Πανεπιστημιακά Μαθηματικά Κείμενα

2

Επιμέλεια Σειράς: Νίκος Μαρμαρίδης

Καθηγητής Μαθηματικών Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

LEADER BOOKS A.E.
ΑΘΗΝΑ

1 **Rotman Joseph**: Θεωρία Galois, xii, 185 σελίδες, έτος εκδόσεως 2000

Walter Rudin

Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως

Μετάφραση από τα αγγλικά:

Δημοσθένης Κ. Σταλίδης

Leader Books

Τίτλος Πρωτοτύπου:	Principles of Mathematical Analysis
Συγγραφέας Πρωτοτύπου:	Walter Rudin
Έκδοση:	Third Edition 1976, McGraw–Hill Book Co.–Singapore
Copyright © 1964, 1976:	McGraw–Hill, Inc.
Copyright © 2000 για την ελληνική γλώσσα:	Leader Books A.E.
Μετάφραση από τα αγγλικά:	Δημοσθένης Κ. Σταλίδης Μαθηματικός
Γλωσσική Επιμέλεια:	Κωνσταντίνος Γ. Σταλίδης
Σειρά:	Πανεπιστημιακά Μαθηματικά Κείμενα
Επιστημονική Επιμέλεια Σειράς:	Νίκος Μαρμαρίδης Καθηγητής Μαθηματικών Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
1η έκδοση για την Ελλάδα:	2000

ISBN 960–7901–16–9

Εκδόσεις

LEADER BOOKS A.E.

Π. Κυριακού 17, Αμπελόκηποι,

115 21 Αθήνα

Τηλ. : 64.52.825-64.50.048, Fax.: 64.49.924

http://www.leaderbooks.com, e-mail:info@leaderbooks.com

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΦΡΑΣΤΗ

Αποτελεί ιδιαίτερη τιμή η ανάθεση σε μένα, εκ μέρους του εκδοτικού οίκου Leader Books, της μεταφράσεως στην ελληνική γλώσσα του φημισμένου βιβλίου «Principles of Mathematical Analysis» του Walter Rudin, καθηγητή στο Πανεπιστήμιο του Wisconsin.

Ο καθηγητής Rudin είναι διακεκριμένος ερευνητής της Αναλύσεως, αλλά είναι περισσότερο γνωστός στη μαθηματική κοινότητα ως έξοχος διδάσκαλος. Εκτός από το παρόν βιβλίο, ο καθηγητής Rudin έχει συγγράψει δύο ακόμα φημισμένα βιβλία, τα οποία τιτλοφορούνται «Real and Complex Analysis» και «Functional Analysis». Τα τρία αυτά βιβλία έχουν συμβάλει τα μέγιστα στην πνευματική ανατροφή πολλών γενεών νέων μαθηματικών και βρίσκονται στην πρώτη γραμμή αναφοράς των κατοπινών συγγραμμάτων σε παρεμφερείς κλάδους των Μαθηματικών. Τουλάχιστον κατά την προσωπική μου εκτίμηση, το βιβλίο αυτό αποτελεί ένα ταχύτατο ταξίδι πρώτης θέσεως στα βασικά θέματα της Μαθηματικής Αναλύσεως.

Έχοντας την αμετακίνητη πεποίθηση ότι η γνώση της ιστορικής εξελίξεως ενός (όχι κατ' ανάγκη επιστημονικού) αντικειμένου και των βίων των πρωτεργατών του είναι σημαντικός παράγοντας για τη διαμόρφωση ουσιώδους απόψεως, αποφάσισα να συμπεριλάβω στη μετάφραση βιογραφικά σημειώματα των μαθηματικών που αναφέρονται στο κείμενο. Σε καμία περίπτωση δεν διατείνομαι την αυθεντία μου σε θέματα ιστορίας των Μαθηματικών, αλλά μόνον την ερασιτεχνία μου, υπό την κυριολεκτική ερμηνεία της λέξεως (ήτοι έρωτας προς τη τέχνη). Θα θεωρήσω ως επιβράβευση το γεγονός εάν ο αναγνώστης παρακινηθεί να ασχοληθεί, έστω και σε μικρό βαθμό, με την ιστορία των Μαθηματικών και, γιατί όχι, να ενστερνισθεί την άποψή μου περί ιστορικής γνώσεως και να ασχοληθεί με την ιστορία ενός αντικειμένου που τον ενδιαφέρει.

Τις πληροφορίες για τα βιογραφικά σημειώματα άντλησα από τις εξής βιβλιογραφικές πηγές:

- BELL, E. T.: *Οι Μαθηματικοί*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης (2 τόμοι), Ηράκλειο 1992, 1993.

- BOYER, C. B. και MERZBACH, U.C.: *Η Ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικού (δεύτερη έκδοση), Αθήνα 1997.

- DAVIS, P. J. και HERSH, R.: *Η Μαθηματική Εμπειρία*, Εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα.

- PIER, J. P.: *Development of Mathematics 1900-1950*, Birkhäuser publications, Basel, Switzerland 1994.

- LORIA, G.: *Ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα 1971.

- SMITH, D. E.: *History of Mathematics*, Dover publications (2 τόμοι), New York.

Επίσης, άντλησα πληροφορίες από την ιστοσελίδα «The MacTutor History of Mathematics archive», η οποία βρίσκεται στην ηλεκτρονική διεύθυνση http:// www-history.mcs.st-and.ac.uk / history, της σχολής Μαθηματικών και Στατιστικής του Πανεπιστημίου του St. Andrews της Σκωτίας.

Στη διάρκεια της προσπάθειάς μου ανακάλυψα ότι η μετάφραση ενός μαθηματικού κειμένου είναι μία αρκούντως δύσκολη υπόθεση, η οποία όμως κρατά σε επιστημονική εγρήγορση τον μεταφραστή. Προσπάθησα να μείνω κατά το δυνατόν πιστός στο αυθεντικό κείμενο. Σε ορισμένα σημεία όμως ήταν απαραίτητες ελαφρές τροποποιήσεις για χάρη της πληρέστερης παρουσιάσεως. Επιθυμώ να καταστήσω γνωστό στον αναγνώστη ότι επιστράτευσα όλες μου τις δυνάμεις ούτως ώστε το τελικό αποτέλεσμα να είναι όσο το δυνατόν άρτιο, βεβαίως κατά την προσωπική μου αισθητική και επιστημονική κρίση. Στο πνεύμα αυτό επιθυμώ να δεχθώ οποιοδήποτε σχόλιο επί της μεταφράσεως, των βιογραφικών σημειωμάτων καθώς και των προσωπικών προσθηκών εν είδει υποσημειώσεως στην ηλεκτρονική διεύθυνση me00001@cc.uoi.gr . Επιπλέον, θα είμαι ευγνώμων σε οποιονδήποτε εντοπίσει ενδεχόμενα λάθη και μου τα γνωστοποιήσει.

Αισθάνομαι την υποχρέωση να ευχαριστήσω τον καθηγητή του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων Νικόλαο Μαρμαρίδη για την παντοειδή βοήθεια του ούτως ώστε να πραγματοποιηθεί αυτή η μετάφραση, τον καθηγητή του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων Θεόδωρο Μπόλη και τον επίκουρο καθηγητή του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων Θεόδωρο Βλάχο για τη βοήθεια τους στη διόρθωση του τελικού κειμένου, τον καθηγητή του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων Θωμά Χασάνη και τον επισκέπτη–ερευνητή στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων Δημήτριο Νταή για τον γενικότερο σχολιασμό τους και τις εύστοχες παρατηρήσεις τους. Επίσης, θέλω να ευχαριστήσω τον επίκουρο καθηγητή Ιστορίας των Μαθηματικών του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου της Κοπεγχάγης Jesper Lützen για την ευγενή του προσφορά να μου διαθέσει πληροφορίες σχετικά με τον μαθηματικό Johannes Mollerup.

Εν κατακλείδι, θέλω να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στους ανθρώπους του εκδοτικού οίκου Leader Books για την πολύτιμη ευκαιρία που μου παρείχαν να μεταφράσω αυτό το βιβλίο, ιδιαιτέρως δε στον Θεόδωρο Δρε και στον Σωτήριο Καρέγλη.

ΔΗΜΟΣΘΕΝΗΣ Κ. ΣΤΑΛΙΔΗΣ

Ιούλιος του 2000

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ

Το παρόν βιβλίο έχει συγγραφεί με σκοπό να χρησιμοποιηθεί ως διδακτικό κείμενο για μία σειρά μαθημάτων στην Ανάλυση και απευθύνεται σε προχωρημένης προπτυχιακής καταρτίσεως φοιτητές καθώς επίσης και σε πρωτοετείς φοιτητές που ενδιαφέρονται για τη μελέτη της Μαθηματικής Επιστήμης.

Η παρούσα έκδοση[1] καλύπτει τα ίδια θέματα με τη δεύτερη, με κάποια επιπλέον στοιχεία, παραλείψεις και σημαντικές αλλαγές στην παρουσίασή τους. Διατηρώ την ελπίδα ότι αυτές οι αλλαγές θα καταστήσουν το περιεχόμενο του βιβλίου περισσότερο προσβάσιμο και ελκυστικό στους φοιτητές που απευθύνεται.

Η εμπειρία με έχει πείσει ότι είναι παιδαγωγικά εσφαλμένο (αν και λογικά ορθό) το γεγονός να ξεκινά κανείς με την κατασκευή των πραγματικών αριθμών από τους ρητούς αριθμούς. Στην αρχή, οι περισσότεροι φοιτητές απλώς αποτυγχάνουν να εκτιμήσουν την αναγκαιότητα αυτής της διαδικασίας. Σε αναλογία με το γεγονός αυτό, το σύστημα των πραγματικών αριθμών εισάγεται ως ένα διατεταγμένο σώμα με την ιδιότητα του ελαχίστου άνω φράγματος, και αμέσως λαμβάνουν χώρα ορισμένες ενδιαφέρουσες εφαρμογές με χρήση αυτής της θεωρήσεως. Παρ' όλα αυτά, η κατασκευή

[1] Σ. τ. Μ.: Η τρίτη έκδοση του βιβλίου στην αγγλική γλώσσα, εν έτει 1976, από τον εκδοτικό οίκο McGraw-Hill.

του Dedekind δεν έχει παραλειφθεί, αλλά βρίσκεται τώρα σε ένα παράρτημα του Κεφαλαίου 1, όπου ο αναγνώστης μπορεί να τη μελετήσει και να την απολαύσει σε κάποια κατάλληλη στιγμή.

Η ύλη που αντιστοιχεί στις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών έχει σχεδόν καθ' ολοκληρία ανασυγγραφεί, με περισσότερες λεπτομέρειες και παραδείγματα. Η απόδειξη του θεωρήματος αντίστροφης συναρτήσεως, το αντικείμενο-κλειδί του Κεφαλαίου 9, έχει απλοποιηθεί κατά πολύ με τη χρήση του θεωρήματος σταθερού σημείου περί συναρτήσεων συστολής. Οι διαφορικές μορφές παρουσιάζονται πολύ πιο αναλυτικά. Επίσης, περιλαμβάνονται αρκετές εφαρμογές του θεωρήματος του Stokes.

Σε ό,τι αφορά άλλες αλλαγές, έχει αναδιοργανωθεί το κεφάλαιο που σχετίζεται με το κατά Riemann-Stieltjes ολοκλήρωμα. Στο Κεφάλαιο 8 έχει προστεθεί μία ενότητα αφιερωμένη στη συνάρτηση γάμμα, παρέχοντας στον αναγνώστη την ευκαιρία να ασχοληθεί μόνος του με τις σχετικές λεπτομέρειες. Επίσης, έχει περιληφθεί ένας μεγάλος αριθμός επιπρόσθετων ασκήσεων. Για τις περισσότερες από αυτές υπάρχουν λεπτομερειακές και κατατοπιστικές υποδείξεις.

Επίσης, έχω συμπεριλάβει αρκετές αναφορές σε άρθρα που εμφανίζονται στα περιοδικά *American Mathematical Monthly* και *Mathematics Magazine*, με την ελπίδα ότι οι φοιτητές θα αναπτύξουν τη συνήθεια να ανατρέχουν στην περιοδική βιβλιογραφία των Μαθηματικών. Οι περισσότερες από αυτές τις αναφορές έχουν ευγενώς υποδειχθεί από τον R. B. Burckel.

Με το πέρασμα των χρόνων πολλοί, φοιτητές καθώς και καθηγητές, μου έχουν αποστείλει διορθώσεις, κριτικές και άλλα σχόλια που αφορούν προηγούμενες εκδόσεις του βιβλίου. Έχω αξιοποιήσει καταλλήλως τις παρατηρήσεις αυτές και δράττομαι της ευκαιρίας να εκφράσω τις ειλικρινείς μου ευχαριστίες σε όλους όσους μου έγραψαν.

WALTER RUDIN

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

ΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μία εμπεριστατωμένη πραγματεία σχετικά με τις κύριες έννοιες της Αναλύσεως (όπως η σύγκλιση, η συνέχεια, η διαφόριση και η ολοκλήρωση) πρέπει απαραιτήτως να βασισθεί σε μία επακριβώς καθορισμένη έννοια του αριθμού. Όμως, σε αυτό το βιβλίο δεν θα εισχωρήσουμε σε θέματα τα οποία σχετίζονται με αξιώματα που διέπουν την αριθμητική των ακεραίων αριθμών και θα θεωρήσουμε δεδομένη την οικειότητα του αναγνώστη με τους ρητούς αριθμούς (δηλαδή με τους αριθμούς της μορφής m/n, όπου m, n είναι ακέραιοι αριθμοί με $n \neq 0$).

Το αριθμητικό σύστημα των ρητών αριθμών είναι ανεπαρκές για πληθώρα λόγων, εξίσου ως σώμα και ως διατεταγμένο σύνολο. (Οι όροι αυτοί θα ορισθούν στις Ενότητες 1.6 και 1.12). Επί παραδείγματι, δεν υπάρχει ρητός αριθμός p με $p^2 = 2$. (Θα αποδείξουμε αυτό το γεγονός σύντομα). Αυτό το παράδειγμα οδηγεί στην εισαγωγή των λεγομένων «αρρήτων αριθμών», οι οποίοι γράφονται συχνά ως άπειρα δεκαδικά αναπτύγματα και θεωρείται ότι προσεγγίζονται από τα αντίστοιχα πεπερασμένα δεκαδικά αναπτύγματα. Έτσι, η ακολουθία

$$1, \quad 1,4, \quad 1,414, \quad 1,4142, \ldots$$

«συγκλίνει προς το $\sqrt{2}$». Όμως, εκτός της περιπτώσεως όπου ο άρρητος αριθμός $\sqrt{2}$ έχει ορισθεί πλήρως, προκύπτει το εξής ερώτημα: τι είναι αυτό προς το οποίο τείνει η ακολουθία αυτή;

Τέτοιου είδους ερωτήσεις μπορούν να απαντηθούν όταν δομηθεί το λεγόμενο «αριθμητικό σύστημα των πραγματικών αριθμών».

Παράδειγμα 1.1. Θα δείξουμε τώρα ότι η εξίσωση

$$p^2 = 2 \tag{1}$$

δεν ικανοποιείται από κανέναν ρητό αριθμό p. Εάν υπήρχε τέτοιος αριθμός p, τότε θα μπορούσαμε να γράψουμε $p = m/n$, όπου m, n είναι ακέραιοι αριθμοί οι οποίοι επιπλέον δεν έχουν ως κοινό παράγοντα το 2. Τότε, η (1) συνεπάγεται ότι

$$m^2 = 2n^2. \tag{2}$$

Αυτό φανερώνει ότι ο m^2, και επομένως ο m, είναι άρτιος. (Εάν ο m ήταν περιττός, τότε ο m^2 θα ήταν επίσης περιττός). Άρα, ο m^2 διαιρείται από το 4. Από αυτό έπεται ότι η δεξιά πλευρά της (2) διαιρείται από το 4, συνεπώς ο n^2 είναι άρτιος. Αυτό το γεγονός έχει ως συνέπεια ότι ο n είναι άρτιος.

Η υπόθεση περί της ισχύος της (1) μας οδήγησε στο συμπέρασμα ότι οι m, n είναι άρτιοι, γεγονός που αντιβαίνει στην αρχική επιλογή των m, n. Επομένως, η (1) είναι αδύνατη, για οποιονδήποτε ρητό αριθμό p.

Εν συνεχεία, θα εξετάσουμε την κατάσταση λεπτομερέστερα. Ας είναι A το σύνολο των θετικών ρητών αριθμών p με $p^2 < 2$ και B το σύνολο των θετικών ρητών αριθμών p με $p^2 > 2$. Θα δείξουμε ότι *το* A *δεν περιέχει αριθμό μεγαλύτερο από όλους τους υπόλοιπους αριθμούς του* και ότι *το B δεν περιέχει αριθμό μικρότερο από όλους τους υπόλοιπους αριθμούς του.*

Συγκεκριμένα, για οποιοδήποτε στοιχείο p του A μπορούμε να βρούμε στοιχείο q του A ούτως ώστε $p < q$ και για οποιοδήποτε στοιχείο p του B μπορούμε να βρούμε στοιχείο q του B με $q < p$.

Προς αυτό, σε κάθε ρητό αριθμό $p > 0$ αντιστοιχίζουμε τον αριθμό

$$q = p - \frac{p^2 - 2}{p + 2} = \frac{2p + 2}{p + 2}. \tag{3}$$

Τότε,

$$q^2 - 2 = \frac{2(p^2 - 2)}{(p + 2)^2}. \tag{4}$$

Εάν ο p βρίσκεται στο A, τότε $p^2 - 2 < 0$, η (3) φανερώνει ότι $q > p$ και η (4) φανερώνει ότι $q^2 < 2$. Άρα, ο q βρίσκεται στο A.

Εάν ο p βρίσκεται στο B, τότε $p^2 - 2 > 0$, η (3) φανερώνει ότι $0 < q < p$ και η (4) φανερώνει ότι $q^2 > 2$. Άρα, ο q βρίσκεται στο B.

Παρατήρηση 1.2. Η προηγούμενη παρουσίαση είχε ως σκοπό να καταδείξει την ύπαρξη ορισμένων χασμάτων στο αριθμητικό σύστημα των ρητών αριθμών, μολονότι υπάρχει πάντοτε ένας ρητός αριθμός μεταξύ οποιωνδήποτε δύο άλλων ρητών αριθμών: εάν $r < s$, τότε $r < (r + s)/2 < s$. Το αριθμητικό σύστημα των πραγματικών αριθμών ουσιαστικά «γεμίζει» τα χάσματα αυτά. Αυτός είναι και ο βασικός λόγος για το θεμελιώδη ρόλο που κατέχει το αριθμητικό σύστημα των πραγματικών αριθμών στην Ανάλυση.

Προκειμένου να διασαφήσουμε τη δομή του αριθμητικού συστήματος των πραγματικών αριθμών, καθώς και αυτού των μιγαδικών αριθμών, θα ξεκινήσουμε με μία σύντομη πραγμάτευση των γενικώς τιθέμενων εννοιών του *διατεταγμένου συνόλου* και του *σώματος.*

Παρακάτω βρίσκεται ένα μέρος της συνήθους ορολογίας που θα χρησιμοποιηθεί σε όλη την έκταση του βιβλίου.

Ορισμός 1.3. Εάν A είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο (του οποίου τα στοιχεία μπορούν να είναι αριθμοί ή άλλα αντικείμενα), τότε γράφουμε $x \in A$ για να δηλώσουμε ότι το x είναι μέλος (ή αλλιώς στοιχείο) του A.

Γράφουμε $x \notin A$ εάν και μόνον εάν το x δεν είναι στοιχείο του A.

Το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο ονομάζεται το *κενό σύνολο.* Ένα σύνολο ονομάζεται *μη κενό* εάν και μόνον εάν περιέχει ένα τουλάχιστον στοιχείο.

Εάν A και B είναι δύο σύνολα, τότε το A λέγεται *υποσύνολο* του B εάν και μόνον εάν ισχύει ότι κάθε στοιχείο του A είναι στοιχείο του B, και το γεγονός αυτό συμβολίζεται με $A \subset B$ ή αλλιώς $B \supset A$. Εάν, επιπρόσθετα, υπάρχει ένα στοιχείο του B που δεν ανήκει στο A, τότε, και μόνον τότε, το A λέγεται *γνήσιο υποσύνολο* του B. Σημειώνουμε ότι ισχύει $A \subset A$ για κάθε σύνολο A.

Γράφουμε $A = B$ εάν και μόνον εάν $A \subset B$ και $B \subset A$. Στην αντίθετη περίπτωση γράφουμε $A \neq B$.

Ορισμός 1.4. Σε όλη την έκταση του Κεφαλαίου 1, το σύνολο των ρητών αριθμών θα συμβολίζεται ως Q.

ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑ ΣΥΝΟΛΑ

Ορισμός 1.5. Ας είναι S ένα σύνολο. *Διάταξη* στο S είναι μία σχέση, που συμβολίζεται ως $<$, η οποία κατέχει τις δύο ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Εάν $x, y \in S$, τότε μία και μόνο μία από τις σχέσεις

$$x < y, \quad x = y, \quad y < x$$

είναι αληθής.

(ii) Εάν $x, y, z \in S$ με $x < y$ και $y < z$, τότε $x < z$.

Η πρόταση «$x < y$» διαβάζεται ως «ο x είναι μικρότερος του y» ή αλλιώς «ο x προηγείται του y».

Ορισμένες φορές διευκολύνει να γράφουμε $y > x$ αντί της $x < y$.

Ο συμβολισμός $x \leq y$ δηλώνει ότι $x < y$ ή $x = y$, δίχως να προσδιορίζεται ποια από τις δύο προτάσεις είναι αληθής. Με διαφορετική διατύπωση, η $x \leq y$ αποτελεί την άρνηση της $x > y$.

Ορισμός 1.6. Ένα *διατεταγμένο σύνολο* είναι ένα σύνολο S στο οποίο έχει ορισθεί μία διάταξη.

Παράδειγμα διατεταγμένου συνόλου αποτελεί το Q, όπου για $r, s \in Q$ η σχέση $r < s$ σημαίνει εξ ορισμού ότι ο $s - r$ είναι θετικός αριθμός.

Ορισμός 1.7. Υποθέτουμε ότι S είναι ένα διατεταγμένο σύνολο και ότι $E \subset S$. Το Ε ονομάζεται *άνω φραγμένο* εάν και μόνον εάν υπάρχει $\beta \in S$ ούτως ώστε $x \leq \beta$ για κάθε $x \in E$. Σε αυτήν την περίπτωση, το β ονομάζεται *άνω φράγμα* του Ε.

Η έννοια του *κάτω φράγματος* ορίζεται παρομοίως (με την $\geq$ στη θέση της $\leq$).

Ορισμός 1.8. Υποθέτουμε ότι S είναι ένα διατεταγμένο σύνολο, ότι $E \subset S$ και ότι το Ε είναι άνω φραγμένο. Επίσης, υποθέτουμε ότι υπάρχει $\alpha \in S$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Το α είναι άνω φράγμα του Ε.

(ii) Εάν γ είναι στοιχείο του S με $\gamma < \alpha$, τότε το γ δεν είναι άνω φράγμα του Ε.

Τότε, και μόνον τότε, το α ονομάζεται το ελάχιστο άνω φράγμα του Ε (η μοναδικότητα συνάγεται από το (ii)) ή αλλιώς το *supremum* του Ε και γράφουμε

$$\alpha = \sup E.$$

Το *μέγιστο κάτω φράγμα*, ή αλλιώς το *infimum*, ενός κάτω φραγμένου συνόλου Ε ορίζεται αναλόγως: η πρόταση

$$\alpha = \inf E$$

δηλώνει ότι το α είναι κάτω φράγμα του Ε και δεν υπάρχει κάτω φράγμα β του Ε με $\beta > \alpha$.

Παράδειγμα 1.9.

(α) Θεωρούμε τα σύνολα Α και Β του Παραδείγματος 1.1 ως υποσύνολα του διατεταγμένου συνόλου Q. Το σύνολο Α είναι άνω φραγμένο. Συγκεκριμένα, τα άνω φράγματα του Α είναι ακριβώς τα στοιχεία του Β. Εφόσον το Β δεν περιέχει ελάχιστο στοιχείο, *το* Α *δεν έχει ελάχιστο άνω φράγμα στο* Q.

Παρομοίως, το Β είναι κάτω φραγμένο: το σύνολο των κάτω φραγμάτων του Β αποτελείται από όλα τα στοιχεία του Α και όλους τους ρητούς αριθμούς r με $r \leq 0$. Εφόσον το A δεν περιέχει μέγιστο στοιχείο, *το* Β *δεν έχει μέγιστο κάτω φράγμα στο* Q.

(β) Εάν υπάρχει το $\alpha = \sup E$, τότε αυτό μπορεί εξ ίσου να ανήκει ή όχι στο Ε. Ως παράδειγμα, ας είναι E_1 το σύνολο των ρητών αριθμών r με $r < 0$. Επίσης, ας είναι E_2 το σύνολο των ρητών αριθμών r με $r \leq 0$. Τότε,

$$\sup E_1 = \sup E_2 = 0$$

και $0 \notin E_1$ ενώ $0 \in E_2$.

(γ) Ας είναι Ε το σύνολο των αριθμών της μορφής $1/n$, όπου $n = 1, 2, 3, \ldots$. Τότε $\sup E = 1$, το οποίο ανήκει στο Ε, και $\inf E = 0$, το οποίο δεν ανήκει στο Ε.

Ορισμός 1.10. Ένα διατεταγμένο σύνολο S λέγεται ότι έχει την *ιδιότητα του ελαχίστου άνω φράγματος* εάν και μόνον εάν η ακόλουθη πρόταση αληθεύει:
Εάν $E \subset S$ και εάν το Ε είναι μη κενό και άνω φραγμένο, τότε το $\sup E$ υπάρχει στο S.

Το Παράδειγμα 1.9(α) φανερώνει ότι το Q δεν έχει την ιδιότητα του ελαχίστου άνω φράγματος.

Θα δείξουμε τώρα ότι υπάρχει στενή σχέση μεταξύ μεγίστων κάτω φραγμάτων και ελαχίστων άνω φραγμάτων και ότι κάθε διατεταγμένο σύνολο με την ιδιότητα του ελαχίστου άνω φράγματος έχει επίσης την *ιδιότητα του μεγίστου κάτω φράγματος.*

Θεώρημα 1.11. *Υποθέτουμε ότι S είναι ένα διατεταγμένο σύνολο με την ιδιότητα του ελαχίστου άνω φράγματος και ότι $B \subset S$, όπου το* Β *είναι μη κενό και κάτω φραγμένο. Θεωρούμε το σύνολο L των κάτω φραγμάτων του* Β. *Τότε, το*

$$\alpha = \sup L$$

υπάρχει στο S και ισχύει ότι $\alpha = \inf B$.

Ιδιαιτέρως, το $\inf B$ υπάρχει στο S.

Απόδειξη. Εφόσον το B είναι κάτω φραγμένο, το L είναι μη κενό. Το L αποτελείται από όλα τα στοιχεία $y \in S$ που ικανοποιούν την ανισότητα $y \leq x$, για κάθε $x \in B$, επομένως κάθε $x \in B$ είναι άνω φράγμα του L. Άρα, το L είναι άνω φραγμένο. Εξ υποθέσεως, το L έχει supremum στο S, το οποίο συμβολίζουμε ως α.

Εάν γ είναι στοιχείο του S με $\gamma < \alpha$, τότε (ανατρέξτε στον Ορισμό 1.8) το γ δεν είναι άνω φράγμα του L, γεγονός που σημαίνει ότι $\gamma \notin B$. Άρα, $\alpha \leq x$ για κάθε $x \in B$. Συνεπώς, $\alpha \in L$.

Εάν β είναι στοιχείο του S με$\alpha < \beta$, τότε $\beta \notin L$, εφόσον το α είναι άνω φράγμα του L.

Αποδείξαμε ότι $\alpha \in L$ ενώ $\beta \notin L$ όταν $\beta \in S$ με $\beta > \alpha$. Δηλαδή, το α είναι κάτω φράγμα του B, ενώ το β δεν είναι, όταν $\beta > \alpha$. Αυτό σημαίνει ότι $\alpha = \inf B$. □

ΣΩΜΑΤΑ

Ορισμός 1.12. *Σώμα* είναι ένα σύνολο F εφοδιασμένο με δύο πράξεις, την *πρόσθεση* και τον *πολλαπλασιασμό*, οι οποίες ικανοποιούν τα λεγόμενα «αξιώματα σώματος» (A), (M), (D):

(A) Αξιώματα της προσθέσεως
(A1) Εάν $x, y \in F$, τότε το άθροισμα τους $x + y$ ανήκει στο F.
(A2) Η πρόσθεση είναι μεταθετική: $x + y = y + x$ για οποιαδήποτε $x, y \in F$.
(A3) Η πρόσθεση είναι προσεταιριστική: $(x + y) + z = x + (y + z)$ για οποιαδήποτε $x, y, z \in F$.
(A4) Το F περιέχει ένα στοιχείο 0, ούτως ώστε $0 + x = x$ για κάθε $x \in F$.
(A5) Σε κάθε $x \in F$ αντιστοιχεί ένα στοιχείο $-x \in F$ ούτως ώστε

$$x + (-x) = 0.$$

(M) Αξιώματα του πολλαπλασιασμού
(M1) Εάν $x, y \in F$, τότε το γινόμενο τους xy ανήκει στο F.
(M2) Ο πολλαπλασιασμός είναι μεταθετικός: $xy = yx$ για οποιαδήποτε $x, y \in F$.
(M3) Ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός: $(xy)z = x(yz)$ για οποιαδήποτε $x, y, z \in F$.
(M4) Το F περιέχει ένα στοιχείο 1 με $1 \neq 0$ ούτως ώστε $1x = x$ για κάθε $x \in F$.
(M5) Σε κάθε $x \in F$ με $x \neq 0$ αντιστοιχίζεται ένα στοιχείο $1/x \in F$ ούτως ώστε

$$x(1/x) = 1.$$

(D) Επιμεριστικός νόμος
Για οποιαδήποτε $x, y, z \in F$ ισχύει ότι

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Παρατήρηση 1.13.
(α) Σε ένα σώμα συνήθως γράφουμε

$$x - y, \quad \frac{x}{y}, \quad x + y + z, \quad xyz, \quad x^2, \quad x^3, \quad 2x, \quad 3x, \ldots$$

στη θέση των

$$x + (-y), \quad x \cdot (1/y), \quad (x + y) + z, \quad (xy)z, \quad xx, \quad xxx, \quad x + x, \quad x + x + x, \ldots .$$

(β) Τα αξιώματα σώματος ισχύουν εμφανώς στο Q, το σύνολο των ρητών αριθμών, εάν η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός κατέχουν το σύνηθες νόημα τους. Συνεπώς, το Q είναι σώμα.

(γ) Αν και δεν αποτελεί σκοπό μας η μελέτη των σωμάτων (ή άλλων αλγεβρικών δομών) λεπτομερειακά, αξίζει να αποδείξουμε ότι ορισμένες γνωστές ιδιότητες του Q συνάγονται από τα αξιώματα του σώματος. Έτσι, θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες αυτές και στα σώματα των πραγματικών και μιγαδικών αριθμών.

Πρόταση 1.14. *Τα αξιώματα της προσθέσεως συνεπάγονται τις ακόλουθες προτάσεις, για οποιαδήποτε $x, y, z \in F$:*

(α) *Εάν $x + y = x + z$, τότε $y = z$.*

(β) *Εάν $x + y = x$, τότε $y = 0$.*

(γ) *Εάν $x + y = 0$, τότε $y = -x$.*

(δ) $-(-x) = x$.

Η πρόταση (α) είναι ένας νόμος διαγραφής. Παρατηρούμε ότι η (β) βεβαιώνει τη μοναδικότητα του στοιχείου, του οποίου η ύπαρξη υποτίθεται στο (A4) και ότι η (γ) βεβαιώνει το ίδιο για το (A5).

***Απόδειξη*.** Εάν $x + y = x + z$, τότε από τα αξιώματα (A) λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned} y &= 0 + y = (-x + x) + y = -x + (x + y) \\ &= -x + (x + z) = (-x + x) + z = 0 + z = z. \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το (α). Για την απόδειξη του (β), απλώς θέτουμε $z = 0$ στο (α). Εάν θέσουμε $z = -x$ στο (α), τότε αποκτούμε το (γ). Εφόσον $-x + x = 0$, το (γ) (με το $-x$ στη θέση του x) χορηγεί το (δ). □

Πρόταση 1.15. *Τα αξιώματα του πολλαπλασιασμού συνεπάγονται τις ακόλουθες προτάσεις, για οποιαδήποτε $x, y, z \in F$:*

(α) *Εάν $x \neq 0$ και $xy = xz$, τότε $y = z$.*

(β) *Εάν $x \neq 0$ και $xy = x$, τότε $y = 1$.*

(γ) *Εάν $x \neq 0$ και $xy = 1$, τότε $y = 1/x$.*

(δ) *Εάν $x \neq 0$, τότε $1/(1/x) = x$.*

Η απόδειξη είναι παρεμφερής με την απόδειξη της Προτάσεως 1.14 και έτσι παραλείπεται.

Πρόταση 1.16. *Τα αξιώματα σώματος συνεπάγονται τις ακόλουθες προτάσεις, για κάθε $x, y, z \in F$.*

(α) $0x = 0$.

(β) *Εάν $x \neq 0$ και $y \neq 0$, τότε $xy \neq 0$.*

(γ) $(-x)y = -(xy) = x(-y)$.

(δ) $(-x)(-y) = xy$.

Απόδειξη. Είναι $0x + 0x = (0 + 0)x = 0x$. Άρα, η 1.14(β) έχει ως συνέπεια το γεγονός ότι $0x = 0$ και με αυτό προκύπτει το (α).

Εν συνεχεία, υποθέτουμε ότι $x \neq 0$, $y \neq 0$, αλλά $xy = 0$. Τότε, η (α) χορηγεί την ισότητα

$$1 = \left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}\right)xy = \left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}\right)0 = 0,$$

γεγονός που συνιστά αντίφαση. Άρα, ισχύει η (β).

Η πρώτη ισότητα της (γ) έπεται από την

$$(-x)y + xy = (-x + x)y = 0y = 0,$$

συνδυαζόμενη με την 1.14(β). Η δεύτερη ισότητα αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο.

Εν τέλει,

$$(-x)(-y) = -[x(-y)] = -[-(xy)] = xy,$$

σύμφωνα με τη (γ) και την 1.14(δ). □

Ορισμός 1.17. *Διατεταγμένο σώμα* είναι ένα σώμα F, το οποίο είναι επίσης διατεταγμένο σύνολο, ούτως ώστε να ισχύουν τα παρακάτω:

(i) Εάν $x, y, z \in F$ και $y < z$, τότε $x + y < x + z$.

(ii) Εάν $x, y \in F$ με $x > 0$ και $y > 0$, τότε $xy > 0$.

Ονομάζουμε το x *θετικό* εάν και μόνον εάν $x > 0$. Ονομάζουμε το x *αρνητικό* εάν και μόνον εάν $x < 0$.

Παράδειγμα διατεταγμένου σώματος αποτελεί το Q.

Όλοι οι γνωστοί κανόνες που σχετίζονται με τη χρήση ανισοτήτων εφαρμόζονται σε κάθε διατεταγμένο σώμα: πολλαπλασιασμός με θετικές (αντιστοίχως αρνητικές) ποσότητες διατηρεί (αντιστοίχως αντιστρέφει) τις ανισότητες, τα τετράγωνα στοιχείων του σώματος είναι μη αρνητικά, κ. λ. π.. Η ακόλουθη πρόταση καταγράφει ορισμένους από αυτούς τους κανόνες.

Πρόταση 1.18. *Οι ακόλουθες προτάσεις αληθεύουν σε κάθε διατεταγμένο σώμα F, για οποιαδήποτε $x, y, z \in F$.*

(α) $x > 0$ *εάν και μόνον εάν* $-x < 0$.

(β) *Εάν* $x > 0$ *και* $y < z$, *τότε* $xy < xz$.

(γ) *Εάν* $x < 0$ *και* $y < z$, *τότε* $xy > xz$.

(δ) *Εάν* $x \neq 0$, *τότε* $x^2 > 0$. *Ιδιαιτέρως, ισχύει ότι* $1 > 0$.

(ε) *Εάν* $0 < x < y$, *τότε* $0 < 1/y < 1/x$.

Απόδειξη.

(α) Εάν $x > 0$, τότε $0 = -x + x > -x + 0$ και επομένως $-x < 0$. Εάν $x < 0$, τότε $0 = -x + x < -x + 0$ και επομένως $-x > 0$. Αυτό αποδεικνύει το (α).

(β) Εφόσον $z > y$, έπεται ότι $z - y > y - y = 0$, άρα $x(z - y) > 0$ και επομένως

$$xz = x(z - y) + xy > 0 + xy = xy.$$

(γ) Λόγω των (α), (β) και της Προτάσεως 1.16(γ) προκύπτει ότι

$$-[x(z - y)] = (-x)(z - y) > 0,$$

γεγονός που σημαίνει ότι $x(z - y) < 0$ και συνεπώς $xz < xy$.

(δ) Εάν $x > 0$, τότε το μέρος (ii) του Ορισμού 1.17 φανερώνει ότι $x^2 > 0$. Εάν $x < 0$, τότε $-x > 0$, άρα $(-x)^2 > 0$. Όμως, ισχύει ότι $x^2 = (-x)^2$, σύμφωνα με την Πρόταση 1.16(δ). Εφόσον $1^2 = 1$, ισχύει ότι $1 > 0$.

(ε) Εάν $y > 0$ και $v \leq 0$, τότε $yv \leq 0$. Άρα, εφόσον $y \cdot (1/y) = 1 > 0$, έπεται ότι $1/y > 0$. Παρομοίως, $1/x > 0$. Εάν πολλαπλασιάσουμε και τις δύο πλευρές της ανισότητας $x < y$ με τη θετική ποσότητα $(1/x) \cdot (1/y)$, λαμβάνουμε την ανισότητα $1/y < 1/x$. □

ΤΟ ΣΩΜΑ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Διατυπώνουμε τώρα το θεώρημα υπάρξεως, το οποίο αποτελεί και τον πυρήνα αυτού του κεφαλαίου.

Θεώρημα 1.19. *Υπάρχει ένα διατεταγμένο σώμα R με την ιδιότητα του ελαχίστου άνω φράγματος.*

Επιπλέον, το R περιέχει το Q ως υπόσωμα.

Με τη δεύτερη πρόταση εννοείται ότι $Q \subset R$ και ότι όταν οι πράξεις της προσθέσεως και του πολλαπλασιασμού εφαρμοσθούν σε στοιχεία του Q, τότε συμπίπτουν με τις συνήθεις πράξεις επί των ρητών αριθμών. Επίσης, εννοείται οι θετικοί ρητοί αριθμοί είναι θετικά στοιχεία του R.

Τα στοιχεία του R ονομάζονται *πραγματικοί αριθμοί.*

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.19 είναι εκτεταμένη και σχετικά κοπιαστική. Για τους λόγους αυτούς παρουσιάζεται σε ένα παράρτημα, στο τέλος του Κεφαλαίου 1. Στην πραγματικότητα, εκεί κατασκευάζεται το R από το Q.

Το επόμενο θεώρημα μπορεί να εξαχθεί από αυτήν την κατασκευή, με λίγη επιπλέον προσπάθεια. Όμως, προτιμούμε να το αποδείξουμε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.19. Αυτό παρέχει μία καλή ένδειξη σχετικά με το πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ιδιότητα του ελαχίστου άνω φράγματος.

Θεώρημα 1.20.

(α) *Εάν* $x, y \in R$ *με* $x > 0$, *τότε υπάρχει ένας θετικός ακέραιος αριθμός* n *ούτως ώστε*

$$nx > y.$$

(β) *Εάν* $x, y \in R$ *με* $x < y$, *τότε υπάρχει* $p \in Q$ *με* $x < p < y$.

Το μέρος (α) ονομάζεται συνήθως *Αρχιμήδεια ιδιότητα* του R. Το μέρος (β) διατυπώνεται λέγοντας ότι το Q είναι *πυκνό* στο R: μεταξύ οποιωνδήποτε δύο πραγματικών αριθμών βρίσκεται πάντοτε ένας ρητός αριθμός.

Απόδειξη.

(α) Ας είναι A το σύνολο των αριθμών της μορφής nx, όπου το n διατρέχει όλους τους θετικούς ακέραιους αριθμούς. Εάν το (α) είναι ψευδές, τότε το y είναι άνω φράγμα του A. Άρα, το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα στο R. Θέτουμε $\alpha = \sup A$. Εφόσον $x > 0$, είναι $\alpha - x < \alpha$ και επομένως το $\alpha - x$ δεν αποτελεί άνω φράγμα του A. Άρα, είναι $\alpha - x < mx$ για κάποιον θετικό ακέραιο αριθμό m. Τότε, προκύπτει ότι $\alpha < (m+1)x \in A$, γεγονός που είναι αδύνατο, διότι το α είναι άνω φράγμα του A.

(β) Εφόσον $x < y$, είναι $y - x > 0$ και, λόγω του (α), υπάρχει θετικός ακέραιος αριθμός n ούτως ώστε

$$n(y - x) > 1.$$

Εφαρμόζοντας πάλι το (α), αποκτούμε θετικούς ακέραιους αριθμούς m_1, m_2 με $m_1 > nx$ και $m_2 > -nx$. Τότε,

$$-m_2 < nx < m_1.$$

Επομένως, υπάρχει ακέραιος αριθμός m (με $-m_2 \le m \le m_1$) ούτως ώστε

$$m - 1 \le nx < m.$$

Εάν συνδυάσουμε αυτές τις ανισότητες, τότε αποκτούμε ότι

$$nx < m \le 1 + nx < ny.$$

Εφόσον $n > 0$, έπεται ότι

$$x < \frac{m}{n} < y.$$

Αυτό αποδεικνύει το (β), με $p = m/n$. □

Θα αποδείξουμε τώρα την ύπαρξη n-οστών ριζών θετικών πραγματικών αριθμών. Η απόδειξη φανερώνει τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να χειριστούμε στο R τη δυσκολία που εμφανίζεται στην Εισαγωγή (αρρητότητα του $\sqrt{2}$).

Θεώρημα 1.21. *Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x και κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n υπάρχει ένας και μόνον ένας θετικός πραγματικός αριθμός y με $y^n = x$.*

Ο αριθμός αυτός συμβολίζεται ως $\sqrt[n]{x}$ ή αλλιώς $x^{1/n}$.

Απόδειξη. Η μοναδικότητα του y είναι σαφής, διότι εάν y_1, y_2 είναι πραγματικοί αριθμοί με $0 < y_1 < y_2$, τότε $y_1^n < y_2^n$.

Ας είναι Ε το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών t με $t^n < x$.

Εάν $t = x/(1+x)$, τότε $0 < t < 1$. Επομένως, $t^n < t < x$. Άρα, $t \in E$ και συνεπώς το Ε δεν είναι κενό.

Αν $t > 1 + x$, τότε $t^n > t > x$, επομένως $t \notin E$. Άρα, το $1 + x$ είναι άνω φράγμα του Ε. Κατά συνέπεια, το Θεώρημα 1.19 συνεπάγεται την ύπαρξη του

$$y = \sup E.$$

Για την απόδειξη της σχέσεως $y^n = x$ θα δειχθεί ότι κάθε μία από τις ανισότητες $y^n < x$ και $y^n > x$ οδηγεί σε αντίφαση.

Από την ταυτότητα $b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1})$ προκύπτει η ανισότητα

$$b^n - a^n < (b-a)nb^{n-1},$$

όταν a, b είναι πραγματικοί αριθμοί με $0 < a < b$.

Υποθέτουμε ότι $y^n < x$. Επιλέγουμε πραγματικό αριθμό h ούτως ώστε $0 < h < 1$ και

$$h < \frac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}}.$$

Θέτουμε $a = y$, $b = y + h$. Τότε,

$$(y+h)^n - y^n < hn(y+h)^{n-1} < hn(y+1)^{n-1} < x - y^n.$$

Άρα, $(y+h)^n < x$ και συνεπώς $y+h \in E$. Επειδή όμως $y+h > y$, αυτό αντίκειται στο γεγονός ότι το y είναι άνω φράγμα του Ε.

Υποθέτουμε ότι $y^n > x$. Θέτουμε

$$k = \frac{y^n - x}{ny^{n-1}}.$$

Τότε, $0 < k < y$. Αν είναι $t \geq y - k$, τότε συνάγουμε ότι

$$y^n - t^n \leq y^n - (y-k)^n < kny^{n-1} = y^n - x.$$

Άρα, $t^n > x$ και συνεπώς $t \notin E$. Από αυτό έπεται ότι το $y - k$ είναι άνω φράγμα του Ε. Όμως $y - k < y$, σχέση που αντίκειται στο γεγονός ότι το y είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του Ε.

Καταλήγοντας, έχουμε ότι $y^n = x$ και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Πόρισμα. *Εάν a, b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και n είναι θετικός ακέραιος αριθμός, τότε*

$$(ab)^{1/n} = a^{1/n} b^{1/n}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\alpha = a^{1/n}$, $\beta = b^{1/n}$. Τότε,

$$ab = \alpha^n \beta^n = (\alpha\beta)^n,$$

εφόσον ο πολλαπλασιασμός είναι μεταθετικός. (Αξίωμα (M2) στον Ορισμό 1.12). Ο ισχυρισμός περί μοναδικότητας στο Θεώρημα 1.21 φανερώνει ότι

$$(ab)^{1/n} = \alpha\beta = a^{1/n} b^{1/n}.$$

□

1.22 Δεκαδικά αναπτύγματα. Κλείνουμε αυτήν την ενότητα επισημαίνοντας τη σχέση μεταξύ πραγματικών αριθμών και δεκαδικών αναπτυγμάτων.

Θεωρούμε έναν πραγματικό αριθμό $x > 0$. Ας είναι n_0 ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός με $n_0 \leq x$. (Σημειώνουμε ότι η ύπαρξη του n_0 βασίζεται στην Αρχιμήδεια ιδιότητα του R). Έχοντας επιλέξει τους $n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}$, ας είναι n_k ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός με

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} \leq x.$$

Θεωρούμε Ε το σύνολο των αριθμών της μορφής

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Τότε, $x = \sup E$. Το δεκαδικό ανάπτυγμα του x είναι το

$$n_0, n_1 n_2 n_3 \cdots . \tag{6}$$

Αντιστρόφως, για κάθε άπειρο δεκαδικό ανάπτυγμα (6), το σύνολο Ε των αριθμών (5) είναι άνω φραγμένο και το (6) είναι το δεκαδικό ανάπτυγμα του $\sup E$.

Εφόσον δεν πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε τα δεκαδικά αναπτύγματα περαιτέρω, δεν θα εισέλθουμε σε λεπτομερέστερη ανάλυση.

ΤΟ ΕΚΤΕΤΑΜΕΝΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ορισμός 1.23. Το *εκτεταμένο αριθμητικό σύστημα των πραγματικών αριθμών* απαρτίζεται από το σώμα R των πραγματικών αριθμών μαζί με τα δύο σύμβολα $+\infty$ και $-\infty$. Διατηρούμε την αρχική διάταξη στο R και ορίζουμε

$$-\infty < x < +\infty,$$

για κάθε $x \in R$.

Είναι τώρα εμφανές ότι το $+\infty$ είναι άνω φράγμα για κάθε υποσύνολο του εκτεταμένου αριθμητικού συστήματος των πραγματικών αριθμών και ότι κάθε μη κενό υποσύνολο πραγματικών αριθμών έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

Επί παραδείγματι, εάν Ε είναι ένα μη κενό υποσύνολο πραγματικών αριθμών, το οποίο δεν είναι άνω φραγμένο, τότε στο εκτεταμένο αριθμητικό σύστημα των πραγματικών αριθμών ισχύει ότι $\sup E = +\infty$.

Οι ίδιες παρατηρήσεις εφαρμόζονται σε σχέση με τα κάτω φράγματα.

Το εκτεταμένο αριθμητικό σύστημα των πραγματικών αριθμών δεν αποτελεί σώμα, όμως αποτελεί σύνηθες γεγονός η αποδοχή των ακολούθων ισοτήτων:

(α) Εάν ο x είναι πραγματικός αριθμός, τότε

$$x + \infty = +\infty, \quad x - \infty = -\infty, \quad \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0.$$

(β) Εάν $x > 0$, τότε $x \cdot (+\infty) = +\infty$, $x \cdot (-\infty) = -\infty$.

(γ) Εάν $x < 0$, τότε $x \cdot (+\infty) = -\infty$, $x \cdot (-\infty) = +\infty$.

Όταν επιθυμούμε να κάνουμε διάκριση μεταξύ των πραγματικών αριθμών και των συμβόλων $+\infty$ και $-\infty$, τότε ονομάζουμε τους πρώτους *πεπερασμένους*.

ΤΟ ΣΩΜΑ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ορισμός 1.24. Ένας *μιγαδικός αριθμός* είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος (a, b) πραγματικών αριθμών. Με τη λέξη «διατεταγμένο» εννοούμε ότι τα (a, b) και (b, a) διαφέρουν μεταξύ τους όταν $a \neq b$.

Ας είναι $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ δύο μιγαδικοί αριθμοί. Γράφουμε $x = y$ εάν και μόνον εάν $a = c$ και $b = d$. (Σημειώνουμε ότι ο ορισμός αυτός δεν είναι άσκοπος. Θυμηθείτε την ισότητα των ρητών αριθμών, που αναπαριστώνται ως πηλίκα ακεραίων αριθμών.) Ορίζουμε

$$\begin{aligned} x + y &= (a + c, b + d), \\ xy &= (ac - bd, ad + bc). \end{aligned}$$

Θεώρημα 1.25. *Οι παραπάνω ορισμοί της προσθέσεως και του πολλαπλασιασμού δομούν το σύνολο των μιγαδικών αριθμών σε σώμα, με τα* $(0, 0)$ *και* $(1, 0)$ *στη θέση των* 0 *και* 1 *αντιστοίχως.*

Απόδειξη. Θα επαληθεύσουμε απλώς τα αξιώματα του σώματος, όπως καταγράφονται στον Ορισμό 1.12. (Φυσικά, χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες του R ως σώματος.)

Ας είναι $x = (a, b)$, $y = (c, d)$, $z = (e, f)$, όπου a, b, c, d, e, f είναι πραγματικοί αριθμοί.

(A1) Είναι σαφές.

(A2) $x + y = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = y + x$.

(A3) Έχουμε

$$\begin{aligned}(x + y) + z &= (a + c, b + d) + (e, f) \\ &= (a + c + e, b + d + f) \\ &= (a, b) + (c + e, d + f) \\ &= x + (y + z).\end{aligned}$$

(A4) $x + 0 = (a, b) + (0, 0) = (a, b) = x$.

(A5) Θέτουμε $-x = (-a, -b)$. Τότε, $x + (-x) = (0, 0) = 0$.

(M1) Είναι σαφές.

(M2) $xy = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, da + cb) = yx$.

(M3) Έχουμε

$$\begin{aligned}(xy)z &= (ac - bd, ad + bc)(e, f) \\ &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) \\ &= (a, b)(ce - df, cf + de) \\ &= x(yz).\end{aligned}$$

(M4) $1x = (1, 0)(a, b) = (a, b) = x$.

(M5) Εάν $x \neq 0$, τότε $(a, b) \neq (0, 0)$, γεγονός το οποίο σημαίνει ότι τουλάχιστον ένας από τους a, b είναι διάφορος του 0. Άρα, $a^2 + b^2 > 0$, σύμφωνα με την Πρόταση 1.18(δ). Συνεπώς, μπορούμε να ορίσουμε

$$\frac{1}{x} = (\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}).$$

Τότε,

$$x \cdot \frac{1}{x} = (a, b)(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}) = (1, 0) = 1.$$

(D) Έχουμε

$$\begin{aligned} x(y+z) &= (a,b)(c+e,d+f) \\ &= (ac+ae-bd-bf, ad+af+bc+be) \\ &= (ac-bd, ad+bc)+(ae-bf, af+be) \\ &= xy+xz. \end{aligned}$$

Η απόδειξη είναι πλήρης. □

Θεώρημα 1.26. *Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς a, b έχουμε ότι*

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0), \qquad (a,0)(b,0)=(ab,0).$$

Η απόδειξη γίνεται κατά τετριμμένο τρόπο.

Το Θεώρημα 1.26 φανερώνει ότι οι μιγαδικοί αριθμοί της μορφής $(a, 0)$ έχουν τις ίδιες αριθμητικές ιδιότητες με τους αντίστοιχους πραγματικούς αριθμούς a. Επομένως, μπορούμε να ταυτίσουμε το $(a, 0)$ με το a. Η ταυτοποίηση αυτή παριστά το σώμα των πραγματικών αριθμών ως υπόσωμα των μιγαδικών αριθμών.

Ο αναγνώστης ίσως έχει παρατηρήσει ότι οι μιγαδικοί αριθμοί έχουν ορισθεί παραπάνω δίχως καμία αναφορά στη «μυστηριώδη» τετραγωνική ρίζα του -1. Θα δείξουμε ότι ο συμβολισμός (a, b) είναι ισοδύναμος με τον κατεστημένο συμβολισμό $a + bi$.

Ορισμός 1.27. Ορίζουμε $i = (0, 1)$.

Θεώρημα 1.28. *Ισχύει ότι $i^2 = -1$.*

Απόδειξη. $i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$. □

Θεώρημα 1.29. *Εάν a, b είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε $(a, b) = a+bi$.*

Απόδειξη. $a + bi = (a,0)+(b,0)(0,1) = (a,0)+(0,b) = (a,b)$. □

Ορισμός 1.30. Εάν a, b είναι πραγματικοί αριθμοί και $z = a + bi$, τότε ο μιγαδικός αριθμός $\overline{z} = a - bi$ ονομάζεται ο *συζυγής* του z. Οι αριθμοί a και b ονομάζονται αντιστοίχως το *πραγματικό μέρος* και το *φανταστικό μέρος* του z.

Κατά περίσταση γράφουμε

$$a = \mathrm{Re}(z), \quad b = \mathrm{Im}(z).$$

Θεώρημα 1.31. *Εάν z, w είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε*

(α) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,

(β) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,

(γ) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$, $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$,

(δ) *ο $z\overline{z}$ είναι πραγματικός αριθμός. Ιδιαιτέρως, είναι θετικός, εκτός της περιπτώσεως $z = 0$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη των (α), (β), (γ) γίνεται κατά σχεδόν τετριμμένο τρόπο. Για το (δ), γράφουμε $z = a + bi$, όπου a, b είναι πραγματικοί αριθμοί, και παρατηρούμε ότι $z\overline{z} = a^2 + b^2$. □

Ορισμός 1.32. Ως *απόλυτη τιμή* $|z|$ ενός μιγαδικού αριθμού z ορίζουμε τη μη αρνητική τετραγωνική ρίζα του $z\overline{z}$. Δηλαδή, $|z| = (z\overline{z})^{1/2}$.

Η ύπαρξη (και η μοναδικότητα) του $|z|$ έπεται από το Θεώρημα 1.21 και το μέρος (δ) του Θεωρήματος 1.31.

Σημειώνουμε ότι εάν x είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε $\overline{x} = x$ και επομένως $|x| = \sqrt{x^2}$. Άρα, $|x| = x$ εάν $x \geq 0$ και $|x| = -x$ εάν $x < 0$.

Θεώρημα 1.33. *Ας είναι z, w μιγαδικοί αριθμοί. Τότε:*

(α) $|z| > 0$, *εκτός της περιπτώσεως* $z = 0$, $|0| = 0$.

(β) $|\overline{z}| = |z|$.

(γ) $|zw| = |z||w|$.

(δ) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$.

(ε) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Απόδειξη. Η απόδειξη των (α) και (β) γίνεται κατά τετριμμένο τρόπο. Θέτουμε $z = a + bi$, $w = c + di$, όπου a, b, c, d πραγματικοί αριθμοί. Τότε,

$$|zw|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z|^2|w|^2,$$

δηλαδή $|zw|^2 = (|z||w|)^2$. Τώρα, το (γ) έπεται από τον ισχυρισμό περί μοναδικότητας, του Θεωρήματος 1.21.

Για την απόδειξη του (δ), παρατηρούμε ότι $a^2 \leq a^2 + b^2$ και επομένως

$$|a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Για την απόδειξη του (ε), παρατηρούμε ότι ο $\overline{z}w$ είναι ο συζυγής του $z\overline{w}$ και επομένως $\overline{z}w + z\overline{w} = 2\mathrm{Re}(z\overline{w})$. Άρα,

$$\begin{aligned}
|z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) \\
&= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\
&= |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \\
&\leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 \\
&= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\
&= (|z| + |w|)^2.
\end{aligned}$$

Τώρα, το (ε) έπεται λαμβάνοντας τετραγωνικές ρίζες. □

Συμβολισμός 1.34. Εάν $x_1, \ldots, x_n$ είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε γράφουμε[1]

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Η ενότητα αυτή κλείνει με την απόδειξη μίας σημαντικής ανισότητας, η οποία συνήθως είναι γνωστή ως *ανισότητα του Schwarz*[2].

[1] Σ. τ. Μ.: Σε αυτό το σημείο πρέπει να δοθεί και ο ορισμός του συμβόλου $\prod$: εάν $x_1, \ldots, x_n$ είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ορίζουμε $\prod_{j=1}^{n} x_j = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$.

[2] Σ. τ. Μ.: Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921). Γερμανός μαθηματικός. Το πεδίο εργασίας του ήταν η Ανάλυση και η Γεωμετρία.

Το έτος 1860 ο Schwarz εισήχθη στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου για να σπουδάσει Χημεία.

Θεώρημα 1.35. *Εάν* $a_1, \ldots, a_n$ *και* $b_1, \ldots, b_n$ *είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε*

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j \overline{b_j}\right|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $A = \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2$, $B = \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2$, $C = \sum_{j=1}^{n} a_j \overline{b_j}$. Εάν $B = 0$, τότε $b_1 = \cdots = b_n = 0$ και το συμπέρασμα είναι προφανές. Υποθέτουμε επομένως ότι $B > 0$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.31 έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} |Ba_j - Cb_j|^2 &= \sum_{j=1}^{n} (Ba_j - Cb_j)(B\overline{a_j} - \overline{Cb_j}) \\ &= B^2 \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 - B\overline{C} \sum_{j=1}^{n} a_j \overline{b_j} - BC \sum_{j=1}^{n} \overline{a_j} b_j + |C|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 \\ &= B^2 A - B|C|^2 \\ &= B(AB - |C|^2).\end{aligned}$$

Εφόσον κάθε όρος του πρώτου αθροίσματος είναι μη αρνητικός, βρίσκουμε ότι

$$B(AB - |C|^2) \geq 0.$$

Εφόσον $B > 0$, έπεται ότι $AB - |C|^2 \geq 0$. Όμως, αυτή είναι η επιθυμητή ανισότητα. □

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΙ ΧΩΡΟΙ

Σύντομα όμως επηρεάσθηκε από τους δασκάλους του Karl Weierstrass (1815-1897) και Ernst Eduard Kummer (1810-1893), με αποτέλεσμα να στραφεί προς τα Μαθηματικά. Ο Schwarz απέκτησε αργότερα και ιδιαίτερη σχέση με τον Kummer διότι παντρεύτηκε την κόρη του. Έλαβε το διδακτορικό του δίπλωμα το έτος 1864. Το έτος 1866 ο Schwarz κατέλαβε μία θέση υφηγητή στο ίδιο πανεπιστήμιο. Κατά το έτος 1867 κλήθηκε στο Πανεπιστήμιο της Halle ως έκτακτος καθηγητής και δίδαξε εκεί για μία διετία. Το 1869 ο Schwarz ανέλαβε καθήκοντα ως τακτικός καθηγητής στο Πολυτεχνείο της Ζυρίχης. Κατά το έτος 1875, κατέλαβε ακαδημαϊκή θέση στο Πανεπιστήμιο του Göttingen. Το έτος1892 ο Schwarz διαδέχθηκε τον Weierstrass στο Βερολίνο, όπου και παρέμεινε έως το 1917.

Ο Schwarz είχε πολλά άλλα ενδιαφέροντα εκτός των Μαθηματικών. Είχε εργασθεί ως εθελοντής πυροσβέστης σε διοικητική θέση και ως σιδηροδρομικός υπάλληλος.

Ορισμός 1.36. Για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο αριθμό k συμβολίζουμε ως R^k το σύνολο όλων των διατεταγμένων k-άδων

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k),$$

όπου $x_1, \ldots, x_k$ είναι πραγματικοί αριθμοί, οι οποίοι ονομάζονται *συντεταγμένες* του $\mathbf{x}$. Τα στοιχεία τουR^k ονομάζονται *σημεία* ή *διανύσματα*, κυρίως όταν $k > 1$. Θα τα συμβολίζουμε με έντονα γράμματα. Εάν $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ και εάν a είναι πραγματικός αριθμός, τότε ορίζουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1 + y_1, \ldots, x_k + y_k), \\ a\mathbf{x} &= (ax_1, \ldots, ax_k). \end{aligned}$$

Προφανώς, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in R^k$ και $a\mathbf{x} \in R^k$. Με τις ισότητες αυτές ορίζεται πρόσθεση διανυσμάτων και πολλαπλασιασμός διανύσματος με πραγματικό αριθμό (βαθμωτό μέγεθος). Οι δύο αυτές πράξεις ικανοποιούν τον μεταθετικό, τον προσεταιριστικό και τους επιμεριστικούς νόμους (η απόδειξη γίνεται τετριμμένα, κάνοντας χρήση των αντιστοίχων ιδιοτήτων των πραγματικών αριθμών) και δομούν το R^k σε *διανυσματικό χώρο υπεράνω του σώματος των πραγματικών αριθμών.* Το μηδενικό στοιχείο του R^k (το οποίο ονομάζεται και *αρχή* ή *μηδενικό διάνυσμα*) είναι το σημείο $\mathbf{0}$, το οποίο έχει όλες τις συντεταγμένες του ίσες με 0.

Επίσης, ορίζουμε το λεγόμενο *εσωτερικό γινόμενο* (ή αλλιώς *βαθμωτό γινόμενο*) των $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ ως

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i$$

και τη *στάθμη* του $\mathbf{x}$ ως

$$|\mathbf{x}| = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Η παραπάνω δομή (ο διανυσματικός χώρος R^k εφοδιασμένος με το προηγούμενο εσωτερικό γινόμενο και τη στάθμη) ονομάζεται ο *Ευκλείδειος k-χώρος.*

Θεώρημα 1.37. *Υποθέτουμε ότι* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in R^k$ *και ότι* a *είναι πραγματικός αριθμός. Τότε:*

(α) $|\mathbf{x}| \geq 0$.

(β) $|\mathbf{x}| = 0$ *εάν και μόνον εάν* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(γ) $|a\mathbf{x}| = |a||\mathbf{x}|$.

(δ) $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$.

(ε) $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$.

(στ) $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{z}|$.

Απόδειξη. Τα (α), (β) και (γ) είναι προφανή και το (δ) είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας του Schwarz. Από το (δ) λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 &= (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} \\ &\leq |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 \\ &= (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2, \end{aligned}$$

και κατ' αυτόν τον τρόπο αποδεικνύεται το (ε). Εν τέλει, το (στ) έπεται από το (ε) εάν αντικαταστήσουμε το $\mathbf{x}$ με το $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ και το $\mathbf{y}$ με το $\mathbf{y} - \mathbf{z}$. □

Παρατήρηση 1.38. Τα (α), (β) και (στ) του Θεωρήματος 1.37 θα μας επιτρέψουν να θεωρήσουμε το R^k ως μετρικό χώρο (ανατρέξτε στο Κεφάλαιο 2).

Το R^1 (δηλαδή το σύνολο των πραγματικών αριθμών) συνήθως ονομάζεται *πραγματική ευθεία*. Ομοίως, το R^2 συνήθως ονομάζεται *μιγαδικό επίπεδο* (συγκρίνετε τους Ορισμούς 1.24 και 1.36). Στις δύο αυτές περιπτώσεις, η στάθμη ταυτίζεται με την απόλυτη τιμή των πραγματικών και αντιστοίχως των μιγαδικών αριθμών.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Στο παράρτημα αυτό θα αποδείξουμε το Θεώρημα 1.19, κατασκευάζοντας το R από το Q. Η κατασκευή θα διαιρεθεί σε αρκετά επί μέρους βήματα.

Βήμα 1. Τα στοιχεία του R είναι ίσα με συγκεκριμένα υποσύνολα του Q, τα οποία ονομάζονται τομές. Μία *τομή* είναι, εξ ορισμού, ένα υποσύνολο α του Q που κατέχει τις παρακάτω τρεις ιδιότητες:

(I) Το α είναι μη κενό και $\alpha \neq Q$.

(II) Εάν $p \in \alpha$, $q \in Q$ και $q < p$, τότε $q \in \alpha$.

(III) Εάν $p \in \alpha$, τότε $p < r$ για κάποιο $r \in \alpha$.

Τα γράμματα $p, q, r, \ldots$ θα συμβολίζουν πάντοτε ρητούς αριθμούς και τα γράμματα $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ θα συμβολίζουν τομές.

Σημειώνουμε ότι το (III) απλώς δηλώνει ότι το α δεν έχει μέγιστο στοιχείο. Το (II) συνεπάγεται δύο γεγονότα, τα οποία και θα χρησιμοποιήσουμε κατά τη διάρκεια της αποδείξεως:

Εάν $p \in \alpha$ και $q \notin \alpha$, τότε $p < q$.

Εάν $r \notin \alpha$ και $r < s$, τότε $s \notin \alpha$.

Βήμα 2. Γράφουμε $\alpha < \beta$ εάν και μόνον εάν το α είναι γνήσιο υποσύνολο του β.

Παρακάτω διαπιστώνουμε ότι η σχέση αυτή ικανοποιεί τις απαιτήσεις του Ορισμού 1.5.

Είναι σαφές ότι εάν $\alpha < \beta$ και $\beta < \gamma$, τότε $\alpha < \gamma$. (Ένα γνήσιο υποσύνολο ενός γνησίου υποσυνόλου είναι γνήσιο υποσύνολο.) Είναι επίσης σαφές ότι το πολύ μία από τις τρεις σχέσεις

$$\alpha < \beta, \quad \alpha = \beta, \quad \beta < \alpha$$

μπορεί να ισχύει, για οποιεσδήποτε τομές α, β. Για να αποδείξουμε ότι τουλάχιστον μία ισχύει, θα υποθέσουμε ότι οι πρώτες δύο είναι ψευδείς. Τότε, το α δεν είναι υποσύνολο του β. Άρα, υπάρχει $p \in \alpha$ με $p \notin \beta$. Εάν $q \in \beta$, τότε $q < p$ (εφόσον $p \notin \beta$) και επομένως $q \in \alpha$, βάσει του (II). Άρα, $\beta \subset \alpha$. Εφόσον $\beta \neq \alpha$, καταλήγουμε στην $\beta < \alpha$.

Συνεπώς, το R είναι διατεταγμένο σύνολο.

Βήμα 3. *Το διατεταγμένο σύνολο R έχει την ιδιότητα του ελαχίστου άνω φράγματος.*

Για την απόδειξη αυτού, θεωρούμε ένα μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο A του R. Υποθέτουμε ότι β είναι ένα άνω φράγμα του A. Ορίζουμε ως γ την ένωση όλων των $\alpha \in A$. Με χρήση διαφορετικής διατυπώσεως, ισχύει ότι $p \in \gamma$ εάν και μόνον εάν $p \in \alpha$ για κάποιο $\alpha \in A$. Θα αποδείξουμε ότι $\gamma \in R$ και ότι $\gamma = \sup A$.

Εφόσον το A είναι μη κενό, υπάρχει $\alpha_0 \in A$. Το α_0 είναι φυσικά μη κενό. Εφόσον $\alpha_0 \subset \gamma$, το γ είναι μη κενό. Κατόπιν, $\gamma \subset \beta$ (διότι $\alpha \subset \beta$, για κάθε $\alpha \in A$) και επομένως $\gamma \neq Q$. Άρα, το γ ικανοποιεί την ιδιότητα (I). Για την απόδειξη των (II) και (III), θεωρούμε $p \in \gamma$. Τότε, $p \in \alpha_1$ για κατάλληλο $\alpha_1 \in A$. Εάν $q < p$, τότε $q \in \alpha_1$ και συνεπώς $q \in \gamma$. Αυτό αποδεικνύει το (II). Εάν είναι $r \in \alpha_1$ με $r > p$, τότε $r \in \gamma$ (διότι $\alpha_1 \subset \gamma$). Αυτό αποδεικνύει το (III).

Συνεπώς, $\gamma \in R$.

Από τα παραπάνω είναι σαφές ότι $\alpha \leq \gamma$, για κάθε $\alpha \in A$.

Υποθέτουμε ότι $\delta < \gamma$. Τότε, υπάρχει $s \in \gamma$ με $s \notin \delta$. Εφόσον $s \in \gamma$, έπεται ότι $s \in \alpha$ για κατάλληλο $\alpha \in A$. Άρα, $\delta < \alpha$ και επομένως το δ δεν αποτελεί άνω φράγμα του A.

Από αυτά προκύπτει η επιθυμητή σχέση $\gamma = \sup A$.

Βήμα 4. *Εάν $\alpha, \beta \in R$, τότε ορίζουμε ως $\alpha+\beta$ το σύνολο των στοιχείων της μορφής $r+s$, όπου $r \in \alpha$ και $s \in \beta$.*

Ορίζουμε ως $0^\star$ το σύνολο των αρνητικών ρητών αριθμών. Είναι σαφές ότι αυτό το σύνολο είναι τομή. *Θα επαληθεύσουμε τα αξιώματα προσθέσεως στο R* (ανατρέξτε στον Ορισμό 1.12), *με το $0^\star$ στη θέση του* 0.

(A1) Έχουμε να δείξουμε ότι το $\alpha + \beta$ είναι τομή. Είναι προφανές ότι το $\alpha + \beta$ είναι μη κενό. Ας είναι $r' \notin \alpha$, $s' \notin \beta$. Τότε, για κάθε $r \in \alpha$ και $s \in \beta$, λαμβάνουμε ότι $r' + s' > r + s$. Άρα, $r' + s' \notin \alpha + \beta$. Συνεπώς, το $\alpha + \beta$ ικανοποιεί την ιδιότητα (I).

Θεωρούμε $p \in \alpha + \beta$. Τότε, $p = r + s$ με $r \in \alpha$ και $s \in \beta$. Εάν $q < p$, τότε $q - s < r$ και επομένως $q - s \in \alpha$. Άρα, $q = (q - s) + s \in \alpha + \beta$. Συνεπώς, ισχύει και η (II). Θεωρούμε τώρα $t \in \alpha$ με $t > r$. Τότε, $p < t + s$ και $t + s \in \alpha + \beta$. Με αυτό ισχύει και η (III).

