσουμε να χρησιμοποιούμε προς το παρόν το σύμβολο \widehat{f} για το μετασχηματισμό Fourier συνάρτησης $f \in L^1(\mathbb{R})$, όπως αυτός είχε ορισθεί στην προηγούμενη ενότητα, δηλαδή με τον τύπο $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i \xi x} dx$, και το σύμβολο $\mathcal{F}(f)$ για το μετασχηματισμό Fourier συνάρτησης $f \in L^2(\mathbb{R})$, όπως αυτός ορίστηκε μόλις τώρα. Μέχρι στιγμής δεν υπάρχει καμιά ένδειξη ότι οι δυο μετασχηματισμοί έχουν κάποια ιδιαίτερη μεταξύ τους σχέση.

Ορισμός. Έχει, λοιπόν, ορισθεί απεικόνιση

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}).$$

Η απεικόνιση αυτή ονομάζεται **μετασχηματισμός Fourier** στον $L^2(\mathbb{R})$.

Πρόταση 3.12. Η απεικόνιση $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ είναι γραμμικός μετασχηματισμός.

Απόδειξη. Έστω $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ και αριθμός λ . Θεωρούμε ακολουθίες (f_n) και (g_n) στον $C_c^\infty(\mathbb{R})$ με

$$f_n \rightarrow f, \quad g_n \rightarrow g \quad \text{στον } L^2(\mathbb{R}).$$

Τότε και η $(f_n + g_n)$ είναι ακολουθία στον $C_c^\infty(\mathbb{R})$ και ισχύει

$$f_n + g_n \rightarrow f + g \quad \text{στον } L^2(\mathbb{R}).$$

Από τον ορισμό των $\mathcal{F}(f)$, $\mathcal{F}(g)$ και $\mathcal{F}(f + g)$ έχουμε ότι

$$\widehat{f_n} \rightarrow \mathcal{F}(f), \quad \widehat{g_n} \rightarrow \mathcal{F}(g), \quad \widehat{f_n + g_n} \rightarrow \mathcal{F}(f + g) \quad \text{στον } L^2(\mathbb{R}).$$

Όμως, ισχύει $\widehat{f_n + g_n} = \widehat{f_n} + \widehat{g_n}$ για κάθε n , οπότε

$$\widehat{f_n + g_n} = \widehat{f_n} + \widehat{g_n} \rightarrow \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g).$$

Άρα

$$\mathcal{F}(f + g) = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g).$$

Ομοίως, έχουμε ότι

$$\lambda f_n \rightarrow \lambda f \quad \text{στον } L^2(\mathbb{R}).$$

Επειδή η (λf_n) είναι ακολουθία στον $C_c^\infty(\mathbb{R})$, από τον ορισμό του $\mathcal{F}(\lambda f)$ είναι

$$\widehat{\lambda f_n} \rightarrow \mathcal{F}(\lambda f) \quad \text{στον } L^2(\mathbb{R}).$$

Όμως, ισχύει $\widehat{\lambda f_n} = \lambda \widehat{f_n}$ για κάθε n , οπότε

$$\widehat{\lambda f_n} = \lambda \widehat{f_n} \rightarrow \lambda \mathcal{F}(f).$$

Άρα

$$\mathcal{F}(\lambda f) = \lambda \mathcal{F}(f).$$

□

Το επόμενο αναφέρεται ως **Θεώρημα του Plancherel**.

Θεώρημα 3.7. Η απεικόνιση $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ είναι ισομετρία. Δηλαδή, ισχύει

$$\langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \rangle_2 = \langle f, g \rangle_2$$

για κάθε $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

Απόδειξη. Έστω $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Θεωρούμε ακολουθίες (f_n) και (g_n) στον $C_c^\infty(\mathbb{R})$ με

$$f_n \rightarrow f, \quad g_n \rightarrow g \quad \text{στον } L^2(\mathbb{R}).$$

Άρα

$$\langle f_n, g_n \rangle_2 \rightarrow \langle f, g \rangle_2.$$

Από τον ορισμό των $\mathcal{F}(f)$ και $\mathcal{F}(g)$ έχουμε ότι

$$\widehat{f_n} \rightarrow \mathcal{F}(f), \quad \widehat{g_n} \rightarrow \mathcal{F}(g) \quad \text{στον } L^2(\mathbb{R}).$$

Συνεπάγεται

$$\langle \widehat{f_n}, \widehat{g_n} \rangle_2 \rightarrow \langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \rangle_2.$$

Όμως,

$$\langle \widehat{f_n}, \widehat{g_n} \rangle_2 = \langle f_n, g_n \rangle_2$$

για κάθε n . Άρα

$$\langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \rangle_2 = \langle f, g \rangle_2.$$

□

Σχόλιο. Η ταυτότητα στο Θεώρημα 3.7 με $g = f \in L^2(\mathbb{R})$ δίνει

$$\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2.$$

Το επόμενο αποτέλεσμα θα συνδέσει τους μετασχηματισμούς Fourier στον $L^1(\mathbb{R})$ και στον $L^2(\mathbb{R})$.

Πρόταση 3.13. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Τότε

$$\widehat{f} = \mathcal{F}(f),$$

όπου \widehat{f} είναι ο μετασχηματισμός Fourier της f ως συνάρτηση στον $L^1(\mathbb{R})$ και $\mathcal{F}(f)$ ο μετασχηματισμός Fourier της f ως συνάρτηση στον $L^2(\mathbb{R})$.

