Πραγματική Ανάλυση Ι (2008-09)

Ενδιάμεση Εξέταση – 23 Μαΐου 2009

1. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Ένα υποσύνολο G του X είναι ανοικτό αν και μόνο αν «για κάθε $x \in G$ και για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \xrightarrow{\rho} x$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ τότε $x_n \in G$».

(β) Αν A, B είναι υποσύνολα του X (όχι κατ' ανάγκην ξένα) και $A \cup B = X$, τότε $\overline{A} \cup B^\circ = X$.

(γ) Αν το D είναι πυκνό υποσύνολο του X και το G είναι ανοικτό υποσύνολο του X, τότε $\overline{D \cap G} = \overline{G}$.

(3μ)

2. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και A μη κενό υποσύνολο του X. Αν $x \in X$ ορίζουμε την απόσταση του x από το A ως εξής:

$$\mathrm{dist}(x,A) = \inf\{\rho(x,a) : a \in A\}.$$

Αποδείξτε ότι:

(α) Η συνάρτηση $d_A : X \to \mathbb{R}$ με $d_A(x) = \mathrm{dist}(x,A)$ είναι Lipschitz με σταθερά 1.

(β) Ισχύει $d_A(x) = 0$ αν και μόνο αν $x \in \overline{A}$.

(γ) Για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $\{x \in X : \mathrm{dist}(x,A) < \varepsilon\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

Χρησιμοποιώντας, αν θέλετε, τα παραπάνω δείξτε ότι κάθε κλειστό υποσύνολο του X γράφεται ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών υποσυνόλων του X (είναι σύνολο G_δ).

(3μ)

3. (α) Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f απεικονίζει βασικές ακολουθίες του X σε βασικές ακολουθίες του Y.

Δώστε παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης η οποία δεν απεικονίζει κάθε βασική ακολουθία σε βασική ακολουθία.

(β) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και A μη κενό υποσύνολο του X. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, αποδείξτε ότι η f επεκτείνεται σε μια ομοιόμορφα συνεχή συνάρτηση $F : \overline{A} \to \mathbb{R}$. Είναι η επέκταση μοναδική;

(3μ)

4. (α) Στο σύνολο $A = [1,\infty)$ θεωρούμε τις μετρικές $d(x,y) = |x-y|$ και $\rho(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$.

(a_1) Δείξτε ότι οι μετρικές ρ και d είναι ισοδύναμες (άρα, οι (A,d) και (A,ρ) είναι ομοιομορφικοί).

(a_2) Δείξτε ότι ο (A,d) είναι πλήρης αλλά ο (A,ρ) δεν είναι πλήρης.

(β) Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ ομοιομορφισμός. Δείξτε ότι: αν το D είναι πυκνό υποσύνολο του X τότε το $f(D) = \{f(d) : d \in D\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του Y.

(γ) Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και E πυκνό και G_δ–υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι για κάθε ομοιομορφισμό $f : X \to X$ ισχύει $E \cap f(E) \neq \emptyset$.

(3μ)

Καλή επιτυχία!

Ενδεικτικές απαντήσεις

1. (α) Υποθέτουμε πρώτα ότι το G είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Έστω $x \in G$ και (x_n) ακολουθία στο X με $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Αφού το G είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq G$. Αφού $x_n \xrightarrow{\rho} x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ τότε $\rho(x_n, x) < \varepsilon$. Συνεπώς, $x_n \in B(x, \varepsilon) \subseteq G$ για κάθε $n \geq n_0$.

Αντίστροφα· υποθέτουμε ότι το G δεν είναι ανοικτό. Τότε, υπάρχει $x \in G$ ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ να ισχύει

$$B(x, \varepsilon) \cap (X \setminus G) \neq \emptyset.$$

Τότε, για $n = 1, 2, ...$ μπορούμε να βρούμε $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap (X \setminus G)$, δηλαδή

$$x_n \notin G \quad \text{και} \quad \rho(x_n, x) < \frac{1}{n}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η (x_n) συγκλίνει στο x και όλοι οι όροι της είναι εκτός του G, άτοπο.

(β) Δείχνουμε ότι: αν $x \in X$ και $x \notin \overline{A}$ τότε $x \in B^\circ$: αφού $x \notin \overline{A}$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$, δηλαδή $B(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus A$. Όμως, από την υπόθεση ότι $A \cup B = X$ έχουμε $X \setminus A \subseteq B$. Άρα, $B(x, \varepsilon) \subseteq B$ και αυτό δείχνει ότι $x \in B^\circ$.

Δείξαμε ότι $X \setminus \overline{A} \subseteq B^\circ$. Άρα, $\overline{A} \cup B^\circ = X$.