(A2) Το $\alpha + \beta$ είναι το σύνολο των στοιχείων της μορφής $r + s$, όπου $r \in \alpha$ και $s \in \beta$. Παρομοίως, το $\beta + \alpha$ είναι το σύνολο των στοιχείων της μορφής $s + r$, όπου $s \in \beta$ και $r \in \alpha$. Εφόσον $r + s = s + r$, για κάθε $r, s \in Q$, έχουμε ότι $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

(A3) Όπως και παραπάνω, το ζητούμενο έπεται από τον προσεταιριστικό νόμο στο Q.

(A4) Εάν $r \in \alpha$ και $s \in 0^\star$, τότε $r + s < r$, άρα $r + s \in \alpha$. Συνεπώς, $\alpha + 0^\star \subset \alpha$. Για την απόδειξη της αντίστροφης εγκλείσεως θεωρούμε $p \in \alpha$. Ας είναι $r \in \alpha$ με $r > p$. Τότε, $p - r \in 0^\star$ και $p = r + (p - r) \in \alpha + 0^\star$. Άρα, $\alpha \subset \alpha + 0^\star$. Κατ' αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στην $\alpha + 0^\star = \alpha$.

(A5) Θεωρούμε $\alpha \in R$. Ας είναι β το σύνολο των ρητών αριθμών p με την ακόλουθη ιδιότητα:

Υπάρχει ρητός αριθμός $r > 0$ *με* $-p - r \notin \alpha$.

Δηλαδή, υπάρχει κάποιος ρητός αριθμός, μικρότερος του $-p$, ο οποίος δεν ανήκει στο α.

Θα αποδείξουμε ότι $\beta \in R$ *και* $\alpha + \beta = 0^\star$.

Εάν είναι $s \notin \alpha$ και $p = -s - 1$, τότε $-p - 1 \notin \alpha$ και επομένως $p \in \beta$. Άρα, το β είναι μη κενό. Εάν είναι $q \in \alpha$, τότε $-q \notin \beta$ και επομένως $\beta \neq Q$. Συνεπώς, το β ικανοποιεί τις απαιτήσεις του (I).

Θεωρούμε $p \in \beta$ και $r > 0$, ούτως ώστε $-p - r \notin \alpha$. Εάν είναι $q < p$, τότε $-q - r > -p - r$, συνεπώς $-q - r \notin \alpha$. Άρα, $q \in \beta$ και επομένως ισχύει το (II). Θέτουμε $t = p + (r/2)$. Τότε, $t > p$ και $-t - (r/2) = -p - r \notin \alpha$. Επομένως, $t \in \beta$. Κατά συνέπεια, το β ικανοποιεί το (III).

Έχουμε αποδείξει ότι $\beta \in R$.

Εάν είναι $r \in \alpha$ και $s \in \beta$, τότε $-s \notin \alpha$ και επομένως $r < -s$, δηλαδή $r + s < 0$. Άρα, $\alpha + \beta \subset 0^\star$.

Για την απόδειξη της αντίστροφης εγκλείσεως, θεωρούμε $v \in 0^\star$ και θέτουμε $w = -v/2$. Τότε, είναι $w > 0$ και επιπλέον υπάρχει ακέραιος αριθμός n με $nw \in \alpha$ αλλά $(n+1)w \notin \alpha$. (Σημειώνουμε ότι αυτό βασίζεται στην Αρχιμήδεια ιδιότητα του Q.) Θέτουμε $p = -(n+2)w$. Τότε, $p \in \beta$, εφόσον $-p - w \notin \alpha$. Επιπλέον

$$v = nw + p \in \alpha + \beta.$$

Άρα, $0^\star \subset \alpha + \beta$.

Με αυτό καταλήγουμε στην ισότητα $\alpha + \beta = 0^\star$.

Φυσικά, το β, όπως έχει ορισθεί παραπάνω, θα συμβολίζεται με $-\alpha$.

Βήμα 5. Έχοντας αποδείξει ότι η πρόσθεση, όπως αυτή ορίζεται στο Βήμα 4, ικανοποιεί τα αξιώματα (A) του Ορισμού 1.12, συνάγουμε ότι η Πρόταση 1.14 αληθεύει στο R και μπορούμε να αποδείξουμε μία από τις συνθήκες του Ορισμού 1.17:

Εάν $\alpha, \beta, \gamma \in R$ και $\beta < \gamma$, τότε $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.

Όντως, από τον ορισμό της προσθέσεως στο R είναι σαφές ότι $\alpha + \beta \subset \alpha + \gamma$. Εάν είναι $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, τότε ο νόμος απλοποιήσεως (Πρόταση 1.14) συνεπάγεται ότι $\beta = \gamma$, γεγονός αδύνατο.

Επίσης, έπεται ότι $\alpha > 0^\star$ εάν και μόνον εάν $-\alpha < 0^\star$.

Βήμα 6. Ο πολλαπλασιασμός παρουσιάζει περισσότερη δυσκολία από την πρόσθεση, λόγω του γεγονότος ότι το γινόμενο δύο αρνητικών ρητών αριθμών είναι θετικό. Αρχικά, θα περιοριστούμε στο R^+, δηλαδή το σύνολο των $\alpha \in R$ με $\alpha > 0^\star$.

Εάν είναι $\alpha, \beta \in R^+$, τότε ορίζουμε ως γινόμενο $\alpha\beta$ το σύνολο των ρητών αριθμών p με $p \leq rs$, για κάποια $r \in \alpha$ με $r > 0$ και $s \in \beta$ με $s > 0$.

Ορίζουμε ως $1^\star$ το σύνολο των ρητών αριθμών q με $q < 1$.

Τα αξιώματα (M) και (D) του Ορισμού 1.12 ισχύουν με το R^+ στη θέση του R και με το $1^\star$ στη θέση του 1.

Οι αποδείξεις είναι τόσο παρεμφερείς με αυτές του Βήματος 4 και για αυτόν τον λόγο τις παραλείπουμε.

Ιδιαιτέρως, σημειώνουμε ότι ισχύει η δεύτερη συνθήκη του Ορισμού 1.17: εάν $\alpha > 0^\star$ και $\beta > 0^\star$, τότε $\alpha\beta > 0^\star$.

Βήμα 7. Συμπληρώνουμε τον ορισμό του πολλαπλασιασμού ορίζοντας

$\alpha 0^\star = 0^\star \alpha = 0^\star$ και

$$\alpha\beta = \begin{cases} (-\alpha)(-\beta) & \text{εάν } \alpha < 0^\star, \beta < 0^\star, \\ -[(-\alpha)\beta] & \text{εάν } \alpha < 0^\star, \beta > 0^\star, \\ -[\alpha(-\beta)] & \text{εάν } \alpha > 0^\star, \beta < 0^\star. \end{cases}$$

Τα γινόμενα στη δεξιά πλευρά ορίζονται όπως στο Βήμα 6.

Έχοντας αποδείξει (στο Βήμα 6) ότι τα αξιώματα (M) ισχύουν στο R^+, είναι πλέον απλό να αποδειχθούν, στη γενικότητα τους, στο R με επανειλημμένη χρήση της ταυτότητας $\gamma = -(-\gamma)$, η οποία αποτελεί μέρος της Προτάσεως 1.14. (Δείτε το Βήμα 5.)

Η απόδειξη του επιμεριστικού νόμου

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

διαχωρίζεται σε περιπτώσεις. Επί παραδείγματι, υποθέτουμε ότι $\alpha > 0^\star$, $\beta < 0^\star$, $\beta + \gamma > 0^\star$. Τότε, $\gamma = (\beta + \gamma) + (-\beta)$ και επομένως (εφόσον γνωρίζουμε ότι ο επιμεριστικός νόμος ισχύει στο R^+)

$$\alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma) + \alpha(-\beta).$$

Όμως, είναι $\alpha(-\beta) = -(\alpha\beta)$. Άρα,

$$\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma).$$

Χειριζόμαστε τις υπόλοιπες περιπτώσεις παρομοίως.

Έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη ότι το R είναι διατεταγμένο σώμα με την ιδιότητα του ελαχίστου άνω φράγματος.

Βήμα 8. Σε κάθε $r \in Q$ αντιστοιχίζουμε το σύνολο $r^\star$ των ρητών αριθμών p με $p < r$. Είναι σαφές ότι, για $r \in Q$, το $r^\star$ είναι τομή, δηλαδή $r^\star \in R$. Οι τομές αυτές ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

(α) $r^\star + s^\star = (r+s)^\star$,

(β) $r^\star s^\star = (rs)^\star$,

(γ) $r^\star < s^\star$ εάν και μόνον εάν $r < s$.

Για την απόδειξη της (α), θεωρούμε $p \in r^\star + s^\star$. Τότε, $p = u + v$, με $u < r$ και $v < s$. Άρα, $p < r + s$ δηλαδή $p \in (r+s)^\star$.

Αντιστρόφως, ας είναι $p \in (r+s)^\star$. Τότε, $p < r+s$. Θεωρούμε t με $2t = r+s-p$. Θέτουμε

$$r' = r - t, \quad s' = s - t.$$

Τότε, $r' \in r^\star$, $s' \in s^\star$ και $p = r' + s'$. Συνεπώς, $p \in r^\star + s^\star$.

Αυτό αποδεικνύει το (α). Το (β) αποδεικνύεται παρομοίως.

Εάν είναι $r < s$, τότε $r \in s^\star$, ενώ $r \notin r^\star$. Άρα, $r^\star < s^\star$.

Εάν είναι $r^\star < s^\star$, τότε υπάρχει $p \in s^\star$ με $p \notin r^\star$. Άρα, $r \le p < s$ και επομένως $r < s$.

Αυτό αποδεικνύει το (γ).

Βήμα 9. Στο Βήμα 8 διαπιστώσαμε ότι η αντικατάσταση των ρητών αριθμών r από τις αντίστοιχες «ρητές τομές» $r^\star \in R$ διατηρεί τα αθροίσματα, τα γινόμενα και τη διάταξη. Το γεγονός αυτό μπορεί να εκφρασθεί λέγοντας ότι το διατεταγμένο σώμα Q είναι *ισόμορφο* προς το διατεταγμένο σώμα $Q^\star$, του οποίου τα στοιχεία είναι οι ρητές τομές. Φυσικά, κατά κανένα τρόπο το r δεν είναι ίδιο με το $r^\star$, όμως οι ιδιότητες που μας ενδιαφέρουν (αριθμητικές ιδιότητες και ιδιότητες διατάξεως) είναι κοινές στα δύο σώματα.

Αυτή η ταυτοποίηση του Q με το $Q^\star$ μας επιτρέπει να θεωρούμε το Q ως υπόσωμα του R.

Το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος 1.19 πρέπει να γίνει αντιληπτό βάσει αυτής της ταυτοποιήσεως. Σημειώνουμε ότι το ίδιο φαινόμενο εμφανίζεται όταν το σώμα των πραγματικών αριθμών θεωρείται ως υπόσωμα του σώματος των μιγαδικών αριθμών και επίσης εμφανίζεται, σε στοιχειωδέστερο επίπεδο, όταν το σύνολο των ακεραίων αριθμών ταυτίζεται με ένα ορισμένο υποσύνολο του Q.

Είναι γεγονός, το οποίο όμως δεν θα αποδειχθεί εδώ, ότι *δύο διατεταγμένα σώματα με την ιδιότητα του ελαχίστου άνω φράγματος είναι ισόμορφα.* Επομένως, το πρώτο μέρος του Θεωρήματος 1.19 χαρακτηρίζει πλήρως το σώμα των πραγματικών αριθμών.

Τα βιβλία των Landau και Thurston, τα οποία αναφέρονται στη Βιβλιογραφία, ασχολούνται αποκλειστικά με αριθμητικά συστήματα. Το πρώτο κεφάλαιο του βιβλίου του Knopp περιέχει αναλυτικότερη περιγραφή της κατασκευής του R από το Q. Στην πέμπτη ενότητα του βιβλίου των Hewitt και Stromberg πραγματοποιείται μία διαφορετική κατασκευή του σώματος των πραγματικών αριθμών, όπου κάθε πραγματικός αριθμός ορίζεται ως μία κλάση ισοδυναμίας ακολουθιών Cauchy με όρους ρητούς αριθμούς. (Δείτε το Κεφάλαιο 3).

Η μέθοδος για την κατασκευή του R που αναπτύχθηκε εδώ οφείλεται στον Dedekind [3]. Η κατασκευή του R από το Q με χρήση ακολουθιών Cauchy οφείλεται στον Cantor. Και οι δύο τους εξέδωσαν τις αντίστοιχες εργασίες το έτος 1872.

[3] Σ. τ. Μ.: Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916). Σπουδαίος Γερμανός μαθηματικός. Εργάσθηκε κυρίως στη Θεωρία Αριθμών. Μεταξύ άλλων, έδωσε τον αυστηρό ορισμό του άρρητου αριθμού, με την εισαγωγή των τομών Dedekind, μελέτησε την πληρότητα της ευθείας των πραγματικών αριθμών και εισήγαγε την έννοια του ιδεώδους. Επίσης, ασχολήθηκε με την διασάφηση της έννοιας του απείρου, μέσω της Θεωρίας Συνόλων. Θεωρείται ένας από τους πιο πρωτότυπους και γόνιμους μαθηματικούς της εποχής του.

Ως μαθητής, ο Dedekind φοίτησε στη γενέτειρά του, Braunschweich. Κατά το έτος1848 εισήλθε στο Κολέγιο του Caroline, και εκεί είχε την ευκαιρία να μελετήσει για πρώτη φορά ανώτερα Μαθηματικά. Εισήχθη στο Πανεπιστήμιο του Göttingen, το έτος 1850, όπου φοίτησε υπό τους Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Wilhelm Eduard Weber (1804-1891) και Moritz Abraham Stern (1807-1894). Ο Dedekind έλαβε το διδακτορικό του δίπλωμα από τον Gauss, σε ένα θέμα της Αναλύσεως, το έτος 1852. Διορίσθηκε υφηγητής στο Göttingen το έτος 1855 και ύστερα από μία διετία διορίσθηκε τακτικός καθηγητής στο Πολυτεχνείο της Ζυρίχης, θέση την οποία κράτησε για πέντε έτη. Ο Dedekind επέστρεψε το έτος 1862 στο Braunschweich ως καθηγητής μέσης εκπαιδεύσεως σε μία τεχνική σχολή, όπου και παρέμεινε έως το τέλος της ζωής του.

Ο Dedekind είχε αποκτήσει θρυλική φήμη και για αυτόν τον λόγο πολλοί τον κατέτασσαν στους μεγάλους θανόντες μαθηματικούς ενόσω ήταν ακόμη εν ζωή. Χαρακτηριστικό είναι το γεγονός ότι είχε εκδοθεί ένα ημερολόγιο των Μαθηματικών το οποίο ανέφερε ως μέρα θανάτου του Dedekind την 4η Σεπτεμβρίου του 1899. Ο ίδιος διασκέδασε αφάνταστα με το γεγονός αυτό και έγραψε στον εκδότη του ημερολογίου ότι την ημέρα εκείνη την πέρασε συζητώντας με τον καλό του φίλο Georg Cantor (1845-1918). Ο Dedekind, με τη διορατικότητα που τον διέκρινε, ήταν και ένθερμος υποστηρικτής της «περιθωριακής» Θεωρίας Συνόλων του Cantor. Ο Dedekind υπήρξε επίσης καλός φίλος με τον Bernhard Riemann (1826-1866).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Εκτός και εάν δηλώνεται ρητά κάτι διαφορετικό, όλοι οι αριθμοί που αναφέρονται στις επόμενες ασκήσεις θεωρούνται πραγματικοί.

Άσκηση 1. Εάν ο r είναι ρητός αριθμός ($r \neq 0$) και ο x είναι άρρητος αριθμός ($x \neq 0$), τότε αποδείξτε ότι οι $r + x$ και rx είναι άρρητοι αριθμοί.

Άσκηση 2. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ρητός αριθμός με τετράγωνο ίσο με 12.

Άσκηση 3. Αποδείξτε την Πρόταση 1.15.

Άσκηση 4. Ας είναι E ένα μη κενό υποσύνολο ενός διατεταγμένου συνόλου. Υποθέτουμε ότι α είναι κάτω φράγμα του E και β είναι άνω φράγμα του E. Αποδείξτε ότι $\alpha \leq \beta$.

Άσκηση 5. Ας είναι A ένα μη κενό και κάτω φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών. Ας είναι $-A$ το σύνολο των αριθμών της μορφής $-x$, όπου $x \in A$. Αποδείξτε ότι

$$\inf A = -\sup(-A).$$

Άσκηση 6. Θεωρούμε $b > 1$.

(α) Εάν m, n, p, q είναι ακέραιοι αριθμοί με $n > 0$, $q > 0$ και εάν είναι $r = m/n = p/q$, τότε αποδείξτε ότι

$$(b^m)^{1/n} = (b^p)^{1/q}.$$

Με αυτό, έχει νόημα ο ορισμός $b^r = (b^m)^{1/n}$.

(β) Αποδείξτε ότι $b^{r+s} = b^r b^s$, όπου οι r, s είναι ρητοί αριθμοί.

(γ) Εάν x είναι πραγματικός αριθμός, τότε ορίζουμε ως $B(x)$ το σύνολο των αριθμών της μορφής b^t, όπου ο t είναι ρητός αριθμός με $t \leq x$. Αποδείξτε ότι

$$b^r = \sup B(r),$$

εάν r είναι ένας ρητός αριθμός. Επομένως, έχει νόημα ο ορισμός

$$b^x = \sup B(x),$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x.

(δ) Αποδείξτε ότι $b^{x+y} = b^x b^y$, για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y.

Άσκηση 7. Θεωρούμε $b > 1, y > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένας μοναδικός αριθμός x με $b^x = y$, συμπληρώνοντας το παρακάτω αποδεικτικό σχεδιάγραμμα. (Το x ονομάζεται *λογάριθμος του y με βάση b*.)

(α) Για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n αποδείξτε ότι $b^n - 1 \geq n(b-1)$.

(β) Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι $b - 1 \geq n(b^{1/n} - 1)$.

(γ) Εάν είναι $t > 1$ και $n > (b-1)/(t-1)$, τότε $b^{1/n} < t$.

(δ) Εάν w είναι τέτοιος ώστε $b^w < y$, τότε $b^{w+(1/n)} < y$, για οποιονδήποτε επαρκώς μεγάλο θετικό ακέραιο αριθμό n. Για να το αποδείξετε αυτό, εφαρμόστε το μέρος (γ) με $t = yb^{-w}$.

(ε) Εάν w είναι τέτοιος ώστε $b^w > y$, τότε $b^{w-(1/n)} > y$, για οποιονδήποτε επαρκώς μεγάλο θετικό ακέραιο αριθμό n.

(στ) Ας είναι Α το σύνολο των αριθμών w με $b^w < y$. Αποδείξτε ότι εάν $x = \sup A$, τότε $b^x = y$.

(ζ) Αποδείξτε ότι αυτός ο αριθμός x είναι μοναδικός.

Άσκηση 8. Αποδείξτε ότι στο σώμα των μιγαδικών αριθμών δεν μπορεί να ορισθεί διάταξη η οποία να το καθιστά διατεταγμένο σώμα.

Υπόδειξη: Το –1 είναι τετράγωνο.

Άσκηση 9. Υποθέτουμε ότι $z = a + bi, w = c + di$. Ορίζουμε $z < w$ εάν και μόνον εάν $a < c$ ή $a = c$ και $b < d$. Αποδείξτε ότι η σχέση αυτή δομεί το σύνολο των μιγαδικών αριθμών σε διατεταγμένο σύνολο. (Αυτού του είδους η διάταξη ονομάζεται *λεξικογραφική διάταξη*, για τους προφανείς λόγους. Έχει το διατεταγμένο αυτό σύνολο την ιδιότητα του ελαχίστου άνω φράγματος;

Άσκηση 10. Υποθέτουμε ότι $z = a + bi$, $w = u + vi$ και ότι

$$a = \left(\frac{|w| + u}{2}\right)^{1/2}, \quad b = \left(\frac{|w| - u}{2}\right)^{1/2}.$$

Αποδείξτε ότι $z^2 = w$ εάν $v \geq 0$ και ότι $(\bar{z})^2 = w$ εάν $v \leq 0$. Συμπεράνετε ότι κάθε μιγαδικός αριθμός (με μία και μοναδική εξαίρεση!) έχει δύο μιγαδικές τετραγωνικές ρίζες.

Άσκηση 11. Εάν z είναι μιγαδικός αριθμός, τότε αποδείξτε ότι υπάρχουν $r \geq 0$ και μιγαδικός αριθμός w με $|w| = 1$ ούτως ώστε $z = rw$. Είναι οι r, w μονοσήμαντα καθορισμένοι από το z;

Άσκηση 12. Εάν $z_1, \ldots, z_n$ είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε αποδείξτε ότι

$$|z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n|.$$

Άσκηση 13. Εάν x, y είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε αποδείξτε ότι

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Άσκηση 14. Εάν z είναι μιγαδικός αριθμός με $|z| = 1$, δηλαδή $z\bar{z} = 1$, τότε υπολογίστε την παράσταση

$$|1 + z|^2 + |1 - z|^2.$$

Άσκηση 15. Υπό ποιες συνθήκες ισχύει η ισότητα στην ανισότητα του Schwarz;

Άσκηση 16. Υποθέτουμε ότι $k \geq 3$, ότι $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^k$ με $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = d > 0$ και ότι $r > 0$. Αποδείξτε ότι:

(α) Εάν $2r > d$, τότε υπάρχουν απείρως πολλά $\mathbf{z} \in R^k$ με

$$|\mathbf{z} - \mathbf{x}| = |\mathbf{z} - \mathbf{y}| = r.$$

(β) Εάν $2r = d$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\mathbf{z}$ με την ιδιότητα αυτή.

(γ) Εάν $2r < d$, δεν υπάρχει $\mathbf{z}$ με την ιδιότητα αυτή.

Πώς πρέπει να τροποποιηθούν οι προηγούμενες προτάσεις εάν ο k ισούται με 1 ή 2;

Άσκηση 17. Αποδείξτε ότι

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2+|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2=2|\mathbf{x}|^2+2|\mathbf{y}|^2,$$

για κάθε $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in R^k$. Ερμηνεύστε το γεγονός αυτό γεωμετρικά, ως μία πρόταση σχετική με παραλληλόγραμμα.

Άσκηση 18. Εάν $k \geq 2$ και $\mathbf{x} \in R^k$, τότε αποδείξτε ότι υπάρχει $\mathbf{y} \in R^k$ ούτως ώστε $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ και $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$. Αληθεύει αυτό και για $k = 1$;

Άσκηση 19. Υποθέτουμε ότι $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in R^k$. Βρείτε $\mathbf{c} \in R^k$ και $r > 0$ ούτως ώστε

$$|\mathbf{x}-\mathbf{a}|=2|\mathbf{x}-\mathbf{b}|$$

εάν και μόνον εάν $|\mathbf{x}-\mathbf{c}|=r$.

(*Λύση:* $3\mathbf{c}=4\mathbf{b}-\mathbf{a}$, $3r=2|\mathbf{b}-\mathbf{a}|$.)

Άσκηση 20. Σε σχέση με το Παράρτημα, υποθέτουμε ότι η ιδιότητα (III) του ορισμού της τομής παραλείπεται. Διατηρούμε τους ίδιους ορισμούς προσθέσεως και πολλαπλασιασμού. Αποδείξτε ότι το προκύπτον διατεταγμένο σύνολο έχει την ιδιότητα του ελαχίστου άνω φράγματος και ότι η πρόσθεση ικανοποιεί τα αξιώματα (A1) έως (A4) (με ελαφρώς διαφορετικό μηδενικό στοιχείο!), όμως δεν αληθεύει το (A5).

Κεφάλαιο 2

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΕΣ ΘΕΩΡΗΣΕΙΣ

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ, ΑΡΙΘΜΗΣΙΜΑ ΚΑΙ ΥΠΕΡΑΡΙΘΜΗΣΙΜΑ ΣΥΝΟΛΑ

Ξεκινούμε αυτήν την ενότητα με την εισαγωγή της έννοιας της συναρτήσεως.

Ορισμός 2.1. Θεωρούμε δύο σύνολα A και B, με στοιχεία οποιαδήποτε αντικείμενα, και υποθέτουμε ότι σε κάθε στοιχείο x του A αντιστοιχίζεται, με ορισμένο τρόπο, ένα στοιχείο του B, το οποίο συμβολίζουμε ως $f(x)$.

Τότε, αυτή η αντιστοιχία f ονομάζεται *συνάρτηση* από το Α στο Β (ή *απεικόνιση* του Α στο Β). Το σύνολο Α ονομάζεται *πεδίο ορισμού* της f (ισοδύναμα λέγεται ότι η f *ορίζεται* στο Α). Τα στοιχεία της μορφής $f(x)$, όπου $x \in A$, ονομάζονται *τιμές* της f και το σύνολο όλων των τιμών της f ονομάζεται *πεδίο τιμών* της f.

Ορισμός 2.2. Ας είναι Α, Β δύο σύνολα και f μία απεικόνιση του Α στο Β. Εάν $E \subset A$, τότε το $f(E)$ ορίζεται ως το σύνολο των στοιχείων της μορφής $f(x)$ με $x \in E$. Ονομάζουμε το σύνολο αυτό *εικόνα* του Ε μέσω της f. Με χρήση αυτού του συμβολισμού, το $f(A)$ είναι το πεδίο τιμών της f. Είναι προφανές ότι $f(A) \subset B$. Η f λέγεται απεικόνιση του Α *επί* του Β εάν και μόνον εάν $f(A) = B$. (Με αυτό, η έκφραση «η f απεικονίζει το Α επί του Β» υπονοεί κάτι επιπλέον από την έκφραση «η f απεικονίζει το Α στο Β».

Εάν $E \subset B$, τότε συμβολίζουμε με $f^{-1}(E)$ το σύνολο των στοιχείων $x \in A$ με $f(x) \in E$. Το σύνολο αυτό ονομάζεται *αντίστροφη εικόνα* του Ε μέσω της f. Εάν $y \in$ Β, τότε με $f^{-1}(y)$ συμβολίζουμε το σύνολο των στοιχείων $x \in A$ με $f(x) = y$. Η f ονομάζεται *1-1 (ένα-προς-ένα)* απεικόνιση του Α στο Β εάν και μόνον εάν το $f^{-1}(y)$ περιέχει το πολύ ένα στοιχείο. Το τελευταίο μπορεί να εκφρασθεί ως ακολούθως: η f είναι 1-1 απεικόνιση του Α στο Β εάν και μόνον εάν $f(x_1) \neq f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$.

(Ο συμβολισμός $x_1 \neq x_2$ δηλώνει ότι τα x_1, x_2 είναι σαφώς διακεκριμένα. Στην αντίθετη περίπτωση, $x_1 = x_2$.)

Ορισμός 2.3. Τα σύνολα Α και Β λέγονται ότι τίθενται *σε 1-1 αντιστοιχία* ή ότι έχουν κοινό *πληθικό αριθμό* ή, εν συντομία, λέγονται *ισοδύναμα* εάν και μόνον εάν υπάρχει μία 1-1 απεικόνιση του Α *επί* του Β[1]. Το γεγονός αυτό συμβολίζεται με $A \sim B$. Αυτή η σχέση έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

Είναι ανακλαστική: Α $\sim A$.

[1] Σ. τ. Μ.: Μία συνάρτηση f από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B ονομάζεται *αντιστρέψιμη* εάν και μόνον εάν είναι 1-1 και επί του B. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει μοναδική συνάρτηση g από το B στο A, την οποία συμβολίζουμε με f^{-1}, ούτως ώστε να ισχύει ότι $g(f(x)) = x$ για κάθε $x \in A$ και $f(g(y)) = y$ για κάθε $y \in B$. Η g ονομάζεται η *αντίστροφη* απεικόνιση της f.

Είναι συμμετρική: Εάν Α $\sim B$, τότε $B \sim A$.

Είναι μεταβατική: Εάν $A \sim B$ και $B \sim C$, τότε $A \sim C$.

Κάθε σχέση με τις παραπάνω ιδιότητες ονομάζεται *σχέση ισοδυναμίας.*

Ορισμός 2.4. Για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n συμβολίζουμε με J_n το σύνολο με στοιχεία τους ακέραιους αριθμούς $1, 2, \ldots, n$. Επίσης, συμβολίζουμε με J το σύνολο όλων των θετικών ακεραίων αριθμών. Εάν Α είναι ένα σύνολο, τότε το Α ονομάζεται:

(α) *Πεπερασμένο* εάν και μόνον εάν Α $\sim J_n$, για κάποιον θετικό ακέραιο αριθμό n (το κενό σύνολο επίσης θεωρείται πεπερασμένο).

(β) *Απέραντο* εάν και μόνον εάν δεν είναι πεπερασμένο.

(γ) *Αριθμήσιμο* εάν και μόνον εάν $A \sim J$.

(δ) *Υπεραριθμήσιμο* εάν και μόνον εάν δεν είναι ούτε πεπερασμένο ούτε αριθμήσιμο.

(ε) *Το πολύ αριθμήσιμο* εάν και μόνον εάν είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο.

Τα αριθμήσιμα σύνολα λέγονται επίσης και *απαριθμητά.*

Για δύο πεπερασμένα σύνολα ισχύει προφανώς ότι $A \sim B$ εάν και μόνον εάν τα Α και Β έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Όμως, για απέραντα σύνολα, η έννοια του «ιδίου αριθμού στοιχείων» είναι ασαφής, ενώ η έννοια της 1-1 αντιστοιχίας διατηρεί τη διαύγειά της.

Παράδειγμα 2.5. Ας είναι Α το σύνολο όλων των ακεραίων αριθμών. Τότε, το Α είναι αριθμήσιμο. Διότι μπορούμε να θεωρήσουμε την παρακάτω αντιστοιχία μεταξύ των συνόλων Α και J:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} A: & 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, \ldots \\ J: & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, \ldots \end{array}$$

Στο παράδειγμα αυτό μπορεί να δοθεί ένας σαφής τύπος που ορίζει μία συνάρτηση f, η οποία καθορίζει την προηγούμενη 1-1 αντιστοιχία:

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{εάν } n \text{ είναι άρτιος ακέραιος αριθμός,} \\ -\dfrac{n-1}{2} & \text{εάν } n \text{ είναι περιττός ακέραιος αριθμός.} \end{cases}$$

Παρατήρηση 2.6. Ένα πεπερασμένο σύνολο δεν μπορεί να είναι ισοδύναμο με κάποιο γνήσιο υποσύνολό του. Όμως, αυτό είναι δυνατό για απέραντα σύνολα, όπως φανερώνεται στο Παράδειγμα 2.5, όπου το J είναι γνήσιο υποσύνολο του A.

Στην πραγματικότητα, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον Ορισμό 2.4(β) από την πρόταση: το A είναι απέραντο εάν και μόνον εάν είναι ισοδύναμο με κάποιο γνήσιο υποσύνολό του.

Ορισμός 2.7. Με τον όρο *ακολουθία* εννοούμε μία συνάρτηση f, ορισμένη στο σύνολο J των θετικών ακεραίων αριθμών. Εάν $f(n) = x_n$, για κάθε $n \in J$, τότε είναι σύνηθες να συμβολίζουμε την ακολουθία f ως $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ ή απλούστερα $\{x_n\}$, ή αλλιώς $x_1, x_2, x_3, \dots$. Οι τιμές της f, δηλαδή τα στοιχεία της μορφής x_n με $n \in J$, ονομάζονται *όροι* της ακολουθίας. Εάν A είναι ένα σύνολο και εάν $x_n \in A$ για κάθε $n \in J$, τότε η $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ ονομάζεται *ακολουθία του* A ή *ακολουθία στοιχείων του* A.

Σημειώνουμε ότι οι όροι $x_1, x_2, x_3, \dots$ δεν είναι απαραιτήτως διακεκριμένοι.

Εφόσον κάθε αριθμήσιμο σύνολο είναι το πεδίο τιμών κάποιας 1-1 συναρτήσεως ορισμένης στο J, μπορούμε να θεωρήσουμε οποιοδήποτε αριθμήσιμο σύνολο ως το πεδίο τιμών κάποιας ακολουθίας διακεκριμένων όρων. Βάσει αυτού του γεγονότος, λέγεται συχνά ότι τα στοιχεία ενός αριθμησίμου συνόλου «τοποθετούνται σε ακολουθία».

Ορισμένες φορές είναι πιο πρόσφορο να αντικαθιστούμε το J στον παραπάνω ορισμό με το σύνολο όλων των μη αρνητικών ακεραίων, δηλαδή να ξεκινούμε με το 0 αντί του 1.

Θεώρημα 2.8. *Κάθε απέραντο υποσύνολο ενός αριθμησίμου συνόλου* A *είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το E είναι απέραντο υποσύνολο του A. Τοποθετούμε τα στοιχεία του A σε μία ακολουθία $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ διακεκριμένων στοιχείων. Κατασκευάζουμε μία ακολουθία ακεραίων αριθμών $\{n_k\}$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ ως εξής:

Ας είναι n_1 ο μικρότερος θετικός ακέραιος αριθμός n_1 με $x_{n_1} \in E$. Έχοντας επιλέξει τους θετικούς ακέραιους $n_1, \ldots, n_{k-1}$, ας είναι n_k ο μικρότερος θετικός ακέραιος αριθμός ο οποίος είναι μεγαλύτερος από τον n_{k-1} ούτως ώστε $x_{n_k} \in E$.

Θεωρώντας την απεικόνιση f από το J στο E με $f(k) = x_{n_k}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, αποκτούμε μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των Ε και J. □

Με χρήση λιγότερο αυστηρών όρων, το θεώρημα ουσιαστικά φανερώνει ότι τα αριθμήσιμα σύνολα αναπαριστούν την «μικρότερη» τάξη απειρίας: ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο δεν μπορεί να είναι υποσύνολο αριθμησίμου συνόλου.

Ορισμός 2.9. Θεωρούμε δύο σύνολα Α και Ω για τα οποία υποθέτουμε ότι σε κάθε στοιχείο α του Α αντιστοιχίζεται ένα υποσύνολο του Ω, το οποίο συμβολίζουμε με E_α.

Τα σύνολο το οποίο έχει στοιχεία τα σύνολα της μορφής E_α, όπου $\alpha \in A$, θα συμβολίζεται με $\{E_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ ή πιο απλά $\{E_\alpha\}$. Αντί του όρου «σύνολο συνόλων» χρησιμοποιούμε συνήθως τον όρο *συλλογή συνόλων* ή *οικογένεια συνόλων*.

Η *ένωση* της συλλογής $\{E_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ ορίζεται ως το σύνολο S το οποίο έχει την εξής ιδιότητα: $x \in S$ εάν και μόνον εάν $x \in E_\alpha$ για κάποιο $\alpha \in A$. Συμβολίζουμε το σύνολο αυτό ως

$$S = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha. \tag{1}$$

Εάν το Α αποτελείται από τους ακέραιους αριθμούς $1, 2, \ldots, n$, τότε συνήθως γράφουμε

$$S = \bigcup_{m=1}^{n} E_m, \tag{2}$$

ή

$$S = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n. \tag{3}$$

Εάν A είναι το σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών, τότε συνήθως γράφουμε

$$S = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m, \tag{4}$$

Το σύμβολο ∞ στην (4) απλώς δηλώνει ότι λαμβάνεται ένωση *αριθμήσιμης* συλλογής συνόλων και δεν πρέπει να συγχέεται με τα σύμβολα $+\infty$ και $-\infty$ τα οποία έχουν εισαχθεί στον Ορισμό 1.23.

Η *τομή* της συλλογής $\{E_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ ορίζεται ως το σύνολο P για το οποίο ισχύει το εξής: $x \in P$ εάν και μόνον εάν $x \in E_\alpha$ για κάθε $\alpha \in A$. Συμβολίζουμε το σύνολο αυτό ως

$$P = \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha, \tag{5}$$

ή

$$P = \bigcap_{m=1}^{n} E_m = E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n, \tag{6}$$

ή

$$P = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m, \tag{7}$$

παρομοίως όπως στις ενώσεις.

Για δύο σύνολα A, B λέγεται ότι *τέμνονται* εάν και μόνον εάν το $A \cap \mathrm{B}$ είναι μη κενό. Στην αντίθετη περίπτωση, τα A, B λέγονται *αποσυνδετά* ή αλλιώς *ξένα μεταξύ τους* ή *ξένα κατά ζεύγη.*

Παράδειγμα 2.10.

(α) Υποθέτουμε ότι το σύνολο E_1 αποτελείται από τα στοιχεία 1, 2, 3 και το E_2 από τα στοιχεία 2, 3, 4. Τότε, το $E_1 \cup E_2$ αποτελείται από τα στοιχεία 1, 2, 3, 4 ενώ το $E_1 \cap E_2$ από τα στοιχεία 2, 3.

(β) Ας είναι A το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $0 < x \leq 1$. Για κάθε $x \in A$, ας είναι E_x το σύνολο των πραγματικών αριθμών y με $0 < y < x$. Τότε,

(i) $E_x \subset E_z$ εάν και μόνον εάν $0 < x \leq z \leq 1$.

(ii) $\bigcup_{x \in A} E_x = E_1$.

(iii) Το $\bigcap_{x \in A} E_x$ είναι κενό.

Τα (i) και (ii) είναι σαφή. Για την απόδειξη του (iii) σημειώνουμε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό y με $y > 0$ ισχύει ότι $y \notin E_x$ εάν $x < y$. Άρα, $y \notin \bigcap_{x \in A} E_x$.

Παρατήρηση 2.11. Πολλές ιδιότητες των ενώσεων και των τομών είναι παρεμφερείς με αυτές των αθροισμάτων και των γινομένων. Στην πραγματικότητα, οι λέξεις άθροισμα και γινόμενο έχουν χρησιμοποιηθεί με βάση αυτόν το συσχετισμό και τα σύμβολα $\sum$ και $\prod$ έχουν χρησιμοποιηθεί στη θέση των $\bigcup$ και $\bigcap$.

Ο μεταθετικός και ο προσεταιριστικός νόμος αποδεικνύονται τετριμμένα:

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A. \tag{8}$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C. \tag{9}$$

Με αυτόν τον τρόπο δικαιολογείται η παράλειψη των παρενθέσεων στις (3) και (6).

Ισχύει επίσης ο επιμεριστικός νόμος:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \tag{10}$$

Για να το αποδείξουμε αυτό, συμβολίζουμε με E την αριστερή πλευρά της (10) και με F τη δεξιά.

Υποθέτουμε ότι $x \in E$. Τότε, $x \in A$ και $x \in B \cup C$, δηλαδή $x \in B$ ή $x \in C$ (ή και τα δύο). Άρα, $x \in A \cap B$ ή $x \in A \cap C$, επομένως $x \in F$. Δηλαδή, $E \subset F$.

Εν συνεχεία, υποθέτουμε ότι $x \in F$. Τότε, $x \in A \cap B$ ή $x \in A \cap C$. Δηλαδή, $x \in A$ και $x \in B \cup C$. Συνεπώς, $x \in E$. Δηλαδή, $F \subset E$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι $E = F$.

Παραθέτουμε ορισμένες ακόμη σχέσεις, οι οποίες και επαληθεύονται δίχως δυσκολία.

$$\mathrm{A} \subset A \cup B, \tag{11}$$

$$A \cap B \subset A. \tag{12}$$

Εάν το 0 συμβολίζει το κενό σύνολο, τότε

$$A \cup 0 = A, \qquad A \cap 0 = 0. \tag{13}$$

Εάν $A \subset B$, τότε

$$A \cup B = B, \qquad A \cap B = A. \tag{14}$$

Θεώρημα 2.12. *Υποθέτουμε ότι* $\{E_n\}$ *(*$n = 1, 2, 3, \ldots$*) είναι μία ακολουθία αριθμησίμων συνόλων. Θέτουμε*

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n. \tag{15}$$

Τότε, το S *είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Τοποθετούμε τα στοιχεία του E_n σε μία ακολουθία $\{x_{nk}\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ και θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \ldots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \ldots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \ldots \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & \ldots \\ \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \end{array} \tag{16}$$

στο οποίο τα στοιχεία του E_n κατέχουν την n γραμμή. Το διάγραμμα περιέχει όλα τα στοιχεία του S. Τα στοιχεία αυτά μπορούν να τοποθετηθούν στην ακολουθία

$$x_{11} : x_{21}, x_{12} : x_{31}, x_{22}, x_{13} : x_{41}, x_{32}, x_{23}, x_{14} : \ldots \tag{17}$$

Εάν δύο από τα σύνολα E_n έχουν κοινά στοιχεία, αυτά θα εμφανισθούν παραπάνω από μία φορά στη (17). Άρα, υπάρχει ένα υποσύνολο T του συνόλου των θετικών ακεραίων αριθμών ούτως ώστε $S \sim T$, γεγονός το οποίο φανερώνει ότι το S είναι το πολύ αριθμήσιμο (Θεώρημα 2.8). Εφόσον $E_1 \subset S$ και το E_1 είναι απέραντο, έπεται ότι το S είναι απέραντο και επομένως αριθμήσιμο. □

Πόρισμα. *Υποθέτουμε ότι* A *είναι ένα το πολύ αριθμήσιμο σύνολο και για κάθε* $\alpha \in A$ *το σύνολο* B_α *είναι το πολύ αριθμήσιμο. Τότε, το*

$$T = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$$

είναι το πολύ αριθμήσιμο.

Διότι το T είναι ισοδύναμο με ένα υποσύνολο ενός συνόλου της μορφής (15).

Θεώρημα 2.13. *Ας είναι* A *ένα αριθμήσιμο σύνολο και* B_n *το σύνολο των* n*-άδων* $(a_1, \ldots, a_n)$ *με* $a_k \in A$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$*. (Τα στοιχεία* $a_1, \ldots, a_n$ *δεν είναι απαραιτήτως διακεκριμένα.) Τότε, το* B_n *είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι το B_1 είναι αριθμήσιμο. Υποθέτουμε ότι το B_{n-1} $(n = 2, 3, 4, \ldots)$ είναι αριθμήσιμο. Τα στοιχεία του B_n είναι της μορφής

$$(b, a) \qquad (b \in B_{n-1}, a \in A). \tag{18}$$

Για κάθε στοιχείο b του B_{n-1}, το σύνολο των ζευγών (b, a) είναι ισοδύναμο με το A και επομένως αριθμήσιμο. Επομένως, το B_n ισούται με την ένωση αριθμήσιμης συλλογής αριθμησίμων συνόλων. Από το Θεώρημα 2.12 προκύπτει ότι το B_n είναι αριθμήσιμο.

Το θεώρημα έπεται με χρήση επαγωγής. □

Πόρισμα. *Το σύνολο των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.13 με $n = 2$, σημειώνοντας ότι κάθε ρητός αριθμός r έχει τη μορφή b/a, όπου οι a, b είναι ακέραιοι αριθμοί.

Το σύνολο των ζευγών (a, b), και επομένως το σύνολο των κλασμάτων της μορφής b/a, είναι αριθμήσιμο. □

Στην πραγματικότητα, ακόμη και το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο (ανατρέξτε στην Άσκηση 2).

Όμως, όπως διαπιστώνουμε από επόμενο θεώρημα, υπάρχουν απέραντα σύνολα τα οποία δεν είναι αριθμήσιμα.

Θεώρημα 2.14. *Υποθέτουμε ότι* A *είναι το σύνολο των ακολουθιών με όρους τα* 0 *και* 1. *Τότε, το* A *είναι υπεραριθμήσιμο.*

Τα στοιχεία του A είναι ακολουθίες όπως η $1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, \ldots$.

Απόδειξη. Ας είναι E ένα αριθμήσιμο υποσύνολο του A. Υποθέτουμε ότι το E αποτελείται από τις ακολουθίες $s_1, s_2, s_3, \ldots$. Κατασκευάζουμε μία ακολουθία s ως εξής: εάν ο n τάξεως όρος της s_n είναι 1, τότε ορίζουμε τον n τάξεως όρο της s ως το 0 και αντιστρόφως. Τότε, η ακολουθία s διαφέρει από κάθε μέλος του E. Δηλαδή, $s \notin E$. Προφανώς $s \in A$, επομένως το E είναι γνήσιο υποσύνολο του A.

Συνεπώς, αποδείξαμε ότι κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο του A είναι γνήσιο υποσύνολο του A. Επομένως, το A είναι υπεραριθμήσιμο (αλλιώς θα ήταν γνήσιο υποσύνολο του εαυτού του.) □

Η ιδέα στην παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Cantor [2] και ονομάζεται η *διαγώνια μέθοδος του Cantor*: εάν οι

[2] Σ. τ. Μ.: Georg Cantor (1845-1918). Εβραϊκής καταγωγής Γερμανός μαθηματικός, γεννημένος στη Ρωσία. Ο Cantor θεωρείται ως ο θεμελιωτής της Θεωρίας Συνόλων.

Ο Cantor ξεκίνησε τις ακαδημαϊκές του σπουδές στη Μηχανική, στο Πολυτεχνείο της Ζυρίχης, το έτος 1862, και τις συνέχισε στα Μαθηματικά, στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου, το έτος 1863. Είχε ως δασκάλους τους σπουδαίους μαθηματικούς Ernst Kummer (1810-1893), Karl Weierstrass (1815-1897) καθώς και τον μετέπειτα επιστημονικό του αντίπαλο (ίσως η λέξη «εχθρός» είναι περισσότερο ταιριαστή) Leopold Kronecker (1823-1891). Έλαβε τον τίτλο του διδάκτορα του Πανεπιστημίου του Βερολίνου το έτος 1867. Το θέμα της διδακτορικής του διατριβής ήταν στη Θεωρία Αριθμών. Επίσης, επηρεασμένος από τον Weierstrass, ασχολήθηκε και με τη μελέτη των Τριγωνομετρικών Σειρών.

Ο Cantor κατέλαβε ακαδημαϊκή θέση στο Πανεπιστήμιο της Halle το έτος 1869, όπου και ακολουθίες $s_1, s_2, s_3, \ldots$ τοποθετηθούν σε ένα διάγραμμα όπως το (16), τότε στην κατασκευή του προηγουμένου θεωρήματος εμπλέκονται τα διαγώνια στοιχεία του διαγράμματος.

Ο αναγνώστης που είναι εξοικειωμένος με τη δυαδική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών (αναπαράσταση με βάση το 2 και όχι το 10) θα παρατηρήσει ότι το Θεώρημα 2.14 συνεπάγεται ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι υπεραριθμήσιμο. Θα αποδείξουμε αυτό το γεγονός στο Θεώρημα 2.43 με διαφορετικό τρόπο.

ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Ορισμός 2.15. Ένα σύνολο X, του οποίου τα στοιχεία ονομάζονται *σημεία*, λέγεται *μετρικός χώρος* εάν και μόνον εάν σε κάθε ζεύγος σημείων (p, q) του X αντιστοιχίζεται ένας πραγματικός αριθμός $d(p, q)$, ο οποίος ονομάζεται *απόσταση* του p από το q, ούτως ώστε για κάθε $p, q, r \in X$ να ισχύει:

(α) $d(p, q) > 0$, εάν $p \neq q$. Επίσης, $d(p, p) = 0$.

(β) $d(p, q) = d(q, p)$.

(γ) $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$.

Μία συνάρτηση με αυτές τις ιδιότητες ονομάζεται *συνάρτηση αποστάσεως* ή αλλιώς *μετρική*.

Παράδειγμα 2.16. Τα πιο σημαντικά παραδείγματα μετρικών χώρων για το παρόν βιβλίο είναι οι Ευκλείδειοι χώροι R^k, ιδιαιτέρως ο R^1 (η πραγματική

παρέμεινε έως τη σύνταξή του το έτος 1913. Δεν κατάφερε ποτέ να αποκτήσει ακαδημαϊκή έδρα στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου, όπως επιθυμούσε, και διατεινόταν ότι ο Kronecker του τη στερούσε με την επιρροή του, λόγω της επιστημονικής αντιπαλότητας, και εν μέρει προσωπικής έχθρας, που είχε προς τον Cantor.

Ο Cantor δημοσίευσε το έτος 1874 την καινοτόμο εργασία του στη Θεωρία Συνόλων, που έμελλε να αποτελέσει μία από τις πιο ριζοσπαστικές και σημαντικές δημιουργίες στην ιστορία των Μαθηματικών.

Ο Cantor είχε υπερευαίσθητο χαρακτήρα. Έπασχε από κρίσεις καταθλίψεως και από έλλειψη αυτοπεποιθήσεως, για την οποία ευθύνεται και η επίθεση που δεχόταν από τη μαθηματική κοινότητα για τις πρωτοπόρες μαθηματικές θεωρίες του. Τα τελευταία χρόνια της ζωής του τα πέρασε σε ψυχιατρική κλινική στη Halle, όπου και πέθανε.

ευθεία) και ο R^2 (το μιγαδικό επίπεδο). Η απόσταση d στον R^k ορίζεται μέσω της σχέσεως

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^k). \tag{19}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.37, οι απαιτήσεις του Ορισμού 2.15 ικανοποιούνται από τη (19).

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι κάθε υποσύνολο Y ενός μετρικού χώρου είναι επίσης μετρικός χώρος με την ίδια συνάρτηση αποστάσεως. Διότι είναι σαφές ότι εάν ισχύουν οι συνθήκες (α) έως (γ) του Ορισμού 2.15 για κάθε $p, q, r \in X$, τότε ισχύουν και για κάθε $p, q, r \in$ Y.

Συνεπώς, κάθε υποσύνολο ενός Ευκλειδείου χώρου είναι μετρικός χώρος. Άλλα παραδείγματα μετρικών χώρων αποτελούν οι χώροι $\mathcal{C}(K)$ και $\mathcal{L}^2(\mu)$, οι οποίοι απαντώνται στα Κεφάλαια 7 και 11 αντιστοίχως.

Ορισμός 2.17. Με τον όρο *ανοικτό διάστημα* (a, b) εννοούμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $a < x < b$.

Με τον όρο *κλειστό διάστημα* $[a, b]$ εννοούμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $a \leq x \leq b$.

Κατά περίσταση θα θεωρήσουμε τα *ημιανοικτά διαστήματα* $[a, b)$ και $(a, b]$: το πρώτο αποτελείται από τους πραγματικούς αριθμούς x με $a \leq x < b$. Το δεύτερο αποτελείται από τους πραγματικούς αριθμούς x με $a < x \leq b$.

Σημειώνουμε ότι οποιοδήποτε σύνολο από τα παραπάνω μπορεί να αναφέρεται απλώς ως *διάστημα.*

Εάν $a_i < b_i$ για $i = 1, 2, \ldots, k$, τότε το σύνολο των σημείων $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in R^k$ με $a_i \leq x_i \leq b_i$ $(1 \leq i \leq k)$ ονομάζεται *k-διάστημα.* Επομένως, ένα 1-διάστημα είναι ένα κλειστό διάστημα, ένα 2-διάστημα είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο κ. λ. π..

Εάν είναι $\mathbf{x} \in R^k$ και $r > 0$, τότε ορίζουμε την *ανοικτή* (αντιστοίχως *κλειστή*) *σφαιρική περιοχή* με *κέντρο* το $\mathbf{x}$ και *ακτίνα* r ως το σύνολο των σημείων $\mathbf{y} \in R^k$ με $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| < r$ (αντιστοίχως $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leq r$).

Ονομάζουμε ένα σύνολο Ε $\subset R^k$ *κυρτό* εάν και μόνον εάν

$$\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in E$$

όταν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ και $\lambda \in R^1$ με $0 < \lambda < 1$.

Επί παραδείγματι, οι *σφαιρικές περιοχές είναι κυρτά σύνολα.* Διότι εάν είναι $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in R^k$, $r > 0$ και $\lambda \in R^1$ με $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| < r$, $|\mathbf{z} - \mathbf{x}| < r$ και $0 < \lambda < 1$, τότε

$$\begin{aligned} |\lambda \mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z} - \mathbf{x}| &\leq |\lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + (1-\lambda)(\mathbf{y} - \mathbf{z})| \\ &\leq \lambda|\mathbf{y} - \mathbf{x}| + (1-\lambda)|\mathbf{z} - \mathbf{x}| \\ &< \lambda r + (1-\lambda) r = r. \end{aligned}$$

Η ίδια απόδειξη εφαρμόζεται σε κλειστές σφαιρικές περιοχές. Διαπιστώνουμε εύκολα ότι τα k-διαστήματα είναι κυρτά σύνολα.

Ορισμός 2.18. Υποθέτουμε ότι X είναι ένας μετρικός χώρος. Τα σημεία και τα σύνολα που αναφέρονται στα επόμενα θεωρούνται στοιχεία και αντιστοίχως υποσύνολα του X.

(α) Ονομάζουμε *περιοχή του σημείου* p το σύνολο $N_r(p)$ που αποτελείται από τα σημεία q με $d(p, q) < r$. Ο αριθμός r ονομάζεται *ακτίνα* της $N_r(p)$.

(β) Ένα σημείο p ονομάζεται *οριακό σημείο του* E (ή αλλιώς *σημείο συσσωρεύσεως του* E) εάν και μόνον εάν κάθε περιοχή του p περιέχει ένα σημείο q του E, διαφορετικό από το p.

(γ) Εάν $p \in E$, τότε το p ονομάζεται *μεμονωμένο σημείο του* E εάν και μόνον εάν δεν είναι οριακό σημείο του E.

(δ) Το σύνολο E ονομάζεται *κλειστό* εάν και μόνον εάν κάθε οριακό σημείο του E ανήκει στο E.

(ε) Ένα σημείο p ονομάζεται *εσωτερικό σημείο του* E εάν και μόνον εάν υπάρχει μία περιοχή N του p ούτως ώστε $N \subset E$.

(στ) Το σύνολο E ονομάζεται *ανοικτό* εάν και μόνον εάν κάθε σημείο του E είναι εσωτερικό σημείο του E.

(ζ) Το *συμπλήρωμα του* E είναι το σύνολο όλων των σημείων $p \in X$ με $p \notin E$.

(η) Το σύνολο E ονομάζεται *τέλειο* εάν και μόνον εάν το E είναι κλειστό και κάθε σημείο του E είναι οριακό σημείο του E.

(θ) Το σύνολο E ονομάζεται *φραγμένο* εάν και μόνον εάν υπάρχει πραγματικός αριθμός M και $q \in X$ με $d(p,q) < M$, για κάθε $p \in E$.

(ι) Το σύνολο E ονομάζεται *πυκνό στον X* εάν και μόνον εάν κάθε σημείο του X είναι οριακό σημείο του E ή ανήκει στο E (ή και τα δύο).

Σημειώνουμε ότι στον R^1 οι περιοχές είναι ανοικτά διαστήματα και στον R^2 οι περιοχές είναι εσωτερικά κύκλων.

Θεώρημα 2.19. *Κάθε περιοχή του X είναι ανοικτό σύνολο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μία περιοχή $E = N_r(p)$ ($p \in X, r > 0$). Ας είναι q ένα σημείο του Ε. Τότε, υπάρχει θετικός αριθμός h ούτως ώστε

$$d(p,q) = r - h.$$

Για οποιοδήποτε σημείο s με $d(q,s) < h$ έχουμε ότι

$$d(p,s) \leq d(p,q) + d(q,s) < r - h + h = r$$

και επομένως $s \in E$. Άρα, το q είναι εσωτερικό σημείο του Ε. □

Θεώρημα 2.20. *Εάν p είναι ένα οριακό σημείο ενός συνόλου E, τότε κάθε περιοχή του p περιέχει απείρου πλήθους σημεία του* Ε.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία περιοχή N του E η οποία περιέχει μόνον πεπερασμένου πλήθους σημεία του E. Ας είναι $q_1, \ldots, q_n$ τα διακεκριμένα από το p σημεία του $N \cap E$. Θέτουμε

$$r = \min_{1 \leq m \leq n} d(p, q_m).$$

(Χρησιμοποιούμε αυτόν το συμβολισμό για να δηλώσουμε τον ελάχιστο από τους αριθμούς $d(p,q_1), \ldots, d(p,q_n)$.) Το ελάχιστο ενός πεπερασμένου συνόλου θετικών αριθμών είναι σαφώς θετικό, επομένως $r > 0$.

Τώρα, η περιοχή $N_r(p)$ δεν περιέχει σημείο του E διαφορετικό από το p και επομένως το p δεν είναι οριακό σημείο του E. Η αντίφαση αυτή αποδεικνύει το θεώρημα. □

Πόρισμα. *Ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων δεν περιέχει οριακά σημεία.*

Παράδειγμα 2.21. Θεωρούμε τα ακόλουθα υποσύνολα του R^2:

(α) Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z με $|z| < 1$.

(β) Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z με $|z| \leq 1$.

(γ) Ένα πεπερασμένο σύνολο.

(δ) Το σύνολο των ακεραίων αριθμών.

(ε) Το σύνολο που αποτελείται από τους αριθμούς $1/n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Σημειώνουμε ότι αυτό το σύνολο E έχει οριακό σημείο (το 0), όμως δεν υπάρχει σημείο του Ε το οποίο να είναι οριακό σημείο του E. Με αυτό επιθυμούμε να τονίσουμε τη διαφορά ανάμεσα στο γεγονός να διαθέτει ένα σύνολο οριακό σημείο και στο να ανήκει το οριακό σημείο στο σύνολο αυτό.

(στ) Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών (δηλαδή το R^2).

(ζ) Το ανοικτό διάστημα (a, b).

Σημειώνουμε ότι τα (δ), (ε) και (ζ) μπορούν να θεωρηθούν ως υποσύνολα του R^1.

Ορισμένες από τις ιδιότητες των παραπάνω συνόλων δίδονται στον επόμενο πίνακα:

	Κλειστό	*Ανοικτό*	*Τέλειο*	*Φραγμένο*
(α)	Όχι	Ναι	Όχι	Ναι
(β)	Ναι	Όχι	Ναι	Ναι
(γ)	Ναι	Όχι	Όχι	Ναι
(δ)	Ναι	Όχι	Όχι	Όχι
(ε)	Όχι	Όχι	Όχι	Ναι
(στ)	Ναι	Ναι	Ναι	Όχι
(ζ)	Όχι		Όχι	Ναι

Στο (ζ) έχουμε αφήσει κενή τη δεύτερη θέση. Αυτό συμβαίνει διότι το διάστημα (a, b) δεν είναι ανοικτό εάν θεωρηθεί ως υποσύνολο του R^2, ενώ είναι ανοικτό εάν θεωρηθεί ως υποσύνολο του R^1.

Θεώρημα 2.22. *Ας είναι* $\{E_\alpha\}$ *(*$\alpha \in A$*), μία (πεπερασμένη ή απέραντη)* *συλλογή συνόλων. Τότε,*

$$\left(\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha^c. \tag{20}$$

Απόδειξη. Ας είναι A η αριστερή και B η δεξιά πλευρά της (20). Εάν $x \in A$, τότε $x \notin \bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha$ και επομένως $x \notin E_\alpha$ για οποιονδήποτε δείκτη $\alpha \in A$. Συνεπώς, $x \in E_\alpha^c$ για οποιονδήποτε δείκτη $\alpha \in A$, δηλαδή $x \in \bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha^c$. Άρα, $A \subset B$.

Αντιστρόφως, εάν $x \in B$, τότε $x \in E_\alpha^c$ για κάθε δείκτη $\alpha \in A$, επομένως $x \notin E_\alpha$ για οποιονδήποτε δείκτη $\alpha \in A$. Κατά συνέπεια, $x \in \left(\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha\right)^c$. Άρα, $B \subset A$.

Τελικά, $A = B$. □

Θεώρημα 2.23. *Ένα σύνολο E είναι ανοικτό εάν και μόνον εάν το συμπλήρωμά του είναι κλειστό.*

Απόδειξη. Αρχικά, υποθέτουμε ότι το E^c είναι κλειστό. Θεωρούμε $x \in E$. Τότε, $x \notin E^c$, δηλαδή το x δεν είναι οριακό σημείο του E^c. Συνεπώς, υπάρχει μία περιοχή N του x ούτως ώστε το $E^c \cap N$ να είναι κενό. Αυτό σημαίνει ότι $N \subset E$. Άρα, το x είναι εσωτερικό σημείο του E. Κατά συνέπεια, το E είναι ανοικτό.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι το E είναι ανοικτό. Ας είναι x ένα οριακό σημείο του E^c. Τότε, κάθε περιοχή του x περιέχει ένα σημείο του E^c, γεγονός που σημαίνει ότι το x δεν είναι εσωτερικό σημείο του E. Εφόσον το E είναι ανοικτό, έπεται ότι $x \in E^c$. Άρα, το E^c είναι κλειστό. □

Πόρισμα. *Ένα σύνολο F είναι κλειστό εάν και μόνον εάν το συμπλήρωμα του είναι ανοικτό.*

Θεώρημα 2.24.

(α) *Για κάθε συλλογή $\{G_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) ανοικτών συνόλων, το $\bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$ είναι ανοικτό.*

(β) *Για κάθε συλλογή $\{F_\alpha\}$ ($\alpha \in A$) κλειστών συνόλων, το $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$ είναι κλειστό.*

(γ) *Για κάθε πεπερασμένη συλλογή* $G_1, \dots, G_n$ *ανοικτών συνόλων, το* $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ *είναι ανοικτό.*

(δ) *Για κάθε πεπερασμένη συλλογή* $F_1, \dots, F_n$ *κλειστών συνόλων, το* $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ *είναι κλειστό.*

Απόδειξη. Θέτουμε $G = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$. Εάν $x \in G$, τότε $x \in G_\alpha$, για κάποιο δείκτη α. Εφόσον το x είναι εσωτερικό σημείο του G_α, είναι επίσης εσωτερικό σημείο του G. Επομένως το G είναι ανοικτό. Αυτό αποδεικνύει το (α).

Λόγω του Θεωρήματος 2.22, ισχύει ότι

$$\left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha^c \tag{21}$$

και το F_α^c είναι ανοικτό για κάθε δείκτη α, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.23. Συνεπώς, το (α) συνεπάγεται ότι το σύνολο (21) είναι ανοικτό, άρα το $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ είναι κλειστό.

Εν συνεχεία, θέτουμε $\mathrm{H} = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$. Για κάθε $x \in H$ υπάρχουν περιοχές N_i του x με ακτίνα r_i ούτως ώστε $N_i \subset G_i$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$. Θέτουμε

$$r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$$

και θεωρούμε την περιοχή N του x με ακτίνα r. Τότε, $N \subset G_i$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$. Άρα, $N \subset H$ και επομένως το H είναι ανοικτό.

Λαμβάνοντας συμπληρώματα, το (δ) έπεται από το (γ):

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} F_i^c.$$

□

Παράδειγμα 2.25. Στα μέρη (γ) και (δ) του προηγουμένου θεωρήματος, η συνθήκη περί πεπερασμένου πλήθους είναι ουσιώδης. Για να το δικαιολογήσουμε αυτό, ας θέσουμε G_n το ανοικτό διάστημα $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$. Τότε, το G_n είναι ανοικτό διάστημα του R^1 για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots$. Όμως, το $G = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$ αποτελείται από ένα και μόνο σημείο (το 0) και επομένως δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του R^1.

Επομένως, η τομή απέραντης συλλογής ανοικτών συνόλων δεν είναι πάντοτε ανοικτό σύνολο. Παρομοίως, η ένωση απέραντης συλλογής κλειστών συνόλων δεν είναι πάντοτε κλειστό σύνολο.

Ορισμός 2.26. Ας είναι X ένας μετρικός χώρος και $E \subset X$. Εάν E' δηλώνει το σύνολο των οριακών σημείων του E, τότε η *κλειστή θήκη* (ή αλλιώς *(τοπολογικό) κάλυμμα*) του E ορίζεται ως το σύνολο $\overline{E} = E \cup E'$.

Θεώρημα 2.27. *Εάν X είναι ένας μετρικός χώρος και $E \subset X$, τότε*
(α)*Το $\overline{E}$ είναι κλειστό.*
(β) *$E = \overline{E}$ εάν και μόνον εάν το* E *είναι κλειστό.*
(γ) *$\overline{E} \subset F$ για κάθε κλειστό σύνολο $F \subset X$ με $E \subset F$.*

Από τα (α) και (γ) έπεται ότι το $\overline{E}$ είναι το *μικρότερο* κλειστό υποσύνολο του X που περιέχει το E.

Απόδειξη.
(α) Εάν $p \in X$ και $p \notin \overline{E}$, τότε το p δεν είναι σημείο του E ούτε οριακό σημείο του E. Άρα, το p έχει μία περιοχή η οποία δεν τέμνει το E. Επομένως, το συμπλήρωμα του $\overline{E}$ είναι ανοικτό, δηλαδή το $\overline{E}$ είναι κλειστό.

(β) Εάν $E = \overline{E}$, τότε το (α) συνεπάγεται ότι το E είναι κλειστό. Εάν το E είναι κλειστό, τότε $E' \subset E$ (σύμφωνα με τους Ορισμούς 2.18(δ) και 2.26) και επομένως $E = \overline{E}$.

(γ) Εάν το F είναι κλειστό σύνολο με $E \subset F$, τότε $F' \subset F$, άρα $E' \subset F$. Κατά συνέπεια, $\overline{E} \subset F$. □

Θεώρημα 2.28. *Υποθέτουμε ότι* E *είναι ένα μη κενό και άνω φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών. Εάν $y = \sup E$, τότε $y \in \overline{E}$. (Συνεπώς $y \in E$, εάν το* E *είναι κλειστό).*

Συγκρίνετε το αποτέλεσμα αυτό με τα παραδείγματα στην Ενότητα 1.9.

Απόδειξη. Εάν $y \in E$, τότε $y \in \overline{E}$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $y \notin E$. Για κάθε πραγματικό αριθμό h με $h > 0$ υπάρχει ένα σημείο $x \in E$ με $y - h < x < y$, αλλιώς το $y - h$ θα ήταν άνω φράγμα του Ε. Συνεπώς, το y είναι οριακό σημείο του Ε, γεγονός που σημαίνει ότι $y \in \overline{E}$. □

Παρατήρηση 2.29. Υποθέτουμε ότι $E \subset Y \subset X$, όπου X είναι ένας μετρικός χώρος. Λέγοντας ότι το E είναι ανοικτό υποσύνολο του X εννοούμε ότι για κάθε σημείο $p \in E$ υπάρχει θετικός αριθμός r ούτως ώστε εάν $q \in X$ και $d(p, q) < r$, τότε $q \in E$. Όμως, έχουμε ήδη παρατηρήσει (Ενότητα 2.16) ότι ο Y είναι επίσης μετρικός χώρος και επομένως οι παραπάνω ορισμοί εφαρμόζονται εξίσου στον Y. Για να γίνουμε περισσότερο σαφείς, ορίζουμε για το E να λέγεται *ανοικτό ως προς τον* Y εάν και μόνον εάν για κάθε σημείο $p \in E$ υπάρχει θετικός αριθμός r ούτως ώστε εάν $q \in$ Y και $d(p, q) < r$, τότε $q \in E$. Στο Παράδειγμα 2.21(ζ) φαίνεται ότι ένα σύνολο μπορεί να είναι ανοικτό ως προς τον Y δίχως να είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Όμως, υπάρχει μία απλή σχέση μεταξύ αυτών των εννοιών, όπως διατυπώνεται παρακάτω.

Θεώρημα 2.30. *Υποθέτουμε ότι $Y \subset X$. Ένα υποσύνολο E του Y είναι ανοικτό ως προς τον Y εάν και μόνον εάν $E = Y \cap G$ για κάποιο ανοικτό υποσύνολο G του X.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το Ε είναι ανοικτό ως προς τον Y. Για κάθε $p \in E$ υπάρχει ένας θετικός αριθμός r_p ούτως ώστε εάν $q \in Y$ με $d(p, q) < r_p$, τότε $q \in E$. Ας είναι V_p το σύνολο των σημείων $q \in X$ με $d(p, q) < r_p$. Ορίζουμε

$$G = \bigcup_{p \in E} V_p.$$

Τότε, το G είναι ανοικτό υποσύνολο του X, σύμφωνα με τα Θεωρήματα 2.19 και 2.24.

Εφόσον $p \in V_p$ για κάθε $p \in E$, είναι σαφές ότι $E \subset G \cap Y$.

Εξ ορισμού των V_p ισχύει ότι $V_p \cap Y \subset E$ για κάθε $p \in E$ και επομένως $G \cap Y \subset E$. Άρα, $E = G \cap Y$.

Αντιστρόφως , εάν G είναι ανοικτό υποσύνολο του X και $E = G \cap Y$, τότε κάθε $p \in E$ έχει μία περιοχή $V_p \subset G$. Άρα, $V_p \cap Y \subset E$ και επομένως το E είναι ανοικτό ως προς τον Y. □

ΣΥΜΠΑΓΗ ΣΥΝΟΛΑ

Ορισμός 2.31. Με τον όρο *ανοικτή κάλυψη* ενός συνόλου E σε έναν μετρικό χώρο X εννοούμε μία συλλογή $\{G_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ ανοικτών υποσυνόλων του X ούτως ώστε $E \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$.

Ορισμός 2.32. Ένα υποσύνολο K ενός μετρικού χώρου λέγεται *συμπαγές* εάν και μόνον εάν κάθε ανοικτή κάλυψη του K έχει *πεπερασμένη* υποκάλυψη.

Πιο συγκεκριμένα, η απαίτηση του ορισμού είναι η εξής: εάν $\{G_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ είναι ανοικτή κάλυψη του K, τότε υπάρχουν δείκτες $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ούτως ώστε

$$K \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}.$$

Η έννοια της συμπάγειας κατέχει θεμελιώδη ρόλο στην Ανάλυση, ιδιαιτέρως σε σχέση με τη συνέχεια (Κεφάλαιο 4).

Είναι σαφές ότι κάθε πεπερασμένο σύνολο είναι συμπαγές. Από το Θεώρημα 2.41 προκύπτει η ύπαρξη ευρείας κλάσεως απέραντων συμπαγών υποσυνόλων του R^k.

Έχουμε διαπιστώσει στην Ενότητα 2.29 ότι εάν $E \subset Y \subset X$, τότε το E μπορεί ναι είναι ανοικτό ως προς τον Y δίχως να είναι ανοικτό ως προς τον X. Επομένως, η ιδιότητα του ανοικτού συνόλου εξαρτάται από τον περιβάλλοντα χώρο του E. Το ίδιο αληθεύει και για τα κλειστά σύνολα.

Όμως, όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια, τα συμπαγή σύνολα έχουν ομαλότερη συμπεριφορά. Προσωρινά, το K θα λέγεται συμπαγές ως προς τον X εάν και μόνον εάν ικανοποιούνται οι συνθήκες του Ορισμού 2.32.

Θεώρημα 2.33. *Υποθέτουμε ότι $K \subset Y \subset X$. Τότε, το* K *είναι συμπαγές ως προς τον* X *εάν και μόνον εάν είναι συμπαγές ως προς τον* Y.

