ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

23 Ιουνίου 2009

1. (α) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω $D \subseteq X$. Το D λέγεται πυκνό στον X αν $\overline{D} = X$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

1. Το D είναι πυκνό.
2. Για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $B(x,\varepsilon) \cap D \neq \emptyset$.
3. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει ακολουθία (x_n) στοιχείων του D ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

(β) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και A, B μη κενά υποσύνολα του X. Δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Αν τα A, B είναι κλειστά και $A \cap B = \emptyset$ τότε $\mathrm{dist}(A,B) > 0$.
2. Αν το A είναι κλειστό, το B συμπαγές και $A \cap B = \emptyset$ τότε $\mathrm{dist}(A,B) > 0$.

2. (α) Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$. Το *γράφημα* της f είναι το σύνολο

$$\mathrm{Gr}(f) = \big\{(x, f(x)) : x \in X\big\} \subseteq X \times Y.$$

Δείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής συνάρτηση, τότε το γράφημα $\mathrm{Gr}(f)$ της f είναι κλειστό στον $X \times Y$ ως προς κάθε μετρική γινόμενο. Δώστε παράδειγμα το οποίο να δείχνει ότι το αντίστροφο δεν ισχύει.

(β) Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος. Χρησιμοποιώντας την ακολουθιακή συμπάγεια του X (ή με άλλον τρόπο) δείξτε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : (X,\rho) \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

3. (α) Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ ισομετρία επί. Δείξτε ότι: αν ο X είναι πλήρης, τότε ο Y είναι πλήρης.

(β) Δείξτε ότι κάθε πυκνό G_δ υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.

4. (α) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και (x_n) ακολουθία στον X με $x_n \to x_0 \in X$. Δείξτε ότι το σύνολο $K = \{x_0\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι συμπαγές.

(β) Έστω $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ συνεχής και $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$ ακολουθία μη κενών συμπαγών υποσυνόλων του X. Αποδείξτε ότι:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset \text{ και } f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(K_n).$$

5. (α) Έστω $f, f_n : (X,\rho) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$. Αν κάθε f_n είναι συνεχής συνάρτηση και $f_n \to f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση.

(β) Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = nxe^{-nx}.$$

Δείξτε ότι $f_n \to f \equiv 0$ κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0,\infty)$. Δείξτε ότι, αν $0 < a < b$ τότε $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Εξετάστε αν $f_n \to 0$ ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[a,\infty)$, $a > 0$.

6. (α) Εξετάστε αν η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{1+n^3x^2}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,\infty)$.

(β) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$ και $\|f' - p'\|_\infty < \varepsilon$.

Καλή Επιτυχία!