(γ) Από την $D \cap G \subseteq G$ έχουμε $\overline{D \cap G} \subseteq \overline{G}$. Αντίστροφα, έστω $x \in \overline{G}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $y \in B(x, \varepsilon) \cap G$. Το τελευταίο σύνολο είναι ανοικτό ως τομή ανοικτών συνόλων, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(y, \delta) \subseteq B(x, \varepsilon) \cap G$. Αφού το D είναι πυκνό, μπορούμε να βρούμε $z \in B(y, \delta) \cap D$. Τότε, $z \in B(x, \varepsilon) \cap (G \cap D)$. Δείξαμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $z \in G \cap D$ ώστε $z \in B(x, \varepsilon)$. Άρα, $x \in \overline{G \cap D}$. Έπεται ότι $\overline{G} \subseteq \overline{G \cap D}$.

2. (α) Έστω $t, s \in X$. Για κάθε $a \in A$ έχουμε

$$d_A(t) \leq \rho(t, a) \leq \rho(t, s) + \rho(s, a).$$

Συνεπώς, ο $d_A(t) - \rho(t, s)$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου $\{\rho(s, a) : a \in A\}$. Έπεται ότι $d_A(t) - \rho(t, s) \leq d_A(s)$. Δηλαδή,

$$d_A(t) - d_A(s) \leq \rho(t, s).$$

Το ίδιο ακριβώς επιχείρημα δείχνει ότι

$$d_A(s) - d_A(t) \leq \rho(t, s),$$

απ᾽ όπου παίρνουμε την

$$|d_A(t) - d_A(s)| \leq \rho(t, s)$$

για κάθε $t, s \in X$. Συνεπώς, η d_A είναι συνάρτηση Lipschitz με σταθερά 1.

(β) Παρατηρούμε ότι $\mathrm{dist}(x, A) = 0$ αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $\rho(x, a) < \varepsilon$ δηλαδή αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ δηλαδή αν και μόνο αν $x \in \overline{A}$.

(γ) Έστω $U = \{x \in X : \mathrm{dist}(x, A) < \varepsilon\}$. Θεωρούμε τυχόν $x \in U$ και επιλέγουμε $0 < \delta < \varepsilon - \mathrm{dist}(x, A)$. Για κάθε $y \in B(x, \delta)$ ισχύει $\mathrm{dist}(y, A) \leq \mathrm{dist}(x, A) + \rho(y, x) < \varepsilon$. Άρα, $B(y, \delta) \subseteq U$. Αυτό αποδεικνύει ότι το U είναι ανοικτό.

Άλλος τρόπος: $U = d_A^{-1}((-\infty, \varepsilon))$. Η d_A είναι συνεχής και το $(-\infty, \varepsilon)$ είναι ανοικτό.

Για το τελευταίο ερώτημα: Έστω F κλειστό υποσύνολο του X. Παρατηρούμε ότι $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ όπου $G_n = \{x \in X : \mathrm{dist}(x, F) < 1/n\}$. Πράγματι, κάθε G_n περιέχει το F (διότι, αν $x \in F$ τότε $d(x, F) = 0 < 1/n$), άρα

$$F \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Αντίστροφα, αν $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ τότε $\mathrm{dist}(x, F) < \frac{1}{n}$ για όλα τα n, άρα $\mathrm{dist}(x, F) = 0$. Έπεται ότι $x \in \overline{F} = F$ διότι το F είναι κλειστό. Τέλος, κάθε G_n είναι ανοικτό σύνολο.

3. (α) Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον (X, ρ). Θα δείξουμε ότι η $(f(x_n))$ είναι βασική ακολουθία στον (Y, σ). Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in X$

και $\rho(x,y)<\delta$ τότε $\sigma(f(x),f(y))<\varepsilon$. Η (x_n) είναι ρ–βασική, συνεπώς υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε αν $m,n\geq n_0$ τότε $\rho(x_n,x_m)<\delta$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι αν $m,n\geq n_0$ τότε $\sigma(f(x_n),f(x_m))<\varepsilon$.

Αν θεωρήσουμε την $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ με $f(x)=\frac{1}{x}$ τότε αυτή είναι συνεχής, αν όμως θεωρήσουμε την βασική ακολουθία $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $(0,+\infty)$ τότε αυτή δεν απεικονίζεται σε βασική ακολουθία, αφού $f\left(\frac{1}{n}\right)=n$.