Χάρη σε αυτό το θεώρημα, μπορούμε να θεωρούμε τα συμπαγή σύνολα ως μετρικούς χώρους, δίχως να δίδουμε προσοχή στον περιβάλλοντα χώρο. Ιδιαιτέρως, αν και δεν έχει νόημα η έννοια των *ανοικτών* ή *κλειστών* χώρων (κάθε μετρικός χώρος είναι ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του εαυτού του), έχει νόημα η έννοια του *συμπαγούς* χώρου.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το K είναι συμπαγές ως προς τον X. Ας είναι $\{V_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ μία συλλογή ανοικτών ως προς τον Y συνόλων ούτως ώστε $\mathrm{K} \subset \bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.30, υπάρχει συλλογή συνόλων $\{G_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$, ανοικτών ως προς τον X, ούτως ώστε $V_\alpha = Y \cap G_\alpha$ για κάθε δείκτη $\alpha \in A$. Εφόσον το K είναι συμπαγές ως προς τον X, ισχύει ότι

$$K \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n} \tag{22}$$

για κάποιους δείκτες $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Εφόσον $K \subset Y$, η (22) συνεπάγεται ότι

$$K \subset V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n}. \tag{23}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι το K είναι συμπαγές ως προς τον Y.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι το K είναι συμπαγές ως προς τον Y. Θεωρούμε μία συλλογή $\{G_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ ανοικτών ως προς τον X συνόλων ούτως ώστε $\mathrm{K} \subset \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$. Θέτουμε $V_\alpha = Y \cap G_\alpha$ για κάθε δείκτη $\alpha \in A$. Τότε, ισχύει η (23) για κάποιους δείκτες $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Εφόσον $V_\alpha \subset G_\alpha$ για κάθε $\alpha \in A$, η (23) συνεπάγεται την (22).

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Θεώρημα 2.34. *Κάθε συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου είναι κλειστό.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι K είναι ένα συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου X. Θα αποδείξουμε ότι το συμπλήρωμα του K είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

Θεωρούμε $p \in X$ με $p \notin K$. Εάν $q \in K$, τότε θεωρούμε τις περιοχές V_q του p και W_q του q ακτίνας μικρότερης από τον $\frac{1}{2}d(p,q)$ (ανατρέξτε στον Ορισμό 2.18(α)). Εφόσον το K είναι συμπαγές, υπάρχουν σημεία $q_1, \ldots, q_n$ του K ούτως ώστε

$$K \subset W_{q_1} \cup \cdots \cup W_{q_n} = W.$$

Εάν $V = V_{q_1} \cap \cdots \cap V_{q_n}$, τότε το V είναι περιοχή του p η οποία δεν τέμνει το W. Κατά συνέπεια, $V \subset K^c$, δηλαδή το p είναι εσωτερικό σημείο του K^c. Με αυτό έπεται το θεώρημα. □

Θεώρημα 2.35. *Κάθε κλειστό υποσύνολο ενός συμπαγούς συνόλου σε έναν μετρικό χώρο είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $F \subset K \subset X$, όπου το F είναι κλειστό (ως προς τον X) και το K είναι συμπαγές. Θεωρούμε μία ανοικτή κάλυψη $\{V_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ του F. Εάν το F^c προσαρτηθεί στη συλλογή $\{V_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$, τότε λαμβάνουμε μία ανοικτή κάλυψη Ω του K. Εφόσον το K είναι συμπαγές, υπάρχει μία πεπερασμένη υποσυλλογή Φ της Ω η οποία καλύπτει το K, άρα και το F. Εάν το F^c είναι μέλος της Φ, τότε το εξαιρούμε από αυτήν και έχουμε πάλι μία ανοικτή κάλυψη του F. Συνεπώς, έχουμε αποδείξει ότι μία πεπερασμένη υποσυλλογή της $\{V_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ καλύπτει το F. □

Πόρισμα. *Εάν το F είναι κλειστό και το* K *συμπαγές, τότε το $F \cap K$ είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Τα Θεωρήματα 2.24(β) και 2.34 φανερώνουν ότι το $F \cap K$ είναι κλειστό. Εφόσον $F \cap K \subset K$, το Θεώρημα 2.35 φανερώνει ότι το $F \cap K$ είναι συμπαγές. □

Θεώρημα 2.36. *Εάν $\{K_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ είναι μία συλλογή συμπαγών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου X με την ιδιότητα ότι η τομή κάθε πεπερασμένης υποσυλλογής της $\{K_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ είναι μη κενή, τότε το $\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha$ είναι μη κενό.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα μέλος K_1 της $\{K_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ και θέτουμε $G_\alpha = K_\alpha^c$ $(\alpha \in A)$. Υποθέτουμε ότι κανένα σημείο του K_1 δεν ανήκει σε κάθε σύνολο K_α. Τότε, η συλλογή $\{G_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ είναι ανοικτή κάλυψη του K_1. Εφόσον το K_1 είναι συμπαγές, υπάρχουν δείκτες $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ούτως ώστε $K_1 \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}$. Αυτό σημαίνει ότι το

$$K_1 \cap K_{\alpha_1} \cap \cdots \cap K_{\alpha_n}$$

είναι κενό, γεγονός που αντιβαίνει στην υπόθεση μας. □

Πόρισμα. *Εάν $\{K_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) είναι μία συλλογή μη κενών συμπαγών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου με $K_{n+1} \subset K_n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), τότε το $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ δεν είναι κενό.*

Θεώρημα 2.37. *Εάν E είναι ένα απέραντο υποσύνολο ενός συμπαγούς συνόλου K, τότε το E έχει ένα οριακό σημείο στο K.*

Απόδειξη. Εάν κανένα σημείο του K δεν είναι οριακό σημείο του E, τότε κάθε $q \in K$ έχει μία περιοχή V_q η οποία περιέχει το πολύ ένα σημείο του E (το q, εάν $q \in E$). Είναι σαφές τώρα ότι καμία πεπερασμένη υποσυλλογή της $\{V_q\}$ ($q \in K$) δεν μπορεί να καλύψει το E και επομένως το K, εφόσον $E \subset K$. Αυτό όμως αντιβαίνει στην υπόθεση περί συμπάγειας του K. □

Θεώρημα 2.38. *Εάν $\{I_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) είναι μία συλλογή κλειστών διαστημάτων του R^1 με $I_{n+1} \subset I_n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), τότε το $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ δεν είναι κενό.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $I_n = [a_n, b_n]$ για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$. Ας είναι E το σύνολο των αριθμών a_n, όπου $n = 1, 2, 3, \ldots$. Τότε, το E είναι μη κενό και άνω φραγμένο (από το b_1). Ας είναι $x = \sup E$. Εάν m, n είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί, τότε

$$a_n \leq a_{m+n} \leq b_{m+n} \leq b_m,$$

επομένως $x \leq b_m$ για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό m. Εφόσον ισχύει επίσης $a_m \leq x$, για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό m, έπεται ότι $x \in I_m$, για $m = 1, 2, 3, \ldots$. □

Θεώρημα 2.39. *Υποθέτουμε ότι k είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Εάν $\{I_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) είναι μία συλλογή k-διαστημάτων με $I_{n+1} \subset I_n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), τότε το $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ δεν είναι κενό.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το I_n αποτελείται από τα σημεία $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ με

$$a_{n,j} \leq x_j \leq b_{n,j} \qquad (1 \leq j \leq k,\ n = 1, 2, 3, \ldots)$$

και θέτουμε $I_{n,j} = [a_{n,j}, b_{n,j}]$. Για κάθε δείκτη j, η συλλογή $\{\mathrm{I}_{n,j}\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.38. Συνεπώς, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $x_j^\star$ $(1 \leq j \leq k)$, ούτως ώστε

$$a_{n,j} \leq x_j^\star \leq b_{n,j} \qquad (1 \leq j \leq k,\ n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Θέτοντας $\mathbf{x}^\star = (x_1^\star, \ldots, x_k^\star)$ διαπιστώνουμε ότι $\mathbf{x}^\star \in I_n$ για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$. Με αυτό έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Θεώρημα 2.40. *Κάθε k-διάστημα είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα k-διάστημα I, αποτελούμενο από τα σημεία $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ με $a_j \leq x_j \leq b_j$ $(1 \leq j \leq k)$. Θέτουμε

$$\delta = \left\{ \sum_{j=1}^{k} (b_j - a_j)^2 \right\}^{1/2}.$$

Τότε, $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \delta$ για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I$.

Υποθέτουμε, για να καταλήξουμε σε αντίφαση, ότι υπάρχει μία ανοικτή κάλυψη $\{G_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ του I η οποία δεν περιέχει καμία πεπερασμένη υποκάλυψη του I. Θέτουμε $c_j = (a_j + b_j)/2$ $(1 \leq j \leq k)$. Τότε, τα διαστήματα $[a_j, c_j]$ και $[c_j, b_j]$ καθορίζουν 2^k k-διαστήματα Q_i $(i = 1, 2, \ldots 2^k)$, η ένωση των οποίων είναι το I. Τουλάχιστον ένα από αυτά τα σύνολα, το οποίο ονομάζουμε I_1, δεν καλύπτεται από καμία πεπερασμένη υποσυλλογή της $\{G_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ (αλλιώς θα μπορούσε να καλυφθεί και το I). Ακολούθως, υποδιαιρούμε το I_1 με τον ίδιο τρόπο και επαναλαμβάνουμε αυτήν τη διαδικασία. Τότε, αποκτούμε μία ακολουθία k-διαστημάτων $\{I_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α) $\cdots \subset I_3 \subset I_2 \subset I_1 \subset I$.

(β) Το I_n δεν καλύπτεται από καμία πεπερασμένη υποσυλλογή της $\{G_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$.

(γ) Εάν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I_n$, τότε $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq 2^{-n}\delta$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Σύμφωνα με το (α) και το Θεώρημα 2.39, υπάρχει ένα σημείο $\mathbf{x}^\star$ το οποίο βρίσκεται σε κάθε I_n. Για κάποιο δείκτη $\alpha \in A$ είναι $\mathbf{x}^\star \in G_\alpha$. Εφόσον το

G_α είναι ανοικτό, υπάρχει $r > 0$ ούτως ώστε εάν $|\mathbf{y} - \mathbf{x}^\star| < r$, τότε $\mathbf{y} \in G_\alpha$. Εάν επιλέξουμε θετικό ακέραιο αριθμό n αρκούντως μεγάλο ούτως ώστε $2^{-n}\delta < r$ (αριθμός n με αυτήν την ιδιότητα υπάρχει, διότι αλλιώς θα ίσχυε $2^n \leq \delta/r$ για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n, γεγονός που αντιβαίνει στην Αρχιμήδεια ιδιότητα του R^1), τότε η (γ) συνεπάγεται ότι $I_n \subset G_\alpha$, σχέση η οποία αντίκειται στο (β).

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Η ισοδυναμία των (α) και (β) του επομένου θεωρήματος είναι γνωστή ως το θεώρημα των Heine[3] και Borel[4].

Θεώρημα 2.41. *Εάν ένα υποσύνολο E του R^k έχει μία από τις παρακάτω ιδιότητες, τότε έχει και τις υπόλοιπες δύο:*

---

[3] Σ. τ. Μ.: Eduard Heine (1821-1881). Γερμανός μαθηματικός, ο οποίος συνεισέφερε σημαντικά στην Ανάλυση. Υπήρξε μαθητής του Carl Friedrich Gauss (1777-1855) και του Gustav Peter Lejeune Dirichlet (1805-1859).

[4] Σ. τ. Μ.: Felix Édouard Justin Émile Borel (1871-1956). Γάλλος μαθηματικός ο οποίος εργάσθηκε στην Ανάλυση και ανέπτυξε την πρώτη αποτελεσματική Θεωρία Μέτρου (κατά το έτος 1898). Η εργασία του, μαζί με τις εργασίες των Henri Léon Lebesgue (1875-1941) και René Louis Baire (1874-1932), σηματοδότησε την αρχή της σύγχρονης Πραγματικής Αναλύσεως και Θεωρίας Μέτρου. Επίσης, ήταν ο πρώτος που ανέπτυξε μία συστηματική θεωρία για τις αποκλίνουσες σειρές. Εκτός αυτών, είχε σημαντική ερευνητική δραστηριότητα στη Θεωρία Πιθανοτήτων και στη Θεωρία Παιγνίων.

Ο Borel ήταν μαθητής του σπουδαίου μαθηματικού Charles Hermite (1822-1901). Κατέλαβε ακαδημαϊκή θέση στην École Normale Supérieure στο Παρίσι, το έτος 1896. Κατέλαβε την έδρα της Θεωρίας Συναρτήσεων το έτος 1909, η οποία δημιουργήθηκε αποκλειστικά για αυτόν, στο Πανεπιστήμιο της Σορβόννης. Το έτος 1918, ο Borel παρασημοφορήθηκε με τον Σταυρό του Πολέμου για τις υπηρεσίες που προσέφερε στην πατρίδα του, κατά τη διάρκεια του Πρώτου Παγκοσμίου Πολέμου.

Εκτός από δραστήρια ακαδημαϊκή σταδιοδρομία, ο Borel είχε και έντονη πολιτική δραστηριότητα. Κατείχε ενεργή θέση στην Γαλλική πολιτική σκηνή, ως μέλος της Βουλής των Αντιπροσώπων, από το έτος 1924 έως το έτος 1936, και ως Υπουργός του Ναυτικού, από το έτος 1925 έως το έτος 1940. Το έτος 1940 ο Borel συνελήφθη από το γαλλικό αυτόνομο (φασιστικό) καθεστώς του Vichy και φυλακίσθηκε για μικρό χρονικό διάστημα. Κατά το ίδιο έτος εντάχθηκε στη Γαλλική Αντίσταση κατά των Ναζί. Το έτος 1945 έλαβε το Μετάλλιο της Αντιστάσεως και το έτος 1950 έλαβε τον Μέγα Σταυρό της Λεγεώνας της Τιμής. Όσον αφορά το επιστημονικό του έργο, ο Borel έλαβε το έτος 1955 το Χρυσό Μετάλλιο του Εθνικού Κέντρου Επιστημονικής Έρευνας (CNRS) της Γαλλίας.

(α) *Το* E *είναι κλειστό και φραγμένο.*

(β) *Το* E *είναι συμπαγές.*

(γ) *Κάθε απέραντο υποσύνολο του* E *έχει οριακό σημείο.*

Απόδειξη. Εάν ισχύει το (α), τότε $E \subset I$ για κάποιο k-διάστημα I και το (β) έπεται από τα Θεωρήματα 2.40 και 2.35. Το Θεώρημα 2.37 φανερώνει ότι το (β) συνεπάγεται το (γ). Απομένει η απόδειξη της συνεπαγωγής του (α) από το (γ).

Εάν το E δεν είναι φραγμένο, τότε το E περιέχει σημεία $\mathbf{x}_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) ούτως ώστε

$$|\mathbf{x}_n| > n \qquad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Το σύνολο το οποίο αποτελείται από αυτά τα σημεία δεν έχει οριακό σημείο στον R^k και επομένως ούτε στο E. Κατά συνέπεια, το (γ) συνεπάγεται ότι το E είναι φραγμένο.

Εάν το E δεν είναι κλειστό, τότε υπάρχει ένα σημείο $\mathbf{x}_0 \in R^k$ το οποίο είναι οριακό σημείο του E και δεν ανήκει στο E. Για $n = 1, 2, 3, \dots,$ υπάρχουν σημεία $\mathbf{x}_n \in E$ ούτως ώστε $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0| < 1/n$. Ας είναι S το σύνολο αυτών των σημείων. Τότε, το S είναι απέραντο (αλλιώς η ποσότητα $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0|$ θα είχε σταθερή θετική τιμή για απείρου πλήθους δείκτες n). Επίσης το S έχει ως οριακό σημείο το $\mathbf{x}_0$ και δεν έχει άλλο οριακό σημείο. Διότι εάν $\mathbf{y} \in R^k$ με $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}_0$, τότε

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_n - \mathbf{y}| &\geq |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}| - |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0| \\ &\geq |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}| - \frac{1}{n} \\ &\geq \frac{1}{2}|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}| \end{aligned}$$

για όλους του δείκτες n εκτός πεπερασμένου πλήθους. Αυτό φανερώνει ότι το $\mathbf{y}$ δεν είναι οριακό σημείο του S (Θεώρημα 2.20).

Συνεπώς, το S δεν έχει οριακό σημείο στο E. Άρα, εάν η (γ) ισχύει, τότε το E είναι κλειστό. □

Πρέπει να σημειώσουμε ότι τα (β) και (γ) είναι ισοδύναμα σε οποιονδήποτε μετρικό χώρο (Άσκηση 26). Όμως, το (α) δεν συνεπάγεται απαραιτήτως τα (β) και (γ). Παραδείγματα υπάρχουν στην Άσκηση 16. Επίσης, υπάρχουν παραδείγματα σχετικά με τον χώρο $\mathcal{L}^2$, ο οποίος εμφανίζεται στο Κεφάλαιο 11.

Θεώρημα 2.42 (Weierstrass[5]). *Κάθε φραγμένο απέραντο υποσύνολο*

[5] Σ. τ. Μ.: Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897). Κορυφαίος Γερμανός μαθηματικός. Εργάσθηκε στην Ανάλυση και έθεσε τις βάσεις για την αυστηρή θεμελίωσή της. Η εργασία του άσκησε σημαντική επιρροή στην εξέλιξη των Μαθηματικών.

Ο Weierstrass φοίτησε σε καθολικό σχολείο, όπου ήταν λαμπρός μαθητής. Ο μικροαστικής προελεύσεως και νοοτροπίας πατέρας του προόριζε τον Weierstrass για δικηγόρο και, βάσει αυτού του σχεδίου, ο Weierstrass έγινε δεκτός στο τμήμα Νομικής του Πανεπιστημίου της Βόννης το έτος 1834. Μην έχοντας ως ενδιαφέρον την Νομική, ο Weierstrass αφιέρωσε τα τέσσερα χρόνια της φοιτήσεώς του στην ξιφασκία, όπου ήταν δεινός αθλητής, στις κοινωνικού χαρακτήρα νυχτερινές απολαύσεις και στη μελέτη των Μαθηματικών, χωρίς ποτέ να λάβει το πτυχίο της Νομικής. Κατά προτροπή ενός οικογενειακού φίλου, ο Weierstrass ενεγράφη στην Ακαδημία του Münster ούτως ώστε να προετοιμαστεί για τις εξετάσεις των καθηγητών μέσης εκπαιδεύσεως. Στο Münster, ο Weierstrass επηρεάσθηκε από τον μαθηματικό Christoph Gudermann (1798-1851), ο οποίος έσκυψε με ενδιαφέρον πάνω από τον νεαρό Weierstrass. Ο Weierstrass πέτυχε στις εξετάσεις το έτος 1841, υποβάλλοντας στην επιτροπή κρίσεως, μεταξύ άλλων, μία πρωτότυπη εργασία στα Μαθηματικά. Ο Gudermann εισηγήθηκε, όμως δεν εισακούσθηκε, να δοθεί στον Weierstrass ακαδημαϊκή θέση. Ο Weierstrass εργάσθηκε ως καθηγητής μέσης εκπαιδεύσεως περίπου για μία δεκαπενταετία. Στη διάρκεια αυτών των χρόνων συνέγραψε πολλές από τις σημαντικές εργασίες του και τις δημοσίευσε. Το Πανεπιστήμιο του Königsberg, αναγνωρίζοντας τελικά την αξία του, ανακήρυξε τον Weierstrass επίτιμο διδάκτορα περί το έτος 1855. Ο Weierstrass διορίσθηκε το έτος 1856 καθηγητής Μαθηματικών στη Βασιλική Πολυτεχνική Σχολή του Βερολίνου. Διατηρώντας αυτήν τη θέση, ο Weierstrass τοποθετήθηκε το ίδιο έτος επίκουρος καθηγητής των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου και εξελέγη μέλος της Ακαδημίας των Επιστημών του Βερολίνου. Από τον φόρτο εργασίας, ο Weierstrass υπέστη υπερκόπωση και έναν μικρό νευρικό κλονισμό, και ταλαιπωρούνταν από την υγεία του στην υπόλοιπη ζωή του.

Ο Weierstrass παρέμεινε στο Βερολίνο ως καθηγητής του τοπικού πανεπιστημίου έως τον θάνατό του. Υπήρξε σπουδαίος διδάσκαλος. Μεταξύ των πολυαρίθμων μαθητών του συγκαταλέγονται οι Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), Gösta Magnus Mittag-Leffler (1846-1927), Sonja Kowalewski (1850-1891) (με την οποία είχε ιδιαίτερη σχέση), Immanuel Lazarus Fuchs (1833-1902), Georg Ferdinand Frobenius (1849-1917), Carl David Runge (1856-1927), Wilhelm Karl Joseph Killing (1847-1923) και Hans von Mangoldt (1824-1868).

του R^k *έχει οριακό σημείο στον* R^k.

Απόδειξη. Ας είναι E ένα φραγμένο απέραντο υποσύνολο του R^k. Όντας φραγμένο, είναι υποσύνολο ενός k-διαστήματος $I \subset R^k$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.40, το I είναι συμπαγές και επομένως το E έχει οριακό σημείο στο I, βάσει του Θεωρήματος 2.37. □

ΤΕΛΕΙΑ ΣΥΝΟΛΑ

Θεώρημα 2.43. *Ας είναι* P *ένα μη κενό τέλειο υποσύνολο του* R^k. *Τότε, το* P *είναι υπεραριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Εφόσον το P έχει οριακά σημεία, είναι απέραντο. Υποθέτουμε ότι το P είναι αριθμήσιμο. Διατάσσουμε τα στοιχεία του P σε μία ακολουθία $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots$. Θα κατασκευάσουμε μία ακολουθία περιοχών $\{V_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ως εξής:

Ας είναι V_1 μία περιοχή του $\mathbf{x}_1$. Εάν η V_1 έχει ακτίνα $r > 0$, τότε η κλειστή θήκη $\overline{V_1}$ του V_1 είναι το σύνολο των σημείων $\mathbf{y} \in R^k$ με $|\mathbf{y} - \mathbf{x}_1| \leq r$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιον θετικό ακέραιο αριθμό n η V_n έχει κατασκευασθεί ούτως ώστε το $V_n \cap P$ να μην είναι κενό. Εφόσον κάθε σημείο του P είναι οριακό σημείο του P, υπάρχει μία περιοχή V_{n+1} ούτως ώστε (i) $\overline{V_{n+1}} \subset V_n$, (ii) $\mathbf{x}_n \notin \overline{V_{n+1}}$, (iii) το $V_{n+1} \cap P$ δεν είναι κενό. Σύμφωνα με το (iii), η V_{n+1} ικανοποιεί την επαγωγική υπόθεση και η κατασκευή μπορεί να συνεχισθεί.

Για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n θέτουμε $K_n = \overline{V_n} \cap P$. Εφόσον το $\overline{V_n}$ είναι κλειστό και φραγμένο, είναι συμπαγές. Εφόσον $\mathbf{x}_n \notin K_{n+1}$, κανένα σημείο του P δεν βρίσκεται στο $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Εφόσον $K_n \subset P$, έπεται ότι το $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ είναι κενό. Όμως, κανένα K_n δεν είναι κενό, σύμφωνα με το (iii), και $K_{n+1} \subset K_n$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$, σύμφωνα με το (i). Αυτό αντίκειται στο Πόρισμα του Θεωρήματος 2.36. □

Πόρισμα. *Κάθε διάστημα* $[a, b]$ $(a < b)$ *είναι υπεραριθμήσιμο. Ιδιαιτέρως, το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι υπεραριθμήσιμο.*

2.44 Το σύνολο του Cantor. Το σύνολο που πρόκειται να κατασκευάσουμε φανερώνει ότι υπάρχουν τέλεια υποσύνολα του R^1 τα οποία δεν περιέχουν κάποιο διάστημα.

Ας είναι E_0 το διάστημα $[0, 1]$. Αφαιρούμε από αυτό το διάστημα $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Ας είναι E_1 η ένωση των διαστημάτων

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Αφαιρούμε από αυτά τα διαστήματα το μεσαίο των τρίτων τους. Ας είναι E_2 η ένωση των διαστημάτων

$$\left[0, \frac{1}{9}\right], \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right], \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right], \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε μία ακολουθία συμπαγών συνόλων E_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) $\cdots \subset E_3 \subset E_2 \subset E_1$.

(β) Το E_n ισούται με την ένωση 2^n διαστημάτων, καθένα μήκους 3^{-n}.

Το σύνολο

$$P = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

ονομάζεται το *σύνολο του Cantor*. Προφανώς, το P είναι συμπαγές και το Θεώρημα 2.36 φανερώνει ότι είναι μη κενό.

Είναι σαφές ότι κανένα διάστημα της μορφής

$$\left(\frac{3k+1}{3^m}, \frac{3k+1}{3^m}\right) \tag{24}$$

δεν έχει κοινά σημεία με το P, όπου k, m είναι θετικοί ακέραιοι. Εάν

$$3^{-m} < \frac{b-a}{6},$$

τότε το P δεν μπορεί να περιέχει διαστήματα διότι κάθε διάστημα (a, b) περιέχει ένα διάστημα της μορφής (24).

Για να δείξουμε ότι το P είναι τέλειο, αρκεί να δείξουμε ότι το P δεν περιέχει κανένα μεμονωμένο σημείο. Ας είναι $x \in P$. Θεωρούμε ένα ανοικτό διάστημα S το οποίο περιέχει το x. Ας είναι I_n το κλειστό διάστημα του E_n το οποίο περιέχει το x. Επιλέγουμε θετικό ακέραιο αριθμό n αρκούντως μεγάλο ούτως ώστε $I_n \subset S$. Ας είναι x_n ένα ακραίο σημείο του I_n με $x_n \neq x$.

Από τη δομή του P συνάγουμε ότι $x_n \in P$. Κατά συνέπεια, το x είναι οριακό σημείο του P. Άρα, το P είναι τέλειο.

Μία από τις πιο ενδιαφέρουσες ιδιότητες του συνόλου του Cantor είναι το γεγονός ότι αποτελεί παράδειγμα ενός υπεραριθμησίμου συνόλου με μηδενικό μέτρο (η έννοια του μέτρου θα ορισθεί στο κεφάλαιο 11).

ΣΥΝΕΚΤΙΚΑ ΣΥΝΟΛΑ

Ορισμός 2.45. Δύο υποσύνολα A, B ενός μετρικού χώρου X ονομάζονται *διαχωρισμένα* εάν και μόνον εάν τα $A \cap \overline{B}$ και $\overline{A} \cap B$ είναι κενά. Δηλαδή, κανένα σημείο του A δεν ανήκει στην κλειστή θήκη του B και κανένα σημείο του B δεν ανήκει στην κλειστή θήκη του A.

Ένα σύνολο $E \subset X$ ονομάζεται *συνεκτικό* εάν και μόνον εάν *δεν ισούται* με την ένωση δύο μη κενών διαχωρισμένων συνόλων.

Παρατήρηση 2.46. Δύο διαχωρισμένα σύνολα είναι προφανώς αποσυνδετά αλλά δύο αποσυνδετά σύνολα δεν είναι απαραιτήτως διαχωρισμένα. Επί παραδείγματι, τα διαστήματα $[0, 1]$, $(1, 2)$ *δεν είναι* διαχωρισμένα, διότι το 1 είναι οριακό σημείο του $(1, 2)$. όμως, τα διαστήματα $(0, 1)$, $(1, 2)$ *είναι* διαχωρισμένα.

Τα συνεκτικά υποσύνολα της πραγματικής ευθείας διαθέτουν μία ιδιαιτέρως απλή δομή:

Θεώρημα 2.47. *Ένα υποσύνολο E του R^1 είναι συνεκτικό εάν και μόνον εάν έχει την ακόλουθη ιδιότητα: εάν $x, y \in E$ και $z \in R^1$ με $x < z < y$, τότε $z \in E$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x, y \in E$ και $z \in (x, y)$ με $z \notin E$. Τότε, $E = A_z \cup B_z$, όπου

$$A_z = E \cap (-\infty, z), \qquad B_z = E \cap (z, +\infty).$$

Εφόσον $x \in A_z$ και $y \in B_z$, τα A_z, B_z δεν είναι κενά. Εφόσον $A_z \subset (-\infty, z)$ και $B_z \subset (z, +\infty)$, τα A_z, B_z είναι διαχωρισμένα. Συνεπώς, το E δεν είναι συνεκτικό.

Για την απόδειξη του αντιστρόφου, υποθέτουμε ότι το E δεν είναι συνεκτικό. Τότε, υπάρχουν μη κενά διαχωρισμένα σύνολα A, B με $E = A \cup B$. Θεωρούμε $x \in A$, $y \in B$ και υποθέτουμε (δίχως απώλεια της γενικότητας) ότι $x < y$. Ορίζουμε

$$z = \sup(A \cap [x, y]).$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.28, έχουμε ότι $z \in \overline{A}$ και συνεπώς $z \notin B$. Ιδιαιτέρως, $x \leq z < y$.

Εάν $z \notin A$, τότε έπεται ότι $x < z < y$ και $z \notin E$.

Εάν $z \in A$, τότε $z \notin \overline{B}$ και επομένως υπάρχει πραγματικός αριθμός z_1 ούτως ώστε $z < z_1 < y$ και $z_1 \notin B$. Άρα, $x < z_1 < y$ και $z_1 \notin E$. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Αποδείξτε ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.

Άσκηση 2. Ένας μιγαδικός αριθμός z ονομάζεται *αλγεβρικός* εάν και μόνον εάν υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί $a_0, a_1, \ldots, a_n$, όχι όλοι μηδενικοί, ούτως ώστε

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0.$$

Αποδείξτε ότι το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

Υπόδειξη: Για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό N υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους εξισώσεις της παραπάνω μορφής με

$$n + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| = N.$$

Άσκηση 3. Αποδείξτε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί οι οποίοι δεν είναι αλγεβρικοί.

Άσκηση 4. Είναι το σύνολο των αρρήτων αριθμών αριθμήσιμο;

Άσκηση 5. Κατασκευάστε ένα φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών με ακριβώς τρία οριακά σημεία.

Άσκηση 6. Ας είναι E' το σύνολο των οριακών σημείων ενός συνόλου E. Αποδείξτε ότι το E' είναι κλειστό. Αποδείξτε επίσης ότι τα E' και $\overline{E}$ έχουν τα ίδια οριακά σημεία. (Υπενθυμίζουμε ότι $\overline{E} = E \cup E'$.) Είναι απαραίτητο να έχουν τα E και E' τα ίδια οριακά σημεία;

Άσκηση 7. Ας είναι $A_1, A_2, A_3, \ldots$ υποσύνολα ενός μετρικού χώρου.

(α) Εάν $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, τότε αποδείξτε ότι $\overline{B_n} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

(β) Εάν $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, τότε αποδείξτε ότι $\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \subset \overline{B}$.

Δείξτε με την κατασκευή ενός παραδείγματος ότι η τελευταία έγκλειση μπορεί να είναι γνήσια.

Άσκηση 8. Είναι κάθε σημείο ενός ανοικτού συνόλου $E \subset R^2$ οριακό σημείο του E; Απαντήστε στο ίδιο ερώτημα για κλειστά υποσύνολα του R^2.

Άσκηση 9. Συμβολίζουμε με E° το σύνολο των εσωτερικών σημείων ενός συνόλου E. (Ανατρέξτε στον Ορισμό 2.18(ε). Το E° ονομάζεται *εσωτερικό* του E.)

(α) Αποδείξτε ότι το E° είναι ανοικτό.

(β) Αποδείξτε ότι το E είναι ανοικτό εάν και μόνον εάν $E^\circ = E$.

(γ) Αποδείξτε ότι εάν $G \subset E$ και το G είναι ανοικτό, τότε $G \subset E^\circ$.[6]

(δ) Αποδείξτε ότι το συμπλήρωμα του E° ισούται με την κλειστή θήκη του συμπληρώματος του E.

(ε) Έχουν τα E και $\overline{E}$ πάντοτε το ίδιο εσωτερικό;

(στ) Έχουν τα E και E° πάντοτε την ίδια κλειστή θήκη;

[6] Σ. τ. Μ.: Δηλαδή, το E° είναι το *μεγαλύτερο* ανοικτό υποσύνολο του μετρικού χώρου το οποίο περιέχεται στο E. Συγκρίνετε με το σχόλιο αμέσως μετά από τη διατύπωση του Θεωρήματος 2.27. Μεταξύ των εννοιών του εσωτερικού και της κλειστής θήκης διακρίνεται ένα είδος «δυϊκότητας», γεγονός το οποίο συνδέεται άμεσα με το (δ) της παρούσας ασκήσεως. Υπάρχουν πολλά τέτοια ζεύγη «δυϊκών» συμπερασμάτων που σχετίζονται με το εσωτερικό και την κλειστή θήκη συνόλου.

Άσκηση 10. Ας είναι X ένα απέραντο σύνολο. Για $p, q \in X$ ορίζουμε

$$d(p,q) = \begin{cases} 1 & \text{εάν } p \neq q, \\ 0 & \text{εάν } p = q. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση αυτή είναι μία μετρική. Ποια υποσύνολα αυτού του μετρικού χώρου είναι ανοικτά; Ποια είναι κλειστά; Ποια είναι συμπαγή;

Άσκηση 11. Για $x, y \in R^1$ ορίζουμε

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= (x-y)^2, \\ d_2(x,y) &= \sqrt{|x-y|}, \\ d_3(x,y) &= |x^2 - y^2|, \\ d_4(x,y) &= |x - 2y|, \\ d_5(x,y) &= \frac{|x-y|}{1+|x-y|}. \end{aligned}$$

Καθορίστε ποιες από τις παραπάνω συναρτήσεις είναι μετρικές.

Άσκηση 12. Ας είναι $K \subset R^1$ το σύνολο που αποτελείται από τους αριθμούς 0 και $1/n$, όπου $n = 1, 2, 3, \ldots$. Αποδείξτε ότι το K είναι συμπαγές απ' ευθείας από τον ορισμό (δίχως χρήση του θεωρήματος των Heine και Borel).

Άσκηση 13. Κατασκευάστε ένα συμπαγές σύνολο πραγματικών αριθμών με αριθμήσιμο σύνολο οριακών σημείων.

Άσκηση 14. Δώστε παράδειγμα μίας ανοικτής καλύψεως του (0, 1) η οποία δεν έχει ανοικτή υποκάλυψη.

Άσκηση 15. Δείξτε ότι το Θεώρημα 2.36 και το Πόρισμά του δεν αληθεύουν (επί παραδείγματι στον R^1) εάν η λέξη «συμπαγές» αντικατασταθεί από τη λέξη «κλειστό» ή «φραγμένο».

Άσκηση 16. Θεωρούμε το σύνολο των ρητών αριθμών Q ως μετρικό χώρο με μετρική τη συνάρτηση $d(p, q) = |p - q|$ $(p, q \in Q)$. Ας είναι E το σύνολο των σημείων $p \in Q$ με $2 < p^2 < 3$. Δείξτε ότι το E είναι κλειστό, φραγμένο όμως όχι συμπαγές. Είναι το E ανοικτό;

Άσκηση 17. Υποθέτουμε ότι E είναι το σύνολο των σημείων $x \in [0, 1]$ με δεκαδικό ανάπτυγμα το οποίο περιέχει μόνον τα ψηφία 4 και 7. Είναι το E αριθμήσιμο; Είναι το E πυκνό στο $[0, 1]$; Είναι το E συμπαγές; Είναι το E τέλειο;

Άσκηση 18. Υπάρχει τέλειο υποσύνολο του R^1 το οποίο δεν περιέχει ρητούς αριθμούς;

Άσκηση 19. Θεωρούμε έναν μετρικό χώρο X.

(α) Εάν A, B είναι αποσυνδετά κλειστά υποσύνολα, τότε αποδείξτε ότι είναι διαχωρισμένα.

(β) Αποδείξτε το ίδιο για ανοικτά αποσυνδετά σύνολα.

(γ) Θεωρούμε $p \in X$, $\delta > 0$ και ορίζουμε ως A το σύνολο των σημείων $q \in X$ με $d(p, q) < \delta$ και ορίζουμε παρομοίως το B με τη σχέση $>$ στη θέση της σχέσεως $<$. Αποδείξτε ότι τα A, B είναι διαχωρισμένα.

(δ) Αποδείξτε ότι κάθε συνεκτικός μετρικός χώρος με τουλάχιστον δύο σημεία είναι υπεραριθμήσιμος.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το (γ).

Άσκηση 20. Είναι η κλειστή θήκη και το εσωτερικό ενός συνεκτικού συνόλου συνεκτικά σύνολα; (Ερευνήστε το αρχικά για υποσύνολα του R^2.)

Άσκηση 21. Ας είναι A, B διαχωρισμένα υποσύνολα ενός Ευκλειδείου χώρου R^k. Θεωρούμε $\mathbf{a} \in A$, $\mathbf{b} \in B$ και ορίζουμε

$$\mathbf{p}(t) = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

για $t \in R^1$. Θέτουμε $A_0 = \mathbf{p}^{-1}(A)$, $B_0 = \mathbf{p}^{-1}(B)$. (Επομένως, $t \in A_0$ εάν και μόνον εάν $\mathbf{p}(t) \in A$ και παρομοίως για το B_0.)

(α) Αποδείξτε ότι τα A_0, B_0 είναι διαχωρισμένα υποσύνολα του R^1.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει $t_0 \in (0, 1)$ ούτως ώστε $\mathbf{p}(t_0) \notin A \cup B$.

(γ) Αποδείξτε ότι κάθε κυρτό υποσύνολο του R^k είναι συνεκτικό.

Άσκηση 22. Ένας μετρικός χώρος ονομάζεται *διαχωρίσιμος* εάν και μόνον εάν περιέχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο. Δείξτε ότι ο R^k είναι διαχωρίσιμος χώρος.

Υπόδειξη: Θεωρήστε τα σημεία με συντεταγμένες μόνο ρητούς αριθμούς.

Άσκηση 23. Μία συλλογή $\{V_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ ανοικτών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου X ονομάζεται *(τοπολογική) βάση* του X εάν και μόνον εάν αληθεύει το επόμενο: για κάθε $x \in X$ και κάθε ανοικτό σύνολο $G \subset X$ με $x \in G$ υπάρχει δείκτης α με $x \in V_\alpha$. Δηλαδή, κάθε ανοικτό υποσύνολο του X ισούται με την ένωση μίας υποσυλλογής της $\{V_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$.

Αποδείξτε ότι κάθε διαχωρίσιμος μετρικός χώρος έχει *αριθμήσιμη* βάση.

Υπόδειξη: Θεωρήστε όλες τις περιοχές με ακτίνα ρητό αριθμό, τα κέντρα των οποίων ανήκουν σε κάποιο αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X.

Άσκηση 24. Ας είναι X ένας μετρικός χώρος για τον οποίον ισχύει ότι κάθε απέραντο υποσύνολό του έχει οριακό σημείο. Αποδείξτε ότι ο X είναι διαχωρίσιμος.

Υπόδειξη: Θεωρήστε $\delta > 0$ και $x_1 \in X$. Έχοντας επιλέξει $x_1, \ldots, x_j \in X$, επιλέξτε $x_{j+1} \in X$, εάν είναι δυνατό, ούτως ώστε $d(x_i, x_{j+1}) \geq \delta$ για κάθε $i = 1, \ldots, j$. Δείξτε ότι αυτή η διαδικασία θα σταματήσει αναγκαστικά έπειτα από πεπερασμένου πλήθους βήματα και επομένως ο X μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένου πλήθους περιοχές ακτίνας δ. Λάβετε $\delta = 1/n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ και θεωρήστε τα κέντρα των αντιστοίχων περιοχών.

Άσκηση 25. Αποδείξτε ότι κάθε συμπαγής μετρικός χώρος K έχει αριθμήσιμη βάση και συνεπώς είναι διαχωρίσιμος.

Υπόδειξη: Για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους περιοχές ακτίνας $1/n$, η ένωση των οποίων καλύπτει το K.

Άσκηση 26. Ας είναι X ένας μετρικός χώρος για τον οποίον ισχύει ότι κάθε απέραντο υποσύνολό του έχει οριακό σημείο. Αποδείξτε ότι ο X είναι συμπαγής.

Υπόδειξη: Από τις Ασκήσεις 23 και 24 προκύπτει ότι ο X έχει αριθμήσιμη βάση. Από αυτό έπεται ότι ο X έχει μία αριθμήσιμη ανοικτή κάλυψη $\{G_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Εάν δεν υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψή της, τότε το συμπλήρωμα F_n του $G_1 \cup \cdots \cup G_n$ είναι μη κενό για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n, όμως το $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι κενό. Εάν E είναι ένα σύνολο το οποίο περιέχει ένα σημείο από κάθε σύνολο F_n, τότε θεωρήστε ένα οριακό σημείο του E και καταλήξτε σε αντίφαση.

Άσκηση 27. Ένα σημείο $p \in X$ ονομάζεται *σημείο συμπυκνώσεως* του συνόλου $E \subset X$ εάν και μόνον εάν κάθε περιοχή του p περιέχει υπεραριθμησίμου πλήθους σημεία του E.

Υποθέτουμε ότι $E \subset R^k$ και ότι το E είναι υπεραριθμήσιμο. Ας είναι P το σύνολο των σημείων συμπυκνώσεως του E. Αποδείξτε ότι το P είναι τέλειο και ότι το πολύ αριθμησίμου πλήθους σημεία του E δεν ανήκουν στο P. Με διαφορετική διατύπωση, δείξτε ότι το $P^c \cap E$ είναι το πολύ αριθμήσιμο.

Υπόδειξη: Ας είναι $\{V_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) μία αριθμήσιμη βάση του R^k και W η ένωση των συνόλων V_n της βάσεως αυτής με την ιδιότητα ότι το $E \cap V_n$ είναι το πολύ αριθμήσιμο. Δείξτε ότι $P = W^c$.

Άσκηση 28. Αποδείξτε ότι κάθε κλειστό υποσύνολο ενός διαχωρίσιμου μετρικού χώρου ισούται με την ένωση ενός (πιθανώς κενού) τέλειου συνόλου και ενός αριθμησίμου συνόλου. (*Πόρισμα:* κάθε αριθμήσιμο κλειστό υποσύνολο του R^k έχει μεμονωμένα σημεία.)

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 27.

Άσκηση 29. Αποδείξτε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του R^1 ισούται με την ένωση μίας αριθμήσιμης συλλογής αποσυνδετών ανοικτών διαστημάτων.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 22.

Άσκηση 30. Αντιγράψτε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.43 για να αποδείξετε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Εάν $R^k = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, όπου κάθε σύνολο F_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι κλειστό υποσύνολο του R^k, τότε τουλάχιστον ένα F_n έχει μη κενό εσωτερικό.

Ισοδύναμη διατύπωση: Εάν $\{G_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι μία ακολουθία ανοικτών πυκνών υποσυνόλων του R^k, τότε το $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ δεν είναι κενό.

(Αυτό αποτελεί ειδική περίπτωση του θεωρήματος του Baire[7]. Ανατρέξτε στην Άσκηση 22 του Κεφαλαίου 3 για τη γενική περίπτωση.)

---

[7] Σ. τ. Μ.: René Louis Baire (1874-1932). Σημαντικός Γάλλος μαθηματικός, ο οποίος εργάσθηκε στη Θεωρία Συναρτήσεων και μελέτησε θέματα σχετικά με την έννοια του ορίου.

Ο Baire σπούδασε στην École Normale Supérieure στο Παρίσι, από όπου και απεφοίτησε το έτος 1895. Φοίτησε υπό τον Vito Volterra (1860-1940). Για τη λήψη του διδακτορικού του διπλώματος, το έτος 1899, εξετάσθηκε από τον Gaston Darboux (1842-1917). Το αντικείμενο της διδακτορικής του διατριβής ήταν η μελέτη μίας συγκεκριμένης κλάσης συναρτήσεων, οι οποίες ονομάζονται σήμερα συναρτήσεις του Baire.

Λόγω της κακής του υγείας, ο Baire έπειτα από την εκπόνηση της διδακτορικής του διατριβής δεν συνεισέφερε παρά μόνο αποσπασματικά, αλλά ουσιωδώς, στα Μαθηματικά. Το έτος 1902, ο Baire κατέλαβε ακαδημαϊκή θέση στο Πανεπιστήμιο του Montpellier και τρία έτη μετά στο Πανεπιστήμιο της Dijon. Συνέγραψε σημαντικά βιβλία Αναλύσεως, τα οποία έδωσαν σημαντική ώθηση στη διδασκαλία της Αναλύσεως και έχουν χαρακτηρισθεί πλέον κλασικά.

Κεφάλαιο 3

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΚΑΙ ΣΕΙΡΕΣ

Το κεφάλαιο αυτό πραγματεύεται κυρίως ακολουθίες και σειρές μιγαδικών αριθμών. Τα βασικά γεγονότα περί συγκλίσεως μπορούν όμως να γίνουν κατανοητά όταν τεθούν σε ένα γενικότερο πλαίσιο. Οι τρεις πρώτες ενότητες έχουν να κάνουν λοιπόν με ακολουθίες σε Ευκλείδειους χώρους και σε μετρικούς χώρους.

ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ορισμός 3.1. Μία ακολουθία $\{p_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ ενός μετρικού χώρου X λέγεται ότι *συγκλίνει* εάν και μόνον εάν υπάρχει ένα σημείο $p \in X$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακέραιος αριθμός N ούτως ώστε η ανισότητα $n \geq N$ να συνεπάγεται την $d(p_n, p) < \varepsilon$. (Με d συμβολίζουμε τη μετρική του X.)

Στην παραπάνω περίπτωση λέγεται επίσης ότι η $\{p_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ συγκλίνει προς το p ή αλλιώς ότι το p είναι το *όριο* της $\{p_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. (Ανατρέξτε στο Θεώρημα 3.2(β).) Γράφουμε $p_n \to p$ καθώς $n \to \infty$ ή

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p.$$

Η $\{p_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ λέγεται ότι *αποκλίνει* εάν και μόνον εάν δεν συγκλίνει.

Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι ο παραπάνω ορισμός της «συγκλίνουσας ακολουθίας» δεν εξαρτάται μόνον από την ακολουθία αλλά και από τον περιβάλλοντα χώρο X. Επί παραδείγματι, η ακολουθία $\{1/n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ συγκλίνει στον R^1 (προς το 0), όμως δεν συγκλίνει στο σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών (με την συνήθη απόσταση του R^1). Σε περιπτώσεις όπου μπορεί να υπάρξει σύγχυση, χρησιμοποιούμε τον ακριβέστερο όρο «συγκλίνουσα στον X» παρά τον όρο «συγκλίνουσα».

Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο των σημείων p_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ονομάζεται *πεδίο τιμών* της $\{p_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Το πεδίο τιμών μίας ακολουθίας μπορεί να είναι εξίσου απέραντο ή πεπερασμένο σύνολο. Η ακολουθία $\{p_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ονομάζεται *φραγμένη* εάν και μόνον εάν το πεδίο τιμών της είναι φραγμένο.

Ως παραδείγματα, θεωρούμε τις παρακάτω ακολουθίες μιγαδικών αριθμών (δηλαδή θεωρούμε ότι $X = R^2$):

(α) Εάν $s_n = 1/n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, τότε $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$. Το πεδίο τιμών της είναι απέραντο και η ακολουθία είναι φραγμένη.

(β) Εάν $s_n = n^2$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, τότε η ακολουθία $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ είναι μη φραγμένη, αποκλίνουσα με απέραντο πεδίο τιμών.

(γ) Εάν $s_n = 1 + [(-1)^n/n]$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, τότε $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$. Η ακολουθία είναι φραγμένη με απέραντο πεδίο τιμών.

(δ) Εάν $s_n = i^n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, τότε η ακολουθία $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ είναι αποκλίνουσα, φραγμένη με πεπερασμένο πεδίο τιμών.

(ε) Εάν $s_n = 1$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, τότε η ακολουθία $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ συγκλίνει προς το 1, είναι φραγμένη με πεπερασμένο πεδίο τιμών.

Στο επόμενο θεώρημα καταγράφουμε ορισμένες σημαντικές ιδιότητες των συγκλινουσών ακολουθιών σε μετρικό χώρο.

Θεώρημα 3.2. *Θεωρούμε μία ακολουθία* $\{p_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ *σε έναν μετρικό χώρο* X.

(α) *Η* $\{p_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ *συγκλίνει προς το* p *εάν και μόνον εάν κάθε περιοχή του* p *περιέχει όλους τους όρους της* $\{p_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ *εκτός από το πολύ πεπερασμένου πλήθους όρους.*

(β) *Εάν* $p, p' \in X$ *και εάν η* $\{p_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ *συγκλίνει προς τα* p *και* p', *τότε* $p = p'$.

(γ) *Εάν η* $\{p_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ *συγκλίνει, τότε είναι φραγμένη.*

(δ) *Εάν* $E \subset X$ *και εάν* p *είναι οριακό σημείο του* E, *τότε υπάρχει μία ακολουθία* $\{p_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ *του* X *με* $p = \lim_{n\to\infty} p_n$.

Απόδειξη.

(α) Υποθέτουμε ότι $p_n \to p$ καθώς $n \to \infty$ και θεωρούμε μία περιοχή V του p. Υπάρχει δηλαδή ένα $\varepsilon > 0$ ούτως ώστε εάν $q \in X$ με $d(q, p) < \varepsilon$, τότε $q \in V$. Εξ ορισμού της συγκλίσεως, υπάρχει ακέραιος αριθμός N ούτως ώστε εάν $n \geq N$, τότε $d(p_n, p) < \varepsilon$. Άρα, εάν $n \geq N$, τότε $p_n \in V$.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι κάθε περιοχή του p περιέχει όλους τους όρους της $\{p_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ εκτός από το πολύ πεπερασμένου πλήθους όρους. Ας είναι $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε το σύνολο V των σημείων $q \in X$ με $d(q, p) < \varepsilon$. Εξ υποθέσεως, υπάρχει ακέραιος αριθμός N ούτως ώστε $p_n \in V$ εάν $n \geq N$. Συνεπώς, $d(p_n, p) < \varepsilon$ εάν $n \geq N$. Δηλαδή, $p_n \to p$ καθώς $n \to \infty$.

(β) Ας είναι $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί N, N'' ούτως ώστε

$$\text{εάν } \ n \geq N, \ \text{ τότε } \ d(p_n, p) < \frac{\varepsilon}{2}$$

και

$$\text{εάν } \ n \geq N', \ \text{ τότε } \ d(p_n, p') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Συνεπώς, εάν $n \geq \max(N, N'')$, τότε

$$d(p, p') \leq d(p, p_n) + d(p_n, p') < \varepsilon.$$

Το τελευταίο φανερώνει ότι $d(p, p') = 0$, εφόσον ο ε είναι τυχών θετικός αριθμός.

(γ) Υποθέτουμε ότι $p_n \to p$ καθώς $n \to \infty$. Τότε, υπάρχει ένας ακέραιος αριθμός N ούτως ώστε εάν $n > N$, τότε $d(p_n, p) < 1$. Θέτουμε

$$r = \max\{1, d(p_1, p), \ldots, d(p_N, p)\}.$$

Τότε, $d(p_n, p) \leq r$ για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n.

(δ) Για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n υπάρχει ένα σημείο $p_n \in E$ ούτως ώστε $d(p_n, p) < 1/n$. Εάν $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε ακέραιο αριθμό N με $N\varepsilon > 1$. Εάν $n > N$, τότε έπεται ότι $d(p_n, p) < \varepsilon$. Συνεπώς, $p_n \to p$ καθώς $n \to \infty$.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Για ακολουθίες του R^k μπορούμε να μελετήσουμε τη σχέση που υφίσταται μεταξύ της συγκλίσεως και των αλγεβρικών πράξεων. Αρχικά θεωρούμε ακολουθίες μιγαδικών αριθμών.

Θεώρημα 3.3. *Υποθέτουμε ότι $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) είναι ακολουθίες μιγαδικών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ και $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. Τότε:*

(α) $\lim_{n\to\infty}(s_n + t_n) = s + t$.

(β) $\lim_{n\to\infty} cs_n = cs$, $\lim_{n\to\infty}(c + s_n) = c + s$, *για οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό c.*

(γ) $\lim_{n\to\infty} s_n t_n = st$.

(δ) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} = \frac{1}{s}$, *εάν $s_n \neq 0$ για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n και $s \neq 0$.*

Απόδειξη.

(α) Για $\varepsilon > 0$ υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί N_1, N_2 ούτως ώστε

$$\text{εάν } n \geq N_1, \text{ τότε } |s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$$

και

$$\text{εάν } n \geq N_2, \text{ τότε } |t_n - t| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Συνεπώς, εάν $N = \max(N_1, N_2)$, τότε για $n \geq N$ έχουμε ότι

$$|(s_n + t_n) - (s + t)| \leq |s_n - s| + |t_n - t| < \varepsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει το (α). Η απόδειξη του (β) είναι τετριμμένη.

(γ) Κάνουμε χρήση της ισότητας

$$s_n t_n - st = (s_n - s)(t_n - t) + s(t_n - t) + t(s_n - s), \tag{1}$$

η οποία ισχύει για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$. Για $\varepsilon > 0$ υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί N_1, N_2 ούτως ώστε

$$\text{εάν } \; n \geq N_1, \;\; \text{τότε } \; |s_n - s| < \sqrt{\varepsilon}$$

και

$$\text{εάν } \; n \geq N_2, \;\; \text{τότε } \; |t_n - t| < \sqrt{\varepsilon}.$$

Επομένως, εάν λάβουμε $N = \max(N_1, N_2)$, τότε για $n \geq N$ έχουμε ότι

$$|(s_n - s)(t_n - t)| < \varepsilon.$$

Το τελευταίο φανερώνει ότι

$$\lim_{n \to \infty} (s_n - s)(t_n - t) = 0.$$

Εάν εφαρμόσουμε τα (α) και (β) στην (1), συνάγουμε ότι

$$\lim_{n \to \infty} (s_n t_n - st) = 0.$$

(δ) Επιλέγοντας ακέραιο αριθμό m ούτως ώστε $|s_n - s| < \frac{1}{2}|s|$ εάν $n \geq m$, παρατηρούμε ότι

$$|s_n| > \frac{1}{2}|s| \qquad (n \geq m).$$

Εάν $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει ακέραιος αριθμός $N > m$ ούτως ώστε εάν $n \geq N$, τότε

$$|s_n - s| < \frac{1}{2}|s|^2 \varepsilon.$$

Κατά συνέπεια, για $n \geq N$ έχουμε ότι

$$\left| \frac{1}{s_n} - \frac{1}{s} \right| = \left| \frac{s_n - s}{s_n s} \right| < \frac{2}{|s|^2} |s_n - s| < \varepsilon.$$

□

Θεώρημα 3.4.

(α) *Υποθέτουμε ότι* $\mathbf{x}_n \in R^k$ *(*$n = 1, 2, 3, \ldots$*) με*

$$\mathbf{x}_n = (\alpha_{1,n}, \ldots, \alpha_{k,n})$$

για κάθε δείκτη n*. Τότε, η ακολουθία* $\{\mathbf{x}_n\}$ *(*$n = 1, 2, 3, \ldots$*) συγκλίνει προς το* $\mathbf{x} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ *εάν και μόνον εάν*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{j,n} = \alpha_j \qquad (1 \leq j \leq k). \tag{2}$$

(β) *Υποθέτουμε ότι* $\{\mathbf{x}_n\}$, $\{\mathbf{y}_n\}$ *(*$n = 1, 2, 3, \ldots$*) είναι ακολουθίες του* R^k *και* $\{\beta_n\}$ *(*$n = 1, 2, 3, \ldots$*) είναι μία ακολουθία πραγματικών αριθμών ούτως ώστε* $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, $\mathbf{y}_n \to \mathbf{y}$ *και* $\beta_n \to \beta$ *καθώς* $n \to \infty$*. Τότε,*

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n) = \mathbf{x} + \mathbf{y}, \qquad \lim_{n\to\infty} (\mathbf{x}_n \cdot \mathbf{y}_n) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \qquad \lim_{n\to\infty} (\beta_n \mathbf{x}_n) = \beta \mathbf{x}.$$

Απόδειξη.

(α) Εάν $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$ καθώς $n \to \infty$, τότε οι ανισότητες

$$|\alpha_{j,n} - \alpha_j| \leq |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}| \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots, 1 \leq j \leq k),$$

οι οποίες προκύπτουν από τον ορισμό της στάθμης του R^k, φανερώνουν ότι η (2) ισχύει.

Αντιστρόφως, εάν ισχύει η (2) τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακέραιος αριθμός N ούτως ώστε εάν $n \geq N$, τότε

$$|\alpha_{j,n} - \alpha_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} \qquad (1 \leq j \leq k).$$

Επομένως, εάν $n \geq N$, τότε

$$|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}| = \left\{ \sum_{j=1}^{k} |\alpha_{j,n} - \alpha_j|^2 \right\}^{1/2} < \varepsilon$$

δηλαδή $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$ καθώς $n \to \infty$. Αυτό αποδεικνύει το (α).

Το μέρος (β) έπεται από το (α) και το Θεώρημα 3.3. □

ΥΠΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ορισμός 3.5. Δεδομένης μίας ακολουθίας $\{p_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, θεωρούμε μία ακολουθία $\{n_i\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ θετικών ακεραίων αριθμών με $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. Τότε, η ακολουθία $\{p_{n_i}\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ ονομάζεται *υπακολουθία* της $\{p_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Στην περίπτωση όπου η $\{p_{n_i}\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ συγκλίνει, το όριο αυτής ονομάζεται *υπακολουθιακό όριο* της $\{p_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Είναι σαφές ότι η $\{p_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ συγκλίνει προς το σημείο p εάν και μόνον εάν κάθε υπακολουθία της συγκλίνει προς το p. Οι λεπτομέρειες τις αποδείξεως αφήνονται στον αναγνώστη.

Θεώρημα 3.6.

(α) *Εάν $\{p_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ είναι μία ακολουθία σε έναν συμπαγή μετρικό χώρο X, τότε αυτή έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στον X.*

(β) *Κάθε φραγμένη ακολουθία του R^k έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη.

(α) Ας είναι E το πεδίο τιμών της $\{p_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Εάν το E είναι πεπερασμένο, τότε υπάρχει $p \in E$ και ακολουθία θετικών ακεραίων αριθμών $\{n_i\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ με $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ ούτως ώστε

$$p_{n_1} = p_{n_2} = \cdots = p.$$

Η υπακολουθία που λαμβάνεται με αυτόν τον τρόπο συγκλίνει προφανώς προς το p.

Εάν το E είναι απέραντο, τότε το Θεώρημα 2.37 φανερώνει ότι το E έχει ένα οριακό σημείο $p \in X$. Επιλέγουμε θετικό ακέραιο αριθμό ούτως ώστε $d(p, p_{n_1}) < 1$. Έχοντας επιλέξει θετικούς ακέραιους αριθμούς $n_1, \ldots, n_{i-1}$, βρίσκουμε από το Θεώρημα 2.20 την ύπαρξη θετικού ακεραίου αριθμού n_i με $n_i > n_{i-1}$ και $d(p, p_{n_i}) < 1/i$. Τότε, η $\{p_{n_i}\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ συγκλίνει προς το p.

Το (β) έπεται από το (α), εφόσον το Θεώρημα 2.41 συνεπάγεται ότι κάθε φραγμένο υποσύνολο του R^k περιέχεται σε ένα συμπαγές υποσύνολο του R^k. □

Θεώρημα 3.7. *Το σύνολο των υπακολουθιακών ορίων μίας ακολουθίας* $\{p_n\}$ *(*$n = 1, 2, 3, \dots$*) σε έναν μετρικό χώρο* X *είναι κλειστό υποσύνολο του* X.

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $E^\star$ το σύνολο των υπακολουθιακών ορίων της ακολουθίας $\{p_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) και θεωρούμε ένα οριακό σημείο q του $E^\star$. Θα αποδείξουμε ότι $q \in E^\star$.

Επιλέγουμε θετικό ακέραιο αριθμό n_1 ούτως ώστε $p_{n_1} \neq q$. (Εάν δεν υπάρχει τέτοιος ακέραιος αριθμός, τότε το $E^\star$ έχει ως μοναδικό του σημείο το q.) Θέτουμε $\delta = d(q, p_{n_1})$. Υποθέτουμε ότι έχουν επιλεγεί οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί $n_1, \dots, n_{i-1}$. Εφόσον το q είναι οριακό σημείο του $E^\star$, υπάρχει $x \in E^\star$ με $d(x, q) < 2^{-i}\delta$. Εφόσον $x \in E^\star$, υπάρχει θετικός ακέραιος αριθμός n_i με $n_i > n_{i-1}$ και $d(x, p_{n_i}) < 2^{-i}\delta$. Άρα,

$$d(q, p_{n_i}) \leq 2^{1-i}\delta$$

για $i = 1, 2, 3, \dots$. Αυτό φανερώνει ότι η $\{p_{n_i}\}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) συγκλίνει προς το q. Συνεπώς, $q \in E^\star$. □

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ CAUCHY

Ορισμός 3.8. Μία ακολουθία $\{p_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) σε έναν μετρικό χώρο X ονομάζεται *ακολουθία Cauchy* [1] εάν και μόνον εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακέραιος αριθμός N ούτως ώστε εάν $n, m \geq N$, τότε $d(p_n, p_m) < \varepsilon$.

[1] Σ. τ. Μ.: Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Διαπρεπής Γάλλος μαθηματικός. Εκτός από την Ανάλυση, όπου υπήρξε πρωτοπόρος, συνεισέφερε τα μέγιστα σε πολλούς κλάδους των Μαθηματικών και της Φυσικής.

Ο Cauchy γεννήθηκε σε μία πολιτικά, και συνεπώς κοινωνικά, ταραγμένη περίοδο της Γαλλίας με αποτέλεσμα να ζήσει δύσκολα παιδικά χρόνια και να κλονισθεί παντοτινά η υγεία του λόγω υποσιτισμού. Παρ' όλα αυτά, ο πατέρας του φρόντισε να εξασφαλίσει στον Cauchy αξιοπρεπή μόρφωση. Ο πατέρας του Cauchy είχε στενές σχέσεις με τους Pierre

Σε ό,τι αφορά στις ακολουθίες Cauchy, καθώς επίσης και σε άλλες καταστάσεις, αποδεικνύεται χρήσιμη η επόμενη γεωμετρική έννοια.

Simon Laplace (1749-1827), Joseph Louis Lagrange (1736-1813) και τον χημικό Claude Louis Berthollet (1748-1822), οι οποίοι είχαν διαβλέψει από πολύ νωρίς το λαμπρό μέλλον του Cauchy.

Ο Cauchy φοίτησε στο Κεντρικό Σχολείο του Panthéon, όπου και επέδειξε τη λαμπρότητά του ως μαθητής κερδίζοντας διάφορα βραβεία. Το έτος 1805 εισήχθη στο Πολυτεχνείο των Παρισίων και ύστερα από τρία χρόνια εισήχθη στη Σχολή Πολιτικών Μηχανικών όπου ολοκλήρωσε τις σπουδές του το έτος 1810. Κατά τα έτη 1810 έως και 1813, ο Cauchy εργάσθηκε στο Cherbourg ως στρατιωτικός μηχανικός, στις τάξεις του στρατού του Ναπολέοντα, για την πραγματοποίηση του (εν τέλει αποτυχημένου) σχεδίου εισβολής του Ναπολέοντα στην Αγγλία. Την περίοδο αυτή ασχολούνταν παραλλήλως με τα Μαθηματικά και δημοσίευσε ορισμένες εργασίες. Ο Cauchy επέστρεψε στο Παρίσι, το έτος 1813, και αφιερώθηκε στα Μαθηματικά, κατά την προτροπή των Laplace και Lagrange.

Ο Cauchy εξελέγη μέλος της Ακαδημίας των Επιστημών των Παρισίων το έτος 1816, ύστερα από χηρεία θέσεων, λόγω της αποπομπής (βασιζόμενης σε πολιτικά κριτήρια) των Gaspard Monge (1746-1818) και Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753-1823), και έλαβε ιδιαιτέρως επικριτικά σχόλια για αυτό το γεγονός. Εν συνεχεία, κατέλαβε ακαδημαϊκές έδρες στο Πολυτεχνείο των Παρισίων, στο Γαλλικό Κολέγιο και στο Πανεπιστήμιο της Σορβόννης. Εν μέσω των μαθηματικών του δραστηριοτήτων, παντρεύτηκε το έτος 1818.

Με την άνοδο του Λουδοβίκου Φιλίππου στην εξουσία το έτος 1830, ο Cauchy έχασε όλες τις θέσεις του, λόγω της αρνήσεώς του να λάβει όρκο υποταγής στο νέο καθεστώς, και αυτοεξορίσθηκε ακολουθώντας στην Ελβετία τον πολιτικό εκφραστή του, έκπτωτο βασιλιά Κάρολο. Ύστερα από μία μικρή περίοδο εκεί, δέχθηκε μία θέση καθηγητή Μαθηματικής Φυσικής στο Πανεπιστήμιο του Torino. Το έτος 1833, ο Cauchy επιφορτίσθηκε με το καθήκον της εκπαιδεύσεως του υιού του Καρόλου, ο οποίος βρισκόταν στη Πράγα, γεγονός που ανέκοψε την επιστημονική του έρευνα. Ο Cauchy επέστρεψε στο Παρίσι το έτος 1838. Λόγω της επίμονης αρνήσεως του να λάβει όρκο υποταγής στο καθεστώς, δεν ανέλαβε τις ακαδημαϊκές του θέσεις. Ανέλαβε όμως ξανά τη θέση του στην Ακαδημία των Επιστημών των Παρισίων (διότι, κατ' εξαίρεση, τα μέλη της δεν υποχρεώνονταν στη λήψη του όρκου υποταγής). Επίσης, έλαβε μία θέση στο Γραφείο Μέτρων και Σταθμών. Με την πτώση του Λουδοβίκου Φιλίππου, ο Cauchy επέστρεψε στην παλαιά του θέση στο Πανεπιστήμιο της Σορβόννης, την οποία διατήρησε έως τον θάνατό του.

Ο Cauchy ήταν βαθιά θρησκευόμενος (στον Καθολικισμό) και υπήρξε μεγάλος φιλάνθρωπος. Όμως, κατηγορήθηκε πολλάκις για μεροληψία, λόγω των άκαμπτων πολιτικών και θρησκευτικών πεποιθήσεών του.

Υπάρχουν δεκαέξι έννοιες και θεωρήματα που έχουν μείνει στην ιστορία φέροντας το όνομα του Cauchy, κατά πολύ περισσότερα από οποιονδήποτε άλλον μαθηματικό.

Ορισμός 3.9. Ας είναι E ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου X και S το σύνολο των πραγματικών αριθμών της μορφής $d(p,q)$ με $p,q \in E$. Το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου S ονομάζεται *διάμετρος* του E και συμβολίζεται με $\mathrm{diam}E$.

Εάν $\{p_n\}$ $(n = 1,2,3,\dots)$ είναι ακολουθία του X και εάν για $N = 1,2,3,\dots$ το σύνολο των σημείων $p_N, p_{N+1}, p_{N+2},\dots$ συμβολίζεται με E_N, τότε από τους προηγούμενους ορισμούς καθίσταται σαφές ότι *η* $\{p_n\}$ $(n = 1,2,3,\dots)$ *είναι ακολουθία Cauchy εάν και μόνον εάν*

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{diam}E_N = 0.$$

Θεώρημα 3.10.

(α) *Εάν* $\overline{E}$ *είναι η κλειστή θήκη ενός συνόλου* E *σε ένα μετρικό χώρο* X*, τότε*

$$\mathrm{diam}\overline{E} = \mathrm{diam}E.$$

(β) *Εάν* $\{K_n\}$ $(n = 1,2,3,\dots)$ *είναι μία ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του* X *με* $K_{n+1} \subset K_n$ $(n = 1,2,3,\dots)$ *και εάν*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}K_n = 0,$$

τότε το $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ *αποτελείται από ένα και μοναδικό σημείο.*

Απόδειξη.

(α) Εφόσον $E \subset \overline{E}$, είναι σαφές ότι

$$\mathrm{diam}E \le \mathrm{diam}\overline{E}.$$

Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και $p,q \in \overline{E}$. Εξ ορισμού του $\overline{E}$, υπάρχουν σημεία $p', q' \in E$ ούτως ώστε $d(p,p') < \varepsilon$, $d(q,q') < \varepsilon$. Επομένως,

$$\begin{aligned} d(p,q) &\le d(p,p') + d(p',q') + d(q',q) \\ &< 2\varepsilon + d(p',q') \\ &\le 2\varepsilon + \mathrm{diam}E. \end{aligned}$$

Από αυτό έπεται ότι

$$\operatorname{diam}\overline{E} \leq 2\varepsilon + \operatorname{diam} E.$$

Εφόσον ο ε είναι τυχών θετικός αριθμός, αποδεικνύεται το (α).

(β) Θέτουμε $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.36, το K είναι μη κενό. Εάν το K περιέχει περισσότερα από ένα σημεία, τότε $\operatorname{diam} K > 0$. Όμως, για κάθε δείκτη n έχουμε ότι $K \subset K_n$ και επομένως $\operatorname{diam} K \leq \operatorname{diam} K_n$. Το τελευταίο αντιβαίνει στην υπόθεση ότι $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} K_n = 0$. □

Θεώρημα 3.11.

(α) *Σε έναν μετρικό χώρο X, κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι ακολουθία Cauchy.*

(β) *Εάν X είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος και εάν $\{p_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) είναι ακολουθία Cauchy του X, τότε η $\{p_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) συγκλίνει προς κάποιο σημείο του X.*

(γ) *Κάθε ακολουθία Cauchy του R^k είναι συγκλίνουσα.*

Σημείωση: Μία διαφορά μεταξύ του ορισμού της συγκλίσεως και του ορισμού της ακολουθίας Cauchy είναι το γεγονός ότι στην πρώτη περίπτωση εμπλέκεται το όριο ενώ δεν συμβαίνει το ίδιο στη δεύτερη. Επομένως, το Θεώρημα 3.11(β) μπορεί να χρησιμεύσει ως κριτήριο συγκλίσεως μίας ακολουθίας, δίχως την εκ των προτέρων γνώση του ορίου.

Το γεγονός (το οποίο περιέχεται στο Θεώρημα 3.11) ότι μία ακολουθία συγκλίνει στον R^k εάν και μόνον εάν είναι ακολουθία Cauchy ονομάζεται συνήθως *κριτήριο συγκλίσεως του Cauchy*.

Απόδειξη.

(α) Εάν $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ και εάν $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει ένας ακέραιος αριθμός N ούτως ώστε εάν $n \geq N$, τότε $d(p_n, p) < \varepsilon$. Επομένως,

$$d(p_n, p_m) \leq d(p_n, p) + d(p, p_m) < 2\varepsilon$$

εάν $n, m \geq N$. Άρα, η $\{p_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) είναι ακολουθία Cauchy.

(β) Ας είναι $\{p_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ μία ακολουθία Cauchy σε έναν συμπαγή μετρικό χώρο X. Για $N = 1, 2, 3, \dots$ ας είναι E_N το σύνολο των σημείων $p_N, p_{N+1}, p_{N+2}, \dots$. Τότε,

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{diam}\overline{E_N} = 0, \tag{3}$$

σύμφωνα με το Ορισμό 3.9 και το Θεώρημα 3.10(α). Όντας κλειστό σύνολο συμπαγούς χώρου, κάθε σύνολο $\overline{E_N}$ είναι συμπαγές (Θεώρημα 2.35). Εφόσον $E_{N+1} \subset E_N$, προκύπτει ότι $\overline{E_{N+1}} \subset \overline{E_N}$ για κάθε δείκτη N.

Τώρα, το Θεώρημα 3.10(β) φανερώνει ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $p \in X$ που περιέχεται σε κάθε σύνολο $\overline{E_N}$.

Θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Σύμφωνα με την (3), υπάρχει ακέραιος αριθμός N_0 ούτως ώστε εάν $N \geq N_0$, τότε $\operatorname{diam}\overline{E_N} < \varepsilon$. Εφόσον $p \in \overline{E_N}$, έπεται ότι $d(p, q) < \varepsilon$ για κάθε $q \in \overline{E_N}$ και επομένως για κάθε $q \in E_N$. Με διαφορετική διατύπωση, $d(p, p_n) < \varepsilon$ εάν $n \geq N_0$. Αυτό σημαίνει ότι $\lim_{n\to\infty} p_n = p$.

(γ) Ας είναι $\{\mathbf{x}_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ μία ακολουθία Cauchy στον R^k. Ορίζουμε το σύνολο E_N όπως στο (β), με το $\mathbf{x}_i$ στη θέση του p_i. Για κάποιον ακέραιο αριθμό N ισχύει ότι $\operatorname{diam} E_N < 1$. Το πεδίο τιμών της ακολουθίας είναι η ένωση του E_N με το σύνολο $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N-1}\}$. Συνεπώς, η $\{\mathbf{x}_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι φραγμένη. Εφόσον κάθε φραγμένο υποσύνολο του R^k έχει συμπαγή κλειστή θήκη (Θεώρημα 2.41), το (γ) έπεται από το (β). $\square$

Ορισμός 3.12. Ένας μετρικός χώρος λέγεται *πλήρης* εάν και μόνον εάν κάθε ακολουθία Cauchy αυτού του χώρου είναι συγκλίνουσα.

Συνεπώς, το Θεώρημα 3.11 αναδιατυπώνεται λέγοντας ότι *κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι πλήρης.* Το Θεώρημα 3.11 συνεπάγεται επίσης ότι *κάθε κλειστό υποσύνολο E ενός πλήρους μετρικού χώρου X είναι πλήρες.* (Κάθε ακολουθία Cauchy του E είναι ακολουθία Cauchy στον X και επομένως συγκλίνει προς κάποιο σημείο $p \in X$. Εφόσον το E είναι κλειστό, $p \in E$.) Παράδειγμα μη πλήρους μετρικού χώρου αποτελεί ο χώρος των ρητών αριθμών με απόσταση την $d(x, y) = |x - y|$ (x, y ρητοί αριθμοί).

Το Θεώρημα 3.2(γ) και το Παράδειγμα (δ) του Ορισμού 3.1 φανερώνουν ότι οι συγκλίνουσες ακολουθίες είναι φραγμένες, αλλά φραγμένες ακολουθίες του R^k δεν είναι απαραιτήτως συγκλίνουσες. Όμως, υπάρχει μία περίπτωση όπου μία ακολουθία είναι συγκλίνουσα εάν και μόνον εάν είναι φραγμένη. Αυτό συμβαίνει για τις μονότονες ακολουθίες στον R^1.

Ορισμός 3.13. Μία ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ ονομάζεται

(α) *αύξουσα* εάν και μόνον εάν $s_n \leq s_{n+1}$ για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots,$

(β) *φθίνουσα* εάν και μόνον εάν $s_n \geq s_{n+1}$ για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots.$

Η κλάση των μονότονων ακολουθιών αποτελείται ακριβώς από τις αύξουσες και φθίνουσες ακολουθίες.

Θεώρημα 3.14. *Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι μονότονη. Τότε, η $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ συγκλίνει εάν και μόνον εάν είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $s_n \leq s_{n+1}$ για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots$ (η απόδειξη γίνεται αναλόγως και στην άλλη περίπτωση). Ας είναι E το πεδίο τιμών της $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι φραγμένη και συμβολίζουμε ως s το ελάχιστο άνω φράγμα του E. Τότε,

$$s_n \leq s \qquad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακέραιος αριθμός ούτως ώστε

$$s - \varepsilon < s_N \leq s,$$

αλλιώς το $s - \varepsilon$ θα ήταν άνω φράγμα του E. Εφόσον η $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι αύξουσα, για $n \geq N$ ισχύει ότι

$$s - \varepsilon < s_n \leq s,$$

το οποίο και φανερώνει ότι η $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ συγκλίνει (προς το s).

Το αντίστροφο έπεται από το Θεώρημα 3.2(γ). □

ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΚΑΤΩΤΕΡΑ ΟΡΙΑ

Ορισμός 3.15. Υποθέτουμε ότι $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ είναι μία ακολουθία πραγματικών αριθμών. Γράφουμε

$$s_n \to +\infty$$

εάν και μόνον εάν για κάθε πραγματικό αριθμό M υπάρχει ακέραιος αριθμός N ούτως ώστε εάν $n \geq N$, τότε $s_n \geq M$. Αναλόγως, γράφουμε

$$s_n \to -\infty$$

εάν και μόνον εάν για κάθε πραγματικό αριθμό M υπάρχει ακέραιος αριθμός N ούτως ώστε εάν $n \geq N$, τότε $s_n \leq M$.

Πρέπει να σημειωθεί ότι τώρα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\to$ (το οποίο έχει εισαχθεί στον Ορισμό 3.1) για ορισμένους τύπους αποκλινουσών ακολουθιών, καθώς και για τις συγκλίνουσες ακολουθίες. Όμως, οι ορισμοί της συγκλίσεως και του ορίου, όπως δίδονται στον ορισμό 3.1, δεν αλλάζουν καθόλου.

Ορισμός 3.16. Υποθέτουμε ότι $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ είναι μία ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε το σύνολο E των αριθμών x (στο εκτεταμένο σύστημα των πραγματικών αριθμών) ούτως ώστε $s_{n_k} \to x$ για κάποια υπακολουθία $\{s_{n_k}\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Το σύνολο αυτό περιέχει όλα τα υπακολουθιακά όρια, όπως έχουν ορισθεί στον Ορισμό 3.5, και ενδεχομένως τους αριθμούς $+\infty$, $-\infty$. Ανακαλώντας τους Ορισμούς 1.8 και 1.23, θέτουμε

$$s^\star = \sup E,$$
$$s_\star = \inf E.$$

Οι αριθμοί $s^\star, s_\star$ ονομάζονται αντιστοίχως το *ανώτερο* και το *κατώτερο όριο* της $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς

$$\limsup_{n\to+\infty} s_n = s^\star, \qquad \liminf_{n\to+\infty} s_n = s_\star.$$

Θεώρημα 3.17. *Θεωρούμε μία ακολουθία* $\{s_n\}$ *(*$n = 1, 2, 3, \dots$*) πραγματικών αριθμών και υποθέτουμε ότι* E *και* $s^\star$ *έχουν το ίδιο νόημα όπως στον Ορισμό 3.16. Τότε, το* $s^\star$ *έχει τις δύο ακόλουθες ιδιότητες:*

(α) $s^\star \in E$.

(β) *Εάν* $x > s^\star$*, τότε υπάρχει ακέραιος αριθμός* N *ούτως ώστε εάν* $n \geq N$*, τότε* $s_n < x$.

Επιπροσθέτως, ο $s^\star$ *είναι ο μοναδικός αριθμός ο οποίος κατέχει αυτήν την ιδιότητα.*

Βεβαίως, ισχύει το ανάλογο αποτέλεσμα για τον $s_\star$.

Απόδειξη.

(α) Εάν $s^\star = +\infty$, τότε το E δεν είναι άνω φραγμένο. Επομένως, η $\{s_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) δεν είναι άνω φραγμένη. Συνεπώς, υπάρχει μία υπακολουθία $\{s_{n_k}\}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) με $s_{n_k} \to +\infty$.

Εάν ο $s^\star$ είναι πραγματικός αριθμός, τότε το E είναι άνω φραγμένο και επομένως υπάρχει ένα υπακολουθιακό όριο. Το ζητούμενο έπεται με συνδυασμό των Θεωρημάτων 3.7 και 2.28.

Εάν $s^\star = -\infty$, τότε το E περιέχει ως μοναδικό του στοιχείο το $-\infty$ και δεν υπάρχει υπακολουθιακό όριο. Άρα, για κάθε πραγματικό αριθμό M ισχύει ότι $s_n > M$ για πεπερασμένο πλήθος τιμών του δείκτη n και συνεπώς $s_n \to -\infty$.

Κατά συνέπεια, το (α) ισχύει σε κάθε περίπτωση.

(β) Υποθέτουμε ότι υπάρχει αριθμός x με $x > s^\star$ ούτως ώστε $s_n \geq x$ για άπειρο πλήθος τιμών του δείκτη n. Σε αυτήν την περίπτωση, υπάρχει αριθμός $y \in E$ με $y \geq x > s^\star$, γεγονός που αντιβαίνει στον ορισμό του $s^\star$.

Για την απόδειξη της μοναδικότητας υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο αριθμοί p, q οι οποίοι ικανοποιούν τα (α) και (β) στη θέση του $s^\star$. Θεωρούμε ότι $p < q$ και επιλέγουμε αριθμό x με $p < x < q$. Εφόσον ο p ικανοποιεί το (β), υπάρχει ακέραιος αριθμός N ούτως ώστε εάν $n \geq N$, τότε $s_n < p$. Τότε, ο q δεν δύναται να ικανοποιεί το (α). □

Παράδειγμα 3.18.

(α) Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $\{s_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) περιέχει ως όρους της όλους τους ρητούς αριθμούς. Τότε, κάθε πραγματικός αριθμός είναι υπακολουθιακό της όριο και

$$\limsup_{n\to+\infty} s_n = +\infty, \qquad \liminf_{n\to+\infty} s_n = -\infty.$$

(β) Υποθέτουμε ότι $s_n = (-1)^n/[1 + (1/n)]$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Τότε,

$$\limsup_{n\to+\infty} s_n = 1, \qquad \liminf_{n\to+\infty} s_n = -1.$$

(γ) Για μία ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{s_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), ισχύει $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$ εάν και μόνον εάν

$$\limsup_{n\to+\infty} s_n = \liminf_{n\to+\infty} s_n = s.$$

Η ενότητα αυτή κλείνει με ένα χρήσιμο θεώρημα, η απόδειξη του οποίου είναι τετριμμένη:

Θεώρημα 3.19. *Εάν $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) είναι ακολουθίες πραγματικών αριθμών με $s_n \le t_n$ για κάθε δείκτη n με $n \ge N$, όπου ο N είναι σταθερός θετικός ακέραιος αριθμός, τότε*

$$\liminf_{n\to+\infty} s_n \le \liminf_{n\to+\infty} t_n,$$
$$\limsup_{n\to+\infty} s_n \le \limsup_{n\to+\infty} t_n.$$

ΟΡΙΣΜΕΝΕΣ ΕΙΔΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Σε αυτήν την ενότητα θα υπολογίσουμε τα όρια ορισμένων ακολουθιών, οι οποίες συναντώνται συχνά. Οι αποδείξεις θα βασισθούν στην εξής παρατήρηση: εάν $0 \le x_n \le s_n$ για κάθε δείκτη n με $n \ge N$, όπου ο N είναι σταθερός θετικός ακέραιος αριθμός και εάν $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$, τότε $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Θεώρημα 3.20.

(α) *Εάν $p > 0$, τότε $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.*

(β) *Εάν* $p > 0$, *τότε* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

(γ) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(δ) *Εάν* $p > 0$ *και* $\alpha \in R^1$, *τότε* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$.

(ε) *Εάν* $|x| < 1$, *τότε* $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

Απόδειξη.

(α) Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και λαμβάνουμε $n > (1/\varepsilon)^{1/p}$. (Εδώ χρησιμοποιείται η Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών αριθμών.)

(β) Εάν $p > 1$, τότε θέτουμε $x_n = \sqrt[n]{p} - 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Τότε, για κάθε δείκτη n είναι $x_n > 0$ και, σύμφωνα με το δυωνυμικό θεώρημα,

$$1 + nx_n \leq (1 + x_n)^n = p.$$

Επομένως

$$0 < x_n \leq \frac{p-1}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Άρα, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Εάν $p = 1$, τότε το (β) είναι τετριμμένο. Εάν $0 < p < 1$, τότε το αποτέλεσμα προκύπτει από το (α) λαμβάνοντας αντιστρόφους.

(γ) Θέτουμε $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Τότε, για κάθε δείκτη n είναι $x_n \geq 0$ και, σύμφωνα με το δυωνυμικό θεώρημα,

$$n = (1 + x_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2.$$

Άρα,

$$0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \qquad (n \geq 2).$$

(δ) Θεωρούμε έναν θετικό ακέραιο αριθμό k με $k > \alpha$. Για $n > 2k$,

$$(1+p)^n > \binom{n}{k} p^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} p^k > \frac{n^k p^k}{2^k k!}.$$

Άρα,

$$0 < \frac{n^{\alpha}}{(1+p)^n} < \frac{2^k k!}{p^k} n^{\alpha - k} \qquad (n > 2k).$$

Εφόσον $\alpha - k < 0$, ισχύει ότι $n^{\alpha-k} \to 0$ καθώς $n \to \infty$, σύμφωνα με το (α).

(ε) Λαμβάνουμε $\alpha = 0$ στο (δ). $\square$

ΣΕΙΡΕΣ

Στο υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου όλες οι υπό θεώρηση ακολουθίες και σειρές θα έχουν μιγαδικούς όρους, εκτός και εάν αναφέρεται σαφώς κάτι διαφορετικό. Ορισμένες επεκτάσεις των θεωρημάτων που ακολουθούν, στον R^k, αναφέρονται στην Άσκηση 15.

Ορισμός 3.21. Δεδομένης μίας ακολουθίας $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, χρησιμοποιούμε το σύμβολο

$$\sum_{n=p}^{q} a_n \qquad (p \leq q)$$

για να δηλώσουμε το άθροισμα $a_p + a_{p+1} + \ldots + a_q$. Στην $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ αντιστοιχίζουμε την ακολουθία $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, όπου

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Για την $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ χρησιμοποιούμε επίσης την συμβολική έκφραση

$$a_1 + a_2 + a_3 \ldots$$

ή, πιο συνοπτικά,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{4}$$

Ονομάζουμε το σύμβολο στην (4) *άπειρη σειρά* ή απλώς *σειρά*. Οι όροι της $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ονομάζονται τα *μερικά αθροίσματα* της σειράς. Λέγεται ότι η σειρά *συγκλίνει* εάν και μόνον εάν η $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ συγκλίνει προς το s. Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Ο αριθμός s ονομάζεται το *άθροισμα* της σειράς. Πρέπει όμως να καταστεί πλήρως κατανοητό ότι *ο s είναι το όριο της ακολουθίας αθροισμάτων* και ότι δεν προκύπτει απλώς με πρόσθεση όρων.

Θα λέγεται ότι *η σειρά αποκλίνει* εάν και μόνον εάν η $\{s_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) αποκλίνει.

Ορισμένες φορές, για διευκόλυνση, θα θεωρούμε σειρές της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n. \tag{5}$$

Συχνά, όταν δεν υπάρχει περίπτωση συγχύσεως ή όταν δεν είναι απαραίτητη η διάκριση του αρχικού όρου, θα γράφουμε απλώς $\sum a_n$ στη θέση της (4) ή της (5).

Είναι σαφές ότι κάθε θεώρημα σχετικό με ακολουθίες μπορεί να διατυπωθεί με όρους σειρών (θέτοντας $a_1 = s_1$ και $a_n = s_n - s_{n-1}$, για $n > 1$) και αντιστρόφως. Είναι χρήσιμο να χρησιμοποιούμε και τις δύο αυτές προσεγγίσεις.

Το κριτήριο του Cauchy (Θεώρημα 3.11) μπορεί να αναδιατυπωθεί στην ακόλουθη μορφή:

Θεώρημα 3.22. *Η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει εάν και μόνον εάν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει ακέραιος αριθμός* N *ούτως ώστε*

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| \le \varepsilon, \tag{6}$$

εάν $m \ge n \ge N$.

Ιδιαιτέρως, λαμβάνοντας $n = m$, η (6) μετατρέπεται στη

$$|a_n| \le \varepsilon \qquad (n \ge N).$$

Δηλαδή:

Θεώρημα 3.23. *Εάν η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει, τότε* $\lim_{\to\infty} a_n = 0$.

Όμως, η συνθήκη $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ δεν είναι επαρκής για την εξασφάλιση της συγκλίσεως της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Επί παραδείγματι, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

αποκλίνει. Για την απόδειξη αυτού του γεγονότος παραπέμπουμε στο Θεώρημα 3.28.

Το θεώρημα 3.14, το οποίο αφορά μονότονες ακολουθίες, έχει επίσης αντίστοιχη αναδιατύπωση για σειρές. Τονίζουμε ότι η έκφραση «μη αρνητικός» αναφέρεται πάντοτε σε *πραγματικούς* αριθμούς.

Θεώρημα 3.24. *Μία σειρά μη αρνητικών όρων συγκλίνει εάν και μόνον εάν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της είναι φραγμένη.*

Θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε τώρα ένα κριτήριο συγκλίσεως σειρών διαφορετικής φύσεως από τα προηγούμενα, το λεγόμενο «κριτήριο συγκρίσεως».

Θεώρημα 3.25.

(α) *Εάν* $|a_n| \leq c_n$ *για* $n \geq N_0$, *όπου* N_0 *είναι σταθερός ακέραιος αριθμός, και εάν η* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *συγκλίνει, τότε και η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει.*

(β) *Εάν* $a_n \geq d_n \geq 0$ *για* $n \geq N_0$, *όπου* N_0 *είναι σταθερός ακέραιος αριθμός, και εάν η* $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ *αποκλίνει, τότε και η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *αποκλίνει.*

Σημειώνουμε ότι το (β) εφαρμόζεται μόνον σε σειρές μη αρνητικών όρων.

Απόδειξη. Δεδομένου $\varepsilon > 0$, υπάρχει ακέραιος αριθμός $N \geq N_0$ ούτως ώστε εάν $m \geq n \geq N$, τότε

$$\sum_{k=n}^{m} c_n \leq \varepsilon,$$

σύμφωνα με το κριτήριο του Cauchy. Συνεπώς,

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} c_k \leq \varepsilon$$

και από αυτό έπεται το (α).

Το (β) έπεται από το (α), διότι εάν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ θα πρέπει να συγκλίνει. (Σημειώνουμε ότι το (β) συνάγεται και από το Θεώρημα 3.24.) □

Σημειώνουμε ότι το κριτήριο συγκρίσεως είναι πολύ χρήσιμο. Για την αποτελεσματική χρήση του, ο αναγνώστης πρέπει να εξοικειωθεί με έναν αριθμό σειρών μη αρνητικών όρων με γνωστή συμπεριφορά ως προς τη σύγκλιση.

ΣΕΙΡΕΣ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΟΡΩΝ

Η απλούστερη σειρά μη αρνητικών όρων είναι πιθανώς η *γεωμετρική σειρά.*

Θεώρημα 3.26. *Εάν* $0 \leq x < 1$, *τότε*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Εάν $x \geq 1$, *τότε η σειρά αποκλίνει.*

Απόδειξη. Εάν $x \neq 1$, τότε

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Το αποτέλεσμα έπεται εάν λάβουμε $n \to \infty$. Για $x = 1$ προκύπτει η σειρά

$$1 + 1 + 1 + \dots,$$

η οποία προφανώς αποκλίνει. □

Σε αρκετές περιπτώσεις που εμφανίζονται στις εφαρμογές, οι όροι των σειρών είναι φθίνοντες. Το ακόλουθο θεώρημα του Cauchy είναι επομένως ιδιαιτέρου ενδιαφέροντος. Το εντυπωσιακό χαρακτηριστικό του είναι το γεγονός ότι μία αρκετά «αραιή» υπακολουθία της $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ καθορίζει τη σύγκλιση ή απόκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Θεώρημα 3.27. *Υποθέτουμε ότι* $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$. *Τότε, η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει εάν και μόνον εάν η σειρά*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots \tag{7}$$

συγκλίνει.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.24, αρκεί να ελέγξουμε απλώς πότε οι ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων είναι φραγμένες ή όχι. Ας είναι

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$
$$t_k = a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Για $n < 2^k$,

$$\begin{aligned} s_n &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k} \\ &= t_k, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$s_n \leq t_k. \tag{8}$$

Από την άλλη πλευρά, εάν $n > 2^k$, τότε

$$\begin{aligned} s_n &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \\ &\geq \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k} \\ &= \frac{1}{2} t_k, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$2s_n \geq t_k. \tag{9}$$

Σύμφωνα με τις (8) και (9), οι ακολουθίες $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ και $\{t_k\}$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ είναι ταυτοχρόνως φραγμένες ή μη φραγμένες. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Θεώρημα 3.28. *Η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *συγκλίνει εάν* $p > 1$ *και αποκλίνει εάν* $p \leq 1$.

Απόδειξη. Εάν $p \leq 0$, τότε η απόκλιση της σειράς προκύπτει από το Θεώρημα 3.23. Εάν $p > 0$, τότε το Θεώρημα 3.27 μπορεί να εφαρμοσθεί και με αυτό οδηγούμαστε στη σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{(1-p)k}.$$

Τώρα, ισχύει ότι $2^{1-p} < 1$ εάν και μόνον εάν $1 - p < 0$ και το αποτέλεσμα έπεται με χρήση της γεωμετρικής σειράς (λαμβάνουμε $x = 2^{1-p}$ στο Θεώρημα 3.26). □

Ως μία ακόμη εφαρμογή του Θεωρήματος 3.27, αποδεικνύουμε το παρακάτω:

Θεώρημα 3.29. *Εάν* $p > 1$, *τότε η σειρά*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p} \tag{10}$$

συγκλίνει. Εάν $p \leq 1$, *τότε η σειρά αποκλίνει.*

Παρατήρηση. Με $\log n$ συμβολίζουμε τον λογάριθμο του n με βάση e (συγκρίνετε με την Άσκηση 7 του Κεφαλαίου 1). Ο αριθμός e θα ορισθεί παρακάτω (ανατρέξτε στον Ορισμό 3.30). Η σειρά ξεκινά με $n = 2$, διότι $\log 1 = 0$.

Απόδειξη. Η μονοτονία της λογαριθμικής συναρτήσεως (η οποία θα μελετηθεί λεπτομερέστερα στο Κεφάλαιο 8) συνεπάγεται ότι η ακολουθία $\{\log n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ είναι αύξουσα. Συνεπώς, η ακολουθία $\{1/n \log n\}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ είναι φθίνουσα. Μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 3.27 στην (10). Αυτό μας οδηγεί στη σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k (\log 2^k)^p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k \log 2)^p} = \frac{1}{(\log 2)^p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \tag{11}$$

και το Θεώρημα 3.29 έπεται από το Θεώρημα 3.28. □

Η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχισθεί. Επί παραδείγματι, η σειρά

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log \log n} \tag{12}$$

αποκλίνει, ενώ η σειρά

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^2} \tag{13}$$

συγκλίνει.

Παρατηρούμε ότι οι όροι της σειράς (12) διαφέρουν πολύ λίγο από τους όρους της σειράς (13). Παρ' όλα αυτά, η μία αποκλίνει και η άλλη συγκλίνει. Εάν συνεχίσουμε την διαδικασία που μας οδήγησε από το Θεώρημα 3.28 στο Θεώρημα 3.29 και έπειτα στην (12) και στην (13) λαμβάνουμε ζεύγη συγκλινουσών και αποκλινουσών σειρών, των οποίων οι όροι διαφέρουν ακόμη λιγότερο από αυτούς των (12) και (13). Επομένως μπορεί κανείς να οδηγηθεί στην εικασία ότι υπάρχει κάποιου είδους οριακή κατάσταση, ένα «σύνορο» που διαχωρίζει τις συγκλίνουσες από τις αποκλίνουσες σειρές, τουλάχιστον σε ό,τι αφορά στις σειρές με μονότονους όρους. Βεβαίως, η έννοια αυτή του «συνόρου» είναι αρκετά ασαφής. Αυτό που θέλουμε να καταδείξουμε είναι το εξής: ασχέτως εάν διασαφήσουμε αυτήν την έννοια, η εικασία δεν αληθεύει. Οι Ασκήσεις 11(β) και 12(β) μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως περαιτέρω περιγραφές των παραπάνω.

Δεν επιθυμούμε να εμβαθύνουμε περισσότερο σε αυτό το θέμα της θεωρίας συγκλίσεως σειρών. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο βιβλίο του Knopp «Theory and Application of Infinite Series», στο Κεφάλαιο IX και ιδιαιτέρως στην ενότητα 41.

Ο ΑΡΙΘΜΟΣ e

Ορισμός 3.30. Ορίζουμε $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Στα παραπάνω είναι $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ εάν $n \geq 1$ και $0! = 1$.

Εφόσον για κάθε δείκτη n ισχύει ότι

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3, \end{aligned}$$

η σειρά συγκλίνει και ο ορισμός έχει νόημα. Στην πραγματικότητα, η σειρά συγκλίνει ταχύτατα, γεγονός που μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τον e με μεγάλη ακρίβεια.

Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι ο e μπορεί να ορισθεί και μέσω μίας άλλης διαδικασίας λήψεως ορίου. Η απόδειξη παρέχει ένα καλό παράδειγμα του χειρισμού των πράξεων των ορίων.

Θεώρημα 3.31. *Ισχύει η ισότητα* $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \qquad t_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Σύμφωνα με το δυωνυμικό θεώρημα, για $n = 1, 2, 3, \dots$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} t_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Άρα, $t_n \leq s_n$ για κάθε δείκτη n και επομένως

$$\limsup_{n\to\infty} t_n \leq e, \tag{14}$$

σύμφωνα με το Θεώρημα 3.19. Εν συνεχεία, εάν $n \geq m$, τότε

$$t_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{m!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right).$$

Λαμβάνοντας $n \to \infty$ και κρατώντας το m σταθερό προκύπτει ότι

$$\liminf_{n\to\infty} t_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!}$$

δηλαδή

$$s_m \leq \liminf_{n\to\infty} t_n.$$

Θεωρώντας $m \to \infty$ λαμβάνουμε την ανισότητα

$$e \leq \liminf_{n\to\infty} t_n. \tag{15}$$

Το θεώρημα προκύπτει από τις (14) και (15). □

Η ταχύτητα με την οποία συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ μπορεί να υπολογισθεί ως εξής: εάν το s_n εξακολουθεί να έχει το ίδιο νόημα όπως προηγουμένως, τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} e - s_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right\} \\ &= \frac{1}{n!n}. \end{aligned}$$

Δηλαδή

$$0 < e - s_n < \frac{1}{n!n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{16}$$

Επί παραδείγματι, ο s_{10} προσεγγίζει τον e με σφάλμα μικρότερο από 10^{-7}. Η ανισότητα (16) έχει επίσης και θεωρητικό ενδιαφέρον διότι μας βοηθά να αποδείξουμε την αρρητότητα του e με πολύ απλό τρόπο.

Θεώρημα 3.32. *Ο αριθμός e είναι άρρητος.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο e είναι ρητός. Τότε, $e = p/q$ όπου οι p, q είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Σύμφωνα με την (16),

$$0 < q!(e - s_q) < \frac{1}{q}. \tag{17}$$

Λόγω της υποθέσεως μας, ο $q!e$ είναι ακέραιος αριθμός. Εφόσον ο

$$q!s_q = q!\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

είναι ακέραιος αριθμός, διαπιστώνουμε ότι ο $q!(e - s_q)$ είναι ακέραιος αριθμός.

Εφόσον $q \geq 1$, η (17) υποδηλώνει την ύπαρξη ακεραίου αριθμού μεταξύ των 0 και 1. Συνεπώς, καταλήξαμε σε αντίφαση. □

Στην πραγματικότητα, ο e δεν είναι ούτε καν αλγεβρικός αριθμός. Για μία απλή απόδειξη αυτού, ανατρέξτε στη σελίδα 25 του βιβλίου του Niven ή στη σελίδα 176 του βιβλίου του Herstein, τα οποία αναφέρονται στην Βιβλιογραφία.

ΤΑ ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΤΗΣ ΡΙΖΑΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ

Θεώρημα 3.33. (Κριτήριο της ρίζας.) *Δεδομένης μίας σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, θέτουμε $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.*

(α) *Εάν $\alpha < 1$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.*

(β) *Εάν $\alpha > 1$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.*

(γ) *Εάν $\alpha = 1$, τότε το κριτήριο δεν παρέχει καμία πληροφορία.*

Απόδειξη. Εάν $\alpha < 1$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε πραγματικό αριθμό β με $\alpha < \beta < 1$ και έναν ακέραιο αριθμό N ούτως ώστε εάν $n \geq N$, τότε

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \beta$$

(σύμφωνα με το Θεώρημα 3.17(β)). Δηλαδή, εάν $n \geq N$, τότε

$$|a_n| < \beta^n.$$

Εφόσον $0 < \beta < 1$, η $\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n$ συγκλίνει. Η σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συνάγεται τώρα από το κριτήριο συγκρίσεως.

Εάν $\alpha > 1$, τότε, πάλι από το Θεώρημα 3.17, υπάρχει μία ακολουθία $\{n_k\}$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ ούτως ώστε

$$\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \to \alpha,$$

καθώς $k \to \infty$. Συνεπώς, ισχύει ότι $|a_n| > 1$ για άπειρο πλήθος τιμών του δείκτη n, επομένως δεν είναι δυνατό να ισχύει $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, συνθήκη η οποία είναι αναγκαία για τη σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (Θεώρημα 3.23).

Για την απόδειξη του (γ), θεωρούμε τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

εκ των οποίων η πρώτη αποκλίνει ενώ η δεύτερη συγκλίνει και για κάθε μία από αυτές είναι $\alpha = 1$. □

Θεώρημα 3.34. (Κριτήριο του λόγου.) *Η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(α) *συγκλίνει εάν* $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$,

(β) *αποκλίνει εάν* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ *για* $n \geq n_0$*, όπου* n_0 *είναι σταθερός ακέραιος αριθμός.*

Απόδειξη. Εάν ισχύει η συνθήκη (α), τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός β με $\beta < 1$ και ακέραιος αριθμός N ούτως ώστε εάν $n \geq N$, τότε

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \beta.$$

Ιδιαιτέρως,

$$\begin{aligned}
&|a_{N+1}| < \beta |a_N|,\\
&|a_{N+2}| < \beta |a_{N+1}| < \beta^2 |a_N|,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&|a_{N+p}| < \beta^p |a_N|.
\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$|a_n| < |a_N| \beta^{-N} \beta^n,$$

για οποιονδήποτε δείκτη n με $n \geq N$. Το (α) έπεται από το κριτήριο συγκρίσεως, εφόσον η $\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n$ συγκλίνει.

Εάν $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ για $n \geq n_0$, τότε διαπιστώνουμε απλά ότι η συνθήκη $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ δεν ικανοποιείται και με αυτόν τον τρόπο προκύπτει το (β). □

Σημείωση: Η συνθήκη $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ δεν μας εξασφαλίζει κάποιο συμπέρασμα σχετικό με τη σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ καταδεικνύουν αυτήν την κατάσταση.

Παράδειγμα 3.35.

(α) Θεωρούμε τη σειρά

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots,$$

για την οποία ισχύει ότι

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0,$$

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty.$$

Το κριτήριο της ρίζας φανερώνει τη σύγκλιση της σειράς. Το κριτήριο του λόγου δεν μπορεί να εφαρμοσθεί.

(β) Τα ίδια ισχύουν για τη σειρά

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{64} + \cdots,$$

όπου

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{8},$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2,$$

ενώ

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}.$$

Παρατήρηση 3.36. Το κριτήριο του λόγου είναι συχνά ευκολότερο στην εφαρμογή του από το κριτήριο της ρίζας, διότι είναι συνήθως πιο εύκολο να υπολογισθούν λόγοι παρά n τάξεως ρίζες. Όμως, το κριτήριο της ρίζας έχει ευρύτερο πεδίο εφαρμογής. Ακριβέστερα, όταν το κριτήριο του λόγου φανερώνει σύγκλιση, τότε και το κριτήριο της ρίζας κάνει το ίδιο. Όταν το κριτήριο της ρίζας δεν παρέχει πληροφορία, τότε συμβαίνει το ίδιο και με το κριτήριο του λόγου. Το γεγονός αυτό είναι συνέπεια του Θεωρήματος 3.37 και τα προηγούμενα χρησιμεύουν ως παραδείγματα.

Κανένα από τα δύο κριτήρια δεν έχει αυξημένη ευαισθησία σχετικά με την απόκλιση. Και από τα δύο κριτήρια συνάγεται η απόκλιση από το γεγονός ότι η $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ δεν συγκλίνει προς το 0 καθώς $n \to \infty$.

Θεώρημα 3.37. *Για οποιαδήποτε ακολουθία* $\{c_n\}$ *(*$n = 1, 2, 3, \dots$*) θετικών αριθμών ισχύει ότι*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n}$$

και

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε τη δεύτερη ανισότητα. Η απόδειξη της πρώτης είναι παρεμφερής.

Θέτουμε

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

Εάν $\alpha = +\infty$, τότε η προς απόδειξη σχέση είναι προφανής. Εάν το α είναι πεπερασμένο, τότε θεωρούμε πραγματικό αριθμό β με $\beta > \alpha$. Επομένως, υπάρχει ακέραιος αριθμός N ούτως ώστε εάν $n \ge N$, τότε

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} \le \beta.$$

Ιδιαιτέρως, για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό p έχουμε

$$c_{N+k+1} \le \beta c_{N+k} \qquad (k = 0, 1, \dots, p-1).$$

Πολλαπλασιάζοντας τις ανισότητες αυτές λαμβάνουμε

$$c_{N+p} \leq \beta^p c_N,$$

ή αλλιώς

$$c_n \leq c_N \beta^{-N} \beta^n \qquad (n \geq N).$$

Άρα, για κάθε δείκτη n με $n \geq N$ ισχύει ότι

$$\sqrt[n]{c_n} \leq \sqrt[n]{c_N \beta^{-N}} \beta$$

και επομένως

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \beta, \tag{18}$$

σύμφωνα με το Θεώρημα 3.20(β). Εφόσον η (18) αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό β με $\beta > \alpha$, διαπιστώνουμε ότι

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \alpha.$$

□

ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

Ορισμός 3.38. Δεδομένης μίας ακολουθίας $\{c_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ μιγαδικών αριθμών, η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \tag{19}$$

όπου z είναι μιγαδικός αριθμός, ονομάζεται *δυναμοσειρά.* Οι αριθμοί c_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ονομάζονται οι *συντελεστές* της σειράς.

Στη γενικότητά της, η παραπάνω σειρά θα συγκλίνει ή θα αποκλίνει, αναλόγως με την επιλογή του z. Πιο συγκεκριμένα, σε κάθε δυναμοσειρά αντιστοιχίζεται μία κυκλική περιφέρεια, ο λεγόμενος *κύκλος συγκλίσεως*, όπου η (19) θα συγκλίνει εάν ο z βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου και θα αποκλίνει εάν ο z βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου. (για την κάλυψη όλων των περιπτώσεων, θεωρούμε το επίπεδο ως το εσωτερικό κύκλου άπειρης ακτίνας και ένα σημείο ως κύκλο ακτίνας 0). Η συμπεριφορά του κύκλου συγκλίσεως είναι αρκετά πολύπλοκη και δεν μπορεί να περιγραφεί τόσο απλά.

Θεώρημα 3.39. *Δεδομένης της δυναμοσειράς* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, *θέτουμε*

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}, \qquad R = \frac{1}{\alpha}.$$

(Εάν $\alpha = 0$, *τότε* $R = +\infty$. *Εάν* $\alpha = +\infty$, *τότε* $R = 0$.*) Τότε, η* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *συγκλίνει εάν* $|z| < R$ *και αποκλίνει εάν* $|z| > R$.

Απόδειξη. Θέτουμε $a_n = c_n z^n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) και εφαρμόζουμε το κριτήριο της ρίζας:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |z| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{|z|}{R}.$$

□

Σημείωση: ο R ονομάζεται η *ακτίνα συγκλίσεως* της $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

Παράδειγμα 3.40.

(α) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ έχει ακτίνα συγκλίσεως $R = 0$.

(β) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ έχει ακτίνα συγκλίσεως $R = +\infty$. (Σε αυτήν την περίπτωση είναι πιο απλό να εφαρμοσθεί το κριτήριο του λόγου.)

(γ) Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ έχει ακτίνα συγκλίσεως $R = 1$. Εάν $|z| = 1$, τότε η σειρά αποκλίνει, εφόσον η $\{z^n\}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) δεν συγκλίνει προς το 0 καθώς $n \to \infty$.

(δ) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ έχει ακτίνα συγκλίσεως $R = 1$. Αποκλίνει εάν $z = 1$. Για κάθε άλλον μιγαδικό αριθμό z με $|z| = 1$ συγκλίνει. (Ο τελευταίος ισχυρισμός θα αποδειχθεί στο Θεώρημα 3.44.)

(ε) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ έχει ακτίνα συγκλίσεως $R = 1$. Συγκλίνει για κάθε μιγαδικό αριθμό z με $|z| = 1$, σύμφωνα με το κριτήριο συγκρίσεως, εφόσον $|z^n/n^2| = 1/n^2$ για κάθε δείκτη n.

ΑΘΡΟΙΣΗ ΚΑΤΑ ΜΕΡΗ

Θεώρημα 3.41. *Δεδομένων δύο ακολουθιών $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, θέτουμε*

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,$$

όταν $n \geq 0$ και επίσης θέτουμε $A_{-1} = 0$. Εάν $0 \leq p \leq q$, τότε ισχύει ότι

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p. \tag{20}$$

Απόδειξη. Είναι

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q} (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} A_n b_{n+1}$$

και η τελευταία έκφραση στη δεξιά πλευρά είναι σαφώς ίση με τη δεξιά πλευρά της (20). □

Ο τύπος (20), ο λεγόμενος «τύπος της μερικής αθροίσεως», είναι χρήσιμος για τη διερεύνηση σειρών της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, ιδιαιτέρως στην περίπτωση όπου η $\{b_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ είναι μονότονη. Παρακάτω δίδονται εφαρμογές.

Θεώρημα 3.42. *Υποθέτουμε ότι:*

(α) *Τα μερικά αθροίσματα A_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ σχηματίζουν μία φραγμένη ακολουθία.*

(β) $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots$.

(γ) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Τότε, η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Επιλέγουμε αριθμό M ούτως ώστε $|A_n| \leq M$ για κάθε δείκτη n. Δεδομένου $\varepsilon > 0$, υπάρχει ακέραιος αριθμός N με $b_N \leq (\varepsilon/2M)$. Για ακεραίους αριθμούς p, q με $N \leq p \leq q$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right| &= \left|\sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p\right| \\ &\leq M \left|\sum_{n=p}^{q-1}(b_n - b_{n+1}) + b_q + b_p\right| \\ &= 2Mb_p \leq 2Mb_N \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Τώρα, η σύγκλιση προκύπτει από το κριτήριο του Cauchy. Σημειώνουμε ότι η πρώτη ανισότητα στις παραπάνω σχέσεις βασίζεται στο γεγονός ότι $b_n - b_{n+1} \geq 0$ για κάθε δείκτη n. □

Θεώρημα 3.43. *Υποθέτουμε ότι:*

(α) $|c_1| \geq |c_2| \geq |c_3| \geq \cdots$.

(β) $c_{2m-1} \geq 0,\ c_{2m} \leq 0\ \ (m = 1, 2, 3, \ldots)$.

(γ) $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

Τότε, η $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *συγκλίνει.*

Οι σειρές για τις οποίες ισχύει το (β) ονομάζονται «εναλλασσόμενες σειρές». Το θεώρημα αυτό ήταν γνωστό στον Leibniz[2].

[2] Σ. τ. Μ.: Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716). Γερμανός πανεπιστήμονας. Εκτός των Μαθηματικών, διέπρεψε και συνεισέφερε ουσιωδώς στη Φυσική, στη Φιλοσοφία, στη Λογική, στη Νομική, στη Θεολογία, στην Ιστορία, στην Πολιτική Επιστήμη, στη Λογοτεχνία. Θεωρείται ως ένα από τα πιο ιδιοφυή πνεύματα της ιστορίας. Στην εποχή του θεωρούνταν ως «ο πολυμαθέστερος άνθρωπος μετά τον Αριστοτέλη». Μαζί με τον Isaac Newton (1642-1727) θεωρείται ο επινοητής του Απειροστικού Λογισμού. Επίσης, θεωρείται ο θεμελιωτής της Συνδυαστικής Αναλύσεως. Είχε οραματισθεί και είχε εργασθεί προς την επινόηση ενός καθολικού συμβολικού λογισμού με σκοπό την ενοποίηση των Μαθηματικών. Μόλις στις αρχές του εικοστού αιώνα πραγματοποιήθηκε μερικώς αυτό το όραμα του Leibniz από τους Alfred North Whitehead (1861-1947) και Bertrand Russell (1872-1970), οι οποίοι συνέχισαν το έργο του George Boole (1815-1864).

Στα δώδεκα του χρόνια ο Leibniz γνώριζε άπταιστα Λατινικά και Ελληνικά, μέσω αυτοδιδασκαλίας. Εισήχθη το έτος 1661 στο πανεπιστήμιο της γενέτειράς του πόλης Λειψίας ως φοιτητής της Νομικής, όπου συγχρόνως μελέτησε και Φυσική Φιλοσοφία. Έλαβε το πτυχίο του το έτος 1663. Το επόμενο έτος, έλαβε μεταπτυχιακό δίπλωμα στη Νομική και

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 3.42 με $a_n = (-1)^{n+1}$, $b_n = |c_n|$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. □

Θεώρημα 3.44. *Υποθέτουμε ότι η ακτίνα συγκλίσεως της* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_n$ *ισούται με 1 και ότι* $c_0 \geq c_1 \geq c_2 \geq \cdots$, $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. *Τότε, η* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_n$ *συγκλίνει σε κάθε σημείο* z *του κύκλου* $|z| = 1$, *εκτός ίσως από το* $z = 1$.

Απόδειξη. Θέτουμε $a_n = z^n$, $b_n = c_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.42 εξασφαλίζονται, εφόσον

$$|A_n| = \left|\sum_{m=0}^{n} z^m\right| = \left|\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\right| \leq \frac{2}{|1 - z|} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

εάν είναι $|z| = 1$ με $z \neq 1$. □

ΑΠΟΛΥΤΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ λέγεται ότι *συγκλίνει απολύτως* εάν και μόνον εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει.

στη Φιλοσοφία. Το έτος 1666, το Πανεπιστήμιο της Λειψίας αρνήθηκε να τον ανακηρύξει διδάκτορα. Ο Leibniz έλαβε τον τίτλο του διδάκτορα, το ίδιο έτος, από το Πανεπιστήμιο του Altdorf. Επίσης, του προσεφέρθη μία θέση καθηγητή στη Νομική, την οποία αρνήθηκε.

Ο Leibniz ακολούθησε τη δικηγορική και διπλωματική σταδιοδρομία στην αυλή του πρίγκιπα του Mainz έως το έτος 1672. Το έτος αυτό επισκέφθηκε το Παρίσι υπό την ιδιότητα του διπλωμάτη και παρέμεινε εκεί έως το 1676. Στο Παρίσι, ο Leibniz μελέτησε Μαθηματικά και Φυσική υπό τη καθοδήγηση του φυσικού Christiaan Huygens (1629-1695). Το έτος 1673, ο Leibniz εξελέγη μέλος της Βασιλικής Εταιρίας του Λονδίνου.

Ο Leibniz επέστρεψε στη Γερμανία το έτος 1676 και ετέθη υπό την υπηρεσία του δούκα του Braunschweig-Lüneberg. Ως καθήκον είχε, μεταξύ άλλων, τη συγγραφή της ιστορίας του οίκου Braunschweig-Lüneberg. Εργάσθηκε υπό τον οίκο Braunschweig-Lüneberg έως το τέλος της ζωής του.

Ο Leibniz ίδρυσε την Ακαδημία Επιστημών του Βερολίνου το έτος 1700 και υπήρξε ο ο πρώτος πρόεδρός της. Το ίδιο έτος ο Leibniz εξελέγη μέλος της Ακαδημίας των Επιστημών των Παρισίων.

Θεώρημα 3.45. *Εάν η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει απολύτως, τότε η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα προκύπτει από την ανισότητα

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \le \sum_{k=n}^{m} |a_k| \quad (m \ge n)$$

και το κριτήριο του Cauchy. □

Παρατήρηση 3.46. Για σειρές με θετικούς όρους, η έννοια της απόλυτης συγκλίσεως ταυτίζεται με την έννοια της συγκλίσεως.

Λέγεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει *μη απολύτως* εάν και μόνον εάν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει ενώ η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ αποκλίνει. Επί παραδείγματι, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

συγκλίνει μη απολύτως (Θεώρημα 3.43).

Τα κριτήρια συγκρίσεως, ρίζας και λόγου είναι κριτήρια απόλυτης συγκλίσεως και συνεπώς δεν παρέχουν πληροφορίες για την μη απόλυτη σύγκλιση. Η τελευταία περίπτωση μπορεί ορισμένες φορές να αντιμετωπισθεί με την άθροιση κατά μέρη. Ιδιαιτέρως, οι δυναμοσειρές συγκλίνουν απολύτως στο εσωτερικό του κύκλου συγκλίσεώς τους.

Παρακάτω, θα διαπιστώσουμε ότι μπορούμε να χειρισθούμε τις απολύτως συγκλίνουσες σειρές παρομοίως όπως τα πεπερασμένα αθροίσματα. Μπορούμε να τις πολλαπλασιάσουμε όρο προς όρο και να αλλάξουμε τη σειρά εκτελέσεως των προσθέσεων δίχως να μεταβληθεί το άθροισμα της σειράς. Όμως, για μη απολύτως συγκλίνουσες σειρές, τα παραπάνω δεν ισχύουν στη γενικότητά τους και πρέπει να δίδεται περισσότερη προσοχή στον χειρισμό τους.

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΣΕΙΡΩΝ

Θεώρημα 3.47. *Εάν* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ *και* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, *τότε* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = A + B$ *και* $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cA$, *για κάθε σταθερό μιγαδικό αριθμό* c.

Απόδειξη. Ας είναι

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Τότε,

$$A_n + B_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Εφόσον $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ και $\lim_{n\to\infty} B_n = B$, παρατηρούμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} (A_n + B_n) = A + B.$$

Η απόδειξη του δευτέρου ισχυρισμού είναι ακόμη απλούστερη. □

Συνεπώς, δύο συγκλίνουσες σειρές μπορούν να προστεθούν όρο προς όρο και η προκύπτουσα σειρά να συγκλίνει προς το άθροισμα των δύο σειρών. Η κατάσταση περιπλέκεται όταν θεωρήσουμε τον πολλαπλασιασμό δύο σειρών. Αρχικά, πρέπει να ορίσουμε το γινόμενο. Αυτό μπορεί να γίνει με αρκετούς τρόπους. Ένας από αυτούς είναι το «κατά Cauchy γινόμενο».

Ορισμός 3.48. Δεδομένων των σειρών $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, θέτουμε

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

και ονομάζουμε τη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ το *γινόμενο* των δεδομένων σειρών.

Ο ορισμός αυτός έχει το εξής κίνητρο: εάν θεωρήσουμε δύο δυναμοσειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, τις πολλαπλασιάσουμε όρο προς όρο και συγκεντρώσουμε τους όρους που αντιστοιχούν στην ίδια δύναμη του z, τότε λαμβάνουμε την

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n &= (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots) \\
&= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \cdots \\
&= c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots .
\end{aligned}$$

Θέτοντας $z = 1$, καταλήγουμε στον παραπάνω ορισμό.

Παράδειγμα 3.49. Εάν

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

και $A_n \to A$, $B_n \to B$ καθώς $n \to \infty$, τότε δεν είναι σαφές ότι η ακολουθία $\{C_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ θα συγκλίνει προς το AB, εφόσον δεν ισχύει (απαραιτήτως) ότι $C_n = A_n B_n$ για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n. Η εξάρτηση της $\{C_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ από τις $\{A_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ και $\{B_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ είναι περίπλοκη (ανατρέξτε στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.50). Θα δείξουμε τώρα ότι το γινόμενο δύο συγκλινουσών σειρών μπορεί να αποκλίνει.

Η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

συγκλίνει (Θεώρημα 3.43). Σχηματίζουμε το γινόμενο της σειράς αυτής με τον εαυτό της και αποκτούμε την

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c_n &= 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \cdots\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Εφόσον

$$(n-k+1)(k+1) = \left(\frac{n}{2} + 1\right)^2 - \left(\frac{n}{2} - k\right)^2 \le \left(\frac{n}{2} + 1\right)^2,$$

έχουμε ότι

$$|c_n| \ge \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

επομένως η συνθήκη $c_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$, η οποία είναι αναγκαία για την σύγκλιση της $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, δεν ικανοποιείται.

Σε αντιδιαστολή με το επόμενο θεώρημα, το οποίο οφείλεται στον Mertens[3], στο προηγούμενο παράδειγμα θεωρήσαμε το γινόμενο μη απολύτως συγκλινουσών σειρών.

Θεώρημα 3.50. *Υποθέτουμε ότι:*

(α) *Η* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει απολύτως.*

(β) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A.$

(γ) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B.$

(δ) $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$

Τότε,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB.$$

Δηλαδή, το γινόμενο δύο συγκλινουσών σειρών συγκλίνει, και μάλιστα στην επιθυμητή τιμή, εάν τουλάχιστον μία από αυτές συγκλίνει απολύτως.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k, \quad \beta_n = B_n - B \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Τότε, για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} C_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) \\ &= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_n B_0 \\ &= a_0 (B + \beta_n) + a_1 (B + \beta_{n-1}) + \cdots + a_n (B + \beta_0) \\ &= A_n B + a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_0. \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$\gamma_n = a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

[3] Σ. τ. Μ.: Franz Mertens (1840-1927). Πρώσος μαθηματικός που εργάσθηκε στη Θεωρία Αριθμών και στην Άλγεβρα. Είχε ως δασκάλους τους Leopold Kronecker (1823-1891) και Ernst Kummer (1810-1893).

Επιθυμούμε να δείξουμε ότι $C_n \to AB$ καθώς $n \to \infty$. Εφόσον $A_n B \to AB$ καθώς $n \to \infty$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0. \tag{21}$$

Θέτουμε

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

(Εδώ είναι το σημείο που χρησιμοποιούμε το (α).) Ας είναι $\varepsilon > 0$. Σύμφωνα με το (γ), $\beta_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Συνεπώς, υπάρχει ακέραιος αριθμός N ούτως ώστε εάν $n \geq N$, τότε $|\beta_n| \leq \varepsilon$. Σε αυτήν την περίπτωση, για $n \geq N$ έχουμε

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\leq |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + |\beta_{N+1} a_{n-N-1} + \cdots + \beta_n a_0| \\ &\leq |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + \varepsilon\alpha. \end{aligned}$$

Διατηρώντας τον N σταθερό και λαμβάνοντας $n \to \infty$ προκύπτει ότι

$$\limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| \leq \varepsilon\alpha,$$

διότι $a_k \to 0$ καθώς $k \to \infty$. Εφόσον ο ε είναι τυχών θετικός αριθμός, έπεται η (21). □

Ένα άλλο ερώτημα που προκύπτει είναι εάν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ έχει ως άθροισμα το AB όταν συγκλίνει. Ο Abel[4] απέδειξε ότι η απάντηση είναι καταφατική.

---

[4] Σ. τ. Μ.: Niels Henrik Abel (1802-1829). Διάσημος ιδιοφυής Νορβηγός μαθηματικός, ο οποίος πέθανε σε πολύ νεαρή ηλικία από φυματίωση.

Καταγόμενος από ιδιαιτέρως φτωχή οικογένεια, ο Abel επωμίσθηκε από μικρός την ευθύνη για τη φροντίδα της οικογενείας του, λόγω του προώρου θανάτου του πατέρα του, και ποτέ δεν κατάφερε να απαλλαγεί από το βαρύ φορτίο της φτώχειας.

Το έτος 1821 ο Abel εισήλθε στο Πανεπιστήμιο της Χριστιανίας (σημερινό Oslo), από όπου και απεφοίτησε το 1822. Ως όνειρό του είχε την κατάκτηση μίας ακαδημαϊκής θέσεως ούτως ώστε να λύσει τις βιοποριστικές του ανάγκες και να εντρυφήσει απρόσκοπτα στις μαθηματικές του έρευνες. Παρά τις προσπάθειές του, καθώς και τις προσπάθειες του δασκάλου του, Bernt Michael Holmboë (1795-1850), ο Abel δεν κατάφερε να πραγματοποιήσει το όνειρό του. Έλαβε μία υποτροφία για σπουδές στη Γαλλία και στη Γερμανία το έτος 1824, όπου και

Θεώρημα 3.51. *Εάν οι σειρές* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *συγκλίνουν προς τα* A, B, C *αντιστοίχως και* $c_n = a_0 b_n + \cdots + a_n b_0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, *τότε* $C = AB$.

Στο παραπάνω δεν γίνεται καμία υπόθεση σε σχέση με την απόλυτη σύγκλιση. Θα παρουσιάσουμε μία απλή απόδειξη (η οποία βασίζεται στη συνέχεια των δυναμοσειρών) ύστερα από το Θεώρημα 8.2.

ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

κατέθεσε μία διατριβή του στον κορυφαίο μαθηματικό της εποχής Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Στη διατριβή αυτή παρουσίαζε την απόδειξη για το αδύνατο της επιλύσεως της γενικής πεμπτοβάθμιας πολυωνυμικής εξισώσεως, ένα σημαντικό πρόβλημα που απασχόλησε τους μαθηματικούς για αιώνες, και είχε την πεποίθηση ότι ο Gauss, με την επιρροή που είχε, θα άνοιγε την οδό στη μαθηματική σταδιοδρομία του Abel. Ο Gauss, λόγω της φημισμένης υπεροψίας του και ενδεχομένως του φόβου περί ανταγωνισμού, απαξίωσε να διαβάσει την εργασία του Abel, απορρίπτοντάς την αμέσως. Στη Γαλλία, ο Abel υπέβαλε το έτος 1826 στην Ακαδημία Επιστημών των Παρισίων μία εργασία περί υπερβατικών συναρτήσεων. Ως κριτές της εργασίας αυτής ορίσθηκαν οι διάσημοι μαθηματικοί Adrien Marie Legendre (1752-1833) και Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Ο τελευταίος έχασε την εργασία του Abel. Ως άλλοθι, προβλήθηκε ο ισχυρισμός ότι η εργασία ήταν κακογραμμένη και δυσανάγνωστη. Ζητήθηκε από τον Abel η υποβολή νέου αντιτύπου, γεγονός που δεν έγινε ποτέ.

Λόγω των οικονομικών δυσκολιών, ο Abel επέστρεψε το έτος 1827 στην Χριστιανία όπου επιδόθηκε στην ιδιωτική διδασκαλία ούτως ώστε να εξασφαλίσει τα μέσα συντηρήσεώς του. Το Πανεπιστήμιο της Χριστιανίας του προσέφερε μία προσωρινή θέση διδακτικών καθηκόντων αντί πινακίου φακής.

Στα τέλη του έτους 1828 ο Abel πήγε στη Florand, για να είναι κοντά στη μνηστή του, όπου και πέθανε.

Δύο μέρες μετά το θάνατο του Abel, ο August Leopold Crelle (1780-1856), ο ιδρυτής του φημισμένου μαθηματικού περιοδικού *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, του πρώτου αφιερωμένου εξ ολοκλήρου στα Μαθηματικά επιστημονικού περιοδικού, του έστειλε μία επιστολή ενημερώνοντάς τον ότι το Πανεπιστήμιο του Βερολίνου του προσέφερε την έδρα Μαθηματικών.

Σύμφωνα με τη ρήση του διαπρεπούς Γάλλου μαθηματικού του δεκάτου ενάτου αιώνα Charles Hermite (1822-1901), «το έργο του Abel είναι ικανό να απασχολήσει τους μαθηματικούς για τους επόμενους πέντε αιώνες».

Ορισμός 3.52. Ας είναι $\{k_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ μία ακολουθία ακεραίων αριθμών, στην οποία κάθε ακέραιος αριθμός εμφανίζεται ως όρος της μία και μόνο μία φορά (δηλαδή η $\{k_n\}$ είναι 1-1 συνάρτηση από το J επί του J, με χρήση του συμβολισμού στον Ορισμό 2.2). Θέτοντας

$$a'_n = a_{k_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ ονομάζεται *αναδιάταξη* της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Εάν $\{s_n\}$, $\{s'_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι οι αντίστοιχες ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων των $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$, τότε διαπιστώνουμε εύκολα ότι, σε γενικές γραμμές, οι ακολουθίες αυτές απαρτίζονται από εντελώς διαφορετικούς αριθμούς. Συνεπώς, οδηγούμαστε στο πρόβλημα καθορισμού συνθηκών υπό τις οποίες αναδιατάξεις συγκλινουσών σειρών συγκλίνουν και στο εάν τα αντίστοιχα αθροίσματα ταυτίζονται.

Παράδειγμα 3.53. Θεωρούμε τη σειρά

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots \tag{22}$$

και μία αναδιάταξή της

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots, \tag{23}$$

στην οποία δύο θετικοί όροι ακολουθούνται από έναν αρνητικό όρο. Εάν s είναι το άθροισμα της (22), τότε

$$s < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Εφόσον

$$\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} > 0$$

για $k \geq 1$, διαπιστώνουμε ότι $s'_3 < s'_6 < s'_9 < \cdots$, όπου s'_n είναι το n τάξεως μερικό άθροισμα της (23). Άρα,

$$\limsup_{n\to\infty} s'_n > s'_3 = \frac{5}{6},$$

επομένως η (23) δεν συγκλίνει προς το s. (Η επαλήθευση της συγκλίσεως της (23) αφήνεται στον αναγνώστη).

Το παράδειγμα αυτό είναι διευκρινιστικό σε σχέση με το επόμενο θεώρημα, το οποίο οφείλεται στον Riemann[5].

Θεώρημα 3.54. *Θεωρούμε μία σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *πραγματικών αριθμών που*

[5] Σ. τ. Μ: Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866). Σπουδαίος Γερμανός μαθηματικός. Εργάσθηκε στην Ανάλυση, στη Γεωμετρία και στη Μαθηματική Φυσική. Από την εργασία του Riemann επηρεάσθηκε ο Albert Einstein (1879-1955) και εμπνεύσθηκε τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας. Ο Riemann ήταν αυτός που έθεσε τη γνωστή υπόθεση που φέρει το όνομά του, για τις θέσεις μηδενισμού της συναρτήσεως ζήτα.

Ο Riemann καταγόταν από φτωχή οικογένεια. Οι στερήσεις στη παιδική ηλικία του είχαν ως αποτέλεσμα να αποκτήσει ασθενική κράση. Από μικρός έδειξε ενδιαφέρον και ιδιαίτερη κλίση προς τα Μαθηματικά, αφήνοντας έκπληκτους τους δασκάλους του. Προς επιθυμία του πατέρα του, ο οποίος ήταν ιερέας των Διαμαρτυρομένων Χριστιανών, ο Riemann εισήλθε στο Πανεπιστήμιο του Göttingen το έτος 1846 με σκοπό να σπουδάσει Θεολογία και Φιλοσοφία. Ύστερα από ένα έτος σπουδών, ο Riemann εστράφη στη σπουδή των Μαθηματικών, λαμβάνοντας πρώτα την άδεια του πατέρα του. Έφυγε για το Βερολίνο, όπου φοίτησε στο τοπικό πανεπιστήμιο υπό τους Gustav Peter Lejeune Dirichlet (1805-1859), Jacob Steiner (1796-1863), Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) και Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823-1852). Ο Riemann επέστρεψε στο Göttingen το έτος 1849 για να συμπληρώσει τις σπουδές του και να ετοιμάσει τη διδακτορική του διατριβή. Το έτος 1851 ο Riemann υπέβαλε την διδακτορική του διατριβή προς κρίση στον Carl Friedrich Gauss (1777-1855), ο οποίος και ενθουσιάστηκε, γεγονός σπάνιο για αυτόν. Τρία έτη μετά, ο Riemann διορίσθηκε σε μία άμισθη θέση υφηγητή στο Göttingen, ύστερα από ένθερμη πρόταση του Gauss.

Όταν πέθανε ο Gauss το έτος 1855, τον διαδέχθηκε ο Dirichlet και το Πανεπιστήμιο του Göttingen ενέκρινε μία ετήσια επιχορήγηση στον Riemann. Η κοπιαστική εργασία, συνδυασμένη με την κακή υγεία, οδήγησε το έτος 1856 τον Riemann σε κατάρρευση. Το επόμενο έτος ο Riemann έγινε επίκουρος καθηγητής στο Göttingen και δύο έτη αργότερα διαδέχθηκε τον Dirichlet στη θέση του τακτικού καθηγητή, ύστερα από τον θάνατο του τελευταίου.

Το έτος 1862 ο Riemann παντρεύτηκε και τον ίδιο χρόνο προσεβλήθη από φυματίωση. Για να αναρρώσει, πήγε στην Ιταλία. Εκεί γνώρισε ορισμένους από τους σπουδαίους Ιταλούς μαθηματικούς της εποχής. Του προσεφέρθη μία έδρα στο Πανεπιστήμιο της Pisa, την οποία αρνήθηκε. Επέστρεψε σύντομα στη Γερμανία, αλλά αρρώστησε ξανά και πήγε πάλι στην Ιταλία το έτος 1863, όπου και γεννήθηκε η κόρη του. Έκανε ακόμη μία φορά το ταξίδι μεταξύ Ιταλίας και Γερμανίας, και τελικά επέστρεψε στην Ιταλία, όπου και άφησε την τελευταία του πνοή το έτος 1866. Τιμώντας την θεοσέβεια του Riemann, οι Ιταλοί φίλοι του ανέγειραν μία επιτύμβια στήλη με την εξής επιγραφή: «Όλα τα πράγματα συνεργούν προς το καλό για εκείνους που αγαπούν τον Θεό».

συγκλίνει μη απολύτως. Υποθέτουμε ότι

$$-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty.$$

Τότε, υπάρχει μία αναδιάταξη $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ *με ακολουθία μερικών αθροισμάτων την* s'_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ *ούτως ώστε*

$$\liminf_{n\to\infty} s'_n = \alpha, \qquad \limsup_{n\to\infty} s'_n = \beta. \tag{24}$$

Απόδειξη. Θέτουμε

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Τότε, $p_n - q_n = a_n$, $p_n + q_n = |a_n|$, $p_n \geq 0$, $q_n \geq 0$, για κάθε δείκτη n. Οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ πρέπει να αποκλίνουν και οι δύο.

Εάν συνέκλιναν και οι δύο, τότε και η

$$\sum_{n=1}^{\infty}(p_n + q_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

θα συνέκλινε, γεγονός που αντιβαίνει στην υπόθεση. Εφόσον

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N}(p_n - q_n) = \sum_{n=1}^{N} p_n - \sum_{n=1}^{N} q_n \quad (N = 1, 2, 3, \dots),$$

απόκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ και σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ (και αντιστρόφως) συνεπάγεται απόκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, γεγονός που αντιβαίνει στην υπόθεση.

Ας είναι τώρα $P_1, P_2, P_3, \dots$ οι μη αρνητικοί όροι της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, με τη σειρά που εμφανίζονται, και $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ οι απόλυτες τιμές των αρνητικών όρων της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, επίσης με τη σειρά που εμφανίζονται.

Οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ διαφέρουν αντιστοίχως από τις $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ μόνον κατά μηδενικούς όρους και συνεπώς είναι αποκλίνουσες.

Θα κατασκευάσουμε ακολουθίες θετικών ακεραίων αριθμών $\{m_n\}$, $\{k_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ ούτως ώστε η σειρά

$$\begin{aligned} &P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} + \\ &+ P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} - Q_{k_1+1} - \cdots - Q_{k_2} + \cdots , \end{aligned} \tag{25}$$

η οποία είναι προφανώς αναδιάταξη της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, να ικανοποιεί την (24).

Επιλέγουμε ακολουθίες πραγματικών αριθμών $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ ούτως ώστε $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$ καθώς $n \to \infty$, με $\alpha_n < \beta_n$ για κάθε δείκτη n και $\beta_1 > 0$.

Ας είναι m_1, k_1 οι μικρότεροι θετικοί ακέραιοι αριθμοί με

$$P_1 + \cdots + P_{m_1} > \beta_1,$$
$$P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} < \alpha_1.$$

Ας είναι m_2, k_2 οι μικρότεροι θετικοί ακέραιοι αριθμοί με

$$\begin{aligned}
&P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} > \beta_2,\\
&P_1 + \cdots + P_{m_1} - Q_1 - \cdots - Q_{k_1}\\
&+P_{m_1+1} + \cdots + P_{m_2} - Q_{k_1+1} - \cdots - Q_{k_2} < \alpha_2.
\end{aligned}$$

Συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο. Αυτό είναι δυνατό διότι οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ αποκλίνουν.

Εάν x_n, y_n είναι τα n τάξεως μερικά αθροίσματα της (25), των οποίων οι τελικοί όροι είναι αντιστοίχως οι $P_{m_n}, -Q_{k_n}$, τότε

$$|x_n - \beta_n| \le P_{m_n}, \qquad |y_n - \alpha_n| \le Q_{k_n}$$

για κάθε δείκτη n. Εφόσον $P_n \to 0$, $Q_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$, βρίσκουμε ότι $x_n \to \beta$, $y_n \to \alpha$ καθώς $n \to \infty$.

Καταλήγοντας, είναι σαφές ότι δεν υπάρχει αριθμός μεταξύ των α και β ο οποίος να είναι υπακολουθιακό όριο των μερικών αθροισμάτων της (25). □

Θεώρημα 3.55. *Εάν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι σειρά μιγαδικών αριθμών η οποία συγκλίνει απολύτως, τότε κάθε αναδιάταξη της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει προς το αρχικό άθροισμα.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι s_n είναι το n τάξεως μερικό άθροισμα της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ας είναι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ μία αναδιάταξη με μερικό άθροισμα n τάξεως το s_n'. Για $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακέραιος αριθμός N ούτως ώστε εάν $m \ge n \ge N$, τότε

$$\sum_{i=n}^{m} |a_i| \le \varepsilon. \tag{26}$$

Θεωρούμε έναν ακέραιο αριθμό p ούτως ώστε οι ακέραιοι αριθμοί $1, 2, \dots, N$ να περιέχονται στους $k_1, k_2, \dots, k_p$ (σύμφωνα με το συμβολισμό του Ορισμού 3.52). Τότε, εάν $n > p$, οι αριθμοί $a_1, \dots, a_N$ θα αναιρούνται στη διαφορά $s_n - s'_n$ και επομένως $|s_n - s'_n| \leq \varepsilon$, λόγω της (26). Συνεπώς, η $\{s'_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ συγκλίνει προς το άθροισμα της $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ καθώς $n \to \infty$. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Αποδείξτε ότι η σύγκλιση της $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ συνεπάγεται τη σύγκλιση της $\{|s_n|\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$. Αληθεύει το αντίστροφο;

Άσκηση 2. Υπολογίστε το $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2 + n} - n)$.

Άσκηση 3. Εάν $s_1 = \sqrt{2}$ και

$$s_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{s_n}} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

τότε αποδείξτε ότι η $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ συγκλίνει και ότι $s_n < 2$ για $n = 1, 2, 3, \dots$.

Άσκηση 4. Υπολογίστε τα ανώτερα και κατώτερα όρια της ακολουθίας $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, η οποία ορίζεται από τις σχέσεις

$$s_1 = 0, \qquad s_{2m} = \frac{s_{2m-1}}{2}, \qquad s_{2m+1} = \frac{1}{2} + s_{2m} \qquad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Άσκηση 5. Για δύο οποιεσδήποτε ακολουθίες πραγματικών αριθμών $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ αποδείξτε ότι

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n,$$

με δεδομένο ότι το άθροισμα στη δεξιά πλευρά δεν είναι της μορφής $\infty - \infty$.

Άσκηση 6. Διερευνήστε τη συμπεριφορά ως προς τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, εάν

(α) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

(β) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$,

(γ) $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$,

(δ) $a_n = \dfrac{1}{1+z^n}$, όπου z είναι κατάλληλος μιγαδικός αριθμός ούτως ώστε να ορίζεται η παράσταση.

Άσκηση 7. Αποδείξτε ότι η σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συνεπάγεται τη σύγκλιση της

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$$

όταν $a_n \geq 0$ για κάθε δείκτη n.

Άσκηση 8. Εάν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και η $\{b_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ είναι φραγμένη, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.

Άσκηση 9. Υπολογίστε την ακτίνα συγκλίσεως κάθε μίας από τις παρακάτω σειρές:

(α) $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 z^n$.

(β) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!} z^n$.

(γ) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^2} z^n$.

(δ) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^3}{3^n} z^n$.

Άσκηση 10. Υποθέτουμε ότι οι συντελεστές της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ είναι ακέραιοι αριθμοί, από τους οποίους άπειροι στο πλήθος είναι διάφοροι από το 0. Αποδείξτε ότι η ακτίνα συγκλίσεως της δυναμοσειράς είναι το πολύ ίση με 1.

Άσκηση 11. Υποθέτουμε ότι $a_n > 0$ και $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ για κάθε δείκτη n και ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

(α) Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1+a_n}$ αποκλίνει.

(β) Αποδείξτε ότι

$$\frac{a_{N+1}}{s_{N+1}} + \cdots + \frac{a_{N+k}}{s_{N+k}} \geq 1 - \frac{s_N}{s_{N+k}}$$

για οποιουσδήποτε θετικούς ακεραίους αριθμούς N και k και συμπεράνετε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ αποκλίνει.

(γ) Αποδείξτε ότι

$$\frac{a_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$$

για κάθε δείκτη n και συμπεράνετε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$ συγκλίνει.

(δ) Τι μπορεί να ειπωθεί για τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n} \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 a_n};$$

Άσκηση 12. Υποθέτουμε ότι $a_n > 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ και ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Θέτουμε

$$r_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

(α) Αποδείξτε ότι

$$\frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} > 1 - \frac{r_n}{r_m},$$

για οποιουσδήποτε δείκτες m, n με $m < n$ και συμπεράνετε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n}$ αποκλίνει.

(β) Αποδείξτε ότι

$$\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}),$$

για κάθε δείκτη n και συμπεράνετε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ συγκλίνει.

Άσκηση 13. Αποδείξτε ότι το κατά Cauchy γινόμενο δύο απολύτως συγκλινουσών σειρών συγκλίνει απολύτως.

Άσκηση 14. Εάν $\{s_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ είναι μία ακολουθία μιγαδικών όρων, τότε ορίζουμε τον *αριθμητικό μέσο* της, σ_n $(n = 0, 1, 2, \dots)$, από τη σχέση

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}, \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

(α) Εάν $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, τότε αποδείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s$.

(β) Κατασκευάστε μία αποκλίνουσα ακολουθία $\{s_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ για την οποία να ισχύει $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

(γ) Είναι δυνατό να συμβαίνει $s_n > 0$ για κάθε δείκτη n και $\limsup_{n\to\infty} s_n = \infty$, παρά το γεγονός ότι $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$;

(δ) Θέτουμε $a_n = s_n - s_{n-1}$ για $n = 1, 2, 3, \dots$. Δείξτε ότι

$$s_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k a_k$$

για κάθε δείκτη n. Υποθέτουμε ότι $\lim_{n\to\infty}(n a_n) = 0$ και ότι η $\{\sigma_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι η $\{s_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ συγκλίνει. (Αυτό παρέχει ένα αντίστροφο του (α), υπό την επιπρόσθετη υπόθεση $n a_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.)