Απόδειξη. Θεωρούμε ακολουθία (f_n) στον $C_c^\infty(\mathbb{R})$ με

$$f_n \rightarrow f \quad \text{στον } L^1(\mathbb{R}) \quad \text{και} \quad f_n \rightarrow f \quad \text{στον } L^2(\mathbb{R}).$$

Από το πρώτο όριο συνεπάγεται

$$\max_{\xi \in \mathbb{R}} |\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{f}(\xi)| \leq \|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$$

οπότε $\widehat{f_n} \rightarrow \widehat{f}$ ομοιόμορφα στο \mathbb{R} . Επομένως, ειδικότερα,

$$\widehat{f_n}(\xi) \rightarrow \widehat{f}(\xi) \quad \text{για κάθε } \xi.$$

Από το δεύτερο όριο συνεπάγεται ότι

$$\widehat{f_n} \rightarrow \mathcal{F}(f) \quad \text{στον } L^2(\mathbb{R}).$$

Άρα υπάρχει υποακολουθία $(\widehat{f_{n_k}})$ ώστε

$$\widehat{f_{n_k}}(\xi) \rightarrow \mathcal{F}(f)(\xi) \quad \text{για σ.κ. } \xi.$$

Άρα

$$\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) \quad \text{για σ.κ. } \xi.$$

Άρα $\widehat{f} = \mathcal{F}(f)$. □

Σχόλια. [1] Το αποτέλεσμα της Πρότασης 3.13 λέει ότι δεν υπάρχει κίνδυνος σύγκρισης ανάμεσα στους δυο μετασχηματισμούς Fourier: σε όποιες συναρτήσεις εφαρμόζονται και οι δυο μετασχηματισμοί Fourier, δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα. Άρα από εδώ και στο εξής μπορούμε να χρησιμοποιούμε και τα δυο σύμβολα και για τους δυο μετασχηματισμούς Fourier.

[2] Άρα για μια συνάρτηση $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ έχουμε συγκεκριμένο τύπο για τον μετασχηματισμό Fourier $\mathcal{F}(f)$ που ορίσαμε σ' αυτήν την ενότητα:

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \quad \text{για σ.κ. } \xi.$$

Ο τύπος αυτός είναι πολύ προτιμότερος από τον ορισμό του $\mathcal{F}(f)$ με τις ακολουθίες (f_n) στον $C_c^\infty(\mathbb{R})$ οι οποίες συγκλίνουν στην f στον $L^2(\mathbb{R})$.

Το θέμα είναι αν υπάρχει κάποιος πιο συγκεκριμένος τρόπος (μέσω κάποιου τύπου, για παράδειγμα) να υπολογίζεται ο $\mathcal{F}(f)$ για $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$. Για τέτοιες συναρτήσεις δεν έχει νόημα, όπως είπαμε, ο τύπος με το ολοκλήρωμα. Σ' αυτό θα απαντήσει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.14. Έστω $f \in L^2(\mathbb{R})$. Για κάθε $\eta \geq 0$, ορίζουμε την συνάρτηση

$$t_\eta(f)(\xi) = \int_{-\eta}^{\eta} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \quad \text{για κάθε } \xi.$$

Τότε

$$t_\eta(f) \rightarrow \mathcal{F}(f) \quad \text{στον } L^2(\mathbb{R}).$$

Απόδειξη. Η f είναι στον $L^2(\mathbb{R})$, οπότε είναι και στον $L^2([- \eta, \eta])$, οπότε είναι και στον $L^1([- \eta, \eta])$, επειδή το $[- \eta, \eta]$ είναι φραγμένο διάστημα. Άρα το $\int_{-\eta}^{\eta} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx$ ορίζεται για κάθε ξ .

Τώρα ορίζουμε για κάθε $\eta \geq 0$ την συνάρτηση

$$f_\eta(x) = f(x) \chi_{[-\eta, \eta]}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in [-\eta, \eta] \\ 0, & \text{αν } x \notin [-\eta, \eta] \end{cases}$$

Η f_η ταυτίζεται με την f στο $[-\eta, \eta]$, οπότε ανήκει στον $L^2([-\eta, \eta]) \cap L^1([-\eta, \eta])$. Επειδή η f_η μηδενίζεται έξω από το $[-\eta, \eta]$, συνεπάγεται ότι

$$f_\eta \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}).$$

Άρα

$$\mathcal{F}(f_\eta)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f_\eta(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{-\eta}^{\eta} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = t_\eta(f)(\xi) \quad \text{για σ.κ. } \xi.$$

Από την άλλη μεριά, $f_\eta(x) \rightarrow f(x)$ για σ.κ. x όταν $\eta \rightarrow +\infty$. Επίσης, ισχύει $|f_\eta(x) - f(x)|^2 \leq 2|f_\eta(x)|^2 + 2|f(x)|^2 \leq 4|f(x)|^2$ για κάθε $\eta \geq 0$ και η $|f|^2$ είναι ολοκληρώσιμη. Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης συνεπάγεται ότι

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_\eta(x) - f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\eta \rightarrow +\infty} |f_\eta(x) - f(x)|^2 dx = 0.$$

Άρα

$$\|f_\eta - f\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{όταν } \eta \rightarrow +\infty.$$

Επειδή ο μετασχηματισμός Fourier είναι ισομετρία,

$$\|t_\eta(f) - \mathcal{F}(f)\|_2 = \|\mathcal{F}(f_\eta) - \mathcal{F}(f)\|_2 = \|f_\eta - f\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{όταν } \eta \rightarrow +\infty.$$

Άρα $t_\eta(f) \rightarrow \mathcal{F}(f)$ στον $L^2(\mathbb{R})$ όταν $\eta \rightarrow +\infty$. □

Ορισμός. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

με τύπο

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(-\xi)$$

για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Σχόλιο. Το σύμβολο \mathcal{F}^{-1} που επιλέξαμε δεν είναι τυχαίο. Η απεικόνιση \mathcal{F}^{-1} είναι η αντίστροφη απεικόνιση της \mathcal{F} . Αυτό, όμως, προς το παρόν δεν το γνωρίζουμε. Μέχρι να το αποδείξουμε, συνεχίζουμε σαν να μην υποδηλώνει τίποτα ο εκθέτης -1 .

Η απεικόνιση \mathcal{F}^{-1} είναι κι αυτή ισομετρία στον $L^2(\mathbb{R})$. Πράγματι,

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(f), \mathcal{F}^{-1}(g) \rangle_2 = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(-\xi) \overline{\mathcal{F}(g)(-\xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi) \overline{\mathcal{F}(g)(\xi)} d\xi = \langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \rangle_2 = \langle f, g \rangle_2.$$

Επίσης, ο \mathcal{F}^{-1} είναι γραμμικός μετασχηματισμός: ισχύει $\mathcal{F}^{-1}(f + g) = \mathcal{F}^{-1}(f) + \mathcal{F}^{-1}(g)$ και $\mathcal{F}^{-1}(\lambda f) = \lambda \mathcal{F}^{-1}(f)$. Όλα αυτά αποδεικνύονται πολύ εύκολα επειδή ισχύουν για τον \mathcal{F} .