(β) Έστω $x\in\overline{A}$. Θεωρούμε τυχούσα ακολουθία (x_n) στο A με $x_n\to x$. Η (x_n) είναι βασική, άρα η $(f(x_n))$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$ (διότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής). Τότε, υπάρχει το $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\in\mathbb{R}$. Αν (x'_n) είναι κάποια άλλη ακολουθία στο A με $x'_n\to x$, τότε $\rho(x_n,x'_n)\to 0$ άρα $f(x'_n)-f(x_n)\to 0$ (πάλι από την ομοιόμορφη συνέχεια της f). Συνεπώς, $\lim\limits_{n\to\infty}f(x'_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ παίρνοντας σαν (x_n) μία από τις ακολουθίες του A που συγκλίνουν στο x (το όριο δεν εξαρτάται από την επιλογή της ακολουθίας).

Η F είναι επέκταση της f: αν $x\in A$ τότε η σταθερή ακολουθία $x_n=x$ είναι στο A και συγκλίνει στο x, άρα $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=f(x)$. Μένει να δείξουμε ότι η F είναι ομοιόμορφα συνεχής. Έστω $\varepsilon>0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta>0$ ώστε αν $z,w\in A$ και $\rho(z,w)<\delta$ τότε $|f(z)-f(w)|<\varepsilon/2$. Έστω $x,y\in\overline{A}$ με $\rho(x,y)<\delta$. Υπάρχουν $x_n,y_n\in A$ ώστε $x_n\to x$ και $y_n\to y$. Τότε, $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=\rho(x,y)<\delta$, άρα υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n\geq n_0$ να ισχύει $\rho(x_n,y_n)<\delta$. Από την επιλογή του δ έχουμε $|f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon/2$ για κάθε $n\geq n_0$. Συνεπώς, $|F(x)-F(y)|=\lim\limits_{n\to\infty}|f(x_n)-f(y_n)|\leq\varepsilon/2<\varepsilon$.

4. (α) Για το πρώτο ερώτημα παρατηρήστε ότι: αν $x_n,x\in[1,\infty)$ τότε $d(x_n,x)\to 0$ αν και μόνο αν $x_n\to x$ αν και μόνο αν $\frac{1}{x_n}\to\frac{1}{x}$ αν και μόνο αν $\rho(x_n,x)\to 0$.

Ο (A,d) είναι πλήρης διότι το $A=[1,\infty)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική. Στον (A,ρ) θεωρούμε την ακολουθία $x_n=n$. Η (x_n) είναι ρ-βασική: έστω $\varepsilon>0$. Βρίσκουμε $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$. Τότε, για κάθε $m>n\geq n_0$ έχουμε $\rho(x_m,x_n)=\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}<\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n_0}<\varepsilon$. Όμως, δεν υπάρχει $x\in A$ ώστε $\rho(n,x)\to 0$: θα είχαμε $\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{x}\right|\to 0$, δηλαδή $\frac{1}{n}\to\frac{1}{x}$ (με τη συνήθη μετρική) το οποίο σημαίνει ότι $\frac{1}{x}=0$, άτοπο.

(β) Έστω $y\in Y$ και έστω $\varepsilon>0$. Η f είναι επί, άρα υπάρχει $x\in X$ ώστε $y=f(x)$. Η f είναι συνεχής στο x, άρα υπάρχει $\delta>0$ ώστε αν $x_1\in B(x,\delta)$ τότε $\sigma(f(x_1),f(x))<\varepsilon$. Αφού το D είναι πυκνό στον X, μπορούμε να βρούμε $d\in D\cap B(x,\delta)$. Τότε, $f(d)\in f(D)$ και $\sigma(f(d),y)=\sigma(f(d),f(x))<\varepsilon$. Τα $y\in Y$ και $\varepsilon>0$ ήταν τυχόντα, άρα το $f(D)$ είναι πυκνό υποσύνολο του Y.

(γ) Παρατηρήστε πρώτα ότι κάθε ομοιομορφισμός απεικονίζει σύνολα G_δ σε σύνολα G_δ και πυκνά σύνολα σε πυκνά σύνολα (από το (β)). Συνεπώς, το $f(E)$ είναι πυκνό και G_δ υποσύνολο του X. Πιο συγκεκριμένα, $E=\bigcap_{n=1}^\infty G_n$ όπου G_n ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του X και $f(E)=\bigcap_{n=1}^\infty V_n$ όπου κάθε $V_n=f(G_n)$ είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του X. Αφού ο (X,ρ) είναι πλήρης, το θεώρημα του Baire μας εξασφαλίζει ότι το σύνολο

$$E\cap f(E)=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n\right)\cap\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n\right)$$

είναι πυκνό G_δ-υποσύνολο του X. Ειδικότερα, $E\cap f(E)\neq\emptyset$.