(ε) Αποδείξτε το τελευταίο συμπέρασμα χρησιμοποιώντας μία ασθενέστερη υπόθεση: Υποθέστε ότι M είναι ένας πραγματικός αριθμός με $|n a_n| \leq M$ για κάθε δείκτη n, και ότι $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$. Σε αυτήν την περίπτωση, αποδείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} s_n = \sigma$, συμπληρώνοντας το ακόλουθο αποδεικτικό σχεδιάγραμμα:

Εάν $m < n$, τότε

$$s_n - \sigma_n = \frac{m+1}{n-m}(\sigma_n - \sigma_m) + \frac{1}{n-m} \sum_{i=m+1}^{n} (s_n - s_i).$$

Για δείκτη i με $i \geq m$,

$$|s_n - s_i| \leq \frac{(n-i)M}{i+1} \leq \frac{(n-m-1)M}{m+2}.$$

Θεωρήστε $\varepsilon > 0$ και αντιστοιχίστε σε κάθε ακέραιο αριθμό n τον ακέραιο αριθμό m που ικανοποιεί την

$$m \leq \frac{n-\varepsilon}{1+\varepsilon} < m+1.$$

Τότε, $(m+1)/(n-m) \leq 1/\varepsilon$ και $|s_n - s_i| < M\varepsilon$. Συνεπώς,

$$\limsup_{n\to\infty} |s_n - \sigma| \leq M\varepsilon.$$

Εφόσον ο ε είναι τυχών θετικός αριθμός, $\lim_{n\to\infty} s_n = \sigma$.

Άσκηση 15. Ο Ορισμός 3.21 μπορεί να επεκταθεί στην περίπτωση όπου η ακολουθία $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ βρίσκεται σε κάποιον Ευκλείδειο χώρο R^k. Η απόλυτη σύγκλιση ορίζεται ως σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{a}_n|$. Δείξτε ότι τα Θεωρήματα 3.22, 3.23, 3.25(α), 3.33, 3.34, 3.42, 3.45, 3.47 και 3.55 παραμένουν αληθή σε αυτό το γενικότερο πλαίσιο. (Απαιτούνται μόνον ελαφρές τροποποιήσεις στις αποδείξεις.)

Άσκηση 16. Θεωρούμε ένα θετικό αριθμό α. Επιλέγουμε $x_1 > \sqrt{\alpha}$ και ορίζουμε τους $x_2, x_3, x_4, \dots$ μέσω της αναδρομικής σχέσεως

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

(α) Αποδείξτε ότι η $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι φθίνουσα και ότι $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{\alpha}$.

(β) Θέτουμε $\varepsilon_n = x_n - \sqrt{\alpha}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$. Αποδείξτε ότι

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{2x_n} < \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{\alpha}}$$

για κάθε δείκτη n και επομένως, θέτοντας $\beta = 2\sqrt{\alpha}$,

$$\varepsilon_{n+1} < \beta \left(\frac{\varepsilon_1}{\beta}\right)^{2^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

(γ) Το παραπάνω αποτελεί έναν καλό αλγόριθμο για τον υπολογισμό τετραγωνικών ριζών, εφόσον η αναδρομική σχέση είναι απλή και η σύγκλιση εξαιρετικά ταχεία. Επί παραδείγματι, εάν $\alpha = 3$ και $x_1 = 2$, τότε δείξτε ότι $\varepsilon_1/\beta < 1/10$ και επομένως

$$\varepsilon_5 < 4 \cdot 10^{-16}, \qquad \varepsilon_6 < 4 \cdot 10^{-32}.$$

Άσκηση 17. Θεωρούμε $\alpha > 1$. Επιλέγουμε $x_1 > \sqrt{\alpha}$ και ορίζουμε

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + x_n}{1 + x_n} = x_n + \frac{\alpha - x_n^2}{1 + x_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

(α) Αποδείξτε ότι $x_1 > x_3 > x_5 > \cdots$.

(β) Αποδείξτε ότι $x_2 < x_4 < x_6 < \cdots$.

(γ) Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{\alpha}$.

(δ) Συγκρίνετε την ταχύτητα συγκλίσεως αυτής της μεθόδου με αυτήν που περιγράφεται στην Άσκηση 16.

Άσκηση 18. Αντικαταστήστε την αναδρομική σχέση στην Άσκηση 16 με την

$$x_{n+1} = \frac{p-1}{p} x_n + \frac{\alpha}{p} x_n^{-p+1} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

όπου p είναι σταθερός θετικός ακέραιος αριθμός, και περιγράψτε τη συμπεριφορά της προκύπτουσας ακολουθίας $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$.

Άσκηση 19. Σε κάθε ακολουθία $a = \{\alpha_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, όπου κάθε α_n ισούται με 0 ή 2, αντιστοιχίζουμε τον πραγματικό αριθμό

$$x(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n}.$$

Αποδείξτε ότι το σύνολο των αριθμών της μορφής $x(a)$ είναι το σύνολο του Cantor που περιγράφεται στην Ενότητα 2.44.

Άσκηση 20. Υποθέτουμε ότι $\{p_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι μία ακολουθία Cauchy σε έναν μετρικό χώρο X και ότι κάποια υπακολουθία της $\{p_{n_i}\}$ $(i = 1, 2, 3, \dots)$ συγκλίνει προς κάποιο σημείο $p \in X$. Αποδείξτε ότι η $\{p_n\}$ συγκλίνει προς το p.

Άσκηση 21. Αποδείξτε το ακόλουθο ανάλογο του Θεωρήματος 3.10(β): Εάν $\{E_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι μία ακολουθία κλειστών και φραγμένων συνόλων σε έναν *πλήρη* μετρικό χώρο X, εάν $E_{n+1} \subset E_n$ για κάθε δείκτη n και εάν

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} E_n = 0,$$

τότε το $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ αποτελείται από ακριβώς ένα σημείο.

Άσκηση 22. Υποθέτουμε ότι X είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος και ότι $\{G_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι μία ακολουθία πυκνών και ανοικτών υποσυνόλων του X. Αποδείξτε το *θεώρημα του Baire* δηλαδή ότι το $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι μη κενό. (Στην πραγματικότητα, είναι πυκνό στον X.)

Υπόδειξη: Βρείτε μία συρρικνούμενη ακολουθία περιοχών $\{E_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ ούτως ώστε $\overline{E_n} \subset G_n$ για κάθε δείκτη n και εφαρμόστε την Άσκηση (21).

Άσκηση 23. Υποθέτουμε ότι $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι ακολουθίες Cauchy σε έναν μετρικό χώρο X. Δείξτε ότι η ακολουθία $\{d(p_n, q_n)\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ συγκλίνει.

Υπόδειξη: Για οποιουσδήποτε δείκτες n, m ισχύει ότι

$$d(p_n, q_n) \le d(p_n, p_m) + d(p_m, q_m) + d(q_m, q_n).$$

Από αυτό έπεται ότι η ποσότητα

$$|d(p_n, q_n) - d(p_m, q_m)|$$

είναι επαρκώς μικρή, όταν οι n, m είναι επαρκώς μεγάλοι.

Άσκηση 24. Ας είναι X ένας μετρικός χώρος.

(α) Ονομάζουμε δύο ακολουθίες Cauchy $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ στον X *ισοδύναμες* εάν και μόνον εάν

$$\lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n) = 0.$$

Αποδείξτε ότι η σχέση αυτή αποτελεί σχέση ισοδυναμίας.

(β) Ας είναι $X^\star$ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας[6] της παραπάνω σχέσεως. Εάν $P \in X^\star$, $Q \in X^\star$ με $\{p_n\} \in P$, $\{q_n\} \in Q$, τότε ορίζουμε

$$\Delta(P, Q) = \lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n).$$

Σύμφωνα με την Άσκηση 23, το όριο υπάρχει. Αποδείξτε ότι ο αριθμός $\Delta(P, Q)$ παραμένει αμετάβλητος εάν οι $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ αντικατασταθούν από ισοδύναμές τους ακολουθίες και ότι η Δ είναι μετρική στο $X^\star$.

(γ) Αποδείξτε ότι ο προκύπτων μετρικός χώρος $X^\star$ είναι πλήρης.

(δ) Για κάθε $p \in X$ υπάρχει μία ακολουθία Cauchy, της οποίας όλοι οι όροι ισούνται με p. Υποθέτουμε ότι P_p είναι το στοιχείο του $X^\star$ που αντιστοιχεί σε αυτήν την ακολουθία. Αποδείξτε ότι

$$\Delta(P_p, P_q) = d(p, q)$$

για κάθε $p, q \in X$. Με διαφορετική διατύπωση, η απεικόνιση φ που ορίζεται μέσω της σχέσεως $\varphi(p) = P_p$ $(p \in X)$ είναι *ισομετρία* (δηλαδή απεικόνιση που διατηρεί τις αποστάσεις) από τον X στον $X^\star$.

(ε) Αποδείξτε ότι το $\varphi(X)$ είναι πυκνό στον $X^\star$ και ότι $\varphi(X) = X^\star$ εάν ο X είναι πλήρης. Σύμφωνα με το (δ), μπορούμε να ταυτίσουμε το $\varphi(X)$ με το X και να θεωρήσουμε τον X εντός του πλήρους μετρικού χώρου $X^\star$. Ονομάζουμε τον $X^\star$ *πλήρωση* του X.

Άσκηση 25. Ας είναι X ο μετρικός χώρος των ρητών αριθμών, με μετρική την $d(x, y) = |x - y|$ $(x, y \in X)$. Ποια είναι η πλήρωση αυτού του χώρου; (Συγκρίνετε με την Άσκηση 24.)

[6] Σ. τ. Μ.: Ας είναι $\sim$ μία σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο E και $x \in E$. Το σύνολο C_x όλων των στοιχείων $y \in E$ με $y \sim x$ ονομάζεται *κλάση ισοδυναμίας* του x (ως προς την $\sim$).

Κεφάλαιο 4

ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Η έννοια της συναρτήσεως καθώς και ορισμένες από τις σχετικές έννοιες παρουσιάστηκαν στους Ορισμούς 2.1 και 2.2. Αν και στα επόμενα κεφάλαια θα ασχοληθούμε κυρίως με πραγματικές και μιγαδικές συναρτήσεις (δηλαδή με συναρτήσεις που λαμβάνουν ως τιμές πραγματικούς και μιγαδικούς αριθμούς), θα ενδιαφερθούμε επίσης και για διανυσματικές συναρτήσεις (δηλαδή συναρτήσεις που λαμβάνουν τιμές στον R^k) όπως και για συναρτήσεις με τιμές σε τυχόντα μετρικό χώρο. Τα θεωρήματα τα οποία θα πραγματευθούμε σε αυτό το γενικό πλαίσιο δεν απλοποιούνται εάν περιορισθούμε, για παράδειγμα, σε πραγματικές συναρτήσεις. Ακόμη, η διατύπωση και η απόδειξη των θεωρημάτων στη γενικότητά τους διαφωτίζει την εικόνα που έχουμε και μας διευκολύνει να αγνοήσουμε επιπρόσθετες υποθέσεις.

Τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων που εμφανίζονται θα είναι επίσης μετρικοί χώροι, επιλεγμένοι καταλλήλως για τις διάφορες περιστάσεις.

ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ορισμός 4.1. Θεωρούμε δύο μετρικούς χώρους X, Y. Υποθέτουμε ότι $E \subset X$, ότι η συνάρτηση f απεικονίζει το E στον Y και ότι p είναι ένα οριακό σημείο του E. Γράφουμε $f(x) \to q$ καθώς $x \to p$ ή αλλιώς

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \tag{1}$$

εάν και μόνον εάν υπάρχει ένα σημείο $q \in Y$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ούτως ώστε

$$d_Y(f(x), q) < \varepsilon \tag{2}$$

για κάθε $x \in E$ με

$$0 < d_X(x, p) < \delta. \tag{3}$$

(Εδώ, με d_X, d_Y συμβολίζουμε τις μετρικές των X, Y αντιστοίχως.) Σε αυτήν την περίπτωση, ο q ονομάζεται *όριο της f στο p*.

Εάν ο X και/ή ο Y είναι η πραγματική ευθεία, το μιγαδικό επίπεδο ή κάποιος Ευκλείδειος χώρος R^k, τότε οι d_X, d_Y είναι φυσικά οι κατάλληλες μετρικές (ανατρέξτε στην Ενότητα 2.16).

Πρέπει να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι $p \in X$, αλλά το p δεν είναι απαραιτήτως σημείο του E. Επιπλέον, ακόμη και στην περίπτωση που $p \in E$, μπορούμε κάλλιστα να έχουμε $f(p) \neq \lim_{x \to p} f(x)$.

Μπορούμε να ανασχεδιάσουμε τον παραπάνω ορισμό με χρήση ορίων ακολουθιών:

Θεώρημα 4.2. *Υποθέτουμε ότι τα X, Y, E, f και p έχουν το ίδιο νόημα όπως στον Ορισμό 4.1. Τότε,*

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \tag{4}$$

εάν και μόνον εάν

$$\lim_{n\to\infty} f(p_n) = q \tag{5}$$

για κάθε ακολουθία $\{p_n\}$ *(*$n = 1, 2, 3, \ldots$*) του* E *με*

$$p_n \neq p \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \qquad \lim_{n\to\infty} p_n = p. \tag{6}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η ισχύει η (4). Θεωρούμε μία ακολουθία $\{p_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) του E, η οποία ικανοποιεί την (6). Ας είναι $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχει $\delta > 0$ ούτως ώστε $d_Y(f(x), q) < \varepsilon$ εάν $x \in E$ και $0 < d_X(x, p) < \delta$. Επίσης, υπάρχει ακέραιος αριθμός N ούτως ώστε εάν $n > N$, τότε $0 < d_X(p_n, p) < \delta$. Συνεπώς, για κάθε δείκτη n με $n > N$ έχουμε ότι $d_Y(f(p_n), q) < \varepsilon$, γεγονός το οποίο φανερώνει ότι ισχύει η (5).

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι η (4) είναι ψευδής. Τότε, υπάρχει κάποιο $\varepsilon > 0$ ούτως ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει ένα σημείο $x \in E$ (το οποίο εξαρτάται από το δ), για το οποίο ισχύει ότι $d_Y(f(x), q) \geq \varepsilon$ και επίσης $0 < d_X(x, p) < \delta$. Λαμβάνοντας $\delta_n = 1/n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), βρίσκουμε μία ακολουθία του E που ικανοποιεί την (6) αλλά όχι την (5). □

Πόρισμα. *Εάν η* f *έχει όριο στο* p*, τότε αυτό είναι μοναδικό.*

Αυτό έπεται από τα Θεωρήματα 3.2(β) και 4.2.

Ορισμός 4.3. Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο μιγαδικές συναρτήσεις f, g, ορισμένες στο σύνολο E. Ως το άθροισμα $f + g$ εννοούμε τη συνάρτηση που αντιστοιχεί στο $x \in E$ τον αριθμό $f(x) + g(x)$. Με όμοιο τρόπο ορίζουμε τη διαφορά $f - g$, το γινόμενο fg και το πηλίκο f/g των δύο συναρτήσεων, υπό την προϋπόθεση ότι το πηλίκο ορίζεται μόνο στα σημεία x του E με $g(x) \neq 0$. Η f λέγεται *σταθερή συνάρτηση* ή απλά σταθερή εάν και μόνον εάν αντιστοιχίζει σε κάθε σημείο $x \in E$ τον ίδιο αριθμό c. Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε $f = c$. Εάν οι f, g είναι πραγματικές συναρτήσεις, τότε γράφουμε $f \geq g$ εάν και μόνον εάν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in E$.

Παρομοίως, εάν οι $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ απεικονίζουν το E στον R^k, τότε ορίζουμε τις $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ και $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ μέσω των σχέσεων

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) = \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x), \qquad (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})(x) = \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{g}(x) \qquad (x \in E).$$

Εάν λ είναι πραγματικός αριθμός, τότε ορίζουμε την $\lambda\mathbf{f}$ μέσω της σχέσεως $(\lambda\mathbf{f})(x) = \lambda\mathbf{f}(x)$ $(x \in E)$.

Θεώρημα 4.4. *Υποθέτουμε ότι X είναι ένας μετρικός χώρος, ότι $E \subset X$, ότι p είναι ένα οριακό σημείο του E, ότι f, g είναι μιγαδικές συναρτήσεις στον E και ότι*

$$\lim_{x\to p} f(x) = A, \qquad \lim_{x\to p} g(x) = B.$$

Τότε:

(α) $\lim_{x\to p}(f+g)(x) = A + B$.
(β) $\lim_{x\to p}(fg)(x) = AB$.
(γ) $\lim_{x\to p}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{A}{B}$ *εάν* $B \neq 0$.

Απόδειξη. Βάσει του Θεωρήματος 4.2, οι ισχυρισμοί έπονται αμέσως από τις ανάλογες ιδιότητες των ακολουθιών (Θεώρημα 3.3). □

Παρατήρηση. Εάν οι $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ απεικονίζουν το E στον R^k, τότε το (α) παραμένει αληθές και το (β) μετατρέπεται στο

(β') $\lim_{x\to p}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(x) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$.

(Συγκρίνετε με το Θεώρημα 3.4.)

ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμός 4.5. Ας είναι X, Y μετρικοί χώροι, $E \subset X$, $p \in E$ και f μία συνάρτηση που απεικονίζει το E στον Y. Η f λέγεται *συνεχής στο* p εάν και μόνον εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ούτως ώστε

$$d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$$

για κάθε $x \in E$ με $d_X(x, p) < \delta$.

Η f λέγεται *συνεχής στο* E εάν και μόνον εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του E.

Ας σημειωθεί ότι η για να είναι η f συνεχής στο p, πρέπει πρώτα να ορίζεται στο p. (Συγκρίνετε αυτό το σχόλιο με την παρατήρηση έπειτα από τον Ορισμό 4.1.)

Εάν το p είναι μεμονωμένο σημείο του E, τότε από τον ορισμό έπεται ότι κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το E (που λαμβάνει τιμές σε ένα μετρικό χώρο) είναι συνεχής. Διότι, ασχέτως της επιλογής του $\varepsilon > 0$, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ούτως ώστε το μοναδικό σημείο x του E με $d_X(x, p) < \delta$ να είναι το $x = p$. Τότε,

$$d_Y(f(x), f(p)) = 0 < \varepsilon.$$

Θεώρημα 4.6. *Στην κατάσταση του Ορισμού 4.5, υποθέτουμε επιπλέον ότι το p είναι οριακό σημείο του E. Τότε, η f είναι συνεχής στο p εάν και μόνον εάν $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.*

Απόδειξη. Αυτό είναι σαφές εάν συγκρίνουμε τους Ορισμούς 4.1 και 4.5. □

Στρεφόμαστε τώρα στη σύνθεση συναρτήσεων. Μία σύντομη διατύπωση του επομένου θεωρήματος είναι η εξής: συνεχής συνάρτηση συνεχούς συναρτήσεως είναι συνεχής συνάρτηση.

Θεώρημα 4.7. *Υποθέτουμε ότι X, Y, Z είναι μετρικοί χώροι, ότι $E \subset X$, ότι f είναι μία συνάρτηση που απεικονίζει το E στον Y, ότι g είναι μία συνάρτηση που απεικονίζει το πεδίο τιμών της f, $f(E)$, στον Z και ότι h είναι η συνάρτηση που ορίζεται από την ισότητα*

$$h(x) = g(f(x)) \qquad (x \in E).$$

Εάν η f είναι συνεχής στο σημείο $p \in E$ και η g συνεχής στο $f(p)$, τότε η h είναι συνεχής στο p.

Η συνάρτηση h ονομάζεται *σύνθεση* των f και g. Συνήθως χρησιμοποιείται ο συμβολισμός

$$h = g \circ f.$$

Απόδειξη. Ας είναι $\varepsilon > 0$. Εφόσον η g είναι συνεχής στο $f(p)$, υπάρχει $\eta > 0$ ούτως ώστε

$$d_Z(g(y), g(f(p))) < \varepsilon \ \text{ εάν } \ y \in f(E) \ \text{ και } \ d_Y(y, f(p)) < \eta.$$

Εφόσον η f είναι συνεχής στο p, υπάρχει $\delta > 0$ ούτως ώστε

$$d_Y(f(x), f(p)) < \eta \ \text{ εάν } \ x \in E \ \text{ και } \ d_X(x, p) < \delta.$$

Από αυτά έπεται ότι

$$d_Z(h(x), h(p)) = d_Z(g(f(x)), g(f(p))) < \varepsilon$$

εάν $x \in E$ και $d_X(x, p) < \delta$. Συνεπώς, αποκτούμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Θεώρημα 4.8. *Μία απεικόνιση f ενός μετρικού χώρου X σε έναν μετρικό χώρο Y είναι συνεχής στο X εάν και μόνον εάν το $f^{-1}(V)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X για κάθε ανοικτό υποσύνολο V του Y.*

(Οι αντίστροφες εικόνες ορίζονται στον Ορισμό 2.2.) Το παραπάνω θεώρημα αποτελεί πολύ χρήσιμο χαρακτηρισμό της συνέχειας.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο X και ότι V είναι ανοικτό υποσύνολο του Y. Πρέπει να δείξουμε ότι κάθε σημείο του $f^{-1}(V)$ είναι εσωτερικό σημείο του $f^{-1}(V)$. Συνεπώς, θεωρούμε $p \in X$ με $f(p) \in V$. Εφόσον το V είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ούτως ώστε $y \in V$ εάν $d_Y(f(p), y) < \varepsilon$. Εφόσον η f είναι συνεχής στο p, υπάρχει $\delta > 0$ ούτως ώστε $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$ εάν $d_X(x, p) < \delta$. Συνεπώς, $x \in f^{-1}(V)$ εάν $d_X(x, p) < \delta$.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι το $f^{-1}(V)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X για κάθε ανοικτό υποσύνολο V του Y. Θεωρούμε $p \in X$ και $\varepsilon > 0$. Ας είναι V το σύνολο των $y \in Y$ με $d_Y(y, f(p)) < \varepsilon$. Τότε, το V είναι ανοικτό. Άρα, το $f^{-1}(V)$ είναι ανοικτό. Κατά συνέπεια, υπάρχει $\delta > 0$ ούτως ώστε $x \in f^{-1}(V)$ εάν $d_X(p, x) < \delta$. Όμως, εάν $x \in f^{-1}(V)$, τότε $f(x) \in V$ και επομένως $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Πόρισμα. *Μία απεικόνιση f ενός μετρικού χώρου X σε ένα μετρικό χώρο Y είναι συνεχής στο X εάν και μόνον εάν το $f^{-1}(C)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X, για κάθε κλειστό υποσύνολο C του Y.*

Αυτό έπεται από το προηγούμενο θεώρημα, εφόσον ένα σύνολο είναι κλειστό εάν και μόνον εάν το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό και εφόσον $f^{-1}(E^c) = [f^{-1}(E)]^c$ για κάθε υποσύνολο E του Y.

Ερχόμαστε τώρα στις μιγαδικές και διανυσματικές συναρτήσεις και σε συναρτήσεις που ορίζονται σε υποσύνολα του R^k.

Θεώρημα 4.9. *Ας είναι f, g μιγαδικές συνεχείς συναρτήσεις σε έναν μετρικό χώρο X. Τότε, οι $f + g$, fg και f/g είναι συνεχείς στον X.*

Στην τελευταία περίπτωση, υποθέτουμε βεβαίως ότι $g(x) \neq 0$, για κάθε $x \in X$.

Απόδειξη. Στα μεμονωμένα σημεία ο προς απόδειξη ισχυρισμός είναι τετριμμένος. Στα οριακά σημεία η πρόταση έπεται από τα Θεωρήματα 4.4 και 4.6. □

Θεώρημα 4.10.

(α) *Ας είναι $f_1, \ldots, f_k$ πραγματικές συναρτήσεις, ορισμένες σε έναν μετρικό χώρο X. Υποθέτουμε ότι $\mathbf{f}$ είναι η απεικόνιση του X στον R^k που ορίζεται από την ισότητα*

$$\mathbf{f}(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x)) \qquad (x \in X). \tag{7}$$

Τότε, η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής εάν και μόνον εάν κάθε μία από τις συναρτήσεις $f_1, \ldots, f_k$ είναι συνεχής.

(β) *Εάν οι $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ είναι συνεχείς απεικονίσεις του X στον R^k, τότε οι $\mathbf{f} + \mathbf{g}$, $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ είναι συνεχείς στον X.*

Οι συναρτήσεις $f_1, \ldots, f_k$ ονομάζονται οι *συνιστώσες* της $\mathbf{f}$. Σημειώνουμε ότι η $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ λαμβάνει τις τιμές της στον R^k, ενώ η $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ είναι πραγματική συνάρτηση.

Απόδειξη. Το μέρος (α) έπεται από τις ανισότητες

$$|f_j(x) - f_j(y)| \leq |\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(y)| = \left\{ \sum_{i=1}^{k} |f_i(x) - f_i(y)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

για $j = 1, \ldots, k$ και $x \in X$. Το μέρος (β) έπεται από το (α) και το Θεώρημα 4.9. □

Παράδειγμα 4.11. Εάν $x_1, \ldots, x_k$ είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου $\mathbf{x}$ στον R^k, τότε οι συναρτήσεις ϕ_i $(i = 1, \ldots k)$ που ορίζονται από τις σχέσεις

$$\phi_i(\mathbf{x}) = x_i \quad (i = 1, \ldots k, \ \mathbf{x} \in R^k) \tag{8}$$

είναι συνεχείς στον R^k, εφόσον η ανισότητα

$$|\phi_i(\mathbf{x}) - \phi_i(\mathbf{y})| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (i = 1, \ldots k, \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^k)$$

φανερώνει ότι μπορούμε να λάβουμε $\delta = \varepsilon$ στον Ορισμό 4.5. Οι συναρτήσεις ϕ_i $(i = 1, \ldots k)$ ονομάζονται οι *συναρτήσεις συντεταγμένων*.

Με επανειλημμένη εφαρμογή του Θεωρήματος 4.9 συνάγουμε ότι κάθε μονώνυμο

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}, \tag{9}$$

όπου $n_1, \ldots, n_k$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί, είναι συνεχής συνάρτηση στον R^k. Το ίδιο αληθεύει για βαθμωτά πολλαπλάσια του (9), εφόσον οι σταθερές συναρτήσεις είναι προφανώς συνεχείς. Επομένως, κάθε πολυώνυμο P, το οποίο δίδεται από τη σχέση

$$P(\mathbf{x}) = \sum c_{n_1 \cdots n_k} x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k} \quad (\mathbf{x} \in R^k), \tag{10}$$

είναι συνεχής συνάρτηση στον R^k. Εδώ, οι συντελεστές $c_{n_1 \cdots n_k}$ είναι μιγαδικοί αριθμοί, οι $n_1, \ldots, n_k$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και το άθροισμα στη (10) έχει πεπερασμένου πλήθους όρους.

Επιπλέον, κάθε ρητή συνάρτηση των $x_1, \ldots, x_k$, δηλαδή κάθε πηλίκο πολυωνύμων της μορφής (10), είναι συνεχής συνάρτηση στον R^k, στα σημεία φυσικά όπου ο παρονομαστής είναι διάφορος του 0.

Από την τριγωνική ανισότητα παρατηρούμε απλά ότι

$$||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^k). \tag{11}$$

Συνεπώς, η απεικόνιση $\mathbf{x} \to |\mathbf{x}|$ $(\mathbf{x} \in R^k)$ είναι πραγματική συνεχής συνάρτηση στον R^k.

Εάν τώρα $\mathbf{f}$ είναι μία συνεχής απεικόνιση από έναν μετρικό χώρο X στον R^k, τότε η απεικόνιση ϕπου ορίζεται από την ισότητα $\phi(p) = |\mathbf{f}(p)|$ $(p \in X)$ είναι, λόγω του Θεωρήματος 4.7, πραγματική συνεχής συνάρτηση στον X.

Παρατήρηση 4.12. Η έννοια της συνέχειας μίας συναρτήσεως f έχει ορισθεί για συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο E ενός μετρικού χώρου X. Όμως, το συμπλήρωμα του X δεν κατέχει κανένα ρόλο σε αυτόν τον ορισμό (σημειώνουμε ότι η κατάσταση είναι διαφορετική για τα όρια συναρτήσεων). Επομένως, δεν έχουμε ουσιώδεις απώλειες εάν αγνοήσουμε το συμπλήρωμα του πεδίου ορισμού της f. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε απλώς να θεωρούμε συνεχείς απεικονίσεις ενός μετρικού χώρου σε άλλον, παρά απεικονίσεις ορισμένες σε υποσύνολα. Αυτό απλοποιεί τις διατυπώσεις και τις αποδείξεις ορισμένων από τα σχετικά θεωρήματα. Έχουμε ήδη κάνει χρήση αυτής της αρχής στα Θεωρήματα 4.8 έως και 4.10 και θα τη χρησιμοποιήσουμε και στην επόμενη ενότητα.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΣΥΜΠΑΓΕΙΑ

Ορισμός 4.13. Μία απεικόνιση $\mathbf{f}$ ενός συνόλου E στον R^k ονομάζεται *φραγμένη* εάν και μόνον εάν υπάρχει πραγματικός αριθμός ούτως ώστε $|\mathbf{f}(x)| \leq M$ για κάθε $x \in E$.

Θεώρημα 4.14. *Υποθέτουμε ότι f είναι μία συνεχής απεικόνιση ενός συμπαγούς μετρικού χώρου X σε έναν μετρικό χώρο Y. Τότε, το $f(X)$ είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Ας είναι $\{V_a\}$ $(a \in A)$ μία ανοικτή κάλυψη του $f(X)$. Εφόσον η f είναι συνεχής, το Θεώρημα 4.8 φανερώνει ότι κάθε ένα από τα σύνολα

$f^{-1}(V_a)$ $(a \in A)$ είναι ανοικτό. Εφόσον ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν δείκτες $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ούτως ώστε

$$X \subset f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_{\alpha_n}). \tag{12}$$

Εφόσον $f(f^{-1}(E)) \subset E$ για κάθε $E \subset Y$, η (12) συνεπάγεται ότι

$$f(X) \subset V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n}. \tag{13}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Σημείωση: Στα παραπάνω χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $f(f^{-1}(E)) \subset E$, η οποία ισχύει για κάθε $E \subset Y$. Εάν $E \subset X$, τότε $E \subset f^{-1}(f(E))$. Στις δύο αυτές σχέσεις δεν ισχύει απαραιτήτως η ισότητα.

Εν συνεχεία, θα επάγουμε ορισμένες συνέπειες του Θεωρήματος 4.14.

Θεώρημα 4.15. *Εάν* $\mathbf{f}$ *είναι μία συνεχής απεικόνιση ενός συμπαγούς μετρικού χώρου* X *στον* R^k*, τότε το* $\mathbf{f}(X)$ *είναι κλειστό και φραγμένο. Συνεπώς, η* $\mathbf{f}$ *είναι φραγμένη.*

Το παραπάνω έπεται από το Θεώρημα 2.41. Το αποτέλεσμα αυτό είναι ιδιαιτέρως σημαντικό όταν η f είναι πραγματική συνάρτηση:

Θεώρημα 4.16. *Υποθέτουμε ότι* f *είναι μία πραγματική συνεχής συνάρτηση, ορισμένη σε έναν συμπαγή μετρικό χώρο* X*. Θέτουμε*

$$M = \sup_{p \in X} f(p), \qquad m = \inf_{p \in X} f(p). \tag{14}$$

Τότε, υπάρχουν $p, q \in X$ *με* $f(p) = M$ *και* $f(q) = m$*.*

Ο συμβολισμός στη (14) σημαίνει ότι το M είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου των αριθμών $f(p)$, όπου $p \in X$, και m είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του ιδίου συνόλου.

Το συμπέρασμα μπορεί να διατυπωθεί και διαφορετικά: *υπάρχουν σημεία* p, q *ούτως ώστε* $f(q) \le f(x) \le f(p)$ *για κάθε* $x \in X$. Δηλαδή, η f λαμβάνει μέγιστο (στο p) και ελάχιστο (στο q).

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.15, το $f(X)$ είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών. Συνεπώς, το $f(X)$ περιέχει τα

$$M = \sup f(X) \quad \text{και} \quad m = \inf f(X),$$

βάσει του Θεωρήματος 2.28. □

Θεώρημα 4.17. *Υποθέτουμε ότι f είναι μία 1-1 συνεχής απεικόνιση ενός συμπαγούς μετρικού χώρου X επί ενός μετρικού χώρου Y. Τότε, η αντίστροφη απεικόνιση f^{-1}, που ορίζεται στον Y από τη σχέση*

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad (x \in X),$$

είναι συνεχής απεικόνιση του Y επί του X.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.8 για την f^{-1} και διαπιστώνουμε ότι είναι επαρκές να αποδείξουμε ότι το $f(V)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y για κάθε ανοικτό υποσύνολο V του X. Θεωρούμε λοιπόν ένα ανοικτό υποσύνολο V του X.

Το συμπλήρωμα V^c του V είναι κλειστό, άρα συμπαγές (Θεώρημα 2.35). Κατά συνέπεια, το $f(V^c)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y (Θεώρημα 4.14) και επομένως κλειστό. Εφόσον η f είναι 1-1, το $f(V)$ είναι το συμπλήρωμα του $f(V^c)$. Άρα, το $f(V)$ είναι ανοικτό. □

Ορισμός 4.18. Υποθέτουμε ότι f είναι μία απεικόνιση ενός μετρικού χώρου X σε έναν μετρικό χώρο Y. Η f ονομάζεται *ομοιομόρφως συνεχής* στον X εάν και μόνον εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ούτως ώστε

$$d_Y(f(p), f(q)) < \varepsilon \tag{15}$$

για κάθε $p, q \in X$ με $d_X(p, q) < \delta$.

Ας αναλύσουμε τις διαφορές μεταξύ των εννοιών της συνέχειας και της ομοιόμορφης συνέχειας. Εν πρώτοις, η ομοιόμορφη συνέχεια είναι ιδιότητα συναρτήσεως σε ένα σύνολο, ενώ η συνέχεια είναι έννοια που ορίζεται σε σημείο. Ομοιόμορφη συνέχεια σε σημείο στερείται νοήματος. Κατόπιν, εάν η f είναι συνεχής στο X, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε σημείο $p \in X$ είναι δυνατή η εύρεση $\delta > 0$ με την ιδιότητα που προσδιορίζεται στον Ορισμό 4.5. Συνεπώς, το δ εξαρτάται από τα ε *και* p. Εάν όμως η f είναι ομοιομόρφως συνεχής, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ είναι δυνατή η εύρεση *ενός* $\delta > 0$ με την επιθυμητή ιδιότητα για *κάθε* σημείο του X.

Κατά προφανή τρόπο, κάθε ομοιομόρφως συνεχής συνάρτηση είναι συνεχής. Το επόμενο θεώρημα χορηγεί την ταύτιση των δύο εννοιών σε συμπαγείς χώρους.

Θεώρημα 4.19. *Υποθέτουμε ότι f είναι μία συνεχής απεικόνιση ενός συμπαγούς μετρικού χώρου X σε έναν μετρικό χώρο Y. Τότε, η f είναι ομοιομόρφως συνεχής.*

Απόδειξη. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Εφόσον η f είναι συνεχής, μπορούμε σε κάθε σημείο $p \in X$ να αντιστοιχίσουμε έναν θετικό αριθμό $\phi(p)$ ούτως ώστε εάν

$$q \in X, \quad d_X(p,q) < \phi(p), \quad \text{τότε } d_Y(f(p), f(q)) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{16}$$

Ας είναι $J(p)$ το σύνολο των σημείων $q \in X$ με την ιδιότητα

$$d_X(p,q) < \frac{1}{2}\phi(p). \tag{17}$$

Εφόσον $p \in J(p)$, η συλλογή $\{J(p)\}$ $(p \in X)$ είναι ανοικτή κάλυψη του συμπαγούς χώρου X. Κατά συνέπεια, υπάρχουν σημεία $p_1, \ldots, p_n$ ούτως ώστε

$$X \subset J(p_1) \cup \cdots \cup J(p_n). \tag{18}$$

Θέτουμε

$$\delta = \frac{1}{2}\min[\phi(p_1), \ldots, \phi(p_n)]. \tag{19}$$

Τότε, $\delta > 0$. (Σε αυτό το σημείο αντιλαμβανόμαστε ότι η ιδιότητα του πεπερασμένου της καλύψεως είναι ουσιώδης. Το ελάχιστο ενός πεπερασμένου συνόλου θετικών αριθμών είναι θετικό, ενώ το μέγιστο κάτω φράγμα ενός απέραντου συνόλου θετικών αριθμών δεν είναι απαραιτήτως θετικό.)

Τώρα, θεωρούμε $p, q \in X$ με $d_X(p,q) < \delta$. Από την (18) προκύπτει η ύπαρξη ακεραίου αριθμού m με $1 \le m \le n$ και $p \in J(p_m)$. Συνεπώς,

$$d_X(p, p_m) < \frac{1}{2}\phi(p_m) \tag{20}$$

και επίσης

$$d_X(q, p_m) \le d_X(p,q) + d_X(p, p_m) < \delta + \frac{1}{2}\phi(p_m) \le \phi(p_m).$$

Εν τέλει, η (16) φανερώνει ότι

$$d_Y(f(p), f(q)) < d_Y(f(p), f(p_m)) + d_Y(f(q), f(p_m)) < \varepsilon.$$

Με αυτό ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Μία εναλλακτική απόδειξη σκιαγραφείται στην Άσκηση 10.

Θα συνεχίσουμε με τη δικαιολόγηση της ανάγκης για την υπόθεση της συμπάγειας στα Θεωρήματα 4.14, 4.15, 4.16 και 4.19.

Θεώρημα 4.20. *Υποθέτουμε ότι E είναι ένα μη συμπαγές υποσύνολο του R^1. Τότε:*

(α) *Υπάρχει μία συνεχής και μη φραγμένη πραγματική συνάρτηση στο E.*

(β) *Υπάρχει μία συνεχής και φραγμένη πραγματική συνάρτηση στο E, η οποία δεν λαμβάνει μέγιστο.*

Εάν, επιπλέον, το E είναι φραγμένο, τότε:

(γ) *Υπάρχει μία συνεχής πραγματική συνάρτηση στο E, η οποία δεν είναι ομοιομόρφως συνεχής.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι το E είναι φραγμένο και επομένως υπάρχει ένα οριακό σημείο x_0 του E το οποίο δεν ανήκει στο E. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{1}{x - x_0} \quad (x \in E). \tag{21}$$

Αυτή είναι συνεχής στο E (Θεώρημα 4.9) αλλά προφανώς μη φραγμένη. Για να διαπιστώσουμε ότι η f δεν είναι ομοιομόρφως συνεχής, θεωρούμε $\varepsilon > 0$

και $\delta > 0$. Επιλέγουμε ένα σημείο $x \in E$ με $|x - x_0| < \delta$. Λαμβάνοντας ένα σημείο t επαρκώς κοντά στο x_0, μπορούμε να καταστήσουμε την ποσότητα $|f(t) - f(x)|$ μεγαλύτερη του ε, παρά το γεγονός ότι $|t - x| < \delta$. Εφόσον αυτό αληθεύει για κάθε $\delta > 0$, η f δεν μπορεί να είναι ομοιομόρφως συνεχής στο E.

Η συνάρτηση f που δίδεται από τη σχέση

$$g(x) = \frac{1}{1 + (x - x_0)^2} \qquad (x \in E) \tag{22}$$

είναι συνεχής στο E και φραγμένη, εφόσον $0 < g(x) < 1$ για κάθε $x \in E$. Είναι σαφές ότι

$$\sup_{x \in E} g(x) = 1,$$

ενώ $g(x) < 1$ για κάθε $x \in E$. Συνεπώς, η g δεν λαμβάνει μέγιστο στο E.

Έχοντας αποδείξει το θεώρημα για φραγμένα σύνολα E, υποθέτουμε τώρα ότι το E δεν είναι φραγμένο. Τότε, η συνάρτηση f με $f(x) = x$ $(x \in E)$ καθιστά το (α) αληθές. Η συνάρτηση h με

$$h(x) = \frac{x^2}{1 + x^2} \qquad (x \in E) \tag{23}$$

καθιστά το (β) αληθές, εφόσον

$$\sup_{x \in E} h(x) = 1$$

και $h(x) < 1$ για κάθε $x \in E$. □

Ο ισχυρισμός (γ) θα ήταν ψευδής εάν το E δεν ήταν φραγμένο. Επί παραδείγματι, ας είναι E το σύνολο των ακεραίων αριθμών. Τότε, κάθε συνάρτηση ορισμένη στο E είναι ομοιομόρφως συνεχής. Για να το αντιληφθούμε αυτό αρκεί να λάβουμε $\delta < 1$ στον Ορισμό 4.18.

Θα κλείσουμε αυτήν την ενότητα αποδεικνύοντας ότι η υπόθεση της συμπάγειας είναι απαραίτητη στο Θεώρημα 4.17.

Παράδειγμα 4.21. Ας είναι X το ημιανοικτό διάστημα $[0, 2\pi)$ της πραγματικής ευθείας και $\mathbf{f}$ η απεικόνιση του X επί του κύκλου Y με κέντρο το 0 και ακτίνα 1, η οποία δίδεται από την ισότητα

$$\mathbf{f}(t) = (\cos t, \sin t) \quad (0 \leq t < 2\pi). \tag{24}$$

Η συνέχεια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων ημιτόνου και συνημιτόνου καθώς και οι σχετικές με την περιοδικότητα ιδιότητες θα αποδειχθούν στο Κεφάλαιο 8. Τα αποτελέσματα αυτά φανερώνουν ότι η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής απεικόνιση του X στον Y.

Παρ' όλα αυτά, η αντίστροφη απεικόνιση (η οποία φυσικά υπάρχει) δεν είναι συνεχής στο σημείο $(1, 0) = \mathbf{f}(0)$. Φυσικά, το X δεν είναι συμπαγές. (Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι η $\mathbf{f}^{-1}$ δεν είναι συνεχής παρά το γεγονός ότι το Y είναι συμπαγές!)

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

Θεώρημα 4.22. *Υποθέτουμε ότι f είναι μία συνεχής απεικόνιση ενός μετρικού χώρου X σε έναν μετρικό χώρο Y. Εάν E είναι συνεκτικό υποσύνολο του X, τότε το $f(E)$ είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε, για να καταλήξουμε σε αντίφαση, ότι $f(E) = A \cup B$, όπου τα A, B είναι μη κενά και διαχωρισμένα υποσύνολα του Y. Θέτουμε $G = E \cap f^{-1}(A)$, $H = E \cap f^{-1}(B)$. Τότε, $E = G \cup H$. Επιπλέον, τα G, H δεν είναι κενά.

Εφόσον $A \subset \overline{A}$ (η κλειστή θήκη του A), έχουμε ότι $G \subset f^{-1}(\overline{A})$. Το τελευταίο σύνολο είναι κλειστό, εφόσον η f είναι συνεχής. Άρα, $\overline{G} \subset f^{-1}(\overline{A})$ και συνεπώς $f(\overline{G}) \subset \overline{A}$. Εφόσον $f(H) = B$ και το $\overline{A} \cap B$ είναι κενό, συνάγουμε ότι το $\overline{G} \cap H$ είναι κενό.

Επιχειρηματολογώντας παρομοίως, συνάγουμε ότι το $G \cap \overline{H}$ είναι επίσης κενό. Άρα, τα G, H είναι διαχωρισμένα. Αυτό όμως είναι αδύνατο, διότι το E είναι συνεκτικό. $\square$

Θεώρημα 4.23. *Ας είναι f μία πραγματική συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, b]$. Εάν $f(a) < f(b)$ και c είναι ένας αριθμός με $f(a) < c < f(b)$, τότε υπάρχει $x \in (a, b)$ με $f(x) = c$.*

Φυσικά, ισχύει το ανάλογο αποτέλεσμα όταν $f(a) > f(b)$. Με λιγότερο αυστηρή διατύπωση, το θεώρημα φανερώνει ότι μία πραγματική συνεχής συνάρτηση λαμβάνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές σε ένα διάστημα.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.47, το $[a, b]$ είναι συνεκτικό. Άρα, το Θεώρημα 4.22 φανερώνει ότι το $f([a, b])$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του R^1 και ο ισχυρισμός τεκμηριώνεται εάν ανατρέξουμε ξανά στο Θεώρημα 2.47. □

Παρατήρηση 4.24. Εκ πρώτης όψεως, ίσως φανεί ότι το Θεώρημα 4.23 έχει αντίστροφο. Δηλαδή εάν για οποιαδήποτε δύο σημεία x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ και κάθε πραγματικό αριθμό c μεταξύ των $f(x_1)$, $f(x_2)$ υπάρχει σημείο x στο (x_1, x_2) με $f(x) = c$, τότε η f πρέπει να είναι συνεχής. Το παράδειγμα 4.27(δ) φανερώνει ότι αυτό γενικώς δεν ισχύει.

ΕΙΔΗ ΑΣΥΝΕΧΕΙΩΝ

Εάν x είναι ένα σημείο στο πεδίο ορισμού μίας συναρτήσεως f, τότε η f λέγεται *ασυνεχής* στο x ή αλλιώς ότι έχει *ασυνέχεια* στο x εάν και μόνον εάν η f δεν είναι συνεχής στο x. Εάν η f ορίζεται σε ένα διάστημα, τότε είναι σύνηθες να διαχωρίζεται η ασυνέχεια σε δύο είδη. Πριν παρουσιάσουμε την ταξινόμηση αυτή, θα ορίσουμε τα *δεξιά* και *αριστερά* όρια της f στο x, τα οποία συμβολίζουμε αντιστοίχως με $f(x+)$ και $f(x-)$.

Ορισμός 4.25. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f ορίζεται στο (a, b). Θεωρούμε ένα σημείο x με $a \leq x < b$. Γράφουμε

$$f(x+) = q$$

εάν και μόνον εάν $f(t_n) \to q$ καθώς $n \to \infty$ για κάθε ακολουθία $\{t_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ του (x, b) με $t_n \to x$ καθώς $n \to \infty$. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται *δεξιό όριο* της f στο x. Για τον ορισμό του *αριστερού ορίου* της f στο x $f(x-)$ στο $a < x \leq b$, περιοριζόμαστε σε ακολουθίες $\{t_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ του (a, x).

Είναι σαφές ότι για οποιοδήποτε σημείο x του (a, b) ισχύει το εξής: το $\lim_{t\to x} f(t)$ υπάρχει εάν και μόνον εάν

$$f(x+) = f(x-) = \lim_{t\to x} f(t).$$

Ορισμός 4.26. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f ορίζεται στο (a, b). Η f λέγεται ότι έχει *ασυνέχεια πρώτου είδους* ή αλλιώς *απλή ασυνέχεια* στο x εάν είναι ασυνεχής στο x και υπάρχουν τα $f(x+)$, $f(x-)$. Στην αντίθετη περίπτωση (δηλαδή όταν δεν υπάρχει κάποιο από τα $f(x+)$, $f(x-)$ ή και τα δύο), η ασυνέχεια ονομάζεται *δευτέρου είδους*.

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις στις οποίες η f μπορεί να έχει απλή ασυνέχεια: ή $f(x+) \neq f(x-)$ (όπου η τιμή $f(x)$ δεν κατέχει κανένα ρόλο) ή $f(x+) = f(x-) \neq f(x)$.

Παράδειγμα 4.27.

(α) Ορίζουμε τη συνάρτηση f μέσω της σχέσεως

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{εάν } x \text{ είναι ρητός αριθμός,} \\ 0 & \text{εάν } x \text{ είναι άρρητος αριθμός.} \end{cases}$$

Τότε, η f έχει ασυνέχεια δευτέρου είδους σε κάθε σημείο x εφόσον δεν υπάρχει ούτε το $f(x+)$ ούτε το $f(x-)$.

(β) Ορίζουμε τη συνάρτηση f μέσω της σχέσεως

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{εάν } x \text{ είναι ρητός αριθμός,} \\ 0 & \text{εάν } x \text{ είναι άρρητος αριθμός.} \end{cases}$$

Τότε, η f είναι συνεχής στο $x = 0$ και έχει ασυνέχεια δευτέρου είδους σε κάθε άλλο σημείο.

(γ) Ορίζουμε τη συνάρτηση f μέσω της σχέσεως

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{εάν } -3 < x < -2, \\ -x-2 & \text{εάν } -2 \leq x < 0, \\ x+2 & \text{εάν } \quad 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Τότε η f έχει απλή ασυνέχεια στο $x = 0$ και είναι συνεχής σε κάθε άλλο σημείο του $(-3, 1)$.

(δ) Ορίζουμε τη συνάρτηση f μέσω της σχέσεως

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{εάν } x \neq 0, \\ 0 & \text{εάν } x = 0. \end{cases}$$

Εφόσον τα $f(0+)$ και $f(0-)$ δεν υπάρχουν, η f έχει ασυνέχεια δευτέρου είδους στο $x = 0$. Δεν έχουμε αποδείξει ακόμη ότι η συνάρτηση sin είναι συνεχής. Εάν το υποθέσουμε αυτό προς στιγμή, τότε το Θεώρημα 4.7 συνεπάγεται ότι η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο x με $x \neq 0$.

ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Θα μελετήσουμε τώρα τις συναρτήσεις που αυξάνουν ή φθίνουν σε ένα δεδομένο διάστημα.

Ορισμός 4.28. Ας είναι f μία πραγματική συνάρτηση στο (a, b). Η f ονομάζεται *αύξουσα* στο (a, b) εάν και μόνον εάν για οποιαδήποτε σημεία x, y με $a < x < y < b$ ισχύει ότι $f(x) \leq f(y)$. Η f ονομάζεται *φθίνουσα* στο (a, b) εάν και μόνον εάν αντί της τελευταίας ανισότητας έχουμε την αντίστροφή της. Μία συνάρτηση ονομάζεται *μονότονη* εάν και μόνον εάν είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

Θεώρημα 4.29. *Ας είναι f μία αύξουσα συνάρτηση στο (a, b). Τότε, τα $f(x+)$, $f(x-)$ υπάρχουν σε κάθε σημείο x του (a, b). Πιο συγκεκριμένα, ισχύει ότι*

$$\sup_{a<t<x} f(t) = f(x-) \leq f(x) \leq f(x+) = \inf_{x<t<b} f(t). \tag{25}$$

Επιπλέον, εάν $a < x < y < b$, τότε

$$f(x+) \leq f(y-). \tag{26}$$

Ασφαλώς, ισχύουν τα ανάλογα συμπεράσματα και για φθίνουσες συναρτήσεις.

Απόδειξη. Λόγω της υποθέσεως, το σύνολο των αριθμών της μορφής $f(t)$ με $a < t < x$ είναι άνω φραγμένο από τον αριθμό $f(x)$ και επομένως έχει ελάχιστο άνω φράγμα, το οποίο και συμβολίζουμε με A. Προφανώς, $A \leq f(x)$. Θα δείξουμε ότι $A = f(x-)$.

Θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του A συνάγουμε την ύπαρξη $\delta > 0$ ούτως ώστε $a < x - \delta < x$ και

$$A - \varepsilon < f(x - \delta) \leq A. \tag{27}$$

Εφόσον η f είναι αύξουσα, έχουμε ότι

$$f(x - \delta) \leq f(t) \leq A \qquad (x - \delta < t < x). \tag{28}$$

Συνδυάζοντας τις (27) και (28) διαπιστώνουμε ότι

$$|f(t) - A| < \varepsilon \qquad (x - \delta < t < x).$$

Άρα, $f(x-) = A$.

Το δεύτερο μέρος της (25) αποδεικνύεται παρεμφερώς.

Κατόπιν, εάν $a < x < y < b$, τότε βρίσκουμε από την (25) ότι

$$f(x+) = \inf_{x<t<b} f(t) = \inf_{x<t<y} f(t). \tag{29}$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει εάν γίνει εφαρμογή της (25) στο (a, y) αντί του (a, b). Παρομοίως,

$$f(y-) = \sup_{a<t<y} f(t) = \sup_{x<t<y} f(t). \tag{30}$$

Η σύγκριση της (29) με την (30) χορηγεί την (26). □

Πόρισμα. *Οι μονότονες συναρτήσεις δεν έχουν ασυνέχεια δευτέρου είδους.*

Το πόρισμα αυτό συνεπάγεται ότι κάθε μονότονη συνάρτηση είναι ασυνεχής το πολύ σε ένα αριθμήσιμο υποσύνολο σημείων. Αντί να καταφύγουμε στο γενικό θεώρημα, του οποίου η απόδειξη σκιαγραφείται στην Άσκηση 17, δίδουμε παρακάτω μία απλή απόδειξη που εφαρμόζεται σε μονότονες συναρτήσεις.

Θεώρημα 4.30. *Ας είναι f μία αύξουσα συνάρτηση στο (a, b). Τότε, το σύνολο σημείων στα οποία η f είναι ασυνεχής είναι το πολύ αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα συνάρτηση (η απόδειξη είναι όμοια για φθίνουσες συναρτήσεις). Ας είναι E το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f.

Σε κάθε σημείο $x \in E$ αντιστοιχίζουμε έναν ρητό αριθμό $r(x)$ ούτως ώστε

$$f(x-) < r(x) < f(x+).$$

Εφόσον η ανισότητα $x_1 < x_2$ συνεπάγεται την $f(x_1+) \leq f(x_2-)$, διαπιστώνουμε ότι $r(x_1) \neq r(x_2)$ εάν $x_1 \neq x_2$.

Συνεπώς, έχουμε κατασκευάσει μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ του E και ενός υποσυνόλου του συνόλου των ρητών αριθμών. Το τελευταίο είναι, όπως γνωρίζουμε, το πολύ αριθμήσιμο. □

Παρατήρηση 4.31. Πρέπει να σημειωθεί ότι τα σημεία ασυνέχειας μίας μονότονης συναρτήσεως δεν είναι απαραιτήτως μεμονωμένα. Στην πραγματικότητα, δεδομένου ενός αριθμησίμου υποσυνόλου E του διαστήματος (a, b), το οποίο μπορεί να είναι ακόμη και πυκνό, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία συνάρτηση f η οποία να είναι μονότονη στο (a, b), ασυνεχής σε κάθε σημείο του E και συνεχής σε οποιοδήποτε άλλο σημείο του (a, b).

Θεωρούμε ότι τα σημεία του E τοποθετούνται σε μία ακολουθία $\{x_n\}$, $(n = 1, 2, 3 \ldots)$. Ας είναι $\{c_n\}$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$ μία ακολουθία θετικών αριθμών ούτως ώστε η $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ να συγκλίνει. Ορίζουμε τη συνάρτηση f μέσω της ισότητας

$$f(x) = \sum_{x_n < x} c_n \quad (a < x < b). \tag{31}$$

Στο παραπάνω, η άθροιση γίνεται αντιληπτή ως εξής: αθροίζουμε υπεράνω των δεικτών n για τους οποίους ισχύει ότι $x_n < x$. Εάν δεν υπάρχουν τέτοιοι δείκτες, τότε ορίζουμε το άθροισμα ως το 0. Εφόσον η (31) συγκλίνει, η διάταξη των όρων στο άθροισμα δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα.

Οι παρακάτω ισχυρισμοί αφήνονται στον αναγνώστη προς επαλήθευση:

(α) Η f είναι αύξουσα στο (a, b).

(β) Η f είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του E. Συγκεκριμένα, ισχύει ότι

$$f(x_n+) - f(x_n-) = c_n \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots).$$

(γ) Η f είναι συνεχής σε κάθε άλλο σημείο του (a, b).

Επιπλέον, δεν είναι δύσκολο να δειχθεί ότι $f(x-) = f(x)$ σε κάθε σημείο x του (a, b). Μία συνάρτηση με αυτήν την ιδιότητα ονομάζεται *αριστερά συνεχής*. Εάν στην (31) λαμβάναμε το άθροισμα υπεράνω των δεικτών n με $x_n \leq x$, τότε θα ίσχυε η ισότητα $f(x+) = f(x)$ σε κάθε σημείο x του (a, b). Σε αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση ονομάζεται *δεξιά συνεχής*.

Συναρτήσεις τέτοιου τύπου μπορούν να ορισθούν και με διαφορετικό τρόπο. Για ένα τέτοιο παράδειγμα παραπέμπουμε στο Θεώρημα 6.16.

ΑΠΕΙΡΑ ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΟΡΙΑ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Για να μπορέσουμε να εργασθούμε στο εκτεταμένο σύστημα των πραγματικών αριθμών, θα γενικεύσουμε τον Ορισμό 4.1 αναδιατυπώνοντας τον με τη βοήθεια της έννοιας της περιοχής.

Για έναν πραγματικό αριθμό x έχουμε ήδη ορίσει ως περιοχή του x ένα διάστημα της μορφής $(x - \delta, x + \delta)$, όπου $\delta > 0$.

Ορισμός 4.32. Το σύνολο των αριθμών x με $x > c$, όπου c είναι ένας πραγματικός αριθμός, ονομάζεται *περιοχή του* $+\infty$. Συμβολίζουμε το σύνολο αυτό ως $(c, +\infty)$. Παρομοίως, ονομάζουμε *περιοχή του* $-\infty$ το σύνολο των αριθμών x με $x < c$ και συμβολίζουμε το σύνολο αυτό ως $(-\infty, c)$.

Ορισμός 4.33. Ας είναι f μία πραγματική συνάρτηση, ορισμένη σε ένα σύνολο πραγματικών αριθμών E. Γράφουμε

$$f(t) \to A \ \text{καθώς} \ t \to x,$$

όπου οι A και x ανήκουν στο εκτεταμένο σύστημα των πραγματικών αριθμών, εάν και μόνον εάν για κάθε περιοχή του U του A υπάρχει περιοχή V του x ούτως ώστε το $V \cap E$ να είναι μη κενό και $f(t) \in U$ για κάθε $t \in V \cap E$ με $t \neq x$. Σε αυτήν την περίπτωση, ο αριθμός A ονομάζεται *όριο της* f *στο* x.

Διαπιστώνουμε απλά ότι ο παραπάνω ορισμός συμπίπτει με τον Ορισμό 4.1 όταν οι A και x είναι πραγματικοί αριθμοί.

Το ανάλογο του Θεωρήματος 4.4 παραμένει αληθές, δίχως η απόδειξη να διαφέρει στην ουσία της. Για χάρη πληρότητας, το διατυπώνουμε:

Θεώρημα 4.34. *Υποθέτουμε ότι* f, g *είναι πραγματικές συναρτήσεις, ορισμένες σε ένα σύνολο πραγματικών αριθμών* E. *Υποθέτουμε ότι*

$$f(t) \to A, \quad g(t) \to B \ \textit{καθώς} \ t \to x,$$

όπου οι A, B *και* x *ανήκουν στο εκτεταμένο σύστημα των πραγματικών αριθμών. Τότε:*

(α) *Εάν* $f(t) \to A'$ *καθώς* $t \to x$, *όπου ο* A' *ανήκει στο εκτεταμένο σύστημα των πραγματικών αριθμών, τότε* $A' = A$.

(β) $(f + g)(t) \to A + B$ *καθώς* $t \to x$.

(γ) $(fg)(t) \to AB$ *καθώς* $t \to x$.

(δ) $(f/g)(t) \to A/B$ *καθώς* $t \to x$.

Βεβαίως, τα παραπάνω ισχύουν όταν τα δεξιά μέρη των (β), (γ) και (δ) ορίζονται.

Σημειώνουμε ότι τα $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞/∞ και $0/0$ δεν ορίζονται (ανατρέξτε στον Ορισμό 1.23).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Υποθέτουμε ότι f είναι μία πραγματική συνάρτηση, ορισμένη στον R^1, η οποία ικανοποιεί την ισότητα

$$\lim_{h\to 0}[f(x+h) - f(x-h)] = 0$$

για κάθε $x \in R^1$. Είναι η f αναγκαστικά συνεχής;

Άσκηση 2. Εάν f είναι μία συνεχής απεικόνιση ενός μετρικού χώρου X σε έναν μετρικό χώρο Y, τότε αποδείξτε ότι

$$f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$$

για κάθε υποσύνολο E του X. (Με $\overline{E}$ συμβολίζουμε την κλειστή θήκη του E.) Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι το $f(\overline{E})$ μπορεί να είναι γνήσιο υποσύνολο του $\overline{f(E)}$.

Άσκηση 3. Υποθέτουμε ότι f είναι μία πραγματική συνεχής συνάρτηση σε έναν μετρικό χώρο X. Συμβολίζουμε με $Z(f)$ (και το ονομάζουμε *σύνολο θέσεων μηδενισμού* της f) το σύνολο των σημείων $p \in X$ με $f(p) = 0$. Αποδείξτε ότι το $Z(f)$ είναι κλειστό.

Άσκηση 4. Υποθέτουμε ότι f, g είναι συνεχείς απεικονίσεις ενός μετρικού χώρου X σε έναν μετρικό χώρο Y και ότι E είναι ένα πυκνό υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι το $f(E)$ είναι πυκνό στο $f(X)$. Εάν $g(p) = f(p)$ για κάθε $p \in E$, τότε αποδείξτε ότι $g(p) = f(p)$ για κάθε $p \in X$. (Με διαφορετική διατύπωση, μία συνεχής απεικόνιση προσδιορίζεται από τις τιμές της σε ένα πυκνό υποσύνολο του πεδίου τιμών της.)

Άσκηση 5. Εάν f είναι μία πραγματική συνεχής συνάρτηση, ορισμένη σε ένα κλειστό υποσύνολο E του R^1, τότε αποδείξτε ότι υπάρχει πραγματική συνεχής συνάρτηση g, ορισμένη στον R^1, με $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in E$. (Μία συνάρτηση με αυτήν την ιδιότητα ονομάζεται *συνεχής επέκταση* της f από τον E στον R^1.) Δείξτε ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει εάν παραλείψουμε τη λέξη «κλειστό». Επεκτείνετε το αποτέλεσμα αυτό για διανυσματικές συναρτήσεις.

Υπόδειξη: Θεωρήστε ότι το γράφημα[1] της g είναι ευθεία γραμμή σε κάθε ένα από τα ανοικτά διαστήματα που αποτελούν το συμπλήρωμα του E (συγκρίνετε με την Άσκηση 29 του Κεφαλαίου 2). Το αποτέλεσμα παραμένει αληθές εάν ο R^1 αντικατασταθεί από οποιονδήποτε μετρικό χώρο, όμως η απόδειξη δεν είναι τόσο απλή.

Άσκηση 6. Εάν f είναι μία συνάρτηση ορισμένη στο E, τότε το *γράφημα* της f είναι το σύνολο των σημείων $(x, f(x))$ με $x \in E$. Ιδιαιτέρως, εάν το E είναι σύνολο πραγματικών αριθμών και η f είναι πραγματική, τότε το γράφημά της είναι υποσύνολο του επιπέδου.

Υποθέτουμε ότι το E είναι ένα σύνολο πραγματικών αριθμών και ότι η f είναι μία πραγματική συνάρτηση, ορισμένη στο E. Εάν το E είναι συμπαγές, τότε αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής εάν και μόνον εάν το γράφημά της είναι συμπαγές.

Άσκηση 7. Εάν $E \subset X$ και εάν f είναι μία συνάρτηση ορισμένη στο X, τότε ο *περιορισμός* της f στο E είναι η συνάρτηση g, με πεδίο ορισμού το E, για την οποία ισχύει ότι $g(p) = f(p)$ για κάθε $p \in E$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις f, g στον R^2 μέσω των ισοτήτων: $f(0,0) = g(0,0) = 0$ και $f(x, y) = xy^2/(x^2+y^4)$, $g(x, y) = xy^2/(x^2+y^6)$ για $(x, y) \neq 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι φραγμένη στον R^2, ότι η g είναι μη φραγμένη σε οποιαδήποτε περιοχή του $(0, 0)$ και ότι η f δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$. Παρ' όλα αυτά, οι περιορισμοί των f, g σε κάθε ευθεία γραμμή του R^2 είναι συνεχείς!

Άσκηση 8. Υποθέτουμε ότι f είναι μία πραγματική ομοιομόρφως συνεχής συνάρτηση, ορισμένη σε ένα φραγμένο υποσύνολο E του R^1. Αποδείξτε ότι η f είναι φραγμένη στο E.

Δείξτε ότι το συμπέρασμα είναι ψευδές εάν παραλείψουμε την υπόθεση ότι το E είναι φραγμένο.

[1] Σ. τ. Μ.: Για τον ορισμό του γραφήματος ανατρέξτε στην επόμενη άσκηση.

Άσκηση 9. Δείξτε ότι η απαίτηση στον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας μπορεί να διατυπωθεί ως ακολούθως: Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ούτως ώστε $\operatorname{diam} f(E) < \varepsilon$ για κάθε υποσύνολο E του X με $\operatorname{diam} E < \delta$.

Άσκηση 10. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες της ακόλουθης εναλλακτικής αποδείξεως του Θεωρήματος 4.19: Εάν η f δεν είναι ομοιομόρφως συνεχής, τότε για κάποιο $\varepsilon > 0$ υπάρχουν ακολουθίες $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ούτως ώστε $d_X(p_n, q_n) \to 0$ καθώς $n \to \infty$ και $d_Y(f(p_n), f(q_n)) > \varepsilon$ για κάθε δείκτη n. Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα 2.37 για να καταλήξετε σε αντίφαση.

Άσκηση 11. Υποθέτουμε ότι f είναι μία ομοιομόρφως συνεχής απεικόνιση ενός μετρικού χώρου X σε έναν μετρικό χώρο Y. Αποδείξτε ότι η $\{f(x_n)\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ είναι ακολουθία Cauchy του Y για κάθε ακολουθία Cauchy $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ του X. Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα αυτό για να δώσετε μία εναλλακτική απόδειξη του θεωρήματος που διατυπώνεται στην Άσκηση 13.

Άσκηση 12. Μία ομοιομόρφως συνεχής συνάρτηση ομοιομόρφως συνεχούς συναρτήσεως είναι ομοιομόρφως συνεχής συνάρτηση.

Διατυπώστε το παραπάνω ακριβέστερα και αποδείξτε το.

Άσκηση 13. Ας είναι E ένα πυκνό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου X και f μία πραγματική ομοιομόρφως συνεχής συνάρτηση, ορισμένη στο E. Αποδείξτε ότι η f έχει μοναδική συνεχή επέκταση από το E στον X (ανατρέξτε στην Άσκηση 5 για την ορολογία). (Η μοναδικότητα προκύπτει από την Άσκηση 4.)

Υπόδειξη: Για κάθε $p \in X$ και θετικό ακέραιο αριθμό n, ας είναι $V_n(p)$ το σύνολο των σημείων $q \in E$ με $d(p, q) < 1/n$. Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 9 για να αποδείξετε ότι η τομή των κλειστών θηκών των συνόλων $f(V_1(p)), f(V_2(p)), \ldots$ αποτελείται από ένα και μοναδικό σημείο $g(p)$ του R^1. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση g είναι η επιθυμητή επέκταση της f στον X.

Μπορεί ο R^1 να αντικατασταθεί από τον R^k; Από έναν συμπαγή μετρικό χώρο; Από οποιονδήποτε μετρικό χώρο;

Άσκηση 14. Ας είναι $I = [0, 1]$. Υποθέτουμε ότι f είναι μία συνεχής συνάρτηση του I στο I. Αποδείξτε ότι υπάρχει (τουλάχιστον ένα) $x \in I$ με $f(x) = x$.

Άσκηση 15. Ονομάζουμε μία απεικόνιση f ενός μετρικού χώρου X σε έναν μετρικό χώρο Y *ανοικτή* εάν και μόνον εάν το $f(V)$ είναι ανοικτό σύνολο για κάθε ανοικτό υποσύνολο V του X.

Αποδείξτε ότι κάθε συνεχής ανοικτή απεικόνιση του R^1 στον R^1 είναι μονότονη.

Άσκηση 16. Για έναν πραγματικό αριθμό x συμβολίζουμε με $[x]$ τον μεγαλύτερο ακέραιο αριθμό που είναι μικρότερος του x, δηλαδή ο $[x]$ είναι ο ακέραιος αριθμός για τον οποίο ισχύει ότι $x - 1 < [x] \leq x$. Ας είναι $(x) = x - [x]$, το κλασματικό μέρος του x. Ποία είναι τα σημεία ασυνέχειας των συναρτήσεων $[x]$ και (x);

Άσκηση 17. Υποθέτουμε ότι f είναι μία πραγματική συνάρτηση, ορισμένη στο (a, b). Αποδείξτε ότι το σύνολο των σημείων όπου η f έχει απλή ασυνέχεια είναι το πολύ αριθμήσιμο.

Υπόδειξη: Ας είναι E το σύνολο των σημείων x με $f(x-) < f(x+)$. Σε κάθε σημείο x του E αντιστοιχίζουμε μία τριάδα ρητών αριθμών (p, q, r) με τις ιδιότητες:

(α) $f(x-) < p < f(x+)$.

(β) Εάν $a < q < t < x$, τότε $f(t) < p$.

(γ) Εάν $x < t < r < b$, τότε $f(t) > p$.

Το σύνολο αυτών των τριάδων είναι το πολύ αριθμήσιμο. Δείξτε ότι σε κάθε τέτοια τριάδα αντιστοιχεί το πολύ ένα σημείο του E. Εργασθείτε ομοίως με τους υπόλοιπους δυνατούς τύπους απλής ασυνέχειας της f.

Άσκηση 18. Κάθε ρητός αριθμός x γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $x = m/n$, όπου οι m, n είναι ακέραιοι αριθμοί με μη κοινό παράγοντα και $n > 0$. Όταν $x = 0$, τότε θέτουμε $n = 1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση f που ορίζεται στον R^1 από την ισότητα

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{εάν ο } x \text{ είναι άρρητος αριθμός,} \\ 1/n & \text{εάν } x = m/n, \text{ όπως παραπάνω.} \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε άρρητο αριθμό και ότι η f έχει απλή ασυνέχεια σε κάθε ρητό αριθμό.

Άσκηση 19. Υποθέτουμε ότι f είναι μία πραγματική συνάρτηση, με πεδίο ορισμού το R^1, η οποία έχει την *ιδιότητα ενδιαμέσων τιμών:* εάν a, b, c είναι πραγματικοί αριθμοί με $f(a) < c < f(b)$, τότε $f(x) = c$ για κάποιο x μεταξύ των a και b.

Υποθέτουμε επίσης ότι για κάθε ρητό αριθμό r το σύνολο των σημείων x με $f(x) = r$ είναι κλειστό.

Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής.

Υπόδειξη: Εάν $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ είναι μία ακολουθία και x_0 ένα σημείο με $x_n \to x_0$ καθώς $n \to \infty$ και εάν $f(x_n) > r > f(x_0)$ για κάποιον ρητό αριθμό r και κάθε δείκτη n, τότε για κάθε δείκτη n υπάρχει t_n μεταξύ των x_0 και x_n με $f(t_n) = r$. Συνεπώς, $t_n \to x_0$ καθώς $n \to \infty$. Καταλήξτε σε αντίφαση. (N. J. Fine, *Amer. Math. Monthly*, vol. 73, 1966, p.782.)