Τέλος, θεωρούμε τις συνθέσεις

$$T = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad S = \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}).$$

Κι αυτές οι απεικονίσεις είναι ισομετρίες:

$$\langle T(f), T(g) \rangle_2 = \langle \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)), \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(g)) \rangle_2 = \langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \rangle_2 = \langle f, g \rangle_2$$

και, ομοίως, για την S .

Είναι, τέλος, οι T, S γραμμικοί μετασχηματισμοί ως συνθέσεις γραμμικών μετασχηματισμών.

Ας δούμε τώρα πώς δρουν οι T, S σε κάποιες “καλές” συναρτήσεις του $L^2(\mathbb{R})$.

Εστω $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Όπως έχουμε ήδη πει: $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ και $\mathcal{F}(f) = \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Άρα:

$$T(f)(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(-x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = f(x).$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} S(f)(x) &= \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f))(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) e^{-2\pi i \xi x} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(-\xi) e^{-2\pi i \xi x} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(-\xi) e^{-2\pi i \xi x} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = f(x). \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$T(f) = f, \quad S(f) = f$$

για κάθε f στο πυκνό υποσύνολο $C_c^\infty(\mathbb{R})$ του $L^2(\mathbb{R})$. Τώρα θα δούμε ότι αυτό ισχύει για κάθε f στον $L^2(\mathbb{R})$.

Έστω $f \in L^2(\mathbb{R})$. Θεωρούμε ακολουθία (f_n) στον $C_c^\infty(\mathbb{R})$ ώστε

$$\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0.$$

Επειδή ο T είναι ισομετρικός και γραμμικός και επειδή $T(f_n) = f_n$ για κάθε n ,

$$\|f_n - T(f)\|_2 = \|T(f_n) - T(f)\|_2 = \|T(f_n - f)\|_2 = \|f_n - f\|_2 \rightarrow 0.$$

Άρα

$$T(f) = f.$$

Με τον ίδιο τρόπο,

$$S(f) = f.$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 3.8. Ισχύει

$$\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = I, \quad \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = I,$$

όπου $I : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση του $L^2(\mathbb{R})$.

Δηλαδή, οι \mathcal{F} και \mathcal{F}^{-1} είναι αντίστροφοι μετασχηματισμοί του $L^2(\mathbb{R})$. Ειδικότερα, ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένα-προς-ένα και επί του $L^2(\mathbb{R})$.

Το μόνο που απομένει να κάνουμε ώστε να λέμε ότι έχουμε μια κάπως ικανοποιητική εικόνα του μετασχηματισμού Fourier στον $L^2(\mathbb{R})$ είναι να βρούμε μια ορθοκανονική βάση του $L^2(\mathbb{R})$ η οποία να “ταιριάζει” (θα δούμε τί σημαίνει αυτό) με τον μετασχηματισμό Fourier.

Γνωρίζουμε ότι, γενικά, ο $L^2(\mathbb{R})$ έχει τουλάχιστον μια ορθοκανονική βάση, διότι είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Δείτε το Θεώρημα 1.6 και την Πρόταση 1.61. Θα βρούμε, όμως, μια πολύ συγκεκριμένη ορθοκανονική βάση.

Πρόταση 3.15. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Θέτουμε $g(x) = xf(x)$ και υποθέτουμε, επιπλέον, ότι και $g \in L^1(\mathbb{R})$. Τότε η \widehat{f} είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$\frac{d}{d\xi} \widehat{f}(\xi) = -2\pi i \widehat{g}(\xi).$$

Απόδειξη. Είναι

$$\frac{\widehat{f}(\xi + h) - \widehat{f}(\xi)}{h} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{e^{-2\pi i h x} - 1}{h} e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

Τώρα, για κάθε $h \neq 0$ ισχύει

$$\left| f(x) \frac{e^{-2\pi i h x} - 1}{h} e^{-2\pi i \xi x} \right| = |f(x)| \left| \frac{e^{-2\pi i h x} - 1}{h} \right| = |f(x)| \frac{|2 \sin(\pi h x)|}{|h|} \leq 2\pi |xf(x)|$$

και η συνάρτηση $|xf(x)|$ είναι ολοκληρώσιμη (και δεν εξαρτάται από τον h). Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\widehat{f}(\xi + h) - \widehat{f}(\xi)}{h} &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{h \rightarrow 0} (f(x) \frac{e^{-2\pi i h x} - 1}{h} e^{-2\pi i \xi x}) dx \\ &= -2\pi i \int_{\mathbb{R}} x f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = -2\pi i \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = -2\pi i \widehat{g}(\xi).\end{aligned}$$

□

Ορισμός. Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$h_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{\pi x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-2\pi x^2})$$

για κάθε ακέραιο $n \geq 0$.

Οι συναρτήσεις h_n ονομάζονται **συναρτήσεις Hermite**.

Κάνοντας μερικούς εύκολους υπολογισμούς, βρίσκουμε τις αρχικές συναρτήσεις Hermite:

$$\begin{aligned}h_0(x) &= e^{-\pi x^2} \\ h_1(x) &= 4\pi x e^{-\pi x^2} \\ h_2(x) &= (8\pi^2 x^2 - 2\pi) e^{-\pi x^2} \\ h_3(x) &= \left(\frac{32}{3} \pi^3 x^3 - 8\pi x^2\right) e^{-\pi x^2} \\ h_4(x) &= \left(\frac{32}{3} \pi^4 x^4 - 16\pi^3 x^2 + 2\pi^2\right) e^{-\pi x^2}.\end{aligned}$$

Στα επόμενα διαδοχικά λήμματα θα περιγράψουμε μερικές βασικές ιδιότητες των συναρτήσεων Hermite.

Λήμμα 3.4. Για κάθε $n \geq 0$ ισχύει

$$h_n(x) = p_n(x) e^{-\pi x^2},$$

όπου p_n είναι πολυώνυμο βαθμού ακριβώς n .

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{d^n}{dx^n} (e^{-2\pi x^2}) = q_n(x) e^{-2\pi x^2},$$

όπου q_n είναι πολυώνυμο βαθμού ακριβώς n .

Για $n = 0$ αυτό ισχύει με $q_0(x) = 1$.

Έστω ότι για κάποιον $n \geq 0$ ισχύει $\frac{d^n}{dx^n} (e^{-2\pi x^2}) = q_n(x) e^{-2\pi x^2}$, όπου q_n είναι πολυώνυμο βαθμού ακριβώς n . Τότε

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (e^{-2\pi x^2}) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^n}{dx^n} (e^{-2\pi x^2}) \right) = \frac{d}{dx} (q_n(x) e^{-2\pi x^2}) = (q_n'(x) - 4\pi x q_n(x)) e^{-2\pi x^2} = q_{n+1}(x) e^{-2\pi x^2},$$

όπου το $q_{n+1}(x) = q_n'(x) - 4\pi x q_n(x)$ είναι, προφανώς, πολυώνυμο βαθμού ακριβώς $n + 1$. □

Συναρτήσεις, όπως οι h_n , οι οποίες είναι της μορφής

$$h(x) = p(x) e^{-ax^2},$$

όπου $a > 0$ και $p(x)$ είναι πολυώνυμο, έχουν πολύ καλές ιδιότητες τουλάχιστον σε σχέση με τον μετασχηματισμό Fourier. Ας δούμε μερικές τέτοιες ιδιότητες.

(i) Κατ' αρχάς μια τέτοια h είναι στον $C^\infty(\mathbb{R})$, δηλαδή άπειρες φορές παραγωγίσιμη. Αυτό είναι προφανές.

(ii) Είναι, επίσης, προφανές ότι κάθε παράγωγος της h είναι κι αυτή της μορφής: πολυώνυμο επί e^{-ax^2} .

Τώρα, κάθε συνάρτηση $x^n e^{-ax^2}$ ανήκει στον $C_0(\mathbb{R})$. Πράγματι, η συνάρτηση είναι συνεχής και

$$|x|^n e^{-ax^2} = \frac{|x|^n}{e^{ax^2}} \rightarrow 0 \quad \text{όταν } x \rightarrow \pm\infty.$$

Επειδή η $x^n e^{-ax^2}$ ανήκει στον $C_0(\mathbb{R})$ είναι φραγμένη, οπότε υπάρχει M_n ώστε

$$|x|^n e^{-ax^2} \leq M_n \quad \text{για κάθε } x.$$

Άρα για κάθε n ,

$$|x|^n e^{-ax^2} = \frac{1}{|x|^2} |x|^{n+2} e^{-ax^2} \leq \frac{M_{n+2}}{|x|^2} \quad \text{για κάθε } x \neq 0$$

οπότε η $x^n e^{-ax^2}$ ανήκει στον $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

(iii) Τώρα μια συνάρτηση $h(x) = p(x)e^{-ax^2}$, όπου $p(x)$ είναι πολυώνυμο, είναι γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων της μορφής $x^n e^{-ax^2}$, οπότε και η h είναι στον $C_0(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Και, φυσικά, κάθε παράγωγος της h είναι κι αυτή στον $C_0(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, αφού είναι κι αυτή ίδιου τύπου.

(iv) Άρα μια τέτοια h ικανοποιεί τις υποθέσεις της Πρότασης 3.11 και του Πορίσματος 3.1, οπότε $\widehat{h} \in L^1(\mathbb{R})$. Και, επειδή $h \in L^2(\mathbb{R})$, συνεπάγεται $\widehat{h} \in L^2(\mathbb{R})$. Δηλαδή η \widehat{h} είναι στον $C_0(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Λήμμα 3.5. Για κάθε $n \geq 0$ ισχύει

$$h'_n(x) - 2\pi x h_n(x) = -(n+1)h_{n+1}(x).$$

Απόδειξη. Είναι

$$\begin{aligned} h'_n(x) &= \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d}{dx} \left(e^{\pi x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-2\pi x^2}) \right) \\ &= 2\pi x \frac{(-1)^n}{n!} e^{\pi x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-2\pi x^2}) + \frac{(-1)^n}{n!} e^{\pi x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (e^{-2\pi x^2}) \\ &= 2\pi x h_n(x) - (n+1) \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} e^{\pi x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (e^{-2\pi x^2}) \\ &= 2\pi x h_n(x) - (n+1) h_{n+1}(x). \end{aligned}$$

□

Λήμμα 3.6. Για κάθε $n \geq 1$ ισχύει

$$h'_n(x) + 2\pi x h_n(x) = 4\pi h_{n-1}(x).$$

Απόδειξη. Είναι εύκολο να αποδειχθεί η γενική ταυτότητα

$$\frac{d^n}{dx^n} (x f(x)) = x \frac{d^n}{dx^n} f(x) + n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x)$$

(με επαγωγή, για παράδειγμα).