Άσκηση 20. Εάν E είναι ένα μη κενό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου X, τότε ορίζουμε την απόσταση του $x \in X$ από το E μέσω της ισότητας

$$\rho_E(x) = \inf_{z \in E} d(x, z).$$

(α) Αποδείξτε ότι $\rho_E(x) = 0$ εάν και μόνον εάν $x \in \overline{E}$.

(β) Αποδείξτε ότι η ρ_E είναι ομοιομόρφως συνεχής συνάρτηση στον X δείχνοντας ότι

$$|\rho_E(x) - \rho_E(y)| \leq d(x, y)$$

για κάθε $x, y \in X$.

Υπόδειξη: Για $x, y, z \in X$ ισχύει ότι $\rho_E(x) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ και επομένως

$$\rho_E(x) \leq d(x, y) + \rho_E(y).$$

Άσκηση 21. Υποθέτουμε ότι K και F είναι δύο αποσυνδετά υποσύνολα ενός μετρικού χώρου X, ότι το K είναι συμπαγές και ότι το F κλειστό. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ούτως ώστε $d(p, q) > \delta$ για κάθε $p \in K, q \in F$.

Υπόδειξη: Η ρ_F είναι θετική συνεχής συνάρτηση στο K.

Δείξτε ότι το συμπέρασμα δεν αληθεύει για κλειστά και μη συμπαγή αποσυνδετά σύνολα.

Άσκηση 22. Υποθέτουμε ότι A, B είναι δύο κλειστά και αποσυνδετά υποσύνολα ενός μετρικού χώρου X. Ορίζουμε τη συνάρτηση f μέσω της σχέσεως

$$f(p) = \frac{\rho_A(p)}{\rho_A(p) + \rho_B(p)} \qquad (p \in X).$$

Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση στον X με πεδίο τιμών ευρισκόμενο εντός του $[0, 1]$, ότι $f(p) = 0$ εάν και μόνον εάν $p \in A$ και ότι $f(p) = 1$ εάν και μόνον εάν $p \in B$.

Το παραπάνω αποτελεί ένα αντίστροφο της Ασκήσεως 13: Κάθε κλειστό υποσύνολο A του X είναι της μορφής $Z(f)$ για κάποια συνεχή πραγματική συνάρτηση f στον X. Θέτοντας

$$V = f^{-1}([0, 1/2)), \qquad W = f^{-1}((1/2, 1]),$$

αποδείξτε ότι τα σύνολα V, W είναι ανοικτά και αποσυνδετά και ότι $A \subset V$, $B \subset W$. (Συνεπώς, σε έναν μετρικό χώρο, δύο κλειστά και αποσυνδετά υποσύνολα μπορούν να καλυφθούν από ζεύγη ανοικτών και αποσυνδετών υποσυνόλων. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται *φυσιολογικότητα*[2].)

[2] Σ. τ. Μ.: Ο αντίστοιχος αγγλικός όρος είναι *normality*. Στην ελληνική βιβλιογραφία, κυρίως σε συγγράμματα Γενικής Τοπολογίας, υπάρχει μία σύγχυση σχετικά με την απόδοση στα ελληνικά των όρων *regular* και *normal* οι οποίοι μπορούν να αποδοθούν με τις λέξεις «ομαλός», «κανονικός», «φυσιολογικός». Για τη λέξη *normality* ο μεταφραστής, ενδεχομένως και για λόγους προσωπικής προτιμήσεως, επιλέγει την απόδοση «φυσιολογικότητα». Πιθανώς, η απόδοση του εν λόγω όρου με τη λέξη «ορθοθεσία» να είναι η ορθότερη ως προς την ετυμολογία, όμως η λέξη αυτή έχει «γεωμετρικό» χαρακτήρα. Στη Γεωμετρία υπάρχουν έννοιες, όπως *normal vector*, όπου η λέξη *normal* δηλώνει την καθετότητα. Κάτι ανάλογο δεν συμβαίνει στη Γενική Τοπολογία με τους *normal spaces*.

Άσκηση 23. Μία πραγματική συνάρτηση f, ορισμένη στο (a, b), ονομάζεται *κυρτή* εάν και μόνον εάν

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

για κάθε $x, y \in (a, b)$ και πραγματικό αριθμό λ με $0 < \lambda < 1$. Αποδείξτε ότι κάθε κυρτή συνάρτηση είναι συνεχής. Αποδείξτε ότι κάθε αύξουσα κυρτή συνάρτηση κυρτής συναρτήσεως είναι κυρτή (Επί παραδείγματι, εάν η f είναι κυρτή, τότε το ίδιο ισχύει και για την e^f.)

Εάν η f είναι κυρτή στο (a, b) και εάν s, t, u είναι πραγματικοί αριθμοί με $a < s < t < u < b$, τότε αποδείξτε ότι

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leq \frac{f(u) - f(s)}{u - s} \leq \frac{f(u) - f(t)}{u - t}.$$

Άσκηση 24. Υποθέτουμε ότι f είναι μία πραγματική συνεχής συνάρτηση, ορισμένη στο (a, b), για την οποία ισχύει ότι

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

για κάθε $x, y \in (a, b)$. Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή.

Άσκηση 25. Εάν $A \subset R^k$ και $B \subset R^k$, τότε ορίζουμε ως $A + B$ το σύνολο των σημείων $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ με $\mathbf{x} \in A$ και $\mathbf{y} \in B$.

(α) Εάν το K είναι συμπαγές και το C κλειστό υποσύνολο του R^k, τότε αποδείξτε ότι το $K + C$ είναι κλειστό.

Υπόδειξη: Θεωρήστε $\mathbf{z} \notin K + C$ και θέσατε $F = \mathbf{z} - C$, δηλαδή το σύνολο των στοιχείων $\mathbf{z} - \mathbf{y}$ με $\mathbf{y} \in C$. Τότε, τα K και F είναι αποσυνδετά. Θεωρήστε $\delta > 0$ όπως στην Άσκηση 21. Δείξτε ότι η ανοικτή σφαιρική περιοχή με κέντρο το $\mathbf{z}$ και ακτίνα δ δεν τέμνει το $K + C$.

(β) Ας είναι α ένας άρρητος αριθμός. Ας είναι επίσης C_1 το σύνολο όλων των ακεραίων και C_2 το σύνολο των αριθμών της μορφής $n\alpha$ με $n \in C_1$. Δείξτε ότι τα C_1, C_2 είναι κλειστά υποσύνολα του R^1, ενώ το $C_1 + C_2$ *δεν* είναι κλειστό, δείχνοντας ότι το $C_1 + C_2$ είναι ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του R^1.

Άσκηση 26. Υποθέτουμε ότι X, Y, Z είναι μετρικοί χώροι και ότι ο Y είναι συμπαγής. Ας είναι f μία απεικόνιση του X στον Y και g μία συνεχής 1-1 απεικόνιση του Y στον Z. Θεωρούμε την απεικόνιση h με $h(x) = g(f(x))$ για $x \in X$.

Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιομόρφως συνεχής εάν η h είναι ομοιομόρφως συνεχής.

Υπόδειξη: Η g^{-1} έχει συμπαγές πεδίο ορισμού $g(Y)$ και $f(x) = g^{-1}(h(x))$.

Αποδείξτε επίσης ότι η f είναι συνεχής εάν η h είναι συνεχής.

Δείξτε (τροποποιώντας καταλλήλως το Παράδειγμα 4.21 ή βρίσκοντας ένα διαφορετικό παράδειγμα) ότι η συμπάγεια του Y δεν μπορεί να παραληφθεί από την υπόθεση, ακόμη και εάν οι X και Z είναι συμπαγείς.

Κεφάλαιο 5

ΔΙΑΦΟΡΙΣΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο (εκτός από την τελευταία ενότητα) θα περιορίσουμε την προσοχή μας σε *πραγματικές* συναρτήσεις, ορισμένες σε διαστήματα. Αυτό δεν γίνεται απλώς για λόγους ευκολίας, καθ' όσον προκύπτουν σημαντικές διαφορές όταν προχωρήσουμε από τις πραγματικές στις διανυσματικές συναρτήσεις. Η διαφόριση συναρτήσεων που ορίζονται σε Ευκλείδειο χώρο μελετώνται στο Κεφάλαιο 9.

Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Ορισμός 5.1. Ας είναι f μία πραγματική, ορισμένη στο $[a, b]$, συνάρτηση. Για κάθε $x \in [a, b]$ σχηματίζουμε το πηλίκο διαφορών

$$\phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad (a < t < b, t \neq x) \tag{1}$$

και ορίζουμε

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \phi(t) \tag{2}$$

όταν το όριο αυτό υπάρχει, σύμφωνα με τον Ορισμό 4.1.

Συνεπώς, με αυτόν τον τρόπο αντιστοιχίζουμε στην f μία συνάρτηση f',[1] με πεδίο ορισμού το σύνολο των σημείων x για τα οποία υπάρχει το όριο (2). Η f' ονομάζεται η *παράγωγος* της f.

Η f λέγεται *διαφορίσιμη* ή *παραγωγίσιμη*[2] στο σημείο x εάν και μόνον εάν η f' ορίζεται στο x. Η f λέγεται *διαφορίσιμη* ή *παραγωγίσιμη* στο $E \subset [a, b]$ εάν και μόνον εάν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in E$.

Είναι δυνατή επίσης η θεώρηση δεξιών και αριστερών ορίων στη (2). Σε αυτήν την περίπτωση οδηγούμαστε στον ορισμό των *δεξιών* και *αριστερών* παραγώγων της f. Ιδιαιτέρως, στα ακραία σημεία a και b, η παράγωγος, εάν υπάρχει, είναι δεξιά και αριστερή αντιστοίχως. Δεν θα εισέλθουμε σε περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τις πλευρικές παραγώγους.

Εάν η f ορίζεται σε ένα ανοικτό διάστημα (a, b) και εάν $a < x < b$, τότε η $f'(x)$ ορίζεται επίσης από τις (1) και (2). Όμως, δεν έχουν νόημα οι παράγωγοι της f στο a και στο b.

Θεώρημα 5.2. *Υποθέτουμε ότι f είναι μία πραγματική συνάρτηση, ορισμένη στο $[a, b]$. Εάν η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x \in [a, b]$, τότε η f είναι συνεχής στο x.*

---

[1] Σ. τ. Μ.: Η f' συμβολίζεται και με $\frac{df}{dx}$.

[2] Σ. τ. Μ.: Στο αυθεντικό κείμενο υπάρχει μόνον ο όρος *differentiable*, δηλαδή δεν γίνεται διαχωρισμός μεταξύ των λέξεων *διαφορίσιμη* και *παραγωγίσιμη*. Στην ελληνική βιβλιογραφία ο πρώτος όρος χρησιμοποιείται συνήθως για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, ενώ ο δεύτερος για συναρτήσεις μίας μεταβλητής.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.4, καθώς $t \to x$ λαμβάνουμε ότι

$$f(t) - f(x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \cdot (t - x) \to f'(x) \cdot 0 = 0.$$

□

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος γενικώς δεν αληθεύει. Είναι εύκολη η κατασκευή συνεχών συναρτήσεων που αδυνατούν να είναι παραγωγίσιμες σε επιλεγμένα σημεία. Στο Κεφάλαιο 7 θα κατασκευάσουμε μία συνεχή και πουθενά παραγωγίσιμη στο R^1 συνάρτηση!

Θεώρημα 5.3. *Υποθέτουμε ότι οι πραγματικές συναρτήσεις f, g ορίζονται στο $[a, b]$ και ότι είναι παραγωγίσιμες στο $x \in [a, b]$. Τότε, οι $f + g$, fg, f/g είναι παραγωγίσιμες στο x και ισχύουν τα παρακάτω:*

(α) $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

(β) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(γ) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$. *Εδώ υποθέτουμε επιπροσθέτως ότι* $g(x) \neq 0$.

Απόδειξη. Το (α) είναι σαφές, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.4.

Ας είναι $h = fg$. Τότε, για κάθε $t \in [a, b]$ με $t \neq x$,

$$h(t) - h(x) = f(t)[g(t) - g(x)] + g(x)[f(t) - f(x)].$$

Εάν διαιρέσουμε την ισότητα αυτή με το $t - x$ και παρατηρήσουμε ότι $f(t) \to f(x)$ καθώς $t \to x$ (Θεώρημα 5.2), τότε προκύπτει το (β). Εν συνεχεία, θέτουμε $h = f/g$. Τότε, για κάθε $t \in [a, b]$ με $t \neq x$,

$$\frac{h(t) - h(x)}{t - x} = \frac{1}{g(t)g(x)}\left[g(x)\frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f(x)\frac{g(t) - g(x)}{t - x}\right].$$

Λαμβάνοντας $t \to x$ και εφαρμόζοντας τα Θεωρήματα 4.4 και 5.2, αποκτούμε το (γ). □

Παράδειγμα 5.4. Η παράγωγος κάθε σταθερής συναρτήσεως είναι προφανώς ίση με 0. Εάν η συνάρτηση f ορίζεται μέσω της σχέσεως $f(x) = x$ για κάθε x που ανήκει σε κατάλληλο διάστημα, τότε $f'(x) = 1$. Με επανειλημμένη εφαρμογή των (β) και (γ) του Θεωρήματος 5.3 προκύπτει ότι η x^n είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο nx^{n-1} για κάθε μη μηδενικό ακέραιο αριθμό n (εάν $n < 0$, τότε εξαιρούμε το $x = 0$). Συνεπώς, κάθε πολυώνυμο είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση όπως επίσης και κάθε ρητή συνάρτηση, εκτός από τις θέσεις μηδενισμού του παρονομαστή.

Το επόμενο θεώρημα είναι γνωστό ως «κανόνας της αλυσίδας» για την παραγώγιση. Είναι σχετικό με την παραγώγιση σύνθετων συναρτήσεων και είναι ενδεχομένως το σημαντικότερο θεώρημα περί παραγωγίσεως. Στο Κεφάλαιο 9 θα συναντήσουμε γενικότερες εκδοχές του.

Θεώρημα 5.5. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$, ότι υπάρχει σε ένα σημείο $x \in [a, b]$ η $f'(x)$, ότι η συνάρτηση g ορίζεται σε ένα διάστημα I το οποίο περιέχει το πεδίο τιμών της f και ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $f(x)$. Εάν*

$$h(t) = g(f(t)) \qquad (a \le t \le b),$$

τότε η h είναι παραγωγίσιμη στο x και ισχύει ότι

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x). \tag{3}$$

Απόδειξη. Ας είναι $y = f(x)$. Σύμφωνα με τον ορισμό της παραγώγου, υπάρχουν κατάλληλες συναρτήσεις u, v ούτως ώστε

$$f(t) - f(x) = (t - x)[f'(x) + u(t)], \tag{4}$$

$$g(s) - g(y) = (s - y)[g'(y) + v(s)], \tag{5}$$

όπου $t \in [a, b]$, $s \in I$ και $u(t) \to 0$ καθώς $t \to x$, $v(s) \to 0$ καθώς $s \to y$. Ας είναι $s = f(t)$. Χρησιμοποιώντας την (5) και έπειτα την (4), λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned} h(t) - h(x) &= g(f(t)) - g(f(x)) \\ &= [f(t) - f(x)] \cdot [g'(y) + v(s)] \\ &= (t - x) \cdot [f'(x) + u(t)] \cdot [g'(y) + v(s)], \end{aligned}$$

ή αλλιώς, όταν $t \neq x$,

$$\frac{h(t) - h(x)}{t - x} = [g'(y) + v(s)] \cdot [f'(x) + u(t)]. \tag{6}$$

Λαμβάνοντας $t \to x$, βρίσκουμε ότι $s \to y$, λόγω της συνέχειας της f, και επομένως η δεξιά πλευρά της (6) συγκλίνει προς το $g'(y)f'(x)$, το οποίο χορηγεί την (3). □

Παράδειγμα 5.6.

(α) Ορίζουμε τη συνάρτηση f μέσω της σχέσεως

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{εάν } x \neq 0, \\ 0 & \text{εάν } x = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Θεωρώντας δεδομένο το γεγονός ότι η παράγωγος της sin είναι η cos (με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις θα ασχοληθούμε στο Κεφάλαιο 8), μπορούμε να εφαρμόσουμε τα Θεωρήματα 5.3 και 5.5 για $x \neq 0$ και να λάβουμε ότι

$$f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \quad (x \neq 0). \tag{8}$$

Στο $x = 0$ δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τα θεωρήματα αυτά διότι η $1/x$ δεν ορίζεται εκεί. Καταφεύγουμε ευθέως στον ορισμό: για $t \neq 0$ είναι

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \sin \frac{1}{t}.$$

Το όριο, καθώς $t \to 0$, της παραπάνω παραστάσεως δεν υπάρχει και επομένως δεν υπάρχει η παράγωγος της f στο 0.

(β) Ορίζουμε τη συνάρτηση f μέσω της σχέσεως

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{εάν } x \neq 0, \\ 0 & \text{εάν } x = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Όπως και παραπάνω, λαμβάνουμε ότι

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad (x \neq 0). \tag{10}$$

Για $x = 0$, καταφεύγουμε στον ορισμό και λαμβάνουμε ότι

$$\left|\frac{f(t) - f(0)}{t - 0}\right| = \left|t \sin \frac{1}{t}\right| \leq |t| \quad (t \neq 0).$$

Λαμβάνοντας $t \to 0$, διαπιστώνουμε ότι

$$f'(0) = 0. \tag{11}$$

Συνεπώς, η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x, αλλά η f' δεν είναι συνεχής διότι δεν υπάρχει το όριο του $\cos(1/x)$ στην (10) καθώς $x \to 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Ορισμός 5.7. Ας είναι f μία πραγματική συνάρτηση, ορισμένη σε έναν μετρικό χώρο X. Η f λέγεται ότι έχει *τοπικό μέγιστο* στο σημείο $p \in X$ εάν και μόνον εάν υπάρχει $\delta > 0$ ούτως ώστε $f(q) \leq f(p)$, για κάθε $q \in X$ με $d(p, q) < \delta$.

Τα τοπικά ελάχιστα ορίζονται ομοιοτρόπως.

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί το θεμέλιο πολλών εφαρμογών της παραγωγίσεως.

Θεώρημα 5.8. *Ας είναι f μία πραγματική συνάρτηση, ορισμένη σε ένα διάστημα $[a, b]$. Εάν η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x \in (a, b)$ και εάν υπάρχει η τιμή $f'(x)$, τότε $f'(x) = 0$.*

Φυσικά, αληθεύει η ανάλογη πρόταση και για τοπικά ελάχιστα.

Απόδειξη. Επιλέγουμε $\delta > 0$ όπως στον Ορισμό 5.7 ούτως ώστε

$$a < x - \delta < x < x + \delta < b.$$

Εάν $x - \delta < t < x$, τότε

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0.$$

Λαμβάνοντας $t \to x$, βρίσκουμε ότι $f'(x) \geq 0$.

Εάν $x < t < x + \delta$, τότε

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq 0,$$

το οποίο φανερώνει ότι $f'(x) \leq 0$. Κατά συνέπεια, $f'(x) = 0$. □

Θεώρημα 5.9. *Εάν f, g είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις, ορισμένες σε ένα διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο (a, b), τότε υπάρχει $x \in (a, b)$ με*

$$[f(b) - f(a)]g'(x) = [g(b) - g(a)]f'(x).$$

Σημειώνουμε ότι δεν απαιτείται παραγωγισιμότητα στα ακραία σημεία.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$h(t) = [f(b) - f(a)]g(t) - [g(b) - g(a)]f(t) \qquad (a \leq t \leq b).$$

Τότε, η h είναι συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b) και ισχύει ότι

$$h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b). \tag{12}$$

Για την απόδειξη του θεωρήματος, πρέπει να δείξουμε ότι $h'(x) = 0$ για κάποιο $x \in (a, b)$.

Εάν η h είναι σταθερή, τότε προφανώς το ζητούμενο ισχύει. Εάν $h(t) > h(a)$ για κάποιο $t \in (a, b)$, τότε θεωρούμε ένα σημείο x του $[a, b]$ στο οποίο η h λαμβάνει μέγιστο (Θεώρημα 4.16). Σύμφωνα με τη (12), $x \in (a, b)$ και το Θεώρημα 5.8 φανερώνει ότι $h'(x) = 0$. Εάν $h(t) < h(a)$ για κάποιο $t \in (a, b)$, τότε εφαρμόζουμε το ίδιο επιχείρημα επιλέγοντας ως x ένα σημείο του $[a, b]$ στο οποίο η h λαμβάνει ελάχιστο. □

Το παραπάνω θεώρημα ονομάζεται το *γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής*. Η ακόλουθη ειδική περίπτωση συνήθως αναφέρεται ως το *θεώρημα μέσης τιμής*:

Θεώρημα 5.10. *Ας είναι f μία πραγματική συνεχής συνάρτηση, ορισμένη σε ένα διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b). Τότε, υπάρχει $x \in (a, b)$ με*

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(x).$$

Απόδειξη. Λαμβάνουμε $g(x) = x$ $(x \in [a, b])$ στο Θεώρημα 5.9. □

Θεώρημα 5.11. *Υποθέτουμε ότι f είναι μία πραγματική συνάρτηση, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο (a, b).*

(α) *Εάν $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$, τότε η f είναι αύξουσα.*

(β) *Εάν $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, b)$, τότε η f είναι σταθερή.*

(γ) *Εάν $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$, τότε η f είναι φθίνουσα.*

Απόδειξη. Η αλήθεια όλων των ισχυρισμών αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας την ισότητα

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(x),$$

η οποία αληθεύει για κάθε $x_1, x_2 \in (a, b)$ και *κάποιο* x μεταξύ των x_1, x_2. □

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Έχουμε ήδη διαπιστώσει (Παράδειγμα 5.6(β)) ότι μία συνάρτηση f μπορεί να διαθέτει παράγωγο f' σε κάθε σημείο του διαστήματος ορισμού της, δίχως η παράγωγος να είναι απαραιτήτως συνεχής. Όμως, δεν είναι κάθε συνάρτηση παράγωγος κάποιας άλλης. Ιδιαιτέρως, η παράγωγος μίας συναρτήσεως έχει από κοινού μία ιδιότητα με τις συνεχείς συναρτήσεις: λαμβάνει ενδιάμεσες τιμές (συγκρίνετε με το Θεώρημα 4.23). Παρακάτω διατυπώνεται και αποδεικνύεται το αποτέλεσμα αυτό.

Θεώρημα 5.12. *Υποθέτουμε ότι f είναι μία πραγματική συνάρτηση, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[a, b]$. Εάν $f'(a) < \lambda < f'(b)$, τότε υπάρχει $x \in (a, b)$ με $f'(x) = \lambda$.*

Παρόμοιο αποτέλεσμα ισχύει εάν $f'(a) > f'(b)$.

Απόδειξη. Θέτουμε $g(t) = f(t) - \lambda t$ $(t \in [a,b])$. Τότε, $g'(a) < 0$ και επομένως $g(t_1) < g(a)$ για κάποιο $t_1 \in (a,b)$. Παρομοίως, $g'(b) > 0$ και επομένως $g(t_2) < g(b)$ για κάποιο $t_2 \in (a,b)$. Συνεπώς, η g λαμβάνει το ελάχιστό της στο $[a,b]$ (Θεώρημα 4.16) σε κάποιο σημείο x με $a < x < b$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.8, $g'(x) = 0$. Άρα, $f'(x) = \lambda$. □

Πόρισμα. *Εάν f είναι μία πραγματική συνάρτηση, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[a,b]$, τότε η f' δεν έχει απλή ασυνέχεια στο $[a,b]$.*

Μπορεί όμως να έχει ασυνέχεια δευτέρου είδους.

Ο ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ L' HOSPITAL[3]

Το ακόλουθο θεώρημα αποβαίνει συχνά χρήσιμο για υπολογισμό ορίων.

Θεώρημα 5.13. *Υποθέτουμε ότι f, g είναι πραγματικές και παραγωγίσιμες στο (a,b) συναρτήσεις με $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$, όπου είναι $-\infty \le a < b \le +\infty$. Υποθέτουμε επίσης ότι*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to A \quad \text{καθώς} \quad x \to a. \tag{13}$$

[3] Σ. τ. Μ.: Guillaume François Antoine de l' Hospital (1661-1704). Γάλλος μαθηματικός.

Ο L' Hospital θεωρούνταν ικανός μαθηματικός. Καταγόταν από μία αριστοκρατική στρατιωτική οικογένεια. Με την ενηλικίωση του, ο L' Hospital έγινε λοχαγός του ιππικού, αλλά είχε αναπτύξει ήδη το πάθος του για τα Μαθηματικά. Ύστερα από την παραίτηση από αυτήν τη θέση, ο L' Hospital αφοσιώθηκε εξ ολοκλήρου στα Μαθηματικά. Μαθήτευσε υπό τον Johann Bernoulli (1667-1748). Συνέγραψε το πρώτο βιβλίο Διαφορικού Λογισμού, το οποίο γνώρισε μεγάλη επιτυχία. Επίσης, υπήρξε μέλος αρκετών επιστημονικών ακαδημιών.

Ο λεγόμενος κανόνας του L' Hospital ανακαλύφθηκε από τον Johann Bernoulli. Οι L' Hospital και Bernoulli είχαν υπογράψει ένα συμβόλαιο, σύμφωνα με το οποίο ο πρώτος είχε το ελεύθερο να χρησιμοποιήσει τις ανακαλύψεις του δευτέρου όπως ήθελε, με αντάλλαγμα έναν σταθερό μισθό.

Εάν

$$f(x) \to 0 \quad \textit{και} \quad g(x) \to 0 \quad \textit{καθώς} \quad x \to a \tag{14}$$

ή εάν

$$g(x) \to +\infty \quad \textit{καθώς} \quad x \to a, \tag{15}$$

τότε

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to A \quad \textit{καθώς} \quad x \to a. \tag{16}$$

Στα παραπάνω, ο A είναι βεβαίως αριθμός του εκτεταμένου συστήματος των πραγματικών αριθμών.

Φυσικά, αληθεύει η ανάλογη πρόταση εάν $x \to b$ ή $g(x) \to -\infty$ στη (15). Σημειώνουμε ότι χρησιμοποιούμε την εκτεταμένη έννοια του ορίου (Ορισμός 4.33).

Απόδειξη. Αρχικά θεωρούμε την περίπτωση όπου $-\infty \le A < +\infty$. Επιλέγουμε πραγματικό αριθμό q με $A < q$ και πραγματικό αριθμό r με $A < r < q$. Σύμφωνα με τη (13), υπάρχει ένα σημείο $c \in (a, b)$ ούτως ώστε εάν $a < x < c$, τότε

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < r. \tag{17}$$

Εάν $a < x < y < c$, τότε το Θεώρημα 5.9 φανερώνει την ύπαρξη ενός σημείου $t \in (x, y)$ με

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < r. \tag{18}$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει η (14). Λαμβάνοντας $x \to a$ στη (18), διαπιστώνουμε ότι

$$\frac{f(y)}{g(y)} \le r < q \qquad (a < y < c). \tag{19}$$

Εν συνεχεία, υποθέτουμε ότι ισχύει η (15). Θεωρώντας σταθερό το y στη (18), είναι δυνατή η επιλογή ενός σημείου $c_1 \in (a, y)$ με $g(x) > g(y)$ και $g(x) > 0$ εάν $a < x < c_1$. Πολλαπλασιάζοντας τη (18) με $[g(x) - g(y)]/g(x)$, λαμβάνουμε ότι

$$\frac{f(x)}{g(x)} < r - r\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \quad (a < x < c_1). \tag{20}$$

Εάν λάβουμε $x \to a$ στην (20), τότε η (15) φανερώνει την ύπαρξη ενός σημείου $c_2 \in (a, c_1)$ με

$$\frac{f(x)}{g(x)} < q \quad (a < x < c_2). \tag{21}$$

Ανακεφαλαιώνοντας, οι (19) και (21) φανερώνουν ότι για κάθε q με $A < q$ υπάρχει c_2 ούτως ώστε $f(x)/g(x) < q$ εάν $a < x < c_2$.

Με τον ίδιο τρόπο, εάν $-\infty < A \leq +\infty$ και p είναι ένας αριθμός με $p < A$, τότε μπορούμε να βρούμε σημείο c_3 με

$$p < \frac{f(x)}{g(x)} \quad (a < x < c_3). \tag{22}$$

Η (16) έπεται από τις δύο αυτές προτάσεις. □

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΕΩΣ

Ορισμός 5.14. Εάν η συνάρτηση f έχει παράγωγο f' σε ένα διάστημα και εάν η f' είναι παραγωγίσιμη, τότε συμβολίζουμε την παράγωγο της f' με f'' και ονομάζουμε την f'' *δεύτερη παράγωγο* της f. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, αποκτούμε τις συναρτήσεις

$$f, f', f'', f^{(3)}, \ldots, f^{(n)}$$

(n θετικός ακέραιος αριθμός), όπου η κάθε μία είναι η παράγωγος της προηγούμενης. Η $f^{(n)}$ ονομάζεται η n *τάξεως* παράγωγος της f.

Για την ύπαρξη της $f^{(n)}(x)$ σε ένα σημείο x, πρέπει να υπάρχει η $f^{(n-1)}(t)$ για κάθε t σε μία περιοχή του x (ή σε μία πλευρική περιοχή του x εάν αυτό είναι ακραίο σημείο του διαστήματος στο οποίο ορίζεται η f) και η $f^{(n-1)}$ να είναι παραγωγίσιμη στο x. Εφόσον πρέπει να υπάρχει η $f^{(n-1)}$ σε μία περιοχή του x, η $f^{(n-2)}$ πρέπει να είναι παραγωγίσιμη σε αυτήν την περιοχή.

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ TAYLOR

Θεώρημα 5.15. *Υποθέτουμε ότι f είναι μία πραγματική συνάρτηση, ορισμένη στο $[a, b]$, ότι n είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός, ότι η $f^{(n-1)}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και ότι η $f^{(n)}(t)$ υπάρχει για κάθε $t \in (a, b)$. Ας είναι α, β δύο διακεκριμένα σημεία του $[a, b]$. Ορίζουμε*

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t-\alpha)^k \qquad (t \in [a, b]). \tag{23}$$

Τότε, υπάρχει ένα σημείο x μεταξύ των α, β με

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\beta-\alpha)^n. \tag{24}$$

Για $n = 1$, το παραπάνω αποτελεί το θεώρημα μέσης τιμής. Γενικώς, το θεώρημα φανερώνει ότι η f μπορεί να προσεγγισθεί από ένα πολυώνυμο βαθμού $n-1$. Η (24) μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε το σφάλμα προσεγγίσεως εάν γνωρίζουμε φράγματα για τις τιμές $|f^{(n)}(x)|$.

Απόδειξη. Ας είναι M ο αριθμός που ορίζεται από την ισότητα

$$f(\beta) = P(\beta) + M(\beta-\alpha)^n. \tag{25}$$

Θέτουμε

$$g(t) = f(t) - P(t) - M(t-\alpha)^n \qquad (a \le t \le b). \tag{26}$$

Πρέπει να δείξουμε ότι $n!M = f^{(n)}(x)$ για κάποιο x μεταξύ των α και β. Σύμφωνα με τις (23) και (26),

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - n!M \qquad (a < t < b). \tag{27}$$

Συνεπώς, η απόδειξη θα είναι πλήρης εάν δείξουμε ότι $g^{(n)}(x) = 0$ για κάποιο x μεταξύ των α και β.

Εφόσον $P^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha)$ για $k = 0, \ldots, n-1$, έχουμε ότι

$$g(\alpha) = g'(\alpha) = \cdots = g^{(n-1)}(\alpha) = 0. \tag{28}$$

Η επιλογή του M φανερώνει ότι $g(\beta) = 0$ και επομένως $g'(x_1) = 0$ για κάποιο x_1 μεταξύ των α και β, σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής. Εφόσον $g'(\alpha) = 0$, συνάγουμε παρομοίως ότι $g''(x_2) = 0$ για κάποιο x_2 μεταξύ των α και x_1. Έπειτα από n βήματα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $g^{(n)}(x_n) = 0$ για κάποιο x_n μεταξύ των α και x_{n-1} και επομένως μεταξύ των α και β. □

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Παρατήρηση 5.16. Ο Ορισμός 5.1 εφαρμόζεται δίχως μετατροπή σε μιγαδικές συναρτήσεις, ορισμένες σε ένα διάστημα $[a, b]$ και τα Θεωρήματα 5.2 και 5.3, με τις αυτούσιες αποδείξεις τους, παραμένουν αληθή. Εάν f_1, f_2 είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f, δηλαδή εάν

$$f(t) = f_1(t) + i f_2(t) \qquad (t \in [a, b]),$$

όπου οι f_1 και f_2 είναι πραγματικές συναρτήσεις, τότε κατά σαφή τρόπο προκύπτει ότι

$$f'(x) = f_1'(x) + i f_2'(x) \tag{29}$$

σε κάθε σημείο x στο οποίο παραγωγίζεται η f. Επίσης, η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x εάν και μόνον εάν οι f_1 και f_2 είναι αμφότερες παραγωγίσιμες στο x.

Επεκτείνοντας τα προηγούμενα σε συναρτήσεις $\mathbf{f}$, ορισμένες στο $[a, b]$ και με τιμές στον R^k, μπορούμε εφαρμόζοντας τον Ορισμό 5.1 να ορίσουμε την *παράγωγο* $\mathbf{f}'(x)$ σε ένα σημείο x. Το πηλίκο $\phi(t)$ στην (1) είναι τώρα σημείο του R^k για κάθε $t \in [a, b]$ και το όριο στην (2) λαμβάνεται ως προς τη στάθμη του R^k. Με διαφορετική διατύπωση, το $\mathbf{f}'(x)$ είναι το σημείο του R^k (όταν υπάρχει) για το οποίο ισχύει ότι

$$\lim_{t \to x} \left| \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(x)}{t - x} - \mathbf{f}'(x) \right| = 0 \tag{30}$$

και η $\mathbf{f}'$ είναι επίσης συνάρτηση με τιμές στον R^k.

Εάν $f_1, \ldots, f_k$ είναι οι συνιστώσες της $\mathbf{f}$, όπως ορίζονται στο Θεώρημα 4.10, τότε

$$\mathbf{f}' = (f_1', \ldots, f_k') \tag{31}$$

και η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x εάν και μόνον εάν οι $f_1, \ldots, f_k$ είναι όλες παραγωγίσιμες στο x.

Το Θεώρημα 5.2 παραμένει αληθές σε αυτό το πλαίσιο καθώς και τα 5.3(α) και 5.3(β), εάν η fg αντικατασταθεί από το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ (ανατρέξτε στον Ορισμό 4.3).

Όταν όμως εξετάσουμε το θεώρημα μέσης τιμής και τον κανόνα του L' Hospital, η κατάσταση μεταβάλλεται. Τα επόμενα δύο παραδείγματα φανερώνουν ότι καθένα από τα δύο αυτά συμπεράσματα δεν ισχύει για μιγαδικές συναρτήσεις.

Παράδειγμα 5.17. Ορίζουμε τη συνάρτηση f, όπου για πραγματικό αριθμό x είναι

$$f(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x. \tag{32}$$

(Η τελευταία ισότητα μπορεί να θεωρηθεί ως ο ορισμός του μιγαδικού εκθετικού e^{ix}. Στο Κεφάλαιο 8 υπάρχει ενδελεχής ανάλυση αυτών των συναρτήσεων.) Τότε,

$$f(2\pi) - f(0) = 1 - 1 = 0, \tag{33}$$

όμως

$$f'(x) = ie^{ix} \tag{34}$$

και επομένως $|f'(x)| = 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Συνεπώς, το Θεώρημα 5.10 δεν ισχύει σε αυτήν την περίπτωση.

Παράδειγμα 5.18. Επί του διαστήματος $(0, 1)$ ορίζουμε τις συναρτήσεις f, g μέσω της σχέσεως $f(x) = x$ και

$$g(x) = x + x^2 e^{i/x^2} \tag{35}$$

για κάθε $x \in (0, 1)$. Εφόσον $|e^{it}| = 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό t, διαπιστώνουμε ότι

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \tag{36}$$

Έπειτα,

$$g'(x) = 1 + \left\{2x - \frac{2i}{x}\right\} e^{i/x^2} \qquad (0 < x < 1) \tag{37}$$

και επομένως

$$|g'(x)| \geq \left|2x - \frac{2i}{x}\right| - 1 \geq \frac{2}{x} - 1. \tag{38}$$

Άρα,

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| = \frac{1}{|g'(x)|} \leq \frac{x}{2 - x} \tag{39}$$

και συνεπώς

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0. \tag{40}$$

Σύμφωνα με τις (36) και (40), ο κανόνας του L' Hospital δεν ισχύει σε αυτήν την περίπτωση. Σημειώνουμε επίσης ότι $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$, βάσει της (38).

Όμως, *υπάρχει* μία συνέπεια του θεωρήματος μέσης τιμής, η οποία σε αρκετές εφαρμογές, είναι σχεδόν τόσο χρήσιμη όσο και το Θεώρημα 5.10, και η οποία παραμένει αληθής για διανυσματικές συναρτήσεις: από το Θεώρημα 5.10 προκύπτει ότι

$$|f(b) - f(a)| \leq (b - a) \sup_{a<x<b} |f'(x)|. \tag{41}$$

Θεώρημα 5.19. *Υποθέτουμε ότι* $\mathbf{f}$ *είναι μία συνεχής απεικόνιση του* $[a, b]$ *στο* R^k*, παραγωγίσιμη στο* (a, b)*. Τότε, υπάρχει* $x \in (a, b)$ *με*

$$|\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)| \leq (b - a)|\mathbf{f}'(x)|.$$

Απόδειξη. [4] Θέτουμε $\mathbf{z} = \mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)$ και ορίζουμε τη συνάρτηση ϕ μέσω της σχέσεως

$$\phi(t) = \mathbf{z} \cdot \mathbf{f}(t) \qquad (a \leq t \leq b).$$

Τότε, η ϕ είναι πραγματική συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b). Επομένως, το θεώρημα μέσης τιμής φανερώνει ότι

$$\phi(b) - \phi(a) = (b - a)\phi'(x) = (b - a)\mathbf{z} \cdot \mathbf{f}'(x)$$

για κάποιο $x \in (a, b)$. Από την άλλη πλευρά,

$$\phi(b) - \phi(a) = \mathbf{z} \cdot \mathbf{f}(b) - \mathbf{z} \cdot \mathbf{f}(a) = \mathbf{z} \cdot \mathbf{z} = |\mathbf{z}|^2.$$

Τώρα, η ανισότητα του Schwarz χορηγεί την ανισότητα

$$|\mathbf{z}|^2 = (b - a)|\mathbf{z} \cdot \mathbf{f}'(x)| \leq (b - a)|\mathbf{z}||\mathbf{f}'(x)|.$$

Συνεπώς, $|\mathbf{z}| \leq (b - a)|\mathbf{f}'(x)|$. Αυτό είναι το επιθυμητό αποτέλεσμα. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Ας είναι f μία πραγματική συνάρτηση, ορισμένη στην πραγματική ευθεία, με την ιδιότητα

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$$

για κάθε $x, y \in R^1$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

[4] Ο V. P. Havin έχει μεταφράσει τη δεύτερη έκδοση του βιβλίου στα ρωσικά και προσέθεσε αυτήν την απόδειξη στην αρχική.

Άσκηση 2. Υποθέτουμε ότι f είναι μία πραγματική συνάρτηση, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο (a, b), με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα[5] στο (a, b). Ας είναι g η αντίστροφη συνάρτηση της f. Αποδείξτε ότι η g είναι παραγωγίσιμη και ότι

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \qquad (a < x < b).$$

Άσκηση 3. Υποθέτουμε ότι g είναι μία πραγματική συνάρτηση, ορισμένη στον R^1, με φραγμένη παράγωγο, δηλαδή $|g'| \leq M$ για κάποιον πραγματικό αριθμό M. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και ορίζουμε τη συνάρτηση f μέσω της ισότητας $f(x) = x + \varepsilon g(x)$ $(x \in R^1)$. Αποδείξτε ότι η f είναι 1-1 όταν το ε ληφθεί επαρκώς μικρό. (Το ε θα προσδιορισθεί από το M.)

Άσκηση 4. Εάν $C_0, \ldots, C_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί με

$$C_0 + \frac{C_1}{2} + \cdots + \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{C_n}{n+1} = 0,$$

τότε αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$C_0 + C_1 x + \cdots + C_{n-1} x^{n-1} + C_n x^n = 0$$

έχει τουλάχιστον μία θέση μηδενισμού μεταξύ των 0 και 1.

Άσκηση 5. Υποθέτουμε ότι f είναι μία πραγματική συνάρτηση, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με $f'(x) \to 0$ καθώς $x \to +\infty$. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x) = f(x+1) - f(x)$ $(x > 0)$. Αποδείξτε ότι $g(x) \to 0$ καθώς $x \to +\infty$.

---

[5] Σ. τ. Μ.: Μία πραγματική συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα σύνολο πραγματικών αριθμών A, ονομάζεται:

(α) *Γνησίως αύξουσα* εάν και μόνον εάν για κάθε $x, y \in A$ με $x < y$ ισχύει ότι $f(x) < f(y)$.

(β) *Γνησίως φθίνουσα* εάν και μόνον εάν για κάθε $x, y \in A$ με $x < y$ ισχύει ότι $f(x) > f(y)$.

Θεωρώντας το A ως το σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών, παρατηρούμε ότι ο ορισμός αυτός εφαρμόζεται και για ακολουθίες πραγματικών αριθμών.

Άσκηση 6. Υποθέτουμε ότι:

(α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.

(β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

(γ) $f(0) = 0$.

(δ) Η f' είναι αύξουσα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση g με

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \qquad (x > 0).$$

Αποδείξτε ότι η g είναι αύξουσα.

Άσκηση 7. Υποθέτουμε ότι οι f, g είναι πραγματικές συναρτήσεις, ορισμένες σε κάποιο ανοικτό διάστημα, ότι οι $f'(x)$, $g'(x)$ υπάρχουν σε ένα σημείο x του διαστήματος και ισχύει ότι $g'(x) \neq 0$ και $f(x) = g(x) = 0$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(Το αποτέλεσμα ισχύει και για μιγαδικές συναρτήσεις.)

Άσκηση 8. Υποθέτουμε ότι f είναι μία πραγματική συνάρτηση στο $[a, b]$, με την f' συνεχή στο $[a, b]$. Ας είναι $\varepsilon > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ούτως ώστε

$$\left| \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f'(x) \right| < \varepsilon,$$

για κάθε $t, x \in [a, b]$ με $0 < |t - x| < \delta$. (Η ιδιότητα αυτή μπορεί επίσης να εκφρασθεί λέγοντας ότι η f είναι *ομοιομόρφως παραγωγίσιμη* στο $[a, b]$.) Ισχύει το αποτέλεσμα αυτό και για διανυσματικές συναρτήσεις;

Άσκηση 9. Ας είναι f μία συνεχής πραγματική συνάρτηση, ορισμένη στον R^1, για την οποία είναι γνωστό ότι η τιμή $f'(x)$ υπάρχει για κάθε πραγματικό αριθμό x με $x \neq 0$ και ότι $f'(x) \to 3$ καθώς $x \to 0$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η $f'(0)$ υπάρχει;

Άσκηση 10. Υποθέτουμε ότι f, g είναι μιγαδικές συναρτήσεις, παραγωγίσιμες στο $(0, 1)$. Υποθέτουμε επίσης ότι $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$, $f'(x) \to A$, $g'(x) \to B$ καθώς $x \to 0$, όπου A, B είναι μιγαδικοί αριθμοί με $B \neq 0$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Συγκρίνετε με το Παράδειγμα 5.18.

Υπόδειξη: Ισχύει ότι

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left\{ \frac{f(x)}{x} - A \right\} \cdot \frac{x}{g(x)} + A \cdot \frac{x}{g(x)},$$

για κάθε $x \in (0, 1)$. Εφαρμόστε το Θεώρημα 5.13 στα πραγματικά και φανταστικά μέρη των $f(x)/x$, $g(x)/x$.

Άσκηση 11. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε μία περιοχή ενός σημείου x για το οποίο υπάρχει η τιμή $f''(x)$. Δείξτε ότι

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι το όριο αυτό μπορεί να υπάρχει, ακόμη και όταν η $f''(x)$ δεν υπάρχει.

Υπόδειξη: Κάνετε χρήση του Θεωρήματος 5.13.

Άσκηση 12. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = |x|^3$ $(x \in R^1)$. Υπολογίστε τις f', f'' και δείξτε ότι η τιμή $f^{(3)}(0)$ δεν υπάρχει.

Άσκηση 13. Υποθέτουμε ότι a, c είναι πραγματικοί αριθμοί με $c > 0$. Ορίζουμε τη συνάρτηση f στο $[-1, 1]$ μέσω της ισότητας

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^{-c}) & \text{εάν } x \neq 0, \\ 0 & \text{εάν } x = 0. \end{cases}$$

Αποδείξτε τις παρακάτω προτάσεις:

(α) Η f είναι συνεχής εάν και μόνον εάν $a > 0$.

(β) Η $f'(0)$ υπάρχει εάν και μόνον εάν $a > 1$.
(γ) Η f' είναι φραγμένη εάν και μόνον εάν $a \geq 1 + c$.
(δ) Η f' είναι συνεχής εάν και μόνον εάν $a > 1 + c$.
(ε) Η $f''(0)$ υπάρχει εάν και μόνον εάν $a > 2 + c$.
(στ) Η f'' είναι φραγμένη εάν και μόνον εάν $a \geq 2 + 2c$.
(ζ) Η f'' είναι συνεχής εάν και μόνον εάν $a > 2 + 2c$.

Άσκηση 14. Υποθέτουμε ότι f είναι μία πραγματική συνάρτηση, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο (a, b). Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή εάν και μόνον εάν η f' είναι αύξουσα. Υποθέτουμε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή εάν και μόνον $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$.

Άσκηση 15. Υποθέτουμε ότι $a \in R^1$, ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη πραγματική συνάρτηση στο $(a, +\infty)$ και ότι τα M_0, M_1, M_2 είναι τα ελάχιστα άνω φράγματα των $|f|, |f'|, |f''|$ αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι

$$M_1^2 \leq 4M_0M_2.$$

Υπόδειξη: Εάν $h > 0$, τότε το θεώρημα του Taylor[6] φανερώνει ότι

$$f'(x) = \frac{1}{2h}[f(x + 2h) - f(x)] - hf''(\xi)$$

[6] Σ. τ. Μ.: Brook Taylor (1685-1731). Άγγλος μαθηματικός. Εργάσθηκε σε θέματα Απειροστικού Λογισμού, όπου μεταξύ άλλων συνήγαγε το φερώνυμο θεώρημα και την ολοκλήρωση κατά μέρη, καθώς και σε θέματα Γεωμετρίας και Φυσικής. (Βεβαίως, τουλάχιστον εκείνη την εποχή, τα Μαθηματικά και η Φυσική ήταν άρρηκτα συνδεδεμένα μεταξύ τους.)

Ο Taylor είχε αριστοκρατική καταγωγή. Ο πατέρας του τον ανέθρεψε με αυστηρή πειθαρχία αλλά είχε και θετικές επιρροές σε αυτόν, μεταδίδοντας του την αγάπη για τη μουσική και τη ζωγραφική. Ήδη από νεαρή ηλικία, ο Taylor είχε άριστη παιδεία και ήταν προχωρημένος μουσικός και ζωγράφος.

Ο Taylor εισήχθη το έτος 1703 στο Κολέγιο του Αγίου Ιωάννη στο Cambridge. Έλαβε το πτυχίο του το έτος 1709, αλλά είχε ήδη συγγράψει την πρώτη του σημαντική μαθηματική εργασία. Το έτος 1712 ο Taylor εξελέγη εταίρος της Βασιλικής Εταιρίας του Λονδίνου, λόγω της πεποιθήσεως που υπήρχε για την μεγάλη μαθηματική εμπειρία του Taylor παρά για τις δημοσιευμένες εργασίες του. Το ίδιο έτος ο Taylor διορίσθηκε μέλος της επιτροπής που θα επιδίκαζε τη διαμάχη μεταξύ των Isaac Newton (1642-1727) και Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) περί της πατρότητας του Απειροστικού Λογισμού. Βεβαίως, ήταν ένθερμος υποστηρικτής του Newton. Ο Taylor εξελέγη το έτος 1714 γραμματέας της Βασιλικής για κάποιο $\xi \in (x, x+2h)$. Άρα,

$$|f'(x)| \leq hM_2 + \frac{M_0}{h}.$$

Για να αποδείξουμε ότι η ισότητα $M_1^2 = 4M_0M_2$ μπορεί να είναι όντως αληθής, λαμβάνουμε $a = -1$ και θεωρούμε τη συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{εάν } -1 < x < 0, \\ \dfrac{x^2-1}{x^2+1} & \text{εάν } 0 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

Δείξτε ότι $M_0 = 1$, $M_1 = 4$, $M_2 = 4$.

Ισχύει η ανισότητα $M_1^2 \leq 4M_0M_2$ για διανυσματικές συναρτήσεις;

Άσκηση 16. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, ότι η f'' είναι φραγμένη στο $(0, +\infty)$ και ότι $f(x) \to 0$ καθώς $x \to +\infty$. Αποδείξτε ότι $f'(x) \to 0$ καθώς $x \to +\infty$.

Υπόδειξη: Λάβετε $a \to +\infty$ στην Άσκηση 15.

Εταιρίας του Λονδίνου. Από αυτήν τη θέση παραιτήθηκε το έτος 1718 για λόγους υγείας και ελλείψεως ενδιαφέροντος. Η περίοδος αυτή ήταν η πιο παραγωγική για τον Taylor. Το έτος 1715 εκδόθηκαν δύο βιβλία του, το «Methodus Incrementorum Directa et Inversa» και το φημισμένο «Linear Perspective», τα οποία θεωρούνται πολύ σημαντικά στην Ιστορία των Μαθηματικών. Ο Taylor επισκεπτόταν συχνά τη Γαλλία για λόγους υγείας και ανέπτυξε εκεί σχέσεις με διαφόρους μαθηματικούς.

Συνέβησαν διάφορα τραγικά γεγονότα στον Taylor με αποτέλεσμα να δυσκολέψουν τη μαθηματική του έρευνα. Ο Taylor παντρεύτηκε το έτος 1721. Λόγω αυτού του γάμου οι σχέσεις του Taylor με τον πατέρα του είχαν διακοπεί. Οι λόγοι αφορούσαν στην έντονη αντίθεση του πατέρα του Taylor σε αυτόν τον γάμο, διότι η οικογένεια της νύφης δεν είχε οικονομική επιφάνεια του επιπέδου της οικογενείας του Taylor. Το έτος 1723 η γυναίκα του Taylor πέθανε κατά τη διάρκεια της γεννήσεως του παιδιού τους. Το παιδί επίσης πέθανε. Μετά από αυτό το τραγικό γεγονός, οι σχέσεις του Taylor με τον πατέρα του αποκαταστάθηκαν. Ο Taylor παντρεύεται ξανά το έτος 1725, με τη συγκατάθεση του πατέρα του αυτήν τη φορά. Ο πατέρας του Taylor πέθανε το έτος 1729 και την επόμενη χρονιά πεθαίνει η γυναίκα του Taylor κατά τη διάρκεια γεννήσεως του παιδιού τους. Αυτήν τη φορά το παιδί έζησε.

Ο Taylor συνέβαλε σημαντικά στα Μαθηματικά και στη Φυσική, πολύ περισσότερο από την απλή επισύναψη του ονόματός του σε ένα θεώρημα. Προς τιμή του Taylor έχει δοθεί το όνομα του σε έναν κρατήρα στη σελήνη.

Άσκηση 17. Υποθέτουμε ότι f είναι μία τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[-1, 1]$ με

$$f(-1) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f'(0) = 0.$$

Αποδείξτε ότι $f^{(3)}(x) \geq 3$ για κάποιο $x \in (-1, 1)$.

Σημειώνουμε ότι η ισότητα ισχύει για τη συνάρτηση $\frac{1}{2}(x^3 + x^2)$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 5.15 με $\alpha = 0$ και $\beta = \pm 1$ για να αποδείξετε την ύπαρξη $s \in (0, 1)$ και $t \in (-1, 0)$ με

$$f^{(3)}(s) + f^{(3)}(t) = 6.$$

Άσκηση 18. Υποθέτουμε ότι f είναι μία πραγματική συνάρτηση, ορισμένη στο $[a, b]$, ότι n είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός και ότι η $f^{(n-1)}$ υπάρχει στο $[a, b]$. Ας είναι α, β και P όπως στο θεώρημα του Taylor (Θεώρημα 5.15). Ορίζουμε το πηλίκο

$$Q(t) = \frac{f(t) - f(\beta)}{t - \beta}$$

για κάθε $t \in [a, b]$ με $t \neq \beta$. Να παραγωγίσετε την

$$f(t) - f(\beta) = (t - \beta)Q(t)$$

$n-1$ φορές στο $t = \alpha$ και να συνάγετε την παρακάτω εκδοχή του θεωρήματος του Taylor:

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{Q^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta - \alpha)^n.$$

Άσκηση 19. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $(-1, 1)$ και παραγωγίσιμη στο 0. Υποθέτουμε επίσης ότι $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ είναι ακολουθίες με $-1 < \alpha_n < \beta_n < 1$ και $\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Ορίζουμε τα πηλίκα διαφορών

$$D_n = \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Αποδείξτε τις ακόλουθες προτάσεις:

(α) Εάν $\alpha_n < 0 < \beta_n$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, τότε $\lim_{n\to\infty} D_n = f'(0)$.

(β) Εάν $0 < \alpha_n < \beta_n$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ και εάν η $\{\beta_n/(\beta_n - \alpha_n)\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι φραγμένη, τότε $\lim_{n\to\infty} D_n = f'(0)$.

(γ) Εάν η f' είναι συνεχής στο $(-1, 1)$, τότε $\lim_{n\to\infty} D_n = f'(0)$.

Βρείτε ένα παράδειγμα στο οποίο η f να είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ (αλλά η f' να μην είναι συνεχής στο 0), οι $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ να συγκλίνουν προς το 0 με τέτοιο τρόπο ώστε το $\lim_{n\to\infty} D_n$ να υπάρχει αλλά να είναι διάφορο του $f'(0)$.

Άσκηση 20. Διατυπώστε και αποδείξτε μία ανισότητα η οποία να προκύπτει από το θεώρημα του Taylor και να παραμένει αληθής για διανυσματικές συναρτήσεις.

Άσκηση 21. Ας είναι E ένα κλειστό υποσύνολο του R^1. Στην Άσκηση 22 του Κεφαλαίου 4 έχουμε διαπιστώσει ότι υπάρχει μία πραγματική συνεχής συνάρτηση f στον R^1 που έχει το E ως το σύνολο των θέσεων μηδενισμού της. Είναι δυνατό, για κάθε κλειστό σύνολο E, να βρεθεί τέτοια συνάρτηση f η οποία να είναι παραγωγίσιμη στον R^1 ή να είναι n φορές παραγωγίσιμη ή να έχει παραγώγους κάθε τάξεως στον R^1;

Άσκηση 22. Υποθέτουμε ότι f είναι μία πραγματική συνάρτηση, ορισμένη στον R^1. Ονομάζουμε έναν πραγματικό αριθμό x *σταθερό σημείο* της f εάν και μόνον εάν $f(x) = x$.

(α) Εάν η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι $f'(t) \neq 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό t, τότε αποδείξτε ότι η f έχει το πολύ ένα σταθερό σημείο.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση f που ορίζεται από τη σχέση

$$f(t) = t + (1 + e^t)^{-1} \quad (t \in R^1)$$

δεν έχει σταθερά σημεία, παρά το γεγονός ότι $0 < f'(t) < 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό t.

(γ) Εν τούτοις, αποδείξτε ότι η ύπαρξη αριθμού A με $A < 1$ και $|f'(t)| \leq A$ για κάθε πραγματικό αριθμό t συνεπάγεται την ύπαρξη ενός σταθερού σημείου x της f και ότι $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, όπου x_1 είναι τυχών πραγματικός αριθμός και

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(δ) Δείξτε ότι η διαδικασία που περιγράφεται στο (γ) μπορεί να υλοποιηθεί στο επίπεδο διαμέσου της οδού

$$(x_1, x_2) \to (x_2, x_2) \to (x_2, x_3) \to (x_3, x_3) \to (x_3, x_4) \to \cdots$$

Άσκηση 23. Η συνάρτηση f που ορίζεται μέσω της σχέσεως

$$f(x) = \frac{x^3+1}{3} \quad (x \in R^1)$$

έχει τρία σταθερά σημεία α, β, γ, όπου

$$-2 < \alpha < -1, \quad 0 < \beta < 1, \quad 1 < \gamma < 2.$$

Θεωρούμε τυχόντα αριθμό x_1 και ορίζουμε την ακολουθία $\{x_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) θέτοντας $x_{n+1} = f(x_n)$ για κάθε δείκτη n.

(α) Εάν $x_1 < \alpha$, τότε $x_n \to -\infty$ καθώς $n \to \infty$.

(β) Εάν $\alpha < x_1 < \gamma$, τότε $x_n \to \beta$ καθώς $n \to \infty$.

(γ) Εάν $\gamma < x_1$, τότε $x_n \to +\infty$ καθώς $n \to \infty$.

Συνεπώς, το β μπορεί να προσδιορισθεί με τη μέθοδο αυτή, ενώ τα α και γ όχι.

Άσκηση 24. Η διαδικασία που περιγράφεται στο μέρος (γ) της Ασκήσεως 22 μπορεί φυσικά να εφαρμοσθεί σε συναρτήσεις που απεικονίζουν το $(0, +\infty)$ στο $(0, +\infty)$. Θεωρούμε $\alpha > 1$ και ορίζουμε τις συναρτήσεις f, g μέσω των ισοτήτων

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{x}\right), \quad g(x) = \frac{\alpha + x}{1 + x} \quad (x \in (0, +\infty)).$$

Αποδείξτε ότι οι f και g έχουν το $\sqrt{\alpha}$ ως μοναδικό σταθερό σημείο στο $(0, +\infty)$. Προσπαθήστε, βασιζόμενοι στις ιδιότητες των f και g, να εξηγήσετε τον λόγο για τον οποίο η σύγκλιση στην Άσκηση 16 του Κεφαλαίου 3 είναι πολύ περισσότερο ταχεία από τη σύγκλιση στην Άσκηση 17. (Συγκρίνετε τις f' και g' και σχεδιάστε τις οδούς που προτείνονται στην Άσκηση 22.)

Εργασθείτε ομοίως για $0 < \alpha < 1$.

Άσκηση 25. Υποθέτουμε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[a, b]$ με $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ και ότι $f'(x) \geq \delta$, $0 \leq f''(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$, όπου δ και M είναι πραγματικοί αριθμοί με $\delta > 0$. Ας είναι ξ το μοναδικό σημείο στο (a, b) με $f(\xi) = 0$.

Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες στο αποδεικτικό σχεδιάγραμμα που ακολουθεί της *μεθόδου του Newton*[7] για τον υπολογισμό του ξ.

[7] Σ. τ. Μ: Isaac Newton (1642-1727). Άγγλος μαθηματικός και φυσικός. Θεωρείται ένας από τους σπουδαιότερους επιστήμονες που ανέδειξε η ανθρωπότητα. Έχει χαρακτηρισθεί ως «αυτός που ξεπέρασε σε μεγαλοφυΐα το ανθρώπινο γένος». Είναι ο εμπνευστής (μαζί αλλά ανεξαρτήτως από τον Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)) του Απειροστικού Λογισμού. Μεταξύ άλλων, είναι επίσης ο εμπνευστής των πρωταρχικών νόμων της κινήσεως, του νόμου της παγκόσμιας βαρύτητας και της φασματικής αναλύσεως του φωτός. Με τις μελέτες του έθεσε τις βάσεις των σύγχρονων Μαθηματικών και Φυσικής.

Ο Newton εισήχθη το έτος 1661 ως φοιτητής στο Κολέγιο Trinity του Cambridge και εργαζόταν παραλλήλως εκεί ως βοηθός. Ως στόχο είχε την δικηγορία αλλά σύντομα εστράφη προς στις φυσικές επιστήμες. Έλαβε το πτυχίο του το έτος 1664. Το επόμενο έτος ξέσπασε η επιδημία της πανώλης και το Πανεπιστήμιο του Cambridge ανέστειλε τη λειτουργία του. Ο Newton επέστρεψε στη γενέτειρά του. Στη διάρκεια αυτών των ετών έκανε πολλές από τις σημαντικές ανακαλύψεις του. Ως δάσκαλο στο Πανεπιστήμιο του Cambridge είχε τον Isaac Barrow (1630-1677), έναν σημαντικό μαθηματικό της εποχής εκείνης, όχι όμως της κλάσεως του Newton. Αναγνωρίζοντας τη μεγαλοφυία του Newton, ο Barrow παραιτήθηκε από την έδρα που κατείχε στο Κολέγιο Trinity το έτος 1669, προτείνοντας την πλήρωσή της από τον μαθητή του, όπως και έγινε.

Ο Newton εξελέγη εταίρος στη Βασιλική Εταιρία του Λονδίνου το έτος 1672 και εξελέγη πρόεδρός της το έτος 1703. Οι επανεκλογές του ως προέδρου της Βασιλικής Εταιρείας του Λονδίνου συνεχίσθηκαν έως τον θάνατό του. Εξελέγη αντιπρόσωπος του Πανεπιστημίου του Cambridge στην Κοινοβουλευτική Σύνοδο το έτος 1689. Ετέθη επικεφαλής του Αγγλικού Νομισματοκοπείου το έτος 1699. Το έτος 1705 ο Newton εχρίσθη ιππότης (Sir) από τη βασίλισσα Άννα.

Ο Newton εξέδωσε το έτος 1687 το μεγαλειώδες επιστημονικό του έργο «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica», το οποίο έχει θεωρηθεί ως το σπουδαιότερο επιστημονικό σύγγραμμα στην ιστορία των επιστημών.

(α) Επιλέξτε $x_1 \in (\xi, b)$ και ορίστε την ακολουθία $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ μέσω της ισότητας

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Ερμηνεύστε τη σχέση αυτή γεωμετρικά, με όρους εφαπτομένων στο γράφημα της f.

(β) Αποδείξτε ότι $x_{n+1} < x_n$ για κάθε δείκτη n και ότι

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi.$$

(γ) Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Taylor για να αποδείξετε ότι για κάθε δείκτη n υπάρχει $t_n \in (\xi, x_n)$ με

$$x_{n+1} - \xi = \frac{f''(t_n)}{2f'(x_n)}(x_n - \xi)^2.$$

(δ) Εάν $A = M/2\delta$, τότε συμπεράνετε ότι

$$0 \le x_{n+1} - \xi \le \frac{1}{A}[A(x_1 - \xi)]^{2^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

(Συγκρίνετε με τις Ασκήσεις 16 και 18 του Κεφαλαίου 3.)

Η έντονη μελέτη και ενασχόληση του Newton με την επιστήμη είχε ως αποτέλεσμα τον κλονισμό της υγείας του. Το έτος 1692 ο Newton αρρώστησε σοβαρά, υπέστη νευρικό κλονισμό και έφτασε στα πρόθυρα πλήρους σωματικής και πνευματικής καταρρεύσεως. Κατάφερε να αναρρώσει το επόμενο έτος.

Μεταξύ των Newton και Leibniz υπήρξε έντονη αντιπαράθεση σχετικά με την πατρότητα του Απειροστικού Λογισμού. Από τη Βασιλική Εταιρία του Λονδίνου συνεστήθη το έτος 1712 επιτροπή επιδικάσεως αυτής της υποθέσεως (η οποία ήταν μεροληπτούσα υπέρ του Newton). Οι Newton και Leibniz είχαν αρχικά εγκάρδιες σχέσεις και έτρεφαν αλληλοεκτίμηση ο ένας προς τον άλλον. Όμως, μάλλον και λόγω πολιτικών σκοπιμοτήτων εκ μέρους τρίτων προσώπων, οδηγήθηκαν σε αυτήν την θλιβερή αντιδικία, η οποία αποτελεί μία από τις μελανότερες σελίδες στην ιστορία των Μαθηματικών. Αξίζει να σημειωθεί ότι η φιλονικία αυτή διατηρήθηκε σε εθνικό επίπεδο, αρκετό καιρό μετά τον θάνατο των Newton και Leibniz.

Ο Newton πέθανε πλήρης ημερών, όμως τα τελευταία χρόνια της ζωής του ταλαιπωρήθηκε από έντονους πόνους, τους οποίους αντιμετώπισε με καρτερικότητα και θάρρος.

(Ο Newton δεν είναι άλλος παρά ο πασίγνωστος στους Έλληνες Νεύτωνας. Ο μεταφραστής δεν επικροτεί τέτοιου είδους εξελληνισμούς και διατηρεί στο κείμενο τα αυθεντικά ονόματα.)

(ε) Δείξτε ότι η μέθοδος του Newton ισοδυναμεί με την εύρεση σταθερού σημείου για τη συνάρτηση g, η οποία ορίζεται μέσω της σχέσεως

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (x \in [a, b]).$$

Πως συμπεριφέρεται η g' πλησίον του ξ;

(στ) Θεωρήστε τη συνάρτηση f με $f(x) = x^{1/3}$ για $x \in (-\infty, +\infty)$ και εφαρμόστε τη μέθοδο του Newton. Τι συμβαίνει σε αυτήν την περίπτωση;

Άσκηση 26. Υποθέτουμε ότι f είναι μία παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ συνάρτηση με $f(a) = 0$ και ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός A με $|f'(x)| \leq A|f(x)|$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε $x_0 \in [a, b]$ και τους αριθμούς

$$M_0 = \sup_{x \in [a, x_0]} |f(x)|, \quad M_1 = \sup_{x \in [a, x_0]} |f'(x)|.$$

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με $a \leq x \leq x_0$ ισχύει ότι

$$|f(x)| \leq M_1(x_0 - a) \leq A(x_0 - a)M_0.$$

Συνεπώς, εάν $A(x_0 - a) < 1$, τότε $M_0 = 0$, δηλαδή $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, x_0]$. Συνεχίστε ομοίως.

Άσκηση 27. Ας είναι ϕ μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο R του επιπέδου, το οποίο ορίζεται ως εξής: $(x, y) \in R$ εάν και μόνον εάν $a \leq x \leq b$ και $\alpha \leq y \leq \beta$.

Μία *λύση* του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y' = \phi(x, y), \quad y(a) = c \quad (\alpha \leq c \leq \beta)$$

είναι, εξ ορισμού, μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[a, b]$ ούτως ώστε $f(a) = c, \alpha \leq f(x) \leq \beta$ για κάθε πραγματικό αριθμό x με $a \leq x \leq b$ και

$$f'(x) = \phi(x, f(x)) \quad (a \leq x \leq b).$$

Αποδείξτε ότι ένα τέτοιου είδους πρόβλημα έχει το πολύ μία λύση εάν υπάρχει ένας αριθμός A με

$$|\phi(x, y_2) - \phi(x, y_1)| \leq A|y_2 - y_1|$$

για κάθε $(x, y_1), (x, y_2) \in R$.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε την Άσκηση 26 στη διαφορά δύο λύσεων. Σημειώστε ότι αυτή η ιδιότητα της μοναδικότητας δεν ισχύει για το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = y^{1/2}, \qquad y(0) = 0,$$

το οποίο έχει δύο λύσεις: τη μηδενική και τη συνάρτηση f με $f(x) = x^2/4$. Βρείτε όλες τις άλλες λύσεις.

Άσκηση 28. Διατυπώστε και αποδείξτε ένα ανάλογο θεώρημα μοναδικότητας για συστήματα διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$y_j' = \phi_j(x, y_1, \ldots, y_k), \quad y_j(a) = c_j \quad (j = 1, \ldots, k).$$

Σημειώστε ότι το παραπάνω σύστημα μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\mathbf{y}' = \phi(x, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(a) = \mathbf{c},$$

όπου η $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ έχει πεδίο τιμών εντός ενός k-διαστήματος, ϕ είναι απεικόνιση ενός $(k+1)$-διαστήματος στον Ευκλείδειο k-χώρο με συνιστώσες τις συναρτήσεις $\phi_1, \ldots, \phi_k$ και $\mathbf{c}$ είναι το διάνυσμα $(c_1, \ldots, c_k)$. Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 26 για διανυσματικές συναρτήσεις.

Άσκηση 29. Εξειδικεύστε την Άσκηση 28 θεωρώντας το σύστημα

$$y_j' = y_{j+1} \quad (j = 1, \ldots, k-1),$$

$$y_k' = f - \sum_{j=1}^{k} g_j y_j,$$

όπου $f, g_1, \ldots, g_k$ είναι πραγματικές συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$, και συνάγετε ένα θεώρημα μοναδικότητας για τις λύσεις της εξισώσεως

$$y^{(k)} + g_k y^{(k-1)} + \cdots + g_2 y' + g_1 y = f,$$

υποκείμενες στις αρχικές συνθήκες

$$y(a) = c_1, \quad y'(a) = c_2, \ldots, y^{(k-1)}(a) = c_k.$$

Κεφάλαιο 6

ΤΟ ΚΑΤΑ RIEMANN-STIELTJES ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Το παρόν κεφαλαίο βασίζεται σε έναν ορισμό του κατά Riemann ολοκληρώματος, ο οποίος σχετίζεται στενά με την δομή της διατάξεως της πραγματικής ευθείας. Θα ξεκινήσουμε λοιπόν με μία παρουσίαση της ολοκληρώσεως πραγματικών συναρτήσεων ορισμένων σε κλειστό διάστημα. Σε επόμενες ενότητες ακολουθεί η επέκταση της έννοιας της ολοκληρώσεως σε μιγαδικές και διανυσματικές συναρτήσεις ορισμένες σε κλειστό διάστημα.

Η ολοκλήρωση συναρτήσεων υπεράνω συνόλων τα οποία δεν είναι απαραιτήτως διαστήματα παρουσιάζεται στα Κεφάλαια 10 και 11.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΥΠΑΡΞΗ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Ορισμός 6.1. Ας είναι $[a, b]$ ένα δεδομένο κλειστό διάστημα. Με τον όρο *διαμέριση* του $[a, b]$ εννοούμε ένα πεπερασμένο σύνολο P σημείων $x_0, x_1, \ldots, x_n$, όπου

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b.$$

Γράφουμε

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Υποθέτουμε τώρα ότι f είναι μία πραγματική φραγμένη συνάρτηση, ορισμένη στο $[a, b]$. Σε αντιστοίχηση με κάθε διαμέριση P, όπως προηγουμένως, του $[a, b]$, θέτουμε

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad (i = 1, \ldots n),$$

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad (i = 1, \ldots n),$$

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

και τελικά

$$\overline{\int_a^b} f\,dx = \inf U(P, f), \tag{1}$$

$$\underline{\int_a^b} f\,dx = \sup L(P, f), \tag{2}$$

όπου το μέγιστο κάτω φράγμα και το ελάχιστο άνω φράγμα λαμβάνονται υπεράνω όλων των διαμερίσεων P του $[a, b]$. Τα αριστερά μέλη των (1) και (2) ονομάζονται αντιστοίχως το *ανώτερο* και το *κατώτερο κατά Riemann ολοκλήρωμα* της f στο $[a, b]$.