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα αυτή στην $f(x) = e^{-2\pi x^2}$, βρίσκουμε

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (e^{-2\pi x^2}) = -4\pi \frac{d^n}{dx^n} (x e^{-2\pi x^2}) = -4\pi x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-2\pi x^2}) - 4\pi n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-2\pi x^2}). \quad (3.6)$$

Τώρα, αρχίζοντας όπως στην προηγούμενη απόδειξη και χρησιμοποιώντας την (3.6) για την τρίτη ισότητα παρακάτω, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} h'_n(x) + 2\pi x h_n(x) &= \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d}{dx} \left(e^{\pi x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-2\pi x^2}) \right) + 2\pi x \frac{(-1)^n}{n!} e^{\pi x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-2\pi x^2}) \\ &= 4\pi x \frac{(-1)^n}{n!} e^{\pi x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-2\pi x^2}) + \frac{(-1)^n}{n!} e^{\pi x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (e^{-2\pi x^2}) \\ &= -4\pi n \frac{(-1)^n}{n!} e^{\pi x^2} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-2\pi x^2}) \\ &= 4\pi \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} e^{\pi x^2} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-2\pi x^2}) \\ &= 4\pi h_{n-1}(x). \end{aligned}$$

□

Λήμμα 3.7. Για κάθε $n \geq 0$ ισχύει

$$\widehat{h}_n = (-i)^n h_n.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Fourier στις δυο πλευρές της ισότητας του Λήμματος 3.5 και βρίσκουμε, με τη βοήθεια των Προτάσεων 3.11 και 3.15, ότι

$$2\pi i \xi \widehat{h}_n(\xi) - i \frac{d}{d\xi} \widehat{h}_n(\xi) = -(n+1) \widehat{h}_{n+1}(\xi).$$

Τώρα θέτουμε

$$g_n = i^n \widehat{h}_n,$$

οπότε $\widehat{h}_n = (-i)^n g_n$ και η τελευταία σχέση μετατρέπεται σε

$$-2\pi i \xi (-i)^{n+1} g_n(\xi) + (-i)^{n+1} g'_n(\xi) = -(n+1) (-i)^{n+1} g_{n+1}(\xi)$$

ή, ισοδύναμα,

$$g'_n(\xi) - 2\pi i \xi g_n(\xi) = -(n+1) g_{n+1}(\xi).$$

Αυτό το γράφουμε, φυσικά, και

$$g'_n(x) - 2\pi x g_n(x) = -(n+1) g_{n+1}(x).$$

Άρα οι g_n και h_n ικανοποιούν τους ίδιους αναδρομικούς τύπους. Επειδή

$$g_0(x) = h_0(x) = e^{-\pi x^2},$$

συνεπάγεται ότι ισχύει

$$g_n(x) = h_n(x)$$

για κάθε n . □

Σχόλιο. Το Λήμμα 3.7 λέει, στη γλώσσα της Γραμμικής Άλγεβρας, ότι ο μετασχηματισμός Fourier \mathcal{F} έχει τις συναρτήσεις h_n ως ιδιοδιανύσματα με αντίστοιχες ιδιοτιμές $(-i)^n$.

Λήμμα 3.8. Για κάθε $n \geq 0$ ισχύει

$$h_n''(x) - 4\pi^2 x^2 h_n(x) = -(4n+2)\pi h_n(x).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τους διαφορικούς τελεστές

$$S = \frac{d}{dx} - 2\pi x I, \quad T = \frac{d}{dx} + 2\pi x I, \quad K = \frac{d^2}{dx^2} - 4\pi^2 x^2 I,$$

(όπου I είναι ο ταυτοτικός τελεστής) τους οποίους εφαρμόζουμε σε παραγωγίσιμες συναρτήσεις ως εξής:

$$S(f)(x) = \frac{d}{dx} f(x) - 2\pi x f(x), \quad T(f)(x) = \frac{d}{dx} f(x) + 2\pi x f(x), \quad K(f)(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x) - 4\pi^2 x^2 f(x).$$

Παρατηρήστε ότι τα Λήμματα 3.5 και 3.6 διατυπώνονται ως εξής:

$$S(h_n) = -(n+1)h_{n+1}, \quad T(h_n) = 4\pi h_{n-1}. \quad (3.7)$$

Επίσης, η ισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε διατυπώνεται κι αυτή ως εξής:

$$K(h_n) = -(4n+2)\pi h_n.$$

Τώρα, η τριάδα S, T, K θυμίζει την αλγεβρική σχέση $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$. Ας δούμε, λοιπόν:

$$\begin{aligned} S(T(f)) &= \frac{d}{dx}T(f)(x) - 2\pi xT(f)(x) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x) + 2\pi x f(x)\right) - 2\pi x\left(\frac{d}{dx}f(x) + 2\pi x f(x)\right) \\ &= \frac{d^2}{dx^2}f(x) + 2\pi f(x) + 2\pi x \frac{d}{dx}f(x) - 2\pi x \frac{d}{dx}f(x) - 4\pi^2 x^2 f(x) \\ &= K(f)(x) + 2\pi f(x). \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$S \circ T = K + 2\pi I.$$

Μετά από όσα είπαμε, χρησιμοποιώντας την δεύτερη από τις ισότητες (3.7) και, μετά, την πρώτη (για τον $n - 1$) βρίσκουμε:

$$K(h_n) = S(T(h_n)) - 2\pi h_n = 4\pi S(h_{n-1}) - 2\pi h_n = -4\pi n h_n - 2\pi h_n = -(4n + 2)\pi h_n.$$

□

Σχόλιο. Το Λήμμα 3.8 λέει, στη γλώσσα της Γραμμικής Άλγεβρας, ότι ο τελεστής $K = \frac{d^2}{dx^2} - 4\pi^2 x^2 I$ έχει τις συναρτήσεις h_n ως ιδιοδιανύσματα με αντίστοιχες ιδιοτιμές $-(4n + 2)\pi$.

Λήμμα 3.9. Για κάθε $n, m \geq 0$ με $n \neq m$ ισχύει

$$\langle h_n, h_m \rangle_2 = 0.$$

Απόδειξη. Ο διαφορικός τελεστής $K = \frac{d^2}{dx^2} - 4\pi^2 x^2 I$ που είδαμε στην προηγούμενη απόδειξη θα ξαναχρησιμοποιήσει: παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\langle K(f), g \rangle_2 = \langle f, K(g) \rangle_2 \quad (3.8)$$

για δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες f, g για τις οποίες ισχύει $f'(x)g(x) \rightarrow 0$ και $f(x)g'(x) \rightarrow 0$ όταν $x \rightarrow \pm\infty$.