Η συνάρτηση f λέγεται *κατά Riemann ολοκληρώσιμη* στο $[a, b]$ εάν και μόνον εάν το ανώτερο ολοκλήρωμα της f ισούται με το κατώτερο ολοκλήρωμα. Σε αυτήν την περίπτωση, γράφουμε $f \in \mathcal{R}$ (δηλαδή το $\mathcal{R}$ είναι το σύνολο των κατά Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων) και συμβολίζουμε την κοινή τιμή των (1) και (2) με

$$\int_a^b f\,dx \tag{3}$$

ή αλλιώς

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Ο αριθμός αυτός ονομάζεται το *κατά Riemann ολοκλήρωμα* της f στο $[a, b]$. Εφόσον η f είναι φραγμένη, υπάρχουν αριθμοί m και M με

$$m \leq f(x) \leq M \qquad (a \leq x \leq b).$$

Συνεπώς, για κάθε διαμέριση P ισχύει ότι

$$m(b-a) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq M(b-a),$$

και επομένως οι αριθμοί της μορφής $L(P, f)$, $U(P, f)$, καθώς το P διατρέχει όλες τις δυνατές διαμερίσεις του διαστήματος, απαρτίζουν φραγμένα σύνολα. Αυτό φανερώνει ότι *το ανώτερο και το κατώτερο ολοκλήρωμα υπάρχει για κάθε φραγμένη συνάρτηση* f. Το ερώτημα περί της ισότητάς τους, δηλαδή περί της ολοκληρωσιμότητας της f, απαιτεί μία πιο προσεκτική αντιμετώπιση. Αντί να διερευνήσουμε την κατάσταση μεμονωμένα για το ολοκλήρωμα Riemann, θα την τοποθετήσουμε σε μία γενικότερη θεώρηση.

Ορισμός 6.2. Ας είναι α μία αύξουσα συνάρτηση στο $[a, b]$. (Η α, ως αύξουσα συνάρτηση σε κλειστό και φραγμένο διάστημα, είναι φραγμένη). Σε κάθε διαμέριση P του $[a, b]$ αντιστοιχίζουμε τις διαφορές

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Είναι σαφές ότι $\Delta\alpha_i \geq 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Για κάθε πραγματική φραγμένη συνάρτηση f στο $[a, b]$ θέτουμε

$$U(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i,$$

$$L(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i,$$

όπου τα M_i, m_i $(i = 1, \ldots, n)$ έχουν την ίδια έννοια όπως στον Ορισμό 6.1, και ορίζουμε

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \inf U(P, f, \alpha), \tag{5}$$

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha = \sup L(P, f, \alpha), \tag{6}$$

όπου το μέγιστο κάτω φράγμα και το ελάχιστο άνω φράγμα λαμβάνονται υπεράνω όλων των διαμερίσεων P του $[a, b]$. Η συνάρτηση f λέγεται *κατά Riemann ολοκληρώσιμη ως προς την* α στο $[a, b]$ εάν και μόνον εάν τα αριστερά μέλη των (5) και (6) είναι ίσα. Αναλόγως με τον Ορισμό 6.1, σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ (δηλαδή το $\mathcal{R}(\alpha)$ είναι το σύνολο των κατά Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων ως προς α) και συμβολίζουμε την κοινή τιμή των (5) και (6) με

$$\int_a^b f d\alpha \tag{7}$$

ή αλλιώς

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x). \tag{8}$$

Ο αριθμός αυτός ονομάζεται το *κατά Riemann-Stieltjes*[1] *ολοκλήρωμα* (ή απλούστερα το *κατά Stieltjes ολοκλήρωμα*) της f ως προς την α στο $[a, b]$.

Θεωρώντας ως α την ταυτοτική[2] συνάρτηση στο $[a, b]$ (δηλαδή $\alpha(x) = x$ για κάθε $x \in [a, b]$), διαπιστώνουμε ότι το κατά Riemann ολοκλήρωμα αποτελεί ειδική περίπτωση του κατά Riemann-Stieltjes ολοκληρώματος. Πρέπει να σημειώσουμε ότι, στη γενική περίπτωση, η συνάρτηση α δεν υποτίθεται συνεχής.

Είναι απαραίτητο να γίνουν ορισμένα σχόλια σχετικά με τον συμβολισμό. Ο συμβολισμός (7) είναι προτιμότερος του (8) διότι το γράμμα x δεν προσθέτει τίποτε στο νοηματικό περιεχόμενο της (7). Δεν έχει σημασία ποιο γράμμα θα επιλέξουμε για να δηλώσουμε τη λεγόμενη «μεταβλητή ολοκληρώσεως». Επί παραδείγματι, η (8) ταυτίζεται με την

$$\int_a^b f(y) d\alpha(y).$$

Το ολοκλήρωμα εξαρτάται από την f, την α, τα a και b και όχι από τη μεταβλητή ολοκληρώσεως.

Ο ρόλος της μεταβλητής ολοκληρώσεως είναι ανάλογος με τον ρόλο του

[1] Σ. τ. Μ.: Thomas Jan Stieltjes (1856-1894). Ολλανδός μαθηματικός. Εργάσθηκε στην Ανάλυση και στη Θεωρία Αριθμών.

Ο Stieltjes ξεκίνησε τις σπουδές του στο Πολυτεχνείο του Delft το έτος 1873. Διάβαζε τα έργα των Carl Friedrich Gauss (1777-1855) και Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) χωρίς να εκπληρώνει τις υποχρεώσεις του προς το πανεπιστήμιο, με αποτέλεσμα να απορρίπτεται στις εξετάσεις. Ο Stieljes διορίσθηκε το έτος1877 βοηθός στο αστεροσκοπείο του Leiden, με την παρέμβαση του απελπισμένου πατέρα του. Μελετούσε Μαθηματικά και, το έτος 1883, παραιτήθηκε από το αστεροσκοπείο με σκοπό να ακολουθήσει σταδιοδρομία στα Μαθηματικά. Το έτος 1884 ο Stieltjes υπέβαλε αίτηση για μία θέση στο Πανεπιστήμιο του Groningen, αλλά τελικά δεν την πήρε. Το ίδιο έτος ο Stieltjes έλαβε μία τιμητική διάκριση από το Πανεπιστήμιο του Leiden. Το επόμενο έτος ο Stieltjes πήγε στη Γαλλία και έλαβε το διδακτορικό του δίπλωμα από το Πανεπιστήμιο της Toulouse το έτος 1886. Τρία έτη μετά ο Stieltjes έγινε καθηγητής Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Toulouse, όπου και παρέμεινε για την υπόλοιπή του ζωή.

[2] Σ. τ. Μ.: Μία συνάρτηση f από ένα σύνολο A στον εαυτό του ονομάζεται *ταυτοτική* εάν και μόνον εάν ισχύει ότι $f(x) = x$ για κάθε $x \in A$.

δείκτη αθροίσεως: τα δύο σύμβολα

$$\sum_{i=1}^{n} c_i, \qquad \sum_{k=1}^{n} c_k$$

δηλώνουν τον ίδιο αριθμό, τον $c_1 + c_2 + \cdots + c_n$.

Φυσικά, δεν δημιουργεί απολύτως κανένα πρόβλημα η χρήση της μεταβλητής ολοκληρώσεως και σε αρκετές περιπτώσεις διευκολύνει κατά πολύ την κατάσταση.

Εν συνεχεία, θα διερευνήσουμε την ύπαρξη του ολοκληρώματος (7). Δίχως να γίνεται συνεχής αναφορά, η συνάρτηση f θα υποτίθεται πραγματική και φραγμένη και η α θα υποτίθεται αύξουσα στο $[a, b]$.

Ορισμός 6.3. Μία διαμέριση $P^\star$ θα ονομάζεται *εκλέπτυνση* της διαμερίσεως P εάν και μόνον εάν $P \subset P^\star$ (δηλαδή κάθε σημείο της P ανήκει στην $P^\star$). Δεδομένων δύο διαμερίσεων P_1 και P_2, θα ονομάζουμε τη διαμέριση $P^\star = P_1 \cup P_2$ *κοινή εκλέπτυνση* των P_1 και P_2.

Θεώρημα 6.4. *Εάν $P^\star$ είναι μία εκλέπτυνση της διαμερίσεως P, τότε*

$$L(P, f, \alpha) \leq L(P^\star, f, \alpha) \tag{9}$$

και

$$U(P^\star, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha). \tag{10}$$

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε την (9), υποθέτουμε αρχικά ότι η $P^\star$ περιέχει μόνον ένα σημείο παραπάνω από την P. Ας είναι $x^\star$ το σημείο αυτό. Υποθέτουμε ότι $x_{i-1} < x^\star < x_i$ για κάποιον δείκτη i, όπου τα x_{i-1} και x_i είναι διαδοχικά σημεία της διαμερίσεως P. Θέτουμε

$$w_1 = \inf_{x \in [x_{i-1}, x^\star]} f(x),$$

$$w_2 = \inf_{x \in [x^\star, x_i]} f(x).$$

Είναι σαφές ότι $w_1 \geq m_i$ και $w_2 \geq m_i$, όπου

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

όπως στον Ορισμό 6.1. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
&L(P^\star, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \\
&= w_1[\alpha(x^\star) - \alpha(x_{i-1})] + w_2[\alpha(x_i) - \alpha(x^\star)] - m_i[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \\
&= (w_1 - m_i)[\alpha(x^\star) - \alpha(x_{i-1})] + (w_2 - m_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x^\star)] \geq 0.
\end{aligned}$$

Εάν η $P^\star$ περιέχει k επιπλέον σημεία από την P, τότε εφαρμόζουμε το παραπάνω επιχείρημα σε k βήματα και καταλήγουμε στην (9). Η απόδειξη της (10) είναι ανάλογη. □

Θεώρημα 6.5. *Ισχύει η ανισότητα* $\underline{\int_a^b} f\,d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f\,d\alpha.$

Απόδειξη. Ας είναι $P^\star$ η κοινή εκλέπτυνση δύο διαμερίσεων P_1 και P_2. Σύμφωνα με το Θεώρημα 6.4,

$$L(P_1, f, \alpha) \leq L(P^\star, f, \alpha) \leq U(P^\star, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha).$$

Άρα,

$$L(P_1, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha). \tag{11}$$

Εάν θεωρήσουμε την P_2 σταθερή και λάβουμε το ελάχιστο άνω φράγμα υπεράνω όλων των διαμερίσεων P_1, τότε η (11) χορηγεί την

$$\underline{\int_a^b} f\,d\alpha \leq U(P_2, f, \alpha). \tag{12}$$

Η απόδειξη του θεωρήματος ολοκληρώνεται εάν λάβουμε στη (12) το μέγιστο κάτω φράγμα υπεράνω όλων των διαμερίσεων P_2. □

Θεώρημα 6.6. *Ισχύει ότι* $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *στο* $[a, b]$ *εάν και μόνον εάν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει μία διαμέριση* P *ούτως ώστε*

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon. \tag{13}$$

Απόδειξη. Για κάθε διαμέριση P έχουμε

$$L(P, f, \alpha) \leq \underline{\int_a^b} f d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f d\alpha \leq U(P, f, \alpha).$$

Συνεπώς, η (13) συνεπάγεται την

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f d\alpha - \underline{\int_a^b} f d\alpha < \varepsilon.$$

Άρα, εάν η (13) ικανοποιείται για κάθε $\varepsilon > 0$, τότε

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \underline{\int_a^b} f d\alpha,$$

δηλαδή $f \in \mathcal{R}(\alpha)$. Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι $f \in \mathcal{R}(\alpha)$. Ας είναι $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχουν διαμερίσεις P_1 και P_2 με

$$U(P_2, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{14}$$

$$\int_a^b f d\alpha - L(P_1, f, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{15}$$

Εάν επιλέξουμε ως P την κοινή εκλέπτυνση των P_1 και P_2, τότε το Θεώρημα 6.4, μαζί με τις (14) και (15), χορηγεί την

$$U(P, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha) < \int_a^b f d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} < L(P_1, f, \alpha) + \varepsilon \leq L(P, f, \alpha) + \varepsilon$$

και επομένως η (13) ισχύει επιλέγοντας τη διαμέριση P. □

Το Θεώρημα 6.6 χορηγεί ένα χρήσιμο κριτήριο για την ολοκληρωσιμότητα. Πριν το εφαρμόσουμε, θα διατυπώσουμε ορισμένα αποτελέσματα που βρίσκονται σε στενή σχέση με αυτό.

Θεώρημα 6.7.

(α) *Εάν η (13) ισχύει για κάποιο $\varepsilon > 0$ και κάποια διαμέριση P, τότε ισχύει (με το ίδιο ε) για κάθε εκλέπτυνση της P.*

(β) *Εάν η (13) ισχύει για τη διαμέριση* $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ *και εάν* s_i, t_i *είναι τυχόντα σημεία του* $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$, *τότε*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)|\Delta\alpha_i < \varepsilon.$$

(γ) *Εάν* $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *και ικανοποιούνται οι υποθέσεις του (β), τότε*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i - \int_a^b f d\alpha\right| < \varepsilon.$$

Απόδειξη. Το Θεώρημα 6.4 συνεπάγεται το (α). Υπό τις υποθέσεις του (β), τα $f(s_i)$ και $f(t_i)$ βρίσκονται στο διάστημα $[m_i, M_i]$ για κάθε $i = 1, \ldots n$, επομένως $|f(s_i) - f(t_i)| \leq M_i - m_i$ για κάθε $i = 1, \ldots n$. Άρα,

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)|\Delta\alpha_i \leq U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha),$$

το οποίο αποδεικνύει το (β). Οι προφανείς ανισότητες

$$L(P, f, \alpha) \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i \leq U(P, f, \alpha)$$

και

$$L(P, f, \alpha) \leq \int_a^b f d\alpha \leq U(P, f, \alpha)$$

αποδεικνύουν το (γ). □

Θεώρημα 6.8. *Εάν η* f *είναι συνεχής στο* $[a, b]$, *τότε* $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *στο* $[a, b]$.

Απόδειξη. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\eta > 0$ με

$$[\alpha(b) - \alpha(a)]\eta < \varepsilon.$$

Εφόσον η f είναι ομοιομόρφως συνεχής στο $[a, b]$ (Θεώρημα 4.19), υπάρχει $\delta > 0$ με

$$|f(x) - f(t)| < \eta \tag{16}$$

για κάθε $x, t \in [a, b]$ με $|x - t| < \delta$.

Εάν P είναι οποιαδήποτε διαμέριση του $[a, b]$ με $\Delta x_i < \delta$ για κάθε δείκτη i, τότε η (16) συνεπάγεται ότι

$$M_i - m_i \leq \eta \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{17}$$

και επομένως

$$\begin{aligned} U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta\alpha_i \\ &\leq \eta \sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i \\ &= \eta[\alpha(b) - \alpha(a)] \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 6.6, προκύπτει ότι $f \in \mathcal{R}(\alpha)$. □

Θεώρημα 6.9. *Εάν η f είναι μονότονη στο $[a, b]$ και εάν η α συνεχής στο $[a, b]$, τότε $f \in \mathcal{R}(\alpha)$. (Φυσικά, συνεχίζουμε να δεχόμαστε ότι η α είναι αύξουσα).*

Απόδειξη. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n επιλέγουμε μία διαμέριση με

$$\Delta\alpha_i = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Αυτό είναι δυνατό εφόσον η α είναι συνεχής (Θεώρημα 4.23).

Υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα (η απόδειξη είναι ανάλογη για την άλλη περίπτωση). Τότε,

$$M_i = f(x_i), \quad m_i = f(x_{i-1}) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

και επομένως

$$\begin{aligned} U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) &= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \cdot [f(b) - f(a)] \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

εάν ο n ληφθεί επαρκώς μεγάλος. Από το Θεώρημα 6.6 προκύπτει ότι $f \in \mathcal{R}(\alpha)$. □

Θεώρημα 6.10. *Υποθέτουμε ότι η f έχει πεπερασμένου πλήθους σημεία ασυνέχειας στο $[a, b]$ και ότι η α είναι συνεχής σε κάθε σημείο ασυνέχειας της f. Τότε, $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $M = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Ας είναι E το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f. Εφόσον το E είναι πεπερασμένο και η α είναι συνεχής σε κάθε σημείο του E, μπορούμε να καλύψουμε το E από πεπερασμένου πλήθους αποσυνδετά ανά δύο διαστήματα $[u_1, v_1], [u_2, v_2], \ldots, [u_k, v_k]$ ούτως ώστε $[u_j, v_j] \subset [a, b]$ για οποιονδήποτε δείκτη $j = 1, 2, \ldots k$ και $\sum_{j=1}^{k} \alpha(v_j) - \alpha(u_j) < \varepsilon$. Επιπλέον, μπορούμε να τοποθετήσουμε αυτά τα διαστήματα με τέτοιο τρόπο ούτως ώστε κάθε σημείο του $E \cap (a, b)$ να βρίσκεται στο εσωτερικό κάποιου διαστήματος $[u_j, v_j]$ $(j = 1, 2, \ldots k)$.

Αφαιρούμε τα διαστήματα (u_j, v_j) $(j = 1, 2, \ldots k)$ από το $[a, b]$. Το εναπομείναν σύνολο K είναι συμπαγές. Συνεπώς, η f είναι ομοιομόρφως συνεχής στο K και επομένως υπάρχει $\delta > 0$ με $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$ για κάθε $s, t \in K$ με $|s - t| < \delta$.

Μπορούμε να κατασκευάσουμε μία διαμέριση $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ του $[a, b]$ με τις εξής ιδιότητες:

(i) Για οποιονδήποτε δείκτη j, τα u_j και v_j εμφανίζονται στη διαμέριση P.

(ii) Για οποιονδήποτε δείκτη j, κανένα σημείο του (u_j, v_j) δεν εμφανίζεται στη διαμέριση P.

(iii) Εάν για οποιουσδήποτε δείκτες i και j το x_{i-1} δεν είναι κάποιο από τα u_j, τότε $\Delta x_i < \delta$.

Σημειώνουμε ότι για κάθε δείκτη i είναι $M_i - m_i \leq 2M$ και ότι $M_i - m_i \leq \varepsilon$, εκτός εάν το x_{i-1} ταυτίζεται με κανένα από τα u_j $(j = 1, 2, \ldots k)$. Συνεπώς, όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.8,

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \leq [\alpha(b) - \alpha(a)]\varepsilon + 2M\varepsilon.$$

Εφόσον ο ε είναι τυχών θετικός αριθμός, από το Θεώρημα 6.6 προκύπτει ότι $f \in \mathcal{R}(\alpha)$. $\square$

Σημείωση: Εάν οι f και α έχουν κοινό σημείο ασυνέχειας, τότε το θεώρημα δεν αληθεύει απαραιτήτως. Αυτό παρουσιάζεται στην Άσκηση 3.

Θεώρημα 6.11. *Υποθέτουμε ότι $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ στο $[a, b]$ με $m \leq f \leq M$ για κάποιους πραγματικούς αριθμούς m, M, ότι ϕ είναι μία συνεχής συνάρτηση στο $[m, M]$ και ότι h είναι η συνάρτηση στο $[a, b]$ με $h(x) = \phi(f(x))$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε, $h \in \mathcal{R}(\alpha)$ στο $[a, b]$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Εφόσον η ϕ είναι ομοιομόρφως συνεχής στο $[m, M]$, υπάρχει $\delta > 0$ ούτως ώστε $\delta < \varepsilon$ και $|\phi(s) - \phi(t)| < \varepsilon$ για κάθε $s, t \in [m, M]$ με $|s - t| \leq \delta$.

Εφόσον $f \in \mathcal{R}(\alpha)$, υπάρχει μία διαμέριση $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ του $[a, b]$ ούτως ώστε

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \delta^2. \tag{18}$$

Ας είναι οι αριθμοί M_i, m_i $(i = 1, \ldots, n)$ όπως στον Ορισμό 6.1 και $M_i^\star, m_i^\star$ $(i = 1, \ldots, n)$ οι ανάλογοι αριθμοί για την h. Διαχωρίζουμε τους αριθμούς $1, \ldots, n$ σε δύο σύνολα A και B, τα οποία ορίζουμε ως εξής: $i \in A$ εάν και μόνον εάν $M_i - m_i < \delta$ και $i \in B$ εάν και μόνον εάν $M_i - m_i \geq \delta$.

Για $i \in A$ η επιλογή του δ φανερώνει ότι $M_i^\star - m_i^\star \leq \varepsilon$.

Για $i \in B$ είναι $M_i^\star - m_i^\star \leq 2K$, όπου $K = \sup_{t \in [m,M]} |\phi(t)|$. Σύμφωνα με τη (18) έχουμε ότι

$$\delta \sum_{i \in B} \Delta\alpha_i \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i)\Delta\alpha_i < \delta^2 \tag{19}$$

και επομένως $\sum_{i \in B} \Delta\alpha_i < \delta$. Κατά συνέπεια,

$$\begin{aligned} U(P, h, \alpha) - L(P, h, \alpha) &= \sum_{i \in A} (M_i^\star - m_i^\star)\Delta\alpha_i + \sum_{i \in B} (M_i^\star - m_i^\star)\Delta\alpha_i \\ &\leq \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a)] + 2K\delta \\ &< \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a) + 2K]. \end{aligned}$$

Εφόσον ο ε είναι τυχών θετικός αριθμός, από το Θεώρημα 6.6 συνάγουμε ότι $h \in \mathcal{R}(\alpha)$. $\square$

Παρατήρηση: Αυτό το θεώρημα μας οδηγεί στο ερώτημα: Ποιες συναρτήσεις είναι ακριβώς ολοκληρώσιμες κατά Riemann; Η απάντηση δίδεται στο Θεώρημα 11.33(β).

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Θεώρημα 6.12. *Υποθέτουμε ότι* α, α_1, α_2 *είναι αύξουσες συναρτήσεις στο διάστημα* $[a, b]$.

(α) *Εάν* $f_1, f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$ *στο* $[a, b]$, *τότε* $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$, $cf \in \mathcal{R}(\alpha)$ *για κάθε πραγματικό αριθμό* c *και*

$$\int_a^b (f_1 + f_2)d\alpha = \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha,$$

$$\int_a^b cf d\alpha = c \int_a^b f d\alpha.$$

(β) *Εάν* $f_1, f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$ *στο* $[a, b]$ *και* $f_1 \leq f_2$, *τότε*

$$\int_a^b f_1 d\alpha \leq \int_a^b f_2 d\alpha.$$

(γ) *Εάν* $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *στο* $[a, b]$ *και εάν* $a < c < b$, *τότε* $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *στα* $[a, c]$ *και* $[c, b]$, *και*

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha.$$

(δ) *Εάν* $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *στο* $[a, b]$ *και εάν* $|f| \leq M$, *για κάποιον πραγματικό αριθμό* M, *τότε*

$$\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

(ε) *Εάν* $f \in \mathcal{R}(\alpha_1)$ *στο* $[a, b]$ *και* $f \in \mathcal{R}(\alpha_2)$ *στο* $[a, b]$, *τότε* $f \in \mathcal{R}(\alpha_1 + \alpha_2)$ *στο* $[a, b]$ *και*

$$\int_a^b f d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2.$$

Εάν $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *στο* $[a, b]$ *και εάν* c *είναι ένας θετικός αριθμός, τότε* $f \in \mathcal{R}(c\alpha)$ *και*

$$\int_a^b f d(c\alpha) = c \int_a^b f d\alpha.$$

Απόδειξη. Εάν $f = f_1 + f_2$ και P είναι οποιαδήποτε διαμέριση του $[a, b]$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} L(P, f_1, \alpha) + L(P, f_2, \alpha) &\leq L(P, f, \alpha) \\ &\leq U(P, f, \alpha) \\ &\leq U(P, f_1, \alpha) + U(P, f_2, \alpha). \end{aligned} \tag{20}$$

Υποθέτουμε ότι $f_1, f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$. Ας είναι $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχουν διαμερίσεις P_1, P_2 με

$$U(P_j, f_j, \alpha) - L(P_j, f_j, \alpha) < \varepsilon \quad (j = 1, 2).$$

Η ανισότητες αυτές παραμένουν αληθείς εάν οι P_1 και P_2 αντικατασταθούν από την κοινή τους εκλέπτυνση. Τότε, η (20) συνεπάγεται ότι

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < 2\varepsilon,$$

η οποία αποδεικνύει ότι $f \in \mathcal{R}(\alpha)$. Για τη διαμέριση αυτή ισχύει επίσης ότι

$$U(P, f_j, \alpha) \leq \int_a^b f_j d\alpha + \varepsilon \quad (j = 1, 2).$$

Άρα, η (20) συνεπάγεται ότι

$$\int_a^b f d\alpha \leq U(P, f, \alpha) < \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha + 2\varepsilon.$$

Εφόσον ο ε είναι τυχών θετικός αριθμός, συνάγουμε ότι

$$\int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha. \tag{21}$$

Εάν αντικαταστήσουμε στην (21) τις f_1, f_2 με τις $-f_1$, $-f_2$, τότε η ανισότητα αντιστρέφεται και αποδεικνύεται η ισότητα.

Οι αποδείξεις των υπολοίπων ισχυρισμών του Θεωρήματος 6.12 είναι παρεμφερείς και για τον λόγο αυτόν παραλείπουμε τις αποδείξεις. Για την απόδειξη του μέρους (γ) μπορούμε να περιοριστούμε σε διαμερίσεις που περιέχουν το σημείο c, προκειμένου να προσεγγίσουμε το $\int_a^b f d\alpha$. □

Θεώρημα 6.13. *Εάν* $f, g \in \mathcal{R}(\alpha)$ *στο* $[a, b]$, *τότε:*

(α) $fg \in \mathcal{R}(\alpha)$ *στο* $[a, b]$.

(β) $|f| \in \mathcal{R}(\alpha)$ *στο* $[a, b]$ *και* $\left|\int_a^b f d\alpha\right| \leq \int_a^b |f| d\alpha.$

Απόδειξη. Εάν στο Θεώρημα 6.11 λάβουμε $\phi(t) = t^2$, όπου το t ανήκει σε ένα κλειστό διάστημα που περιέχει το πεδίο τιμών της f, τότε συνάγουμε ότι $f^2 \in \mathcal{R}(\alpha)$ εάν $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

Η ισότητα

$$4fg = (f + g)^2 - (f - g)^2$$

ολοκληρώνει την απόδειξη του (α).

Εάν στο Θεώρημα 6.11 λάβουμε $\phi(t) = |t|$, όπου το t ανήκει σε ένα κλειστό διάστημα που περιέχει το πεδίο τιμών της f, τότε συνάγουμε παρομοίως ότι $|f| \in \mathcal{R}(\alpha)$ εάν $f \in \mathcal{R}(\alpha)$. Επιλέγουμε $c = \pm 1$ ούτως ώστε να ισχύει ότι

$$c \int_a^b f d\alpha \geq 0.$$

Τότε,

$$\left|\int_a^b f d\alpha\right| = c \int_a^b f d\alpha = \int_a^b c f d\alpha \leq \int_a^b |f| d\alpha$$

διότι φυσικά $cf \leq |f|$. □

Ορισμός 6.14. Η *μοναδιαία κλιμακωτή συνάρτηση* I ορίζεται από την ισότητα

$$I(x) = \begin{cases} 0 & \text{εάν } x \leq 0, \\ 1 & \text{εάν } x > 0. \end{cases}$$

Θεώρημα 6.15. *Εάν* $a < s < b$, *εάν* f *είναι μία φραγμένη στο* $[a, b]$ *και συνεχής στο* s *συνάρτηση και εάν* $\alpha(x) = I(x - s)$ *για* $x \in [a, b]$, *τότε*

$$\int_a^b f d\alpha = f(s).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε διαμερίσεις της μορφής $P = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, όπου $x_0 = a$ και $x_1 = s < x_2 < x_3 = b$. Τότε,

$$U(P, f, \alpha) = M_2, \qquad L(P, f, \alpha) = m_2.$$

Εφόσον η f είναι συνεχής στο s, διαπιστώνουμε ότι τα M_2 και m_2 συγκλίνουν προς το $f(s)$ καθώς $x_2 \to s$. □

Θεώρημα 6.16. *Θεωρούμε μία ακολουθία $\{c_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ με $c_n \geq 0$ για κάθε δείκτη n ούτως ώστε η $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ να συγκλίνει. Θεωρούμε επίσης μία ακολουθία $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ διακεκριμένων σημείων του (a, b). Ας είναι α η συνάρτηση με*

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - s_n) \qquad (x \in [a, b]). \tag{22}$$

Ας είναι επίσης f μία συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$. Τότε,

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(s_n). \tag{23}$$

Απόδειξη. Το κριτήριο της συγκρίσεως φανερώνει ότι η σειρά (22) συγκλίνει για κάθε πραγματικό αριθμό x. Η συνάρτηση α είναι προφανώς αύξουσα με $\alpha(a) = 0$ και $\alpha(b) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$. (Η συνάρτηση που εμφανίζεται στην Παρατήρηση 4.31 είναι αυτής της μορφής).

Ας είναι $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε έναν ακέραιο αριθμό N με

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n < \varepsilon.$$

Θεωρούμε επίσης τις συναρτήσεις α_1, α_2, όπου για $x \in [a, b]$ είναι

$$\alpha_1(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n I(x - s_n), \quad \alpha_2(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n I(x - s_n).$$

Σύμφωνα με τα Θεωρήματα 6.12 και 6.15 έχουμε

$$\int_a^b f d\alpha_1 = \sum_{n=1}^{N} c_n f(s_n). \tag{24}$$

Εφόσον $\alpha_2(b) - \alpha_2(a) < \varepsilon$,

$$\left| \int_a^b f d\alpha_2 \right| \leq M\varepsilon, \tag{25}$$

όπου $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Εφόσον $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, από τις (24) και (25) έπεται ότι

$$\left| \int_a^b f d\alpha - \sum_{n=1}^{N} c_n f(s_n) \right| \leq M\varepsilon. \tag{26}$$

Εάν λάβουμε $N \to \infty$, τότε καταλήγουμε στην (23). □

Θεώρημα 6.17. *Υποθέτουμε ότι* α *είναι μία αύξουσα συνάρτηση στο* $[a, b]$ *με* $\alpha' \in \mathcal{R}$ *στο* $[a, b]$. *Υποθέτουμε επίσης ότι* f *μία φραγμένη συνάρτηση στο* $[a, b]$.

Τότε, $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *εάν και μόνον εάν* $f\alpha' \in \mathcal{R}$. *Σε αυτήν την περίπτωση, ισχύει η ισότητα*

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx. \tag{27}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 6.6 στην α' και συνάγουμε την ύπαρξη μίας διαμερίσεως $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ του $[a, b]$ με

$$U(P, \alpha') - L(P, \alpha') < \varepsilon. \tag{28}$$

Το θεώρημα μέσης τιμής χορηγεί σημεία $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ με

$$\Delta\alpha_i = \alpha'(t_i)\Delta x_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Εάν $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$, τότε

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i)|\Delta x_i < \varepsilon, \tag{29}$$

σύμφωνα με την (28) και το Θεώρημα 6.7(β). Θέτουμε $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Εφόσον

$$\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\alpha'(t_i)\Delta x_i,$$

από την (29) έπεται ότι

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\alpha'(s_i)\Delta x_i\right| \leq M\varepsilon. \tag{30}$$

Ιδιαιτέρως,

$$\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta\alpha_i \leq U(P,\, f\alpha') + M\varepsilon$$

για όλες τις επιλογές των $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \dots n)$ και επομένως

$$U(P,\, f, \alpha) \leq U(P,\, f\alpha') + M\varepsilon.$$

Με τα ίδια επιχειρήματα οδηγούμαστε από την (30) στην

$$U(P,\, f\alpha') \leq U(P,\, f, \alpha) + M\varepsilon.$$

Συνεπώς,

$$|U(P,\, f, \alpha) - U(P,\, f\alpha')| \leq M\varepsilon. \tag{31}$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι η (28) παραμένει αληθής εάν η P αντικατασταθεί από οποιαδήποτε εκλέπτυνσή της. Συνεπώς, σε αυτήν την περίπτωση αληθεύει και η (31). Από αυτό καταλήγουμε στην

$$\left|\overline{\int_a^b} f\,d\alpha - \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)\,dx\right| \leq M\varepsilon.$$

Εφόσον ο ε είναι τυχών θετικός αριθμός, προκύπτει ότι

$$\overline{\int_a^b} f\,d\alpha = \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)\,dx \tag{32}$$

για *κάθε* φραγμένη συνάρτηση f στο $[a, b]$. Η ισότητα των κατώτερων ολοκληρωμάτων έπεται από την (30) με τον ίδιο τρόπο. Με αυτό προκύπτει το θεώρημα. □

Παρατήρηση 6.18. Τα δύο προηγούμενα θεωρήματα παρουσιάζουν τη γενικότητα και την ευελιξία της διαδικασίας της κατά Stieltjes ολοκληρώσεως. Εάν η α είναι μία συνάρτηση της μορφής (22), τότε το αντίστοιχο ως προς μία συνάρτηση ολοκλήρωμα μετατρέπεται σε πεπερασμένο άθροισμα ή άπειρη σειρά. Εάν η α έχει ολοκληρώσιμη παράγωγο, τότε το ολοκλήρωμα μετατρέπεται σε σύνηθες κατά Riemann ολοκλήρωμα. Με αυτήν τη διαδικασία είναι δυνατό να μελετηθούν οι σειρές και τα ολοκληρώματα σε ενιαίο πλαίσιο.

Για την περαιτέρω διερεύνηση αυτού του σημείου θα δανεισθούμε ένα παράδειγμα από τη Φυσική. Ας θεωρήσουμε ένα ευθύ καλώδιο μοναδιαίου μήκους. Η ροπή αδράνειάς του περί έναν άξονα που διέρχεται από ένα ακραίο σημείο του καλωδίου και σχηματίζει ορθή γωνία με το καλώδιο ισούται με

$$\int_0^1 x^2 dm, \tag{33}$$

όπου για $x \in [0, 1]$ συμβολίζουμε με $m(x)$ τη μάζα που περιέχεται στο διάστημα $[0, x]$ επί του καλωδίου. Εάν θεωρηθεί ότι το καλώδιο έχει συνεχή πυκνότητα ρ, δηλαδή εάν $m'(x) = \rho(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και η ρ είναι συνεχής, τότε η (33) μετατρέπεται στην

$$\int_0^1 x^2 \rho(x) dx. \tag{34}$$

Από την άλλη πλευρά, εάν το καλώδιο συντίθεται από μάζες m_i $(i = 1, \ldots n)$ που είναι συγκεντρωμένες στα αντίστοιχα σημεία x_i $(i = 1, \ldots n)$, τότε η (33) μετασχηματίζεται στην

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 m_i. \tag{35}$$

Συνεπώς, η (33) εμπεριέχει τις (34) και (35) ως ειδικές περιπτώσεις και ακόμη εμπεριέχει πολύ περισσότερες, όπως την περίπτωση όπου η m είναι συνεχής αλλά όχι παντού παραγωγίσιμη.

Θεώρημα 6.19. (Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών.) *Υποθέτουμε ότι ϕ είναι μία γνησίως αύξουσα συνεχής συνάρτηση που απεικονίζει ένα διάστημα $[A, B]$ επί ενός διαστήματος $[a, b]$. Υποθέτουμε επίσης ότι α είναι μία αύξουσα συνάρτηση στο $[a, b]$ και θεωρούμε $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ στο $[a, b]$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις β και g στο $[A, B]$ μέσω των σχέσεων*

$$\beta(y) = \alpha(\phi(y)), \qquad g(y) = f(\phi(y)) \qquad (y \in [A, B]). \tag{36}$$

Τότε, $g \in \mathcal{R}(\beta)$ στο $[A, B]$ και

$$\int_A^B g d\beta = \int_a^b f d\alpha. \tag{37}$$

Απόδειξη. Σε κάθε διαμέριση $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ του $[a, b]$ αντιστοιχίζεται μία διαμέριση $Q = \{y_0, \dots, y_n\}$ του $[A, B]$ με $x_i = \phi(y_i)$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Όλες οι διαμερίσεις του $[A, B]$ μπορούν να προκύψουν με αυτόν τον τρόπο. Εφόσον για κάθε δείκτη $i = 1, \dots n$ το σύνολο των τιμών που λαμβάνονται από την f στο $[x_{i-1}, x_i]$ ταυτίζεται με το σύνολο των τιμών που λαμβάνονται από την g στο $[y_{i-1}, y_i]$, διαπιστώνουμε ότι

$$U(Q, g, \beta) = U(P, f, \alpha), \qquad L(Q, g, \beta) = L(P, f, \alpha). \tag{38}$$

Εφόσον $f \in \mathcal{R}(\alpha)$, η P μπορεί να επιλεγεί ούτως ώστε τα $U(P, f, \alpha)$ και $L(P, f, \alpha)$ να βρίσκονται αυθαιρέτως κοντά στο $\int_a^b f d\alpha$. Συνεπώς, η (38), συνδυαζόμενη με το Θεώρημα 6.6, φανερώνει ότι $g \in \mathcal{R}(\beta)$ στο $[A, B]$ και ότι ισχύει η (37). Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Σημειώνουμε την ακόλουθη ειδική περίπτωση του προηγουμένου θεωρήματος: Εάν λάβουμε ως α την ταυτοτική συνάρτηση (δηλαδή εάν $\alpha(x) = x$ για κάθε $[a, b]$), τότε $\beta = \phi$. Υποθέτουμε ότι $\phi' \in \mathcal{R}$ στο $[A, B]$. Εάν εφαρμοσθεί το Θεώρημα 6.17 στην αριστερή πλευρά της (37), τότε λαμβάνουμε την ισότητα

$$\int_a^b f(x)dx = \int_A^B f(\phi(y))\phi'(y)dy. \tag{39}$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ

Σε αυτήν την ενότητα θα αποδείξουμε ότι, υπό μία έννοια, η ολοκλήρωση και η παραγώγιση είναι αντίστροφες πράξεις.

Θεώρημα 6.20. *Υποθέτουμε ότι* $f \in \mathcal{R}$ *στο* $[a, b]$. *Για* $x \in [a, b]$ *θέτουμε*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Τότε, η F *είναι συνεχής στο* $[a, b]$. *Επιπροσθέτως, εάν η* f *είναι συνεχής σε ένα σημείο* x_0 *του* $[a, b]$, *τότε η* F *είναι παραγωγίσιμη στο* x_0 *και ισχύει ότι*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Απόδειξη. Εφόσον $f \in \mathcal{R}$, η f είναι φραγμένη. Υποθέτουμε ότι M είναι ένας πραγματικός αριθμός με $|f(t)| \leq M$ για κάθε $t \in [a, b]$. Εάν $a \leq x < y \leq b$, τότε

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq M(y - x),$$

σύμφωνα με το Θεώρημα 6.12(γ) και (δ). Δεδομένου $\varepsilon > 0$, βρίσκουμε ότι

$$|F(y) - F(x)| < \varepsilon$$

για κάθε $x, y \in [a, b]$ με $|y - x| < \varepsilon/M$. Αυτό αποδεικνύει τη συνέχεια της F (στην πραγματικότητα, την ομοιόμορφη συνέχεια).

Υποθέτουμε τώρα ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Δεδομένου $\varepsilon > 0$, θεωρούμε $\delta > 0$ ούτως ώστε

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$$

για κάθε $t \in [a, b]$ με $|t - x_0| < \delta$. Συνεπώς, εάν

$$x_0 - \delta < s \leq x_0 \leq t < x_0 + \delta \;\text{ και }\; a \leq s < t \leq b,$$

τότε από το Θεώρημα 6.12(δ) συνάγουμε ότι

$$\left| \frac{F(t) - F(s)}{t - s} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{t - s} \int_s^t [f(u) - f(x_0)]du \right| < \varepsilon.$$

Από αυτό έπεται ότι $F'(x_0) = f(x_0)$. $\square$

6.21 Το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού. *Εάν* $f \in \mathcal{R}$ *στο* $[a, b]$ *και εάν υπάρχει μία παραγωγίσιμη συνάρτηση* F *στο* $[a, b]$ *με* $F' = f$, *τότε*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε μία διαμέριση $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ του $[a, b]$ με $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$. Από το θεώρημα μέσης τιμής προκύπτει η ύπαρξη σημείων $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ με

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(t_i)\Delta x_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Συνεπώς,

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = F(b) - F(a).$$

Τώρα, από το Θεώρημα 6.7(γ) έπεται ότι

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Εφόσον η παραπάνω ανισότητα ισχύει για τυχόντα θετικό αριθμό ε, καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Θεώρημα 6.22. (Ολοκλήρωση κατά μέρη.) *Υποθέτουμε ότι* F, G *είναι παραγωγίσιμες στο* $[a, b]$ *συναρτήσεις με* $F' = f$ *και* $G' = g$, *όπου* $f, g \in \mathcal{R}$. *Τότε,*

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $H = FG$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 6.21 στην H και στην παράγωγό της. Σημειώνουμε ότι $H' \in \mathcal{R}$, βάσει του Θεωρήματος 6.13. □

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ορισμός 6.23. Ας είναι $f_1, \ldots, f_k$ πραγματικές συναρτήσεις στο $[a, b]$ και $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_k)$ η αντίστοιχη απεικόνιση του $[a, b]$ στον R^k. Εάν α είναι μία αύξουσα συνάρτηση στο $[a, b]$, τότε γράφουμε $\mathbf{f} \in \mathcal{R}(\alpha)$ και ονομάζουμε την $\mathbf{f}$ *κατά Riemann ολοκληρώσιμη ως προς* α στο $[a, b]$ εάν και μόνον εάν $f_j \in \mathcal{R}(\alpha)$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$. Σε αυτήν την περίπτωση, ορίζουμε το *κατά Riemann-Stieltjes ολοκλήρωμα* της $\mathbf{f}$ ως προς α στο $[a, b]$ ως το

$$\int_a^b \mathbf{f} d\alpha = \left(\int_a^b f_1 d\alpha, \ldots, \int_a^b f_k d\alpha \right).$$

Δηλαδή το $\int_a^b \mathbf{f} d\alpha$ είναι το σημείο του R^k με j-συνεταγμένη τον αριθμό $\int_a^b f_j d\alpha$.

Είναι σαφές ότι τα μέρη (α), (γ) και (ε) του Θεωρήματος 6.12 παραμένουν αληθή και για διανυσματικές συναρτήσεις. Απλώς γίνεται εφαρμογή κατά συντεταγμένη. Το ίδιο ισχύει και για τα Θεωρήματα 6.17, 6.20 και 6.21. Για να το καταστήσουμε σαφές αυτό, διατυπώνουμε το ανάλογο του Θεωρήματος 6.21.

Θεώρημα 6.24. *Εάν οι συναρτήσεις* $\mathbf{f}$, $\mathbf{F}$ *απεικονίζουν το* $[a, b]$ *στον* R^k, *εάν* $\mathbf{f} \in \mathcal{R}$ *στο* $[a, b]$ *και εάν ισχύει ότι* $\mathbf{F}' = \mathbf{f}$, *τότε*

$$\int_a^b \mathbf{f}(x) dx = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a).$$

Το ανάλογο του Θεωρήματος 6.13(β) προσφέρει ορισμένα νέα στοιχεία στην απόδειξή του.

Θεώρημα 6.25. *Εάν η συνάρτηση* $\mathbf{f}$ *απεικονίζει το* $[a, b]$ *στον* R^k *και εάν* $\mathbf{f} \in \mathcal{R}(\alpha)$ *στο* $[a, b]$ *για κάποια αύξουσα συνάρτηση στο* $[a, b]$, *τότε* $|\mathbf{f}| \in \mathcal{R}(\alpha)$ *και*

$$\left| \int_a^b \mathbf{f} d\alpha \right| \leq \int_a^b |\mathbf{f}| d\alpha. \tag{40}$$

Απόδειξη. Εάν $f_1, \dots, f_k$ είναι οι συνιστώσες της $\mathbf{f}$, τότε

$$|\mathbf{f}| = (f_1^2 + \cdots + f_k^2)^{1/2}. \tag{41}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 6.11, οι συναρτήσεις $f_1^2, \dots, f_k^2$ ανήκουν στο $\mathcal{R}(\alpha)$. Συνεπώς, το ίδιο ισχύει και για το άθροισμά τους. Εφόσον η x^2 είναι συνεχής συνάρτηση του x, το Θεώρημα 4.17 φανερώνει ότι η συνάρτηση της τετραγωνικής ρίζας είναι συνεχής στο διάστημα $[0, M]$ για κάθε θετικό αριθμό M. Εάν εφαρμόσουμε το Θεώρημα 6.11 ακόμη μία φορά, τότε από την (41) συνάγουμε ότι $|\mathbf{f}| \in \mathcal{R}(\alpha)$.

Για την απόδειξη της (40), θέτουμε $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k)$, όπου για κάθε δείκτη j ισχύει ότι $y_j = \int_a^b f_j d\alpha$. Τότε, $\mathbf{y} = \int_a^b \mathbf{f} d\alpha$ και

$$|\mathbf{y}|^2 = \sum_{j=1}^k y_j^2 = \sum_{j=1}^k y_j \int_a^b f_j d\alpha = \int_a^b \sum_{j=1}^k y_j f_j d\alpha.$$

Από την ανισότητα του Schwarz λαμβάνουμε ότι

$$\sum_{j=1}^k y_j f_j(t) \leq |\mathbf{y}||\mathbf{f}(t)| \quad (a \leq t \leq b). \tag{42}$$

Συνεπώς, το Θεώρημα 6.12(β) συνεπάγεται ότι

$$|\mathbf{y}|^2 \leq |\mathbf{y}| \int_a^b |\mathbf{f}| d\alpha. \tag{43}$$

Εάν $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, τότε η (40) ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο. Εάν $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, τότε διαιρώντας την (43) με το $|\mathbf{y}|$ λαμβάνουμε την (40). □

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΙΣΙΜΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ

Το κεφάλαιο αυτό θα κλείσει με ένα θέμα γεωμετρικού χαρακτήρα, το οποίο παρέχει μία εφαρμογή των προηγουμένων. Η περίπτωση $k = 2$ (δηλαδή η περίπτωση των καμπυλών του επιπέδου) έχει μεγάλη σπουδαιότητα στη μελέτη των αναλυτικών συναρτήσεων μίας μιγαδικής μεταβλητής.

Ορισμός 6.26. Μία συνεχής απεικόνιση γ ενός διαστήματος $[a, b]$ στον R^k ονομάζεται *καμπύλη*[3] του R^k. Για να δοθεί έμφαση στο διάστημα παραμετρήσεως $[a, b]$, ορισμένες φορές αναφέρουμε τη γ ως καμπύλη στο $[a, b]$.

Η καμπύλη γ ονομάζεται *τόξο* εάν και μόνον εάν η γ είναι 1-1.

Η καμπύλη γ ονομάζεται *κλειστή* εάν και μόνον εάν $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Πρέπει να σημειωθεί ότι ορίζουμε την καμπύλη ως *απεικόνιση* και όχι ως σύνολο σημείων. Φυσικά, σε κάθε καμπύλη γ του R^k αντιστοιχεί ένα σύνολο σημείων, το πεδίο τιμών της γ. Όμως, διαφορετικές καμπύλες μπορεί να έχουν το ίδιο πεδίο τιμών.

Σε κάθε καμπύλη γ στο $[a, b]$ και κάθε διαμέριση $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ του $[a, b]$ αντιστοιχίζουμε τον αριθμό

$$\Lambda(P, \gamma) = \sum_{i=1}^{n} |\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})|.$$

Σε αυτό το άθροισμα, ο i τάξεως όρος είναι η απόσταση στον R^k μεταξύ των σημείων $\gamma(x_i)$ και $\gamma(x_{i-1})$. Συνεπώς, ο αριθμός $\Lambda(P, \gamma)$ ισούται με το μήκος της πολυγωνικής οδού με κορυφές τα σημεία $\gamma(x_0), \gamma(x_1), \ldots, \gamma(x_n)$. Καθώς η διαμέριση εκλεπτύνεται, η πολυγωνική οδός τείνει να συμπέσει με το πεδίο τιμών της γ. Με βάση αυτήν την παρατήρηση, είναι εύλογο να ορίσουμε ως *μήκος* της γ τον αριθμό

$$\Lambda(\gamma) = \sup \Lambda(P, \gamma),$$

όπου το ελάχιστο άνω φράγμα λαμβάνεται υπεράνω όλων των δυνατών διαμερίσεων P του $[a, b]$.

Η καμπύλη γ λέγεται *ευθυγραμμίσιμη* εάν και μόνον εάν $\Lambda(\gamma) < \infty$.

Σε ορισμένες περιπτώσεις, ο $\Lambda(\gamma)$ εκφράζεται μέσω ενός κατά Riemann ολοκληρώματος. Θα το αποδείξουμε αυτό για *συνεχώς παραγωγίσιμες* καμπύλες, δηλαδή για καμπύλες γ με συνεχή παράγωγο γ'.

[3] Σ. τ. Μ.: Ο συγγραφέας χρησιμοποιεί στο βιβλίο τον όρο «καμπύλη» και για συνεχείς απεικονίσεις όπως παραπάνω, με τη μόνη διαφορά ότι τα πεδία ορισμού τους δεν είναι απαραιτήτως κλειστά διαστήματα.

Θεώρημα 6.27. *Εάν γ είναι μία καμπύλη στο $[a, b]$ με συνεχή παράγωγο γ', τότε η γ είναι ευθυγραμμίσιμη και ισχύει η ισότητα*

$$\Lambda(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε μία διαμέριση $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ του $[a, b]$. Τότε, για κάθε $i = 1, \dots n$ είναι

$$|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})| = \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t) dt \right| \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\gamma'(t)| dt.$$

Επομένως,

$$\Lambda(P, \gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

για κάθε διαμέριση P του $[a, b]$. Κατά συνέπεια,

$$\Lambda(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Για την απόδειξη της αντίστροφης ανισότητας, θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Εφόσον η γ' είναι ομοιομόρφως συνεχής στο $[a, b]$, υπάρχει $\delta > 0$ ούτως ώστε

$$|\gamma'(t) - \gamma'(s)| < \varepsilon \text{ για κάθε } t, s \in [a, b] \text{ με } |t - s| < \delta.$$

Ας είναι $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ μία διαμέριση του $[a, b]$ με $\Delta x_i < \delta$ για κάθε δείκτη i. Εάν $x_{i-1} < t < x_i$ για κάποιον δείκτη $i = 1, \dots, n$, τότε

$$|\gamma'(t)| \leq |\gamma'(x_i)| + \varepsilon.$$

Άρα, για κάθε $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_i} |\gamma(t)'| dt &\leq |\gamma'(x_i)| \Delta x_i + \varepsilon \Delta x_i \\
&= \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\gamma'(t) + \gamma'(x_i) - \gamma'(t)] dt \right| + \varepsilon \Delta x_i \\
&\leq \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t) dt \right| + \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\gamma'(x_i) - \gamma'(t)] dt \right| + \varepsilon \Delta x_i \\
&\leq |\gamma'(x_i) - \gamma'(x_{i-1})| + 2\varepsilon \Delta x_i.
\end{aligned}$$

Αθροίζοντας τις ανισότητες αυτές ως προς τον δείκτη i, λαμβάνουμε την ανισότητα

$$\int_a^b |\gamma'(t)|dt \leq \Lambda(P,\gamma) + 2\varepsilon(a-b) \leq \Lambda(\gamma) + 2\varepsilon(a-b).$$

Εφόσον ο ε είναι τυχών θετικός αριθμός, προκύπτει ότι

$$\int_a^b |\gamma'(t)|dt \leq \Lambda(\gamma).$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Υποθέτουμε ότι α είναι μία αύξουσα συνάρτηση στο $[a,b]$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0 \in [a,b]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση f, ορισμένη στο $[a,b]$ από τις σχέσεις $f(x_0) = 1$ και $f(x) = 0$ εάν $x \in [a,b]$ με $x \neq x_0$. Αποδείξτε ότι $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ και ότι $\int_a^b f d\alpha = 0$.

Άσκηση 2. Υποθέτουμε ότι f είναι μία ορισμένη και συνεχής στο $[a,b]$ συνάρτηση με $f \geq 0$ και $\int_a^b f dx = 0$. Αποδείξτε ότι $f = 0$. (Συγκρίνετε το αποτέλεσμα αυτό με την Άσκηση 1.)

Άσκηση 3. Ορίζουμε τρεις συναρτήσεις β_1, β_2, β_3 ως εξής: για $j = 1,2,3$, $\beta_j(x) = 0$ εάν $x < 0$, $\beta_j(x) = 1$ εάν $x > 0$, και $\beta_1(0) = 0$, $\beta_2(0) = 1$, $\beta_3(0) = 1/2$. Ας είναι f μία φραγμένη στο $[-1,1]$ συνάρτηση.

(α) Αποδείξτε ότι $f \in \mathcal{R}(\beta_1)$ εάν και μόνον εάν $f(0+) = f(0)$. Σε αυτήν την περίπτωση, αποδείξτε ότι

$$\int_{-1}^1 f d\beta_1 = f(0).$$

(β) Διατυπώστε και αποδείξτε το ανάλογο αποτέλεσμα για την β_2.

(γ) Αποδείξτε ότι $f \in \mathcal{R}(\beta_3)$ εάν και μόνον εάν η f είναι συνεχής στο 0.

(δ) Εάν η f είναι συνεχής στο 0, τότε αποδείξτε ότι

$$\int_{-1}^1 f d\beta_1 = \int_{-1}^1 f d\beta_2 = \int_{-1}^1 f d\beta_3 = f(0).$$

Άσκηση 4. Εάν f είναι η συνάρτηση με $f(x) = 0$ για κάθε άρρητο αριθμό x και $f(x) = 1$ για κάθε ρητό αριθμό x, τότε αποδείξτε ότι $f \notin \mathcal{R}$ για οποιοδήποτε διάστημα $[a, b]$ (εξαιρούμε βεβαίως την περίπτωση $a = b$).

Άσκηση 5. Ας είναι f μία ορισμένη και φραγμένη στο $[a, b]$ συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f^2 \in \mathcal{R}$ στο $[a, b]$. Ισχύει απαραιτήτως ότι $f \in \mathcal{R}$ στο $[a, b]$; Αλλάζει η απάντηση στο ερώτημα εάν υποθέσουμε ότι $f^3 \in \mathcal{R}$ στο $[a, b]$;

Άσκηση 6. Ας είναι P το σύνολο του Cantor, όπως έχει κατασκευασθεί στην Ενότητα 2.44. Υποθέτουμε ότι f είναι μία πραγματική φραγμένη συνάρτηση στο [0, 1], συνεχής σε κάθε σημείο εκτός του P. Αποδείξτε ότι $f \in \mathcal{R}$ στο [0, 1].

Υπόδειξη: Το P μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένου πλήθους διαστήματα με συνολικό μήκος οσοδήποτε μικρό. Εργασθείτε όπως στο Θεώρημα 6.10.

Άσκηση 7. Υποθέτουμε ότι f είναι μία πραγματική συνάρτηση στο (0, 1] και ότι $f \in \mathcal{R}$ στο $[c, 1]$ για κάθε πραγματικό αριθμό c με $c > 0$. Ορίζουμε

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{c \to 0} \int_c^1 f(x)dx$$

εάν και μόνον εάν το όριο αυτό υπάρχει και είναι πεπερασμένο.

(α) Εάν $f \in \mathcal{R}$ στο [0, 1], τότε αποδείξτε ότι ο ορισμός αυτός ταυτίζεται με το συνήθη ορισμό του ολοκληρώματος.

(β) Κατασκευάστε μία συνάρτηση f για την οποία υπάρχει το όριο αυτό, δίχως να υπάρχει το αντίστοιχο όριο για την $|f|$.

Άσκηση 8. Υποθέτουμε ότι a είναι ένας πραγματικός αριθμός και ότι $f \in \mathcal{R}$ στο $[a, b]$ για κάθε πραγματικό αριθμό b με $b > a$. Ορίζουμε

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$$

εάν και μόνον εάν το όριο αυτό υπάρχει και είναι πεπερασμένο. Σε αυτήν την περίπτωση λέγεται ότι το ολοκλήρωμα *συγκλίνει*. Λέγεται ότι το ολοκλήρωμα *συγκλίνει απολύτως* εάν και μόνον εάν συγκλίνει όταν η f αντικατασταθεί από την $|f|$.

Υποθέτουμε ότι $f \geq 0$ και ότι η f είναι φθίνουσα στο $[1, \infty)$. Αποδείξτε ότι το

$$\int_1^\infty f(x)dx$$

συγκλίνει εάν και μόνον εάν η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

συγκλίνει. (Το συμπέρασμα αυτό είναι το λεγόμενο «ολοκληρωτικό κριτήριο» για τη σύγκλιση της σειράς.)

Άσκηση 9. Δείξτε ότι η ολοκλήρωση κατά μέρη μπορεί ορισμένες φορές να εφαρμοσθεί για «γενικευμένα» ολοκληρώματα, όπως ορίζονται στις Ασκήσεις 7 και 8. (Διατυπώστε τις κατάλληλες υποθέσεις, διατυπώστε ένα θεώρημα και αποδείξτε το.) Επί παραδείγματι, αποδείξτε ότι

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x}dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+x)^2}dx.$$

Αποδείξτε επίσης ότι ένα από αυτά τα ολοκληρώματα συγκλίνει *απολύτως* ενώ το άλλο όχι.

Άσκηση 10. Θεωρούμε δύο θετικούς αριθμούς p, q με

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Αποδείξτε τις ακόλουθες προτάσεις:

(α) Εάν $u \geq 0$, $v \geq 0$, τότε

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

Η ισότητα ισχύει εάν και μόνον εάν $u^p = v^q$.

(β) Ας είναι α μία αύξουσα συνάρτηση στο $[a, b]$. Εάν $f, g \in \mathcal{R}(\alpha)$ στο $[a, b]$ με $f \geq 0$, $g \geq 0$ και

$$\int_a^b f^p d\alpha = 1 = \int_a^b g^q d\alpha,$$

τότε αποδείξτε ότι

$$\int_a^b fg d\alpha \leq 1.$$

(γ) Εάν οι f, g είναι μιγαδικές συναρτήσεις με $f, g \in \mathcal{R}(\alpha)$ στο $[a, b]$, τότε αποδείξτε ότι

$$\left| \int_a^b fg d\alpha \right| \leq \left\{ \int_a^b |f|^p d\alpha \right\}^{1/p} \left\{ \int_a^b |g|^q d\alpha \right\}^{1/q}.$$

Η ανισότητα αυτή είναι η λεγόμενη *ανισότητα του Hölder*[4]. Εάν $p = q = 2$, τότε συνήθως λέγεται *ανισότητα του Schwarz.* (Σημειώστε ότι το Θεώρημα 1.35 αποτελεί ειδική περίπτωση αυτής.)

(δ) Δείξτε ότι η ανισότητα του Hölder αληθεύει και για «γενικευμένα» ολοκληρώματα, όπως ορίζονται στις Ασκήσεις 7 και 8.

Άσκηση 11. Ας είναι α μία αύξουσα συνάρτηση στο $[a, b]$. Για κάθε συνάρτηση $u \in \mathcal{R}(\alpha)$ θέτουμε

$$\|u\|_2 = \left\{ \int_a^b |u|^2 d\alpha \right\}^{1/2}.$$

[4] Σ. τ. Μ.: Otto Ludwig Hölder (1859-1937). Γερμανός μαθηματικός. Εργάσθηκε στην Ανάλυση, στην Άλγεβρα, στη Γεωμετρία αλλά και στη Φιλοσοφία.

Ο Hölder σπούδασε από το έτος 1877 στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου, έχοντας ως δασκάλους τους Karl Weierstrass (1815-1897), Leopold Kronecker (1823-1891) και Ernst Kummer (1810-1893). Έλαβε το διδακτορικό του δίπλωμα από το Πανεπιστήμιο του Tübingen το έτος 1882.

Το έτος 1884 ο Hölder ανέλαβε καθήκοντα υφηγητή στο Πανεπιστήμιο του Göttingen. Σε εκείνη την περίοδο ανακάλυψε την ανισότητα που φέρει το όνομα του. Το έτος 1889 του προσεφέρθη μία θέση στο Πανεπιστήμιο του Tübingen, την οποία δεν μπόρεσε να αναλάβει, λόγω μίας διανοητικής καταρρεύσεως που υπέστη. Τελικά, ύστερα από την ανάρρωσή του, ο Hölder ανέλαβε τη θέση αυτή το έτος 1890. Από αυτό το έτος και μετά ο Hölder ασχολήθηκε με τη Γεωμετρία και τη Φιλοσοφία.

Θεωρούμε $f, g, h \in \mathcal{R}(\alpha)$. Αποδείξτε την ανισότητα

$$\|f - h\|_2 \le \|f - g\|_2 + \|g - h\|_2$$

ως συνέπεια της ανισότητας του Schwarz, παρομοίως όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.37.

Άσκηση 12. Με τους συμβολισμούς της Ασκήσεως 11, υποθέτουμε ότι $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ και $\varepsilon > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μία συνεχής συνάρτηση g στο $[a, b]$ με $\|f - g\|_2 < \varepsilon$.

Υπόδειξη: Για μία κατάλληλη διαμέριση $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ του $[a, b]$, θεωρήστε τη συνάρτηση g με

$$g(t) = \frac{x_i - t}{\Delta x_i} f(x_{i-1}) + \frac{t - x_{i-1}}{\Delta x_i} f(x_i)$$

εάν $x_{i-1} \le t \le x_i$.

Άσκηση 13. Ορίζουμε τη συνάρτηση f στον R^1 μέσω της ισότητας

$$f(x) = \int_x^{x+1} \sin(t^2)dt \qquad (x \in R^1).$$

(α) Αποδείξτε ότι $|f(x)| < 1/x$ για κάθε πραγματικό αριθμό x με $x > 0$.

Υπόδειξη: Θέσατε $t^2 = u$ και ολοκληρώστε κατά μέρη για να δείξετε ότι η για $x \in R^1$ η $f(x)$ ισούται με

$$\frac{\cos(x^2)}{2x} - \frac{\cos[(x+1)^2]}{2(x+1)} - \int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{\cos u}{4u^{3/2}} du.$$

Χρησιμοποιήστε την ανισότητα $\cos u \ge -1$ ($u \in R^1$).

(β) Για $x > 0$ αποδείξτε ότι

$$2xf(x) = \cos(x^2) - \cos[(x+1)^2] + r(x),$$

όπου $|r(x)| < c/x$ για κατάλληλο πραγματικό αριθμό c.

(γ) Βρείτε τα ανώτερα και κατώτερα όρια της συναρτήσεως $xf(x)$ καθώς $x \to +\infty$.

(δ) Συγκλίνει το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \sin(t^2)dt$;

Άσκηση 14. Εργασθείτε ομοίως για τη συνάρτηση f με

$$f(x) = \int_x^{x+1} \sin(e^t)dt \qquad (x \in R^1).$$

Για κάθε $x \in R^1$ αποδείξτε ότι

$$e^x|f(x)| < 2$$

και ότι

$$e^x f(x) = \cos(e^x) - e^{-1}\cos(e^{x+1}) + r(x),$$

όπου $|r(x)| < Ce^{-x}$ για κατάλληλο πραγματικό αριθμό C.

Άσκηση 15. Υποθέτουμε ότι f είναι μία συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[a, b]$ με $f(a) = f(b) = 0$ και

$$\int_a^b f^2(x)dx = 1.$$

Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2}$$

και ότι

$$\int_a^b [f'(x)]^2 dx \cdot \int_a^b x^2 f^2(x)dx > \frac{1}{4}.$$

Άσκηση 16. Για κάθε πραγματικό αριθμό s με $1 < s < \infty$ ορίζουμε

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

(Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται *συνάρτηση ζήτα του Riemann* και έχει μεγάλη σημασία στη μελέτη της κατανομής των πρώτων αριθμών.) Για κάθε πραγματικό αριθμό s με $1 < s < \infty$ αποδείξτε ότι

(α) $\zeta(s) = s\int_1^\infty \frac{[x]}{x^{s+1}}dx$,

(β) $\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx$, όπου $[x]$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός που είναι μικρότερος ή ίσος του x. Επίσης, αποδείξτε ότι το ολοκλήρωμα αυτό συγκλίνει για κάθε πραγματικό αριθμό s με $s > 0$.

Υπόδειξη: Για την απόδειξη του (α), υπολογίστε τη διαφορά μεταξύ του ολοκληρώματος υπεράνω του $[1, N]$ και του N τάξεως μερικού αθροίσματος της σειράς που ορίζει το $\zeta(s)$. (Ο N είναι θετικός ακέραιος αριθμός).

Άσκηση 17. Υποθέτουμε ότι α είναι μία αύξουσα συνάρτηση στο $[a, b]$. Υποθέτουμε επίσης ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[a, b]$ και ότι $g = G'$ για μία κατάλληλη συνάρτηση στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b \alpha(x)g(x)dx = G(b)\alpha(b) - G(a)\alpha(a) - \int_a^b G d\alpha.$$

Υπόδειξη: Δίχως απώλεια της γενικότητας, θεωρήστε ότι η g είναι πραγματική. Δεδομένης μίας διαμερίσεως $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ του $[a, b]$, επιλέξτε $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$ $(i = 1, \ldots n)$ ούτως ώστε να ισχύει ότι $g(t_i)\Delta x_i = G(x_i) - G(x_{i-1})$. Δείξτε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha(x_i)g(t_i)\Delta x_i = G(b)\alpha(b) - G(a)\alpha(a) - \sum_{i=1}^{n} G(x_{i-1})\Delta\alpha_i.$$

Άσκηση 18. Θεωρούμε τις καμπύλες του μιγαδικού επιπέδου $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, ορισμένες στο $[0, 2\pi]$, όπου για $t \in [0, 2\pi]$ είναι[5]

$$\gamma_1(t) = e^{it}, \quad \gamma_2(t) = e^{2it}, \quad \gamma_3(t) = e^{2\pi i t \sin(1/t)}.$$

Αποδείξτε ότι οι τρεις αυτές καμπύλες έχουν κοινό πεδίο τιμών, ότι οι γ_1 και γ_2 είναι ευθυγραμμίσιμες, ότι το μήκος της γ_1 ισούται με 2π, ότι το μήκος της γ_2 ισούται με 4π και ότι η γ_3 δεν είναι ευθυγραμμίσιμη.

Άσκηση 19. Υποθέτουμε ότι γ_1 είναι μία καμπύλη του R^k, ορισμένη στο $[a, b]$ και ότι ϕ είναι μία συνεχής 1-1 συνάρτηση του $[c, d]$ επί του $[a, b]$ με $\phi(c) = a$. Ορίζουμε την καμπύλη γ_2 στο $[c, d]$, όπου για $s \in [c, d]$ είναι $\gamma_2(s) = \gamma_1(\phi(s))$. Αποδείξτε ότι η γ_2 είναι τόξο ή κλειστή καμπύλη ή ευθυγραμμίσιμη καμπύλη εάν και μόνον εάν η γ_1 είναι αντιστοίχως τόξο ή κλειστή καμπύλη ή ευθυγραμμίσιμη καμπύλη. Στην τελευταία περίπτωση, δείξτε ότι οι γ_1 και γ_2 έχουν το ίδιο μήκος.

[5] Σ. τ. Μ.: Στον ορισμό της γ_3, ο συγγραφέας υπονοεί βεβαίως ότι $\gamma_3(0) = 1$.

Κεφάλαιο 7

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΚΑΙ ΣΕΙΡΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Στο παρόν κεφάλαιο θα εστιάσουμε το ενδιαφέρον μας σε μιγαδικές συναρτήσεις (οι οποίες βεβαίως περιλαμβάνουν τις πραγματικές), αν και πολλά από τα θεωρήματα και τις αποδείξεις που ακολουθούν επεκτείνονται δίχως δυσκολία σε διανυσματικές συναρτήσεις, ακόμη και σε απεικονίσεις με τιμές σε τυχόντα μετρικό χώρο. Επιλέγουμε να κινηθούμε σε αυτό το απλοποιημένο πλαίσιο εργασίας ούτως ώστε να επικεντρώσουμε την προσοχή μας στις πιο σημαντικές όψεις των προβλημάτων που εγείρονται κατά τη διαδικασία εναλλαγής ορίων.

ΘΕΩΡΗΣΗ ΤΟΥ ΒΑΣΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Ορισμός 7.1. Υποθέτουμε ότι $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ είναι μία ακολουθία συναρτήσεων, ορισμένων σε ένα σύνολο E, και υποθέτουμε ότι η αριθμητική ακολουθία $\{f_n(x)\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ συγκλίνει για οποιοδήποτε $x \in E$. Ορίζουμε τη συνάρτηση f στο E μέσω της ισότητας

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in E). \tag{1}$$

Υπό αυτές και μόνον αυτές τις περιστάσεις, λέγεται ότι η ακολουθία $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *συγκλίνει στο* E και η f είναι το *όριο* ή η *οριακή συνάρτηση* της εν λόγω ακολουθίας. Ορισμένες φορές χρησιμοποιείται και η περισσότερο περιγραφική φράση «η ακολουθία συγκλίνει *κατά σημείο* προς την f στο E». Παρομοίως, στην περίπτωση που η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει για κάθε $x \in E$ και ορίσουμε τη συνάρτηση f μέσω της ισότητας

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in E), \tag{2}$$

τότε η f ονομάζεται το *άθροισμα* ή το *κατά σημείο άθροισμα* της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Το σημαντικό πρόβλημα που εμφανίζεται είναι ο καθορισμός των ιδιοτήτων που διατηρούνται από τις πράξεις λήψεως ορίων (1) και (2). Επί παραδείγματι, εάν οι συναρτήσεις f_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ είναι συνεχείς ή παραγωγίσιμες ή ολοκληρώσιμες, τότε αληθεύει το αντίστοιχο γεγονός για την οριακή συνάρτηση; Ποιες είναι οι σχέσεις μεταξύ των f_n' και f' ή μεταξύ των ολοκληρωμάτων των f_n και f;

Λέγοντας ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x εννοούμε ότι

$$\lim_{t\to x} f(t) = f(x).$$

Συνεπώς, το ερώτημα εάν το όριο μίας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση ανάγεται στο ερώτημα περί αληθείας της ισότητας

$$\lim_{t\to x} \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to x} f_n(t), \tag{3}$$

δηλαδή εάν η σειρά με την οποία εκτελούνται οι λήψεις ορίων είναι επουσιώδης. Στο αριστερό μέλος της (3) λαμβάνουμε πρώτα $n \to \infty$ και έπειτα $t \to x$. Στο δεξιό μέλος λαμβάνουμε πρώτα $t \to x$ και κατόπιν $n \to \infty$.

Μέσω αρκετών παραδειγμάτων θα καταδείξουμε ότι γενικά δεν μπορεί να γίνει εναλλαγή λήψεως ορίων δίχως να επηρεασθεί το αποτέλεσμα. Εν συνεχεία, θα αποδείξουμε ότι υπό ορισμένες υποθέσεις αυτό μπορεί να συμβεί.