Πράγματι, με δυο ολοκληρώσεις κατά μέρη,

$$\begin{aligned} \langle K(f), g \rangle_2 &= \int_{\mathbb{R}} K(f)(x)g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d^2}{dx^2}f(x) - 4\pi^2 x^2 f(x)\right)g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d^2}{dx^2}f(x)g(x) dx - 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)g(x) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx}f(x) \frac{d}{dx}g(x) dx - 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{d^2}{dx^2}g(x) dx - 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\frac{d^2}{dx^2}g(x) - 4\pi^2 x^2 g(x)\right) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)K(g)(x) dx \\ &= \langle f, K(g) \rangle_2. \end{aligned}$$

(Υποθέσαμε ότι όλες οι συναρτήσεις είναι πραγματικές για απλούστευση. Όλα ισχύουν και για μιγαδικές συναρτήσεις. Έτσι κι αλλιώς, θα χρησιμοποιήσουμε τις πραγματικές συναρτήσεις h_n .)

Τώρα εφαρμόζουμε την ταυτότητα (3.8) στις h_n και h_m με $n \neq m$.

$$-(4n + 2)\pi \langle h_n, h_m \rangle_2 = \langle K(h_n), h_m \rangle_2 = \langle h_n, K(h_m) \rangle_2 = -(4m + 2)\pi \langle h_n, h_m \rangle_2.$$

Επειδή $n \neq m$, συνεπάγεται

$$\langle h_n, h_m \rangle_2 = 0.$$

□

Σχόλιο. Η ταυτότητα (3.8) λέει ότι ο διαφορικός τελεστής $K = \frac{d^2}{dx^2} - 4\pi^2 x^2 I$ είναι αυτοσυζυγής.

Λήμμα 3.10. Για κάθε $n \geq 0$ ισχύει

$$\|h_n\|_2^2 = \frac{(4\pi)^n}{\sqrt{2n!}}.$$

Απόδειξη. Προσθέτοντας τις ισότητες στα Λήμματα 3.5 και 3.6, βρίσκουμε

$$2h'_n(x) = -(n+1)h_{n+1}(x) + 4\pi h_{n-1}(x).$$

Άρα,

$$\begin{aligned} (n+1)\|h_{n+1}\|_2^2 &= (n+1) \int_{\mathbb{R}} h_{n+1}^2(x) dx = 4\pi \int_{\mathbb{R}} h_{n-1}(x)h_{n+1}(x) dx - 2 \int_{\mathbb{R}} h'_n(x)h_{n+1}(x) dx \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}} h_n(x)h'_{n+1}(x) dx \\ &= -(n+2) \int_{\mathbb{R}} h_n(x)h_{n+2}(x) dx + 4\pi \int_{\mathbb{R}} h_n^2(x) dx \\ &= 4\pi\|h_n\|_2^2. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας με $n!$ την τελευταία σχέση και θέτοντας

$$\lambda_n = n! \|h_n\|_2^2,$$

βρίσκουμε τον αναδρομικό τύπο

$$\lambda_{n+1} = 4\pi\lambda_n.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda_n = (4\pi)^n \lambda_0.$$

Τώρα,

$$\lambda_0 = \|h_0\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} h_0^2(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Άρα

$$\|h_n\|_2^2 = \frac{1}{n!} \lambda_n = \frac{(4\pi)^n}{\sqrt{2n!}}.$$

□

Λήμμα 3.11. Έστω $f \in L^2(\mathbb{R})$. Αν ισχύει $\langle f, h_n \rangle_2 = 0$ για κάθε $n \geq 0$, τότε $f = 0$.

Απόδειξη. Έστω, για κάθε $n \geq 0$,

$$p_n(x) = h_n(x)e^{\pi x^2}$$

το πολυώνυμο βαθμού ακριβώς n που είδαμε στο Λήμμα 3.4.

Κατ' αρχάς θα δούμε ότι, για κάθε $n \geq 0$, κάθε πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού $\leq n$ είναι γραμμικός συνδυασμός των πολυωνύμων $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$.

Για $n = 0$ αυτό είναι προφανές: κάθε σταθερό πολυώνυμο c είναι το πολλαπλάσιο $c \cdot 1 = c \cdot p_0(x)$ του $p_0(x) = 1$. Έστω ότι ο ισχυρισμός μας είναι σωστός για τον n . Έστω πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού $\leq n+1$, οπότε $p(x) = ax^{n+1} + \dots$. Αν $p_{n+1} = a_{n+1}x^{n+1} + \dots$ με $a_{n+1} \neq 0$, τότε το πολυώνυμο $p(x) - \frac{a}{a_{n+1}}p_{n+1}(x)$ είναι βαθμού το πολύ n , οπότε είναι γραμμικός συνδυασμός των $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$. Άρα το $p(x)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x), p_{n+1}(x)$. Ο ισχυρισμός μας αποδείχτηκε.

Έστω $f \in L^2(\mathbb{R})$ και έστω $\langle f, h_n \rangle_2 = 0$ για κάθε $n \geq 0$. Δηλαδή,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)p_n(x)e^{-\pi x^2} dx = 0$$

για κάθε $n \geq 0$.

Επειδή κάθε πολυώνυμο $p(x)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $p_0(x), p_1(x), \dots$, συνεπάγεται

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)p(x)e^{-\pi x^2} dx = 0$$

για κάθε πολυώνυμο $p(x)$.

Τώρα, για κάθε ξ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-\pi x^2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2\pi i \xi x)^n}{n!} \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2\pi i \xi)^n}{n!} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)x^n e^{-\pi x^2} dx \right) = 0,$$

διότι $\int_{\mathbb{R}} f(x)x^n e^{-\pi x^2} dx = 0$ για κάθε $n \geq 0$.

Αν, λοιπόν, δικαιολογηθεί η παραπάνω εναλλαγή ολοκληρώματος και σειράς, τότε συμπεραίνουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $f(x)e^{-\pi x^2}$ είναι ταυτοτικά μηδέν, οπότε η συνάρτηση $f(x)e^{-\pi x^2}$ είναι ταυτοτικά μηδέν και έχουμε τελειώσει.

Αρκεί, σύμφωνα με το Θεώρημα Σύγκλισης Σειράς (Levi), να αποδείξουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{(-2\pi i \xi)^n}{n!} f(x)x^n e^{-\pi x^2} \right| dx < +\infty.$$

Όμως, από την στοιχειώδη ανισότητα $2ab \leq \frac{a^2}{2} + 2b^2$ παίρνουμε για κάθε πεπερασμένο N :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{(-2\pi i \xi)^n}{n!} f(x)x^n e^{-\pi x^2} \right| dx &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^N \left| \frac{(-2\pi i \xi)^n}{n!} f(x)x^n e^{-\pi x^2} \right| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)| e^{-\pi x^2} \sum_{n=0}^N \frac{(2\pi |\xi| |x|)^n}{n!} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| e^{-\pi x^2 + 2\pi |\xi| |x|} dx \\ &\leq e^{2\pi \xi^2} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| e^{-\frac{\pi}{2} x^2} dx \\ &\leq e^{2\pi \xi^2} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx} \\ &= e^{2\pi \xi^2} \|f\|_2 < +\infty. \end{aligned}$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε N , έχουμε

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{(-2\pi i \xi)^n}{n!} f(x)x^n e^{-\pi x^2} \right| dx \leq e^{2\pi \xi^2} \|f\|_2 < +\infty$$

και τελειώσαμε. □

Θεώρημα 3.9. Αν θέσουμε

$$e_n(x) = \frac{1}{\|h_n\|_2} h_n(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}n!}{(4\pi)^n}} h_n(x)$$

για κάθε $n \geq 0$, τότε το σύνολο $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L^2(\mathbb{R})$.

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια των Λημμάτων 3.9, 3.10, 3.11 και, φυσικά, της Πρότασης 1.65. □

Το επόμενο αποτέλεσμα περιγράφει ακριβώς την δράση του μετασχηματισμού Fourier στον $L^2(\mathbb{R})$ σε σχέση με την ορθοκανονική βάση $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$.

Θεώρημα 3.10. Γνωρίζουμε ότι κάθε $f \in L^2(\mathbb{R})$ γράφεται

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle_2 e_n$$

ακριβώς επειδή το $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$ είναι ορθοκανονική βάση. Τότε,

$$\widehat{f} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-i)^n \langle f, e_n \rangle_2 e_n.$$

Απόδειξη. Έστω

$$s_n(f) = \sum_{k=0}^n \langle f, e_k \rangle_2 e_k.$$

Τότε

$$\|s_n(f) - f\|_2 \rightarrow 0.$$

Επειδή ο μετασχηματισμός Fourier είναι ισομετρία,

$$\|\widehat{s_n(f)} - \widehat{f}\|_2 = \|s_n(f) - f\|_2 \rightarrow 0.$$

Όμως, από την γραμμικότητα του μετασχηματισμού Fourier και από το Λήμμα 3.7,

$$\widehat{s_n(f)} = \sum_{k=0}^n \langle f, e_k \rangle_2 \widehat{e_k} = \sum_{k=0}^n (-i)^k \langle f, e_k \rangle_2 e_k.$$

Άρα

$$\widehat{f} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-i)^n \langle f, e_n \rangle_2 e_n.$$

□

Έστω H ένας γενικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και γραμμικοί υπόχωροι X και Y του H . Λέμε ότι οι X, Y είναι **ορθογώνιοι** αν ισχύει $\langle x, y \rangle = 0$ για κάθε $x \in X, y \in Y$.

Έστω H ένας γενικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και γραμμικοί υπόχωροι X_1, \dots, X_n του H . Λέμε ότι ο H είναι το **ορθογώνιο άθροισμα** των X_1, \dots, X_n αν οι X_1, \dots, X_n είναι ορθογώνιοι ανά δύο και ο H είναι το **άθροισμα** των X_1, \dots, X_n , δηλαδή

$$H = X_1 + \dots + X_n.$$

Αυτό το τελευταίο σημαίνει στην Γραμμική Άλγεβρα ότι για κάθε $x \in H$ υπάρχουν $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ ώστε

$$x = x_1 + \dots + x_n.$$

Μάλιστα, επειδή οι X_1, \dots, X_n είναι ορθογώνιοι ανά δύο, ο H είναι το **ευθύ άθροισμα** των X_1, \dots, X_n , δηλαδή

$$H = X_1 \oplus \dots \oplus X_n.$$

Αυτό, πάλι, σημαίνει ότι για κάθε $x \in H$ υπάρχουν **μοναδικοί** $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ ώστε $x = x_1 + \dots + x_n$. Πράγματι, έστω και $x = x'_1 + \dots + x'_n$ για κάποιους ακόμη $x'_1 \in X_1, \dots, x'_n \in X_n$. Θέτουμε $y_1 = x_1 - x'_1 \in X_1, \dots, y_n = x_n - x'_n \in X_n$ και τότε

$$y_1 + \dots + y_n = 0.$$

Επειδή οι X_1, \dots, X_n είναι ορθογώνιοι ανά δύο, για κάθε $k = 1, \dots, n$ έχουμε

$$0 = \langle 0, y_k \rangle = \langle y_1 + \dots + y_n, y_k \rangle = \langle y_1, y_k \rangle + \dots + \langle y_n, y_k \rangle = \langle y_k, y_k \rangle = \|y_k\|^2.$$

Άρα $y_k = 0$ και, επομένως, $x_k = x'_k$ για κάθε $k = 1, \dots, n$.

Θεώρημα 3.11. Θεωρούμε τους εξής τέσσερις γραμμικούς υπόχωρους του $L^2(\mathbb{R})$.

$$X_k = \left\{ f \mid f = \sum_{m=0}^{+\infty} \langle f, e_{4m+k} \rangle_2 e_{4m+k} \right\} \quad \text{για } k = 0, 1, 2, 3.$$

Οι X_0, X_1, X_2, X_3 είναι ορθογώνιοι ανά δύο και

$$L^2(\mathbb{R}) = X_0 + X_1 + X_2 + X_3.$$

Επίσης, ισχύει

$$\widehat{f} = (-i)^k f \quad \text{για κάθε } f \in X_k.$$

Με άλλα λόγια, ο μετασχηματισμός Fourier έχει ακριβώς τέσσερις ιδιοτιμές, τις $1, -i, -1, i$, ο κάθε X_k είναι ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $(-i)^k$ και ο $L^2(\mathbb{R})$ είναι το ορθογώνιο άθροισμα των X_0, X_1, X_2, X_3 .

Απόδειξη. Έστω $k_1, k_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ με $k_1 \neq k_2$. Επίσης, έστω $f_1 \in X_{k_1}$ και $f_2 \in X_{k_2}$. Δηλαδή

$$f_1 = \sum_{m=0}^{+\infty} \langle f_1, e_{4m+k_1} \rangle_2 e_{4m+k_1}, \quad f_2 = \sum_{m=0}^{+\infty} \langle f_2, e_{4m+k_2} \rangle_2 e_{4m+k_2}.$$

Τότε

$$\langle f_1, f_2 \rangle_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f_1, e_n \rangle_2 \overline{\langle f_2, e_n \rangle_2} = 0$$

διότι για κάθε n το γινόμενο $\langle f_1, e_n \rangle_2 \overline{\langle f_2, e_n \rangle_2}$ ισούται με 0. Πράγματι, είναι $\langle f_1, e_n \rangle_2 \neq 0$ μόνο αν ο n είναι της μορφής $n = 4m + k_1$ και είναι $\langle f_2, e_n \rangle_2 \neq 0$ μόνο αν ο n είναι της μορφής $n = 4m + k_2$.

Άρα οι X_0, X_1, X_2, X_3 είναι ορθογώνιοι ανά δύο.

Τώρα, έστω $f \in L^2(\mathbb{R})$, οπότε

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle_2 e_n.$$

Ορίζουμε, για κάθε $k = 0, 1, 2, 3$,

$$f_k = \sum_{m=0}^{+\infty} \langle f, e_{4m+k} \rangle_2 e_{4m+k},$$

και τότε, προφανώς,

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + f_3$$

και $f_k \in X_k$ για κάθε $k = 0, 1, 2, 3$.

Άρα

$$L^2(\mathbb{R}) = X_0 + X_1 + X_2 + X_3.$$

Επίσης, έστω $f \in X_k$, οπότε

$$f = \sum_{m=0}^{+\infty} \langle f, e_{4m+k} \rangle_2 e_{4m+k}.$$

Τότε

$$\widehat{f} = \sum_{m=0}^{+\infty} (-i)^{4m+k} \langle f, e_{4m+k} \rangle_2 e_{4m+k} = (-i)^k \sum_{m=0}^{+\infty} \langle f, e_{4m+k} \rangle_2 e_{4m+k} = (-i)^k f.$$

Δηλαδή, ισχύει

$$\widehat{f} = (-i)^k f \quad \text{για κάθε } f \in X_k.$$

Αντιστρόφως, έστω $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ και έστω $f \in L^2(\mathbb{R})$ ώστε

$$\widehat{f} = (-i)^k f.$$

Τότε υπάρχουν, όπως είδαμε, $f_0 \in X_0, f_1 \in X_1, f_2 \in X_2, f_3 \in X_3$ ώστε

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + f_3.$$

Συνεπάγεται

$$(-i)^k f = \widehat{f} = \widehat{f_0} + \widehat{f_1} + \widehat{f_2} + \widehat{f_3} = (-i)^0 f_0 + (-i)^1 f_1 + (-i)^2 f_2 + (-i)^3 f_3.$$

Άρα

$$(-i)^k f_0 + (-i)^k f_1 + (-i)^k f_2 + (-i)^k f_3 = (-i)^0 f_0 + (-i)^1 f_1 + (-i)^2 f_2 + (-i)^3 f_3.$$

Επειδή ο $L^2(\mathbb{R})$ είναι το ευθύ άθροισμα των X_0, X_1, X_2, X_3 , συνεπάγεται

$$(-i)^k f_0 = (-i)^0 f_0, \quad (-i)^k f_1 = (-i)^1 f_1, \quad (-i)^k f_2 = (-i)^2 f_2, \quad (-i)^k f_3 = (-i)^3 f_3.$$

Άρα οι f_0, f_1, f_2, f_3 είναι 0 εκτός από την f_k και, επομένως,

$$f = f_k \in X_k.$$

Άρα ο X_k είναι ο ιδιόχωρος του μετασχηματισμού Fourier που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $(-i)^k$.

Τώρα, έστω αριθμός $\lambda \notin \{0, 1, 2, 3\}$ και έστω $f \in L^2(\mathbb{R})$ ώστε

$$\widehat{f} = \lambda f.$$

Θεωρούμε τις $f_0 \in X_0, f_1 \in X_1, f_2 \in X_2, f_3 \in X_3$ ώστε

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + f_3.$$

Τότε

$$\widehat{f} = f_0 - if_1 - f_2 + if_3, \quad \lambda f = \lambda f_0 + \lambda f_1 + \lambda f_2 + \lambda f_3.$$

Άρα

$$\lambda f_0 = f_0, \quad \lambda f_1 = -if_1, \quad \lambda f_2 = -f_2, \quad \lambda f_3 = if_3$$

και, επομένως, $f_0 = f_1 = f_2 = f_3 = 0$. Άρα $f = 0$, οπότε ο λ δεν είναι ιδιοτιμή του μετασχηματισμού Fourier. \square

Σχόλιο. Από το Θεώρημα 3.11 βλέπουμε και μια “γεωμετρική” δράση του μετασχηματισμού Fourier στον $L^2(\mathbb{R})$. Συγκεκριμένα, ο μετασχηματισμός Fourier αφ’ ενός δρά “μέσα” σε καθέναν από τους X_0, X_1, X_2, X_3 . Δηλαδή, απεικονίζει καθέναν X_k στον εαυτό του. Αφ’ ετέρου ο μετασχηματισμός Fourier “στρέφει” τον X_0 κατά γωνία 0, τον X_1 κατά γωνία $-\frac{\pi}{2}$, τον X_2 κατά γωνία π και τον X_3 κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$. Σε κάθε περίπτωση, αφήνει τις αποστάσεις αμετάβλητες.