Το πρώτο και απλούστερο παράδειγμα αφορά μία «διπλή ακολουθία».

Παράδειγμα 7.2. Για $m = 1, 2, 3, \ldots$ και $n = 1, 2, 3, \ldots$ θέτουμε

$$s_{m,n} = \frac{m}{m+n}.$$

Τότε, για κάθε δείκτη n έχουμε ότι

$$\lim_{m\to\infty} s_{m,n} = 1$$

και επομένως

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} s_{m,n} = 1. \tag{4}$$

Από την άλλη πλευρά, για κάθε δείκτη m έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} s_{m,n} = 0$$

και επομένως

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} s_{m,n} = 0. \tag{5}$$

Παράδειγμα 7.3. Ας είναι

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \quad (x \in R^1,\ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Θεωρούμε τη σειρά

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \quad (x \in R^1). \tag{6}$$

Εφόσον $f_n(0) = 0$ για κάθε δείκτη n, είναι $f(0) = 0$. Για $x \neq 0$, η τελευταία σειρά στην (6) είναι συγκλίνουσα γεωμετρική σειρά με άθροισμα το $1 + x^2$ (Θεώρημα 3.26). Συνεπώς,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{εάν } \ x = 0, \\ 1 + x^2 & \text{εάν } \ x \neq 0. \end{cases} \tag{7}$$

Επομένως, μία συγκλίνουσα σειρά συνεχών συναρτήσεων μπορεί να έχει ασυνεχές άθροισμα.

Παράδειγμα 7.4. Για $m = 1, 2, 3, \ldots$ και πραγματικό αριθμό x θέτουμε

$$f_m(x) = \lim_{n \to \infty} [\cos(m!\pi x)]^{2n}.$$

Όταν ο $m!x$ είναι ακέραιος αριθμός, τότε $f_m(x) = 1$. Για οποιεσδήποτε άλλες τιμές του x έχουμε ότι $f_m(x) = 0$. Τώρα, για πραγματικό αριθμό x θέτουμε

$$f(x) = \lim_{m \to \infty} f_m(x).$$

Εάν ο x είναι άρρητος αριθμός, τότε ισχύει ότι $f_m(x) = 0$, για κάθε δείκτη m. Συνεπώς, $f(x) = 0$. Εάν ο x είναι ρητός αριθμός, με $x = p/q$ όπου p, q είναι ακέραιοι με $q \neq 0$, τότε παρατηρούμε ότι ο $m!x$ είναι ακέραιος, όταν $m \geq q$. Άρα, $f(x) = 1$. Συνεπώς,

$$\lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} [\cos(m!\pi x)]^{2n} = \begin{cases} 0 & \text{εάν ο } x \text{ είναι άρρητος αριθμός}, \\ 1 & \text{εάν ο } x \text{ είναι ρητός αριθμός}. \end{cases} \tag{8}$$

Συνεπώς, το όριο της παραπάνω ακολουθίας συνεχών, και κατά συνέπεια ολοκληρώσιμων, συναρτήσεων είναι μία μη ολοκληρώσιμη κατά Riemann συνάρτηση (Άσκηση 4, Κεφάλαιο 6).

Παράδειγμα 7.5. Ας είναι

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \qquad (x \in R^1, n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{9}$$

και

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x. Τότε, $f' = 0$ και

$$f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x και δείκτη n. Επομένως, η ακολουθία $\{f_n'\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ δεν συγκλίνει προς την f'. Επί παραδείγματι,

$$f_n'(0) = \sqrt{n} \to +\infty$$

καθώς $n \to \infty$, ενώ $f'(0) = 0$.

Παράδειγμα 7.6. Ας είναι

$$f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n \qquad (x \in [0, 1], n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{10}$$

Για $x \in (0, 1]$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0,$$

σύμφωνα με το Θεώρημα 3.20(δ). Εφόσον $f_n(0) = 0$ για κάθε δείκτη n, προκύπτει τελικά ότι

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad (0 \leq x \leq 1). \tag{11}$$

Ένας απλός υπολογισμός φανερώνει ότι

$$\int_0^1 x(1 - x^2)^n dx = \frac{1}{2n + 2}.$$

Συνεπώς, παρά την ισχύ της (11),

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{n^2}{2n + 2} \to +\infty,$$

καθώς $n \to \infty$.

Εάν στην (10) αντικαταστήσουμε το n^2 με το n, τότε η (11) παραμένει αληθής. Όμως, τώρα έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n + 2} = \frac{1}{2},$$

ενώ

$$\int_0^1 \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] dx = 0.$$

Κατά συνέπεια, το όριο των ολοκληρώματων δεν ισούται απαραιτήτως με το ολοκλήρωμα του ορίου, ακόμη και εάν αυτά τα δύο είναι πεπερασμένα.

Τα προηγούμενα παραδείγματα φανερώνουν την αδυναμία εναλλαγής της σειράς λήψεως ορίων στη γενικότητά της. Εν συνεχεία, θα ορίσουμε ένα νέο είδος συγκλίσεως, ισχυρότερο από την κατά σημείο σύγκλιση, όπως παρουσιάζεται στον Ορισμό 7.1. Ο νέος αυτός ορισμός μας επιτρέπει να καταλήξουμε σε θετικά αποτελέσματα.

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ

Ορισμός 7.7. Μία ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ λέγεται ότι *συγκλίνει ομοιομόρφως* προς μία συνάρτηση f στο E εάν και μόνον εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακέραιος αριθμός N ούτως ώστε για κάθε δείκτη n με $n \geq N$ να ισχύει ότι

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \tag{12}$$

για κάθε $x \in E$.

Είναι σαφές ότι κάθε ομοιομόρφως συγκλίνουσα ακολουθία είναι και κατά σημείο συγκλίνουσα. Η διαφορά συνίσταται στο εξής: Όταν η $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ συγκλίνει κατά σημείο προς μία συνάρτηση f στο E, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ και $x \in E$ υπάρχει ακέραιος αριθμός N εξαρτώμενος από τους ε *και* x ούτως ώστε να ισχύει η (12) για κάθε δείκτη n με $n \geq N$. Όταν η $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ συγκλίνει ομοιομόρφως προς μία συνάρτηση f στο E, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ και $x \in E$ υπάρχει ακέραιος αριθμός N εξαρτώμενος *μόνον* από τον ε ούτως ώστε να ισχύει η (12) για κάθε δείκτη n με $n \geq N$ και *κάθε* $x \in E$. Λέγεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *συγκλίνει ομοιομόρφως* στο E εάν και μόνον εάν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, η οποία ορίζεται από την ισότητα

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \qquad (x \in E, n = 1, 2, 3, \dots),$$

συγκλίνει ομοιομόρφως στο E.

Το παρακάτω θεώρημα είναι το κριτήριο του Cauchy για την ομοιόμορφη σύγκλιση.

Θεώρημα 7.8. *Μία ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, ορισμένων στο E, είναι ομοιομόρφως συγκλίνουσα στο E εάν και μόνον εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακέραιος αριθμός N ούτως ώστε για οποιουσδήποτε δείκτες m, n με $m, n \geq N$ και κάθε $x \in E$ να ισχύει ότι*

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon. \tag{13}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ συγκλίνει ομοιομόρφως προς μία συνάρτηση f στο E. Ας είναι $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχει ακέραιος αριθμός N ούτως ώστε εάν $n \geq N$ και $x \in E$, τότε

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Συνεπώς,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

εάν $m, n \geq N$ και $x \in E$.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι ισχύει η συνθήκη του Cauchy. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.11, για κάθε $x \in E$ η ακολουθία $\{f_n(x)\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ συγκλίνει προς ένα όριο, το οποίο συμβολίζουμε με $f(x)$. Συνεπώς, η ακολουθία $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ συγκλίνει κατά σημείο προς τη συνάρτηση f στο E. Θα αποδείξουμε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

Ας είναι $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε ακέραιο αριθμό N ούτως ώστε να ισχύει η (13). Θεωρούμε ένα δείκτη n και λαμβάνουμε $m \to \infty$ στην (13). Εφόσον $f_m(x) \to f(x)$ καθώς $m \to \infty$, λαμβάνουμε ότι

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \tag{14}$$

για κάθε δείκτη n με $n \geq N$ και κάθε $x \in E$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Θεώρημα 7.9. *Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ συγκλίνει κατά σημείο προς μία συνάρτηση f στο E. Δηλαδή*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad (x \in E).$$

Για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n θέτουμε

$$M_n = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|.$$

Τότε, $f_n \to f$ ομοιομόρφως στο E καθώς $n \to \infty$ εάν και μόνον εάν $M_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Παραλείπουμε τις λεπτομέρειες της αποδείξεως αυτού του συμπεράσματος, εφόσον είναι άμεση συνέπεια του Ορισμού 7.7.

Σχετικά με τις σειρές, υπάρχει ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο περί ομοιόμορφης συγκλίσεως, το οποίο οφείλεται στον Weierstrass.

Θεώρημα 7.10. *Υποθέτουμε ότι $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3 \dots)$ είναι μία ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων στο E. Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχει μία ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{M_n\}$ $(n = 1, 2, 3 \dots)$ ούτως ώστε να ισχύει ότι*

$$|f_n(x)| \le M_n \quad (x \in E, n = 1, 2, 3, \dots).$$

Εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιομόρφως στο E.

Σημειώνουμε ότι το αντίστροφο δεν αληθεύει.

Απόδειξη. Εάν η $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$\left|\sum_{i=n}^{m} f_i(x)\right| \le \sum_{i=n}^{m} M_i \le \varepsilon \quad (x \in E)$$

όταν οι m, n είναι επαρκώς μεγάλοι (και $m \ge n$). Η ομοιόμορφη σύγκλιση έπεται από το Θεώρημα 7.8. $\square$

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Θεώρημα 7.11. *Θεωρούμε μία ακολουθία συναρτήσεων* $\{f_n\}$, $(n = 1, 2, 3, \dots)$ *που συγκλίνει ομοιομόρφως προς μία συνάρτηση* f *σε ένα υποσύνολο* E *ενός μετρικού χώρου* X. *Υποθέτουμε ότι* x *είναι ένα οριακό σημείο του* E *και ότι*

$$\lim_{t \to x} f_n(t) = A_n \qquad (n = 1, 2, 3, \dots). \tag{15}$$

Τότε, η ακολουθία $\{A_n\}$ *(*$n = 1, 2, 3, \dots$*) συγκλίνει και ισχύει ότι*

$$\lim_{t \to x} f(t) = \lim_{n \to \infty} A_n. \tag{16}$$

Με διαφορετική διατύπωση, το συμπέρασμα είναι ότι

$$\lim_{t \to x} \lim_{n \to \infty} f_n(t) = \lim_{n \to \infty} \lim_{t \to x} f_n(t). \tag{17}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Βάσει της ομοιόμορφης συγκλίσεως της $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, υπάρχει ακέραιος αριθμός N ούτως ώστε εάν $m, n \geq N$ και $t \in E$, τότε

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \varepsilon. \tag{18}$$

Λαμβάνοντας $t \to x$ στη (18) αποκτούμε ότι

$$|A_n - A_m| \leq \varepsilon$$

για οποιουσδήποτε δείκτες m, n με $m, n \geq N$. Αυτό φανερώνει ότι η $\{A_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι ακολουθία Cauchy και επομένως συγκλίνει προς έναν αριθμό A.

Εν συνεχεία, για οποιονδήποτε δείκτη n ισχύει ότι

$$|f(t) - A| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - A_n| + |A_n - A|. \tag{19}$$

Αρχικά, θεωρούμε δείκτη n με

$$|f(t) - f_n(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{20}$$

για κάθε $t \in E$ (αυτό είναι δυνατό λόγω της ομοιόμορφης συγκλίσεως) και επίσης με

$$|A_n - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{21}$$

Για αυτόν τον δείκτη υπάρχει μία περιοχή V του x με

$$|f_n(t) - A_n| \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{22}$$

για κάθε $t \in V \cap E$ με $t \neq x$. Συνδυάζοντας τις ανισότητες (20) έως και (22) με την (19) διαπιστώνουμε ότι

$$|f(t) - A| \leq \varepsilon$$

για κάθε $t \in V \cap E$ με $t \neq x$. Αυτό ισοδυναμεί με την (16). □

Θεώρημα 7.12. *Θεωρούμε μία ακολουθία συνεχών συναρτήσεων* $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ *σε ένα υποσύνολο* E *ενός μετρικού χώρου* X *η οποία συγκλίνει ομοιομόρφως προς μία συνάρτηση* f *στο* E. *Τότε, η* f *είναι συνεχής.*

Το παραπάνω ιδιαιτέρως σημαντικό αποτέλεσμα αποτελεί άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 7.11.

Το αντίστροφο δεν αληθεύει. Δηλαδή, μία ακολουθία συνεχών συναρτήσεων μπορεί να συγκλίνει προς μία συνεχή συνάρτηση, δίχως η σύγκλιση να είναι απαραιτήτως ομοιόμορφη. Το παράδειγμα 7.6 είναι αυτού του είδους (για να το διαπιστώσετε, εφαρμόστε το Θεώρημα 7.9). Υπάρχει όμως μία περίπτωση όπου μπορούμε να αποδείξουμε ένα είδος αντιστρόφου.

Θεώρημα 7.13. [1] *Θωρούμε ένα συμπαγές υποσύνολο* K *ενός μετρικού χώρου. Υποθέτουμε ότι:*

[1] Σ. τ. Μ.: Το θεώρημα αυτό είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως Θεώρημα του Dini.

Ullise Dini (1845-1918). Ιταλός μαθηματικός. Εργάσθηκε κυρίως στη Θεωρία Πραγματικών και Μιγαδικών Συναρτήσεων και στη Θεωρία Επιφανειών. Σπούδασε στο Πανεπιστήμιο της Pisa και μαθήτευσε υπό τον σπουδαίο μαθηματικό Enrico Betti (1823-1892). Ανεκηρύχθη διδάκτορας του Πανεπιστημίου της Pisa το έτος 1864. Συνέχισε τις σπουδές του στο Παρίσι, υπό τους μαθηματικούς Charles Hermite (1822-1901) και Joseph Bertrand (1822-

(α) *Η* $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *είναι μία ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο* K.

(β) *Η* $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *συγκλίνει κατά σημείο προς μία συνεχή συνάρτηση* f *στο* K.

(γ) $f_n \geq f_{n+1}$ *για κάθε* $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Τότε, η $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *συγκλίνει ομοιομόρφως προς την* f *στο* K.

Απόδειξη. Για $n = 1, 2, 3 \ldots$ θέτουμε $g_n = f_n - f$. Τότε, για κάθε δείκτη n η g_n είναι συνεχής, $g_n \to 0$ κατά σημείο στο K καθώς $n \to \infty$ και $g_n \geq g_{n+1}$ για κάθε δείκτη n. Πρέπει να αποδείξουμε ότι $g_n \to 0$ ομοιομόρφως στο K, καθώς $n \to \infty$.

Θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Για $n = 1, 2, 3, \ldots$ ας είναι K_n το σύνολο των σημείων $x \in K$ με $g_n(x) \geq \varepsilon$. Εφόσον η g_n είναι συνεχής, το K_n είναι κλειστό (Πόρισμα του Θεωρήματος 4.8), άρα συμπαγές (Θεώρημα 2.35). Εφόσον ισχύει ότι $g_n \geq g_{n+1}$, έχουμε ότι $K_{n+1} \subset K_n$ για κάθε δείκτη n.

Θεωρούμε $x \in K$. Εφόσον $g_n(x) \to 0$ καθώς $n \to \infty$, διαπιστώνουμε ότι $x \notin K_n$ εάν ο δείκτης n ληφθεί επαρκώς μεγάλος. Συνεπώς, $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Αυτό σημαίνει ότι το $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ είναι κενό. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.36, το K_N είναι κενό για κάποιον δείκτη N. Από αυτό έπεται ότι $0 \leq g_n(x) < \varepsilon$ για κάθε $x \in K$ και δείκτη n με $n \geq N$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Σημειώνουμε ότι η υπόθεση της συμπάγειας είναι ουσιώδης. Επί παραδείγματι, εάν

$$f_n(x) = \frac{1}{nx + 1} \qquad (0 < x < 1, n = 1, 2, 3, \ldots),$$

τότε $f_n(x) \to 0$ καθώς $n \to \infty$, με αύξοντα τρόπο για κάθε $x \in (0, 1)$, όμως η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

1900). Επιστρέφοντας στην Pisa, ανέλαβε διδακτικά καθήκοντα στο τοπικό πανεπιστήμιο. Το έτος 1871 ο Dini υποκατέστησε τον Betti ως τακτικός καθηγητής της Μαθηματικής Φυσικής. Τρία έτη μετά κατέλαβε την έδρα της Αναλύσεως. Διατήρησε τη θέση αυτή έως το θάνατό του.

Εκτός από τη ενασχόληση με τα Μαθηματικά, ο Dini είχε και έντονη πολιτική δραστηριότητα.

Ορισμός 7.14. Εάν X είναι ένας μετρικός χώρος, τότε συμβολίζουμε με $\mathcal{C}(X)$ το σύνολο όλων των συνεχών και φραγμένων μιγαδικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού τον X.

Σημειώνουμε ότι εάν ο X είναι συμπαγής, τότε η υπόθεση περί του φραγμένου των συναρτήσεων είναι περιττή (Θεώρημα 4.15). Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή, το $\mathcal{C}(X)$ είναι το σύνολο όλων των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού τον X.

Σε κάθε $f \in \mathcal{C}(X)$ αντιστοιχίζουμε τη λεγόμενη *στάθμη του ελαχίστου άνω φράγματος*

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Εφόσον η f υποτίθεται φραγμένη, $\|f\| < \infty$. Είναι σαφές ότι για κάθε $f \in \mathcal{C}(X)$ ισχύει ότι $\|f\| = 0$ εάν και μόνον εάν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in X$, δηλαδή εάν και μόνον εάν $f = 0$. Εάν $f, g \in \mathcal{C}(X)$ και $h = f + g$, τότε

$$|h(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$$

για κάθε $x \in X$. Επομένως

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Εάν ορίσουμε ως απόσταση των $f, g \in \mathcal{C}(X)$ τον αριθμό $\|f - g\|$, τότε διαπιστώνουμε ότι ικανοποιούνται τα αξιώματα του Ορισμού 2.15. Κατά συνέπεια: *ο $\mathcal{C}(X)$ καθίσταται μετρικός χώρος.*

Το Θεώρημα 7.9 λαμβάνει την παρακάτω μορφή:

Μία ακολουθία $\{f_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) του $\mathcal{C}(X)$ συγκλίνει προς τη συνάρτηση $f \in \mathcal{C}(X)$ ως προς τη μετρική του $\mathcal{C}(X)$ εάν και μόνον εάν $f_n \to f$ ομοιομόρφως στον X καθώς $n \to \infty$.

Κατ' αντιστοιχία, τα κλειστά υποσύνολα του $\mathcal{C}(X)$ λέγονται ορισμένες φορές *ομοιομόρφως κλειστά*, η κλειστή θήκη ενός υποσυνόλου $\mathcal{A}$ του $\mathcal{C}(X)$ λέγεται η *ομοιόμορφη κλειστή θήκη* κ. ο. κ..

Θεώρημα 7.15. *Η ως άνω μετρική καθιστά τον $\mathcal{C}(X)$ πλήρη.*

Απόδειξη. Ας είναι $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ μία ακολουθία Cauchy του $\mathcal{C}(X)$. Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακέραιος αριθμός N ούτως ώστε να ισχύει $\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon$ εάν $m, n \geq N$. Από το Θεώρημα 7.8 έπεται η ύπαρξη μίας συναρτήσεως f με πεδίο ορισμού το X ούτως ώστε η $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ να συγκλίνει ομοιομόρφως προς την f στο X. Σύμφωνα με το Θεώρημα 7.12, η f είναι συνεχής. Επιπροσθέτως, η f είναι φραγμένη, εφόσον υπάρχει δείκτης n με $|f(x) - f_n(x)| < 1$ για κάθε $x \in X$ και η f_n είναι φραγμένη.

Συνεπώς, $f \in \mathcal{C}(X)$ και επειδή $f_n \to f$ ομοιομόρφως στο X καθώς $n \to \infty$, έχουμε ότι $\|f_n - f\| \to 0$ καθώς $n \to \infty$. □

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Θεώρημα 7.16. *Υποθέτουμε ότι α είναι μία αύξουσα συνάρτηση στο $[a, b]$. Για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots$ θεωρούμε $f_n \in \mathcal{R}(\alpha)$ στο $[a, b]$. Θεωρούμε επίσης μία συνάρτηση f, ορισμένη στο $[a, b]$, με $f_n \to f$ ομοιομόρφως στο $[a, b]$ καθώς $n \to \infty$. Τότε, ισχύει ότι $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ στο $[a, b]$ και ότι*

$$\int_a^b f d\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n d\alpha. \tag{23}$$

Η ύπαρξη του ορίου αποτελεί μέρος του συμπεράσματος.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε το αποτέλεσμα στην περίπτωση όπου κάθε όρος της ακολουθίας είναι πραγματική συνάρτηση. Για $n = 1, 2, 3, \dots$ θέτουμε

$$\varepsilon_n = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|. \tag{24}$$

Τότε, για κάθε δείκτη n ισχύει ότι

$$f_n - \varepsilon_n \leq f \leq f_n + \varepsilon_n$$

και επομένως για το ανώτερο και κατώτερο ολοκλήρωμα (ανατρέξτε στον Ορισμό 6.2) της f ισχύει ότι

$$\int_a^b (f_n - \varepsilon_n) d\alpha \leq \underline{\int_a^b} f d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f d\alpha \leq \int_a^b (f_n + \varepsilon_n) d\alpha. \tag{25}$$

Συνεπώς,

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f d\alpha - \underline{\int_a^b} f d\alpha \leq 2\varepsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

για κάθε δείκτη n. Εφόσον $\varepsilon_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$ (Θεώρημα 7.9), το ανώτερο ολοκλήρωμα της f ισούται με το κατώτερο ολοκλήρωμα. Άρα, $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ στο $[a, b]$.

Με μία ακόμη εφαρμογή της (25) λαμβάνουμε ότι

$$\left| \int_a^b f d\alpha - \int_a^b f_n d\alpha \right| \leq \varepsilon_n[\alpha(b) - \alpha(a)] \tag{26}$$

για κάθε δείκτη n. Αυτή η σχέση συνεπάγεται την (23). □

Πόρισμα. *Υποθέτουμε ότι α είναι μία αύξουσα συνάρτηση στο $[a, b]$. Για $n = 1, 2, 3, \ldots$ θεωρούμε $f_n \in \mathcal{R}(\alpha)$ στο $[a, b]$. Υποθέτουμε ότι*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n,$$

όπου η σειρά συγκλίνει ομοιομόρφως στο $[a, b]$. Τότε,

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n d\alpha.$$

Με διαφορετική διατύπωση, υπό τις παραπάνω συνθήκες, η σειρά μπορεί να ολοκληρωθεί όρο προς όρο.

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ

Έχουμε ήδη διαπιστώσει, μέσω του παραδείγματος 7.5, ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση μίας ακολουθίας συναρτήσεων $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ δεν παρέχει κάποιο συμπέρασμα σχετικά με την $\{f_n'\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Συνεπώς, απαιτούνται ισχυρότερες υποθέσεις ούτως ώστε να ισχυριστούμε ότι $f_n' \to f'$ καθώς $n \to \infty$ εάν $f_n \to f$ καθώς $n \to \infty$.

Θεώρημα 7.17. *Υποθέτουμε ότι* $\{f_n\}$ *(*$n = 1, 2, 3, \dots$*) είναι μία ακολουθία συναρτήσεων, ορισμένων και παραγωγίσιμων στο* $[a, b]$*, ούτως ώστε για κάποιο* $x_0 \in [a, b]$ *η ακολουθία* $\{f_n(x_0)\}$ *(*$n = 1, 2, 3, \dots$*) να είναι συγκλίνουσα. Εάν η* $\{f_n'\}$ *(*$n = 1, 2, 3, \dots$*) συγκλίνει ομοιομόρφως στο* $[a, b]$*, τότε η* $\{f_n\}$ *(*$n = 1, 2, 3, \dots$*) συγκλίνει ομοιομόρφως στο* $[a, b]$ *προς μία συνάρτηση* f*, για την οποία ισχύει ότι*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \qquad (a \le x \le b). \tag{27}$$

Απόδειξη. Ας είναι $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε ακέραιο αριθμό N ούτως ώστε εάν $m, n \ge N$, τότε

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{28}$$

και

$$|f_n'(t) - f_m'(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (a \le t \le b). \tag{29}$$

Θεωρούμε δείκτες m, n με $m, n \ge N$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής (Θεώρημα 5.19) στη συνάρτηση $f_n - f_m$. Τότε, η (29) φανερώνει ότι

$$|f_n(x) - f_m(x) - f_n(t) + f_m(t)| \le \frac{|x-t|\varepsilon}{2(b-a)} \le \frac{\varepsilon}{2} \tag{30}$$

για κάθε $x, t \in [a, b]$. Η ανισότητα

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|,$$

η οποία ισχύει για οποιουσδήποτε δείκτες n, m και κάθε $x \in [a, b]$, συνεπάγεται, σύμφωνα με τις (28) και (29), ότι

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (a \le x \le b,\ n, m \ge N).$$

Επομένως, η $\{f_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) συγκλίνει ομοιομόρφως. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (a \le x \le b).$$

Θεωρούμε ένα σημείο x του $[a, b]$ και ορίζουμε

$$\phi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}, \qquad \phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \tag{31}$$

για κάθε δείκτη n και $t \in [a, b]$ με $t \neq x$. Τότε,

$$\lim_{t \to x} \phi_n(t) = f_n'(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \tag{32}$$

Η πρώτη ανισότητα στην (30) φανερώνει ότι

$$|\phi_n(t) - \phi_m(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b - a)} \quad (n, m \geq N)$$

και επομένως η $\{\phi_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ συγκλίνει ομοιομόρφως. Εφόσον η $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ συγκλίνει ομοιομόρφως προς την f, διαπιστώνουμε από την (31) ότι

$$\lim_{n \to \infty} \phi_n = \phi \tag{33}$$

ομοιομόρφως.

Εάν εφαρμόσουμε το Θεώρημα 7.11 στην $\{\phi_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, τότε οι (32) και (33) φανερώνουν ότι

$$\lim_{t \to x} \phi(t) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x)$$

Εξ ορισμού της ϕ, η τελευταία σχέση ισοδυναμεί με την (27). □

Παρατήρηση: Εάν επιπροσθέτως υποτεθεί ότι οι συναρτήσεις f_n' $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι συνεχείς, τότε υπάρχει συντομότερη απόδειξη της (27), η οποία βασίζεται στο Θεώρημα 7.16 και στο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού.

Θεώρημα 7.18. *Υπάρχει μία πραγματική συνεχής συνάρτηση, ορισμένη στην πραγματική ευθεία, η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο.*

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$\phi(x) = |x| \quad (-1 \leq x \leq 1) \tag{34}$$

και επεκτείνουμε τον ορισμό της ϕ σε όλη την πραγματική ευθεία, απαιτώντας να ισχύει η σχέση

$$\phi(x+2) = \phi(x) \tag{35}$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x. Τότε, για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς s, t ισχύει ότι

$$|\phi(s) - \phi(t)| \le |s-t|. \tag{36}$$

Ιδιαιτέρως, η ϕ είναι συνεχής στον R^1. Ορίζουμε τη συνάρτηση f στον R^1 μέσω της ισότητας

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x) \qquad (x \in R^1). \tag{37}$$

Εφόσον $0 \le \phi \le 1$, το Θεώρημα 7.10 φανερώνει ότι η σειρά (37) συγκλίνει ομοιομόρφως στον R^1. Βασιζόμενοι στο Θεώρημα 7.12, συμπεραίνουμε ότι η f είναι συνεχής στον R^1.

Θεωρούμε έναν πραγματικό αριθμό x και έναν θετικό ακέραιο αριθμό m. Θέτουμε

$$\delta_m = \pm\frac{1}{2} \cdot 4^{-m}, \tag{38}$$

όπου το πρόσημο επιλέγεται ούτως ώστε να μην υπάρχει ακέραιος αριθμός μεταξύ των $4^m x$ και $4^m(x+\delta_m)$. Το παραπάνω είναι εφικτό διότι $4^m|\delta_m| = 1/2$. Για θετικό ακέραιο αριθμό n ορίζουμε

$$\gamma_n = \frac{\phi(4^n(x+\delta_m)) - \phi(4^n x)}{\delta_m}. \tag{39}$$

Εάν $n > m$, τότε ο $4^n \delta_m$ είναι άρτιος ακέραιος αριθμός και επομένως $\gamma_n = 0$. Εάν $0 \le n \le m$, τότε η (36) συνεπάγεται ότι $|\gamma_n| \le 4^n$.

Εφόσον $|\gamma_m| = 4^m$, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x+\delta_m) - f(x)}{\delta_m}\right| &= \left|\sum_{n=0}^{m} \left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_n\right| \\ &\ge 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n \\ &= \frac{1}{2}(3^m + 1).\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας $m \to \infty$, διαπιστώνουμε ότι $\delta_m \to 0$. Από αυτό έπεται ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x. $\square$

ΙΣΟΣΥΝΕΧΕΙΣ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Στο Θεώρημα 3.6 έχει αποδειχθεί ότι κάθε φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών περιέχει μία συγκλίνουσα υπακολουθία. Από αυτό προκύπτει το ερώτημα εάν ισχύει κάποιο παρόμοιο γεγονός για ακολουθίες συναρτήσεων. Για την ακριβέστερη διατύπωση αυτού του ερωτήματος θα ορίσουμε δύο είδη φραγμένων ακολουθιών συναρτήσεων.

Ορισμός 7.19. Θεωρούμε μία ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, ορισμένων σε ένα σύνολο E.

Η ακολουθία $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ λέγεται *κατά σημείο φραγμένη* στο E εάν και μόνον εάν η ακολουθία $\{f_n(x)\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι φραγμένη για κάθε $x \in E$. Δηλαδή, εάν και μόνον εάν υπάρχει μία πραγματική συνάρτηση ϕ, ορισμένη στο E, ούτως ώστε

$$|f_n(x)| < \phi(x) \qquad (x \in E,\ n = 1, 2, 3, \dots).$$

Η ακολουθία $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ λέγεται *ομοιομόρφως φραγμένη* στο E εάν και μόνον εάν υπάρχει αριθμός M ούτως ώστε

$$|f_n(x)| < M \qquad (x \in E,\ n = 1, 2, 3, \dots).$$

Εάν η ακολουθία $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι κατά σημείο φραγμένη στο E και εάν E_1 είναι ένα αριθμήσιμο υποσύνολο του E, τότε είναι δυνατό να βρεθεί μία υπακολουθία $\{f_{n_k}\}$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ ούτως ώστε η $\{f_{n_k}(x)\}$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ να συγκλίνει για κάθε $x \in E_1$. Αυτό μπορεί να γίνει με χρήση της διαγώνιας μεθόδου, όπως στο Θεώρημα 7.23.

Όμως, ακόμη και εάν η $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι ομοιομόρφως φραγμένη ακολουθία συνεχών συναρτήσεων σε ένα συμπαγές σύνολο E, δεν είναι πάντοτε απαραίτητη η ύπαρξη υπακολουθίας που να συγκλίνει κατά σημείο στο E. Στο ακόλουθο παράδειγμα επικαλούμαστε ένα θεώρημα του Κεφαλαίου 11 για να υποστηρίξουμε τον προηγούμενο ισχυρισμό.

Παράδειγμα 7.20. Ας είναι

$$f_n(x) = \sin nx \qquad (0 \le x \le 2\pi,\ n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων αριθμών $\{n_k\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ ούτως ώστε η $\{\sin n_k x\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ να συγκλίνει για κάθε $x \in [0, 2\pi]$. Σε αυτήν την περίπτωση πρέπει να ισχύει

$$\lim_{k\to\infty} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x) = 0 \quad (0 \le x \le 2\pi)$$

και επομένως

$$\lim_{k\to\infty} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 = 0 \quad (0 \le x \le 2\pi). \tag{40}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 11.32, η (40) συνεπάγεται ότι

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 dx = 0. \tag{41}$$

Όμως, ένας απλός υπολογισμός φανερώνει ότι

$$\int_0^{2\pi} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 dx = 2\pi,$$

γεγονός που αντίκειται στην (41).

Ένα άλλο ερώτημα που προκύπτει είναι εάν κάθε συγκλίνουσα ακολουθία συναρτήσεων περιέχει μία ομοιομόρφως συγκλίνουσα υπακολουθία. Το επόμενο παράδειγμα φανερώνει ότι αυτό δεν ισχύει απαραιτήτως, ακόμη και εάν η ακολουθία είναι ομοιομόρφως φραγμένη σε ένα συμπαγές σύνολο. (Το Παράδειγμα 7.6 φανερώνει ότι μία ακολουθία φραγμένων συναρτήσεων μπορεί να συγκλίνει δίχως να είναι ομοιομόρφως φραγμένη. Όμως, μπορεί να διαπιστωθεί κατά τετριμμένο τρόπο ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση μίας ακολουθίας φραγμένων συναρτήσεων καθιστά την ακολουθία ομοιομόρφως φραγμένη.)

Παράδειγμα 7.21. Ας είναι

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2} \qquad (0 \le x \le 1,\ n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Τότε, $|f_n(x)| \le 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$ και δείκτη n, επομένως η $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ είναι ομοιομόρφως φραγμένη στο $[0, 1]$. Επιπλέον,

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 \qquad (0 \le x \le 1).$$

Όμως,

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Κατά συνέπεια, καμία υπακολουθία της υπό εξέταση ακολουθίας δεν μπορεί να συγκλίνει ομοιομόρφως στο $[0, 1]$.

Σε σχέση με τα προηγούμενα, η έννοια που απαιτείται είναι αυτή της ισοσυνέχειας.

Ορισμός 7.22. Μία οικογένεια μιγαδικών συναρτήσεων $\mathcal{F}$, ορισμένων σε ένα υποσύνολο E ενός μετρικού χώρου X, ονομάζεται *ισοσυνεχής* στο E εάν και μόνον εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ούτως ώστε

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

για κάθε $x, y \in E$ με $d(x, y) < \delta$ και κάθε $f \in \mathcal{F}$. (Με d συμβολίζουμε τη μετρική του X.)

Είναι σαφές ότι κάθε μέλος μίας ισοσυνεχούς συναρτήσεως είναι ομοιομόρφως συνεχής συνάρτηση.

Η ακολουθία του Παραδείγματος 7.21 δεν είναι ισοσυνεχής.

Τα Θεωρήματα 7.24 και 7.25 θα φανερώσουν τη στενή σχέση που υπάρχει μεταξύ της ισοσυνέχειας και της ομοιόμορφης συγκλίσεως ακολουθιών συνεχών συναρτήσεων. Πριν προχωρήσουμε σε αυτό το θέμα, θα περιγράψουμε πρώτα μία διαδικασία επιλογής που δεν σχετίζεται με τη συνέχεια.

Θεώρημα 7.23. *Εάν $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι μία κατά σημείο φραγμένη ακολουθία μιγαδικών συναρτήσεων, ορισμένων σε ένα αριθμήσιμο σύνολο E, τότε η $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ περιέχει μία υπακολουθία $\{f_{n_k}\}$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ με την ιδιότητα ότι η ακολουθία $\{f_{n_k}(x)\}$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ να συγκλίνει για κάθε $x \in E$.*

Απόδειξη. Ας είναι $\{x_i\}$ $(i = 1, 2, 3, \dots)$ τα σημεία του E, τοποθετημένα σε μία ακολουθία. Εφόσον η $\{f_n(x_1)\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι φραγμένη, υπάρχει μία υπακολουθία της $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, την οποία θα συμβολίζουμε με $\{f_{1,k}\}$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$, ούτως ώστε η $\{f_{1,k}(x_1)\}$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ να συγκλίνει.

Θεωρούμε τις ακολουθίες $S_1, S_2, S_3, \dots$, τις οποίες αναπαριστούμε με το διάγραμμα

$$\begin{array}{llllll} S_1: & f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} & \cdots \\ S_2: & f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4} & \cdots \\ S_3: & f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & f_{3,4} & \cdots \\ \multicolumn{6}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{array}$$

Το διάγραμμα αυτό έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α) Η S_n είναι υπακολουθία της S_{n-1} για κάθε $n = 2, 3, 4, \dots$.

(β) Για κάθε δείκτη n η ακολουθία $\{f_{n,k}(x_n)\}$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ συγκλίνει (το γεγονός ότι η $\{f_n(x_n)\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι φραγμένη καθιστά δυνατή την επιλογή της S_n με αυτόν τον τρόπο για κάθε δείκτη n.)

(γ) Η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι συναρτήσεις σε κάθε ακολουθία είναι η ίδια. Δηλαδή, εάν μία συνάρτηση προηγείται κάποιας άλλης στην S_1, τότε αυτές βρίσκονται στην ίδια σχέση διατάξεως σε κάθε ακολουθία S_n, εκτός και εάν είτε η μία είτε η άλλη δεν λαμβάνεται πλέον ως όρος. Συνεπώς, εάν στο παραπάνω διάγραμμα μετακινηθούμε από μία γραμμή στην επόμενή της, τότε οι συναρτήσεις μπορούν να μετατοπισθούν προς τα αριστερά όμως ποτέ προς τα δεξιά.

Εν συνεχεία, θεωρούμε τη διαγώνιο του διαγράμματος, δηλαδή την ακολουθία

$$S: \quad f_{1,1} \quad f_{2,2} \quad f_{3,3} \quad f_{4,4} \quad \cdots .$$

Σύμφωνα με το (γ), η ακολουθία S είναι υπακολουθία της S_n, με πιθανή εξαίρεση των $n - 1$ πρώτων όρων, για κάθε δείκτη n. Συνεπώς, από το (β) προκύπτει ότι η ακολουθία $\{f_{n,n}(x_i)\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ συγκλίνει για κάθε δείκτη $i = 1, 2, 3, \ldots$. $\square$

Θεώρημα 7.24. *Θεωρούμε έναν συμπαγή μετρικό χώρο K και μία ακολουθία $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ του $\mathcal{C}(K)$. Υποθέτουμε ότι η $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ συγκλίνει ομοιομόρφως στο K. Τότε, η $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ είναι ισοσυνεχής στο K.*

Απόδειξη. Ας είναι $\varepsilon > 0$. Λόγω της ομοιόμορφης συγκλίσεως, υπάρχει ακέραιος αριθμός N ούτως ώστε

$$\|f_n - f_N\| < \varepsilon \quad (n > N). \tag{42}$$

(Ανατρέξτε στον Ορισμό 7.14.) Εφόσον μία συνεχής συνάρτηση σε συμπαγή χώρο είναι ομοιομόρφως συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ούτως ώστε

$$|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon \tag{43}$$

εάν $1 \leq i \leq N$ και $x, y \in K$ με $d(x, y) < \delta$ (d είναι η μετρική του K.)

Εάν είναι $n > N$ και $x, y \in K$ με $d(x, y) < \delta$, τότε

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_n(y)| < 3\varepsilon.$$

Η σχέση αυτή σε συνδυασμό με την (43) αποδεικνύει το θεώρημα. $\square$

Θεώρημα 7.25. *Θεωρούμε έναν συμπαγή μετρικό χώρο K και μία ακολουθία $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ του $\mathcal{C}(K)$. Υποθέτουμε ότι η $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ είναι κατά σημείο φραγμένη και ισοσυνεχής στο K. Τότε:*

(α) *Η $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ είναι ομοιομόρφως φραγμένη στο K.*

(β) *Η $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ έχει ομοιομόρφως συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη.

(α) Ας είναι $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε $\delta > 0$ ούτως ώστε

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \tag{44}$$

για κάθε δείκτη n και $x, y \in K$ με $d(x, y) < \delta$ (με d συμβολίζουμε τη μετρική του K), σε εναρμόνιση με τον Ορισμό 7.22.

Εφόσον το K είναι συμπαγές, υπάρχουν σημεία $p_1, \ldots, p_r$ στο K ούτως ώστε για κάθε $x \in K$ να υπάρχει p_i, για κάποιο δείκτη i, με $d(x, p_i) < \delta$. Εφόσον η $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ είναι κατά σημείο φραγμένη, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $M_1, \ldots, M_r$ ούτως ώστε για κάθε δείκτη $i = 1, \ldots, r$ να ισχύει ότι $|f_n(p_i)| < M_i$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Εάν θέσουμε $M = \max(M_1, \ldots, M_r)$, τότε διαπιστώνουμε ότι $|f_n(x)| < M + \varepsilon$ για κάθε $x \in K$ και δείκτη n. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του (α).

(β) Ας είναι E ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του K. (Για την ύπαρξη τέτοιου υποσυνόλου συμβουλευθείτε την Άσκηση 25 του Κεφαλαίου 2.) Το Θεώρημα 7.23 φανερώνει ότι η $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ έχει μία υπακολουθία $\{f_{n_i}\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ ούτως ώστε η $\{f_{n_i}(x)\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ να συγκλίνει για κάθε $x \in E$.

Για την απλοποίηση του συμβολισμού θέτουμε $g_i = f_{n_i}$ για οποιοδήποτε $i = 1, 2, 3, \ldots$. Θα αποδείξουμε ότι η $\{g_i\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ συγκλίνει ομοιομόρφως στο K.

Ας είναι $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε $\delta > 0$ ούτως ώστε να ισχύει η (44). Ας είναι $V(x, \delta)$ το σύνολο των σημείων $y \in K$ με $d(x, y) < \delta$. Εφόσον το E είναι πυκνό στο K και το K είναι συμπαγές, υπάρχουν σημεία $x_1, \ldots, x_m \in E$ με

$$K \subset V(x_1, \delta) \cup \cdots \cup V(x_m, \delta). \tag{45}$$

Εφόσον η $\{g_i(x)\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ συγκλίνει για κάθε $x \in E$, υπάρχει ένας ακέραιος αριθμός N ούτως ώστε

$$|g_i(x_s) - g_j(x_s)| < \varepsilon \tag{46}$$

εάν $i, j \geq N$ και $1 \leq s \leq m$.

Εάν $x \in K$, τότε η (45) φανερώνει ότι $x \in V(x_s, \delta)$ για κάποιον δείκτη s και επομένως

$$|g_i(x) - g_i(x_s)| < \varepsilon$$

για κάθε δείκτη i. Εάν i, $j \geq N$, τότε από τη (46) έπεται ότι

$$\begin{aligned} |g_i(x) - g_j(x)| &\leq |g_i(x) - g_i(x_s)| + |g_i(x_s) - g_j(x_s)| + |g_j(x_s) - g_j(x)| \\ &< 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ STONE ΚΑΙ WEIERSTRASS

Θεώρημα 7.26. *Εάν f είναι μία συνεχής μιγαδική συνάρτηση, ορισμένη στο $[a, b]$, τότε υπάρχει μία ακολουθία $\{P_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) πολυωνύμων ούτως ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} P_n = f$$

ομοιομόρφως στο $[a, b]$. Εάν η f είναι πραγματική, τότε η ακολουθία $\{P_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) μπορεί να ληφθεί ούτως ώστε να αποτελείται από πολυώνυμα πραγματικών τιμών.

Η παραπάνω μορφή του θεωρήματος διατυπώθηκε από τον Weierstrass.

Απόδειξη. Δίχως απώλεια της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $[a, b] = [0, 1]$. Επίσης, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(0) = f(1) = 0$. Διότι εάν αποδείξουμε το θεώρημα σε αυτήν την περίπτωση, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση g με

$$g(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)] \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Ισχύει ότι $g(0) = g(1) = 0$. Συνεπώς, εάν η g είναι το όριο μίας ομοιομόρφως συγκλίνουσας ακολουθίας πολυωνύμων, τότε θα ισχύει το ίδιο και για την f, εφόσον η $f - g$ είναι πολυώνυμο.

Επιπλέον, για κάθε πραγματικό αριθμό x εκτός του διαστήματος $[0, 1]$ ορίζουμε $f(x) = 0$. Τότε, η f είναι ομοιομόρφως συνεχής στην πραγματική ευθεία.

Για κάθε πραγματικό αριθμό x θέτουμε

$$Q_n(x) = c_n(1 - x^2)^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{47}$$

όπου ο αριθμός c_n λαμβάνεται ούτως ώστε να ισχύει η ισότητα

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)dx = 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \dots). \tag{48}$$

Θα χρειαστούμε πληροφορίες για την τάξη μεγέθους αυτής της σταθερής. Εφόσον για κάθε δείκτη n ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx &= 2\int_0^1 (1-x^2)^n dx \\
&\geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}} (1-x^2)^n dx \\
&\geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}} (1-nx^2) dx \\
&= \frac{4}{3\sqrt{n}} \\
&> \frac{1}{\sqrt{n}},
\end{aligned}$$

από την (48) έπεται ότι

$$c_n < \sqrt{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots). \tag{49}$$

Η ανισότητα $(1-x^2)^n \geq 1 - nx^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots,\ x \in [0, 1]$), την οποία έχουμε χρησιμοποιήσει παραπάνω, αποδεικνύεται αληθής θεωρώντας τη συνάρτηση στο $[0, 1]$ με έκφραση

$$(1-x^2)^n - 1 + nx^2,$$

η οποία μηδενίζεται στο $x = 0$ και έχει θετική παράγωγο στο $(0, 1)$.

Για οποιοδήποτε $\delta > 0$ η (49) συνεπάγεται ότι

$$Q_n(x) \leq \sqrt{n}(1-\delta^2)^n \qquad (\delta \leq |x| \leq 1) \tag{50}$$

για κάθε δείκτη n. Επομένως $Q_n \to 0$ ομοιομόρφως καθώς $n \to \infty$ στο σύνολο των σημείων x με $\delta \leq |x| \leq 1$.

Για κάθε δείκτη n θέτουμε

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t) Q_n(t)dt \qquad (0 \leq x \leq 1). \tag{51}$$

Οι υποθέσεις επί της f φανερώνουν, μέσω μίας απλής αλλαγής μεταβλητών, ότι

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)Q_n(t)dt = \int_0^1 f(t)Q_n(t-x)dt$$

για κάθε $x \in [0, 1]$ και δείκτη n. Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι σαφώς πολυώνυμο στη μεταβλητή x. Συνεπώς, η ακολουθία $\{P_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ είναι ακολουθία πολυωνύμων, η οποία έχει ως όρους πραγματικές συναρτήσεις εάν η f είναι πραγματική.

Θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Άρα, υπάρχει $\delta > 0$ ούτως ώστε εάν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί με $|y - x| < \delta$, τότε

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θέτουμε $M = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Χρησιμοποιώντας τις (48), (50) και το γεγονός ότι $Q_n \geq 0$ για κάθε δείκτη n, διαπιστώνουμε για $x \in [0, 1]$ ότι

$$\begin{aligned}
|P_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-1}^{1} [f(x+t) - f(x)]Q_n(t)dt \right| \\
&\leq \int_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)|Q_n(t)dt \\
&\leq 2M \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)dt + 2M \int_{\delta}^{1} Q_n(t)dt \\
&\leq 4M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

όταν ο δείκτης n ληφθεί επαρκώς μεγάλος. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

Είναι διδακτικό για τον αναγνώστη να σχεδιάσει το γράφημα του Q_n για ορισμένες τιμές του δείκτη n.

Σημειώνουμε ότι η ομοιόμορφη συνέχεια της f χρησιμοποιείται ουσιωδώς για την απόδειξη της ομοιόμορφης συγκλίσεως της ακολουθίας $\{P_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 7.32 δεν θα χρειασθούμε το θεώρημα 7.26 στη γενικότητά του, αλλά την ακόλουθη ειδική περίπτωση, την οποία διατυπώνουμε ως πόρισμα.

Πόρισμα 7.27. *Για κάθε διάστημα $[-a, a]$ $(a \in R^1)$ υπάρχει μία ακολουθία πραγματικών πολυωνύμων $\{P_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ούτως ώστε $P_n(0) = 0$ για κάθε δείκτη n και*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = |x| \qquad (x \in [-a, a])$$

ομοιομόρφως στο $[-a, a]$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 7.26, υπάρχει μία ακολουθία πραγματικών πολυωνύμων $\{P_n^\star\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ με $\lim_{n\to\infty} P_n^\star(x) = |x|$ $(x \in [-a, a])$ ομοιομόρφως στο $[-a, a]$. Ιδιαιτέρως, $\lim_{n\to\infty} P_n^\star(0) = 0$. Η ακολουθία πολυωνύμων $\{P_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ με

$$P_n = P_n^\star - P_n^\star(0) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

έχει τις επιθυμητές ιδιότητες. □

Εν συνεχεία, θα απομονώσουμε τις ιδιότητες των πολυωνύμων που καθιστούν αληθές το θεώρημα του Weierstrass.

Ορισμός 7.28. Μία οικογένεια $\mathcal{A}$ μιγαδικών συναρτήσεων, ορισμένων σε ένα σύνολο E, ονομάζεται *άλγεβρα*[2] εάν και μόνον εάν ισχύουν τα επόμενα: Για κάθε $f, g \in \mathcal{A}$ και μιγαδικό αριθμό c,

(i) $f + g \in \mathcal{A}$,

(ii) $fg \in \mathcal{A}$,

(iii) $cf \in \mathcal{A}$.

Δηλαδή, εάν και μόνον εάν η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς την πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό.

[2] Σ. τ. Μ.: Ο συγγραφέας δίδει αυτόν τον περιορισμένου εύρους ορισμό για να επιτύχει την απόδειξη του θεωρήματος των Stone και Weierstrass. Η έννοια της άλγεβρας μπορεί να τεθεί σε πολύ πιο γενικό πλαίσιο από αυτό του βιβλίου.

Θα θεωρήσουμε επίσης άλγεβρες πραγματικών συναρτήσεων. Σε αυτήν την περίπτωση, απαιτείται να ισχύει το (iii) μόνο για πραγματικό αριθμό c.

Η άλγεβρα $\mathcal{A}$ ονομάζεται *ομοιομόρφως κλειστή* εάν και μόνον εάν ισχύει το εξής: το όριο μίας οποιασδήποτε ομοιομόρφως συγκλίνουσας ακολουθίας στοιχείων της $\mathcal{A}$ ανήκει στην $\mathcal{A}$. Δηλαδή, εάν και μόνον εάν για κάθε ομοιομόρφως συγκλίνουσα ακολουθία $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ της $\mathcal{A}$, η $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ ανήκει στην $\mathcal{A}$.

Το σύνολο $\mathcal{B}$ των συναρτήσεων που είναι όρια ομοιομόρφως συγκλινουσών ακολουθιών της $\mathcal{A}$ ονομάζεται η *ομοιόμορφη κλειστή θήκη* της $\mathcal{A}$. (Ανατρέξτε στον Ορισμό 7.14.)

Επί παραδείγματι, το σύνολο όλων των πολυωνύμων είναι μία άλγεβρα και το θεώρημα του Weierstrass μπορεί να αναδιατυπωθεί λέγοντας ότι το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων σε ένα διάστημα $[a, b]$ ισούται με την ομοιόμορφη κλειστή θήκη της άλγεβρας των πολυωνύμων στο ίδιο διάστημα.

Θεώρημα 7.29. *Ας είναι $\mathcal{B}$ η ομοιόμορφη κλειστή θήκη μίας άλγεβρας $\mathcal{A}$ φραγμένων συναρτήσεων. Τότε, η $\mathcal{B}$ είναι ομοιομόρφως κλειστή άλγεβρα.*

Απόδειξη. Θεωρούμε $f, g \in \mathcal{B}$ και βαθμωτό μέγεθος c. Τότε, υπάρχουν ομοιομόρφως συγκλίνουσες ακολουθίες $\{f_n\}, \{g_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ στοιχείων της $\mathcal{A}$ με $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, $g = \lim_{n\to\infty} f_n$. Εφόσον όλες οι υπό θεώρηση συναρτήσεις είναι φραγμένες, είναι απλό να αποδείξουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}(f_n + g_n) = f + g, \quad \lim_{n\to\infty} f_n g_n = fg, \quad \lim_{n\to\infty} c f_n = cf,$$

όπου σε κάθε περίπτωση η σύγκλιση νοείται ομοιόμορφη.

Συνεπώς, $f + g \in \mathcal{B}$, $fg \in \mathcal{B}$, $cf \in \mathcal{B}$. Άρα, η $\mathcal{B}$ είναι άλγεβρα.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.27, η $\mathcal{B}$ είναι ομοιομόρφως κλειστή. □

Ορισμός 7.30. Θεωρούμε μία οικογένεια $\mathcal{A}$ συναρτήσεων, ορισμένων σε ένα σύνολο E.

Λέγεται ότι η $\mathcal{A}$ *διαχωρίζει τα σημεία του* E εάν και μόνον εάν για οποιαδήποτε διακεκριμένα σημεία $x_1, x_2 \in E$ υπάρχει $f \in \mathcal{A}$ με $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Λέγεται ότι η $\mathcal{A}$ *δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του* E εάν και μόνον εάν για κάθε $x \in E$ υπάρχει $g \in \mathcal{A}$ με $g(x) \neq 0$.

Η άλγεβρα των πολυωνύμων μίας μεταβλητής στον R^1 σαφώς έχει αυτές τις ιδιότητες. Παράδειγμα άλγεβρας που δεν διαχωρίζει σημεία αποτελεί το σύνολο των αρτίων πολυωνύμων στο $[-1, 1]$, εφόσον για οποιοδήποτε στοιχείο f αυτής της άλγεβρας ισχύει ότι $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.

Το ακόλουθο θεώρημα αποσαφηνίζει περαιτέρω τις έννοιες αυτές.

Θεώρημα 7.31. *Υποθέτουμε ότι $\mathcal{A}$ είναι μία άλγεβρα συναρτήσεων, ορισμένων σε ένα σύνολο E, ότι η $\mathcal{A}$ διαχωρίζει τα σημεία του E και ότι η $\mathcal{A}$ δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του E. Θεωρούμε δύο διακεκριμένα σημεία $x_1, x_2 \in E$ και δύο σταθερές c_1, c_2 (τις οποίες θεωρούμε πραγματικές, όταν η άλγεβρα είναι πραγματική). Τότε, υπάρχει $f \in \mathcal{A}$ με*

$$f(x_1) = c_1, \qquad f(x_2) = c_2.$$

Απόδειξη. Οι υποθέσεις φανερώνουν ότι η $\mathcal{A}$ περιέχει συναρτήσεις g, h, k με

$$g(x_1) \neq g(x_2), \quad h(x_1) \neq 0, \quad k(x_2) \neq 0.$$

Θέτουμε

$$u = gk - g(x_1)k, \qquad v = gh - g(x_2)h.$$

Τότε, $u, v \in \mathcal{A}$, $u(x_1) = v(x_2) = 0$, $u(x_2) \neq 0$ και $v(x_1) \neq 0$. Επομένως, η συνάρτηση

$$f = \frac{c_1 v}{v(x_1)} + \frac{c_2 u}{u(x_2)}$$

έχει τις επιθυμητές ιδιότητες. □

Τώρα, έχουμε το απαραίτητο υλικό για την απόδειξη της κατά Stone[3] γενικεύσεως του θεωρήματος του Weierstrass.

[3] Σ. τ. Μ.: Marshall Harvey Stone (1903-1989). Εξέχων Αμερικάνος μαθηματικός. Εργάσθηκε σε πλήθος περιοχών της Αναλύσεως και απέδειξε σημαντικά θεωρήματα.

Θεώρημα 7.32. *Θεωρούμε μία άλγεβρα $\mathcal{A}$ πραγματικών και συνεχών συναρτήσεων, ορισμένων σε έναν συμπαγή μετρικό χώρο K. Εάν η $\mathcal{A}$ διαχωρίζει τα σημεία του K και δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του K, τότε η ομοιόμορφη κλειστή θήκη $\mathcal{B}$ της $\mathcal{A}$ αποτελείται από όλες τις πραγματικές συνεχείς συναρτήσεις στο K.*

Θα χωρίσουμε την απόδειξη σε τέσσερα βήματα.

Βήμα 1. *Εάν $f \in \mathcal{B}$, τότε $|f| \in \mathcal{B}$.*

Απόδειξη. Θέτουμε

$$a = \sup_{x \in K} |f(x)|. \tag{52}$$

Θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Σύμφωνα με το Πόρισμα 7.27, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $c_1, \ldots, c_n$ ούτως ώστε

$$\left| \sum_{i=1}^{n} c_i y^i - |y| \right| < \varepsilon \qquad (y \in [-a, a]). \tag{53}$$

Εφόσον η $\mathcal{B}$ είναι άλγεβρα, η συνάρτηση

$$g = \sum_{i=1}^{n} c_i f^i$$

ανήκει στην $\mathcal{B}$. Από τις (52) και (53) λαμβάνουμε ότι

$$|g(x) - |f(x)|| < \varepsilon \qquad (x \in K).$$

Ο Stone σπούδασε στο πανεπιστήμιο Harvard κατά τα έτη 1919 έως και 1922. Εκπόνησε τη διδακτορική διατριβή του υπό την επίβλεψη του σπουδαίου Αμερικάνου μαθηματικού George Birkhoff (1884-1944). Κατά τη διάρκεια του Δευτέρου Παγκοσμίου Πολέμου εργάσθηκε σε ένα απόρρητο πολεμικό πρόγραμμα. Δημοσίευσε τη γενίκευση του θεωρήματος του Weierstrass το έτος 1948. Έως τη συνταξιοδότησή του, το έτος 1968, ο Stone εργάσθηκε σε αρκετά πανεπιστήμια των Η. Π. Α., όπως το πανεπιστήμιο Harvard, το Πανεπιστήμιο του Columbia, το πανεπιστήμιο Yale, το Πανεπιστήμιο του Chicago. Διετέλεσε πρόεδρος της Αμερικανικής Μαθηματικής Εταιρίας, κατά τα έτη 1943 έως 1944. Πολλοί από τους μαθητές του Stone αναδείχθηκαν σε μεγάλους μαθηματικούς του δευτέρου μισού του εικοστού αιώνα.

Ο Stone είχε ευρύ πεδίο ενδιαφερόντων και μεγάλη αγάπη για τα ταξίδια. Ο θάνατος τον βρήκε κατά τη διάρκεια ενός ταξιδιού στην Ινδία.

Εφόσον η $\mathcal{B}$ είναι ομοιομόρφως κλειστή, από την τελευταία σχέση διαπιστώνουμε ότι $|f| \in \mathcal{B}$. $\square$

Βήμα 2. *Εάν* $f, g \in \mathcal{B}$, *τότε* $\max(f, g) \in \mathcal{B}$ *και* $\min(f, g) \in \mathcal{B}$.

(Με $\max(f, g)$ συμβολίζουμε τη συνάρτηση h που ορίζεται μέσω της ισότητας

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{εάν } x \in K \text{ με } f(x) \geq g(x), \\ g(x) & \text{εάν } x \in K \text{ με } f(x) < g(x). \end{cases}$$

Η συνάρτηση $\min(f, g)$ ορίζεται παρομοίως.)

Απόδειξη. Το Βήμα 2 προκύπτει από το Βήμα 1, βάσει των ισοτήτων

$$\max(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2},$$

$$\min(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}.$$

Με επανάληψη, το αποτέλεσμα μπορεί να επεκταθεί σε οποιοδήποτε πεπερασμένο σύνολο στοιχείων της $\mathcal{B}$: Εάν $f_1, \ldots f_n \in \mathcal{B}$, τότε $\max(f_1, \ldots f_n) \in \mathcal{B}$ και $\min(f_1, \ldots f_n) \in \mathcal{B}$. $\square$

Βήμα 3. *Εάν* f *είναι πραγματική συνεχής συνάρτηση στο* K, $x \in K$ *και* $\varepsilon > 0$, *τότε υπάρχει* $g_x \in \mathcal{B}$ *με* $g_x(x) = f(x)$ *και*

$$g_x(t) > f(t) - \varepsilon \qquad (t \in K). \tag{54}$$

Απόδειξη. Εφόσον $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ και η $\mathcal{A}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 7.31, το ίδιο ισχύει και για την $\mathcal{B}$. Συνεπώς, για κάθε $y \in K$ υπάρχει $h_y \in \mathcal{B}$ ούτως ώστε

$$h_y(x) = f(x), \quad h_y(y) = f(y). \tag{55}$$

Λόγω της συνέχειας της h_y, υπάρχει ανοικτό σύνολο J_y που περιέχει το y ούτως ώστε

$$h_y(t) > f(t) - \varepsilon \quad (t \in J_y). \tag{56}$$

Εφόσον το K είναι συμπαγές, υπάρχουν σημεία $y_1, \ldots , y_n$ ούτως ώστε

$$K \subset J_{y_1} \cup \cdots \cup J_{y_n}. \tag{57}$$

Θέτουμε

$$g_x = \max(h_{y_1}, \ldots , h_{y_n}).$$

Σύμφωνα με το Βήμα 2, ισχύει ότι $g_x \in \mathcal{B}$, και οι σχέσεις (55) έως και (57) φανερώνουν ότι η g_x έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. □

Βήμα 4. *Εάν f είναι πραγματική συνεχής συνάρτηση στο K και εάν $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $h \in \mathcal{B}$ με*

$$|h(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (x \in K). \tag{58}$$

Εφόσον η $\mathcal{B}$ είναι ομοιομόρφως κλειστή, η τελευταία πρόταση ισοδυναμεί με τον προς απόδειξη ισχυρισμό του θεωρήματος.

Απόδειξη. Για κάθε $x \in K$ θεωρούμε τη συνάρτηση g_x, όπως έχει κατασκευασθεί στο Βήμα 3. Λόγω της συνέχειας, για κάθε $x \in K$ υπάρχει ανοικτό σύνολο V_x, που περιέχει το x, ούτως ώστε

$$g_x(t) < f(t) + \varepsilon \quad (t \in V_x). \tag{59}$$

Εφόσον το K είναι συμπαγές, υπάρχουν σημεία $x_1, \ldots , x_m$ ούτως ώστε

$$K \subset V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_m}. \tag{60}$$

Θέτουμε

$$h = \min(g_{x_1}, \ldots , g_{x_m}).$$

Σύμφωνα με το Βήμα 2, $h \in \mathcal{B}$ και η (54) συνεπάγεται ότι

$$h(t) > f(t) - \varepsilon \quad (t \in K), \tag{61}$$

ενώ οι (59) και (60) συνεπάγονται ότι

$$h(t) < f(t) + \varepsilon \quad (t \in K). \tag{62}$$

Η (58) προκύπτει από τις (61) και (62). □

Το Θεώρημα 7.32 δεν ισχύει απαραιτήτως για μιγαδικές άλγεβρες. Ένα αντιπαράδειγμα δίδεται στην Άσκηση 21. Όμως, το θεώρημα ισχύει σε αυτήν την περίπτωση εάν τεθεί μία επιπλέον συνθήκη: να είναι η $\mathcal{A}$ *αυτοεπισυναπτή* (selfadjoint). Δηλαδή, για κάθε $f \in \mathcal{A}$ η συζυγής $\overline{f}$ της f να ανήκει στην $\mathcal{A}$. (Με $\overline{f}$ συμβολίζουμε τη συνάρτηση όπου $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f.)

Θεώρημα 7.33. *Υποθέτουμε ότι $\mathcal{A}$ είναι μία αυτοεπισυναπτή άλγεβρα μιγαδικών συνεχών συναρτήσεων σε έναν συμπαγή χώρο K. Εάν η $\mathcal{A}$ διαχωρίζει τα σημεία του K και δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του K, τότε η ομοιόμορφη κλειστή θήκη $\mathcal{B}$ της $\mathcal{A}$ αποτελείται από όλες τις μιγαδικές συνεχείς συναρτήσεις στο K. Δηλαδή, η $\mathcal{A}$ είναι πυκνή στον $\mathcal{C}(K)$.*

Απόδειξη. Συμβολίζουμε ως $\mathcal{A}_R$ το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων που ανήκουν στην $\mathcal{A}$. Το σύνολο αυτό είναι άλγεβρα.

Εάν $f \in \mathcal{A}$ με $f = u + iv$, όπου u, v είναι πραγματικές συναρτήσεις, τότε $2u = f + \overline{f}$. Εφόσον η $\mathcal{A}$ είναι αυτοεπισυναπτή, διαπιστώνουμε ότι $u \in \mathcal{A}_R$. Εάν είναι $x_1, x_2 \in K$ με $x_1 \neq x_2$, τότε υπάρχει $f \in \mathcal{A}$ με $f(x_1) = 1$ και $f(x_2) = 0$. Συνεπώς, για το αντίστοιχο πραγματικό μέρος u της f ισχύει ότι $0 = u(x_2) \neq u(x_1) = 1$. Δηλαδή, η $\mathcal{A}_R$ διαχωρίζει τα σημεία του K. Εάν $x \in K$, τότε υπάρχει $g \in \mathcal{A}$ με $g(x) \neq 0$. Επίσης, υπάρχει ένας μιγαδικός αριθμός λ με $\lambda g(x) > 0$. Εάν $f = \lambda g$ και $f = u + iv$, όπου u, v είναι πραγματικές συναρτήσεις, τότε έπεται ότι $u(x) > 0$. Συνεπώς, η $\mathcal{A}_R$ δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του K.

Επομένως, η $\mathcal{A}_R$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 7.32. Άρα, κάθε πραγματική συνεχής συνάρτηση στο K βρίσκεται στο ομοιόμορφη κλειστή θήκη της $\mathcal{A}_R$ και συνεπώς στην $\mathcal{B}$. Εάν f είναι μιγαδική συνεχής συνάρτηση στο K με $f = u + iv$, όπου u, v είναι πραγματικές συναρτήσεις, τότε $u, v \in \mathcal{B}$ και συνεπώς $f \in \mathcal{B}$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Αποδείξτε ότι κάθε ομοιομόρφως συγκλίνουσα ακολουθία φραγμένων συναρτήσεων είναι ομοιομόρφως φραγμένη.

Άσκηση 2. Εάν οι ακολουθίες συναρτήσεων $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ συγκλίνουν ομοιομόρφως σε ένα σύνολο E, τότε αποδείξτε ότι και η $\{f_n + g_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ συγκλίνει ομοιομόρφως στο E. Εάν επιπλέον οι $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ είναι ακολουθίες φραγμένων συναρτήσεων, τότε αποδείξτε ότι η $\{f_n g_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ συγκλίνει ομοιομόρφως στο E.

Άσκηση 3. Κατασκευάστε δύο ακολουθίες συναρτήσεων $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ οι οποίες να συγκλίνουν ομοιομόρφως σε ένα σύνολο E, ενώ η $\{f_n g_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ να μην συγκλίνει ομοιομόρφως στο E. (Φυσικά, η $\{f_n g_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ πρέπει να συγκλίνει κατά σημείο στο E.)

Άσκηση 4. Για κάθε πραγματικό αριθμό x θεωρούμε τη σειρά

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2 x}.$$

Για ποιες τιμές του x η σειρά συγκλίνει απολύτως; Σε ποια διαστήματα συγκλίνει ομοιομόρφως; Σε ποια διαστήματα δεν συγκλίνει ομοιομόρφως; Είναι η f συνεχής στα σημεία όπου η σειρά συγκλίνει; Είναι η f φραγμένη;

Άσκηση 5. Για κάθε πραγματικό αριθμό x και θετικό ακέραιο αριθμό n θέτουμε

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{εάν } x < \dfrac{1}{n+1}, \\ \sin^2 \frac{\pi}{x} & \text{εάν } \dfrac{1}{1+n} \le x \le \dfrac{1}{n}, \\ 0 & \text{εάν } \dfrac{1}{n} < x. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ συγκλίνει προς μία συνεχή συνάρτηση, όμως όχι ομοιομόρφως. Χρησιμοποιήστε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ για να αποδείξετε ότι η απόλυτη σύγκλιση μίας σειράς συναρτήσεων, ακόμη και για κάθε σημείο στο πεδίο ορισμού της, δεν συνεπάγεται απαραιτήτως την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς.

Άσκηση 6. Αποδείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$$

συγκλίνει ομοιομόρφως σε κάθε φραγμένο διάστημα, όμως δεν συγκλίνει απολύτως για καμία τιμή του x.

Άσκηση 7. Για κάθε πραγματικό αριθμό x και θετικό ακέραιο αριθμό n θέτουμε

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}.$$

Αποδείξτε ότι η ακολουθία $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ συγκλίνει ομοιομόρφως προς μία συνάρτηση f και ότι η ισότητα

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x με $x \neq 0$, ενώ δεν ισχύει στο $x = 0$.

Άσκηση 8. Θεωρούμε τη συνάρτηση I στην πραγματική ευθεία με

$$I(x) = \begin{cases} 0 & \text{εάν } x \leq 0, \\ 1 & \text{εάν } x > 0. \end{cases}$$

Εάν $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι μία ακολουθία διακεκριμένων σημείων του (a, b) και εάν $\{c_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι μία ακολουθία πραγματικών αριθμών ούτως ώστε η $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ να συγκλίνει απολύτως, τότε αποδείξτε ότι η σειρά

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - x_n) \qquad (a \leq x \leq b)$$

συγκλίνει ομοιομόρφως και ότι η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο εκτός από τα $x_1, x_2, x_3 \dots$.

Άσκηση 9. Θεωρούμε μία ακολουθία $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ συνεχών συναρτήσεων η οποία συγκλίνει ομοιομόρφως προς μία συνάρτηση f σε ένα υποσύνολο E ενός μετρικού χώρου X. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$$

για κάθε $x \in E$ και κάθε ακολουθία $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ του E με $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Αληθεύει το αντίστροφο;

Άσκηση 10. Για έναν πραγματικό αριθμό x συμβολίζουμε με (x) το κλασματικό μέρος του x (ανατρέξτε στην Άσκηση 16 του Κεφαλαίου 4 για τον ορισμό). Θεωρούμε τη συνάρτηση f, όπου για πραγματικό αριθμό x είναι

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}.$$

Βρείτε τα σημεία ασυνέχειας της f και δείξτε ότι απαρτίζουν ένα αριθμήσιμο πυκνό σύνολο. Εντούτοις, δείξτε ότι η f είναι κατά Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε φραγμένο κλειστό διάστημα.

Άσκηση 11. Θεωρούμε δύο ακολουθίες συναρτήσεων $\{f_n\}$, $\{g_n\}$, $(n = 1, 2, 3, \dots)$, οι οποίες είναι ορισμένες σε ένα σύνολο E. Υποθέτουμε ότι:

(α) Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ είναι ομοιομόρφως φραγμένη.

(β) $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$ ομοιομόρφως στο E.

(γ) $g_1 \ge g_2 \ge g_3 \ge \cdots$.

Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ συγκλίνει ομοιομόρφως στο E.

Υπόδειξη: Συγκρίνετε με το Θεώρημα 3.42.

Άσκηση 12. Υποθέτουμε ότι g και f_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι συναρτήσεις στο $(0, \infty)$, κατά Riemann ολοκληρώσιμες σε κάθε διάστημα $[t, T]$, όπου $0 < t < T$. Υποθέτουμε επίσης ότι $|f_n| \le g$ για κάθε δείκτη n, ότι η $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ συγκλίνει ομοιομόρφως προς μία συνάρτηση f σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $(0, \infty)$ και ότι

$$\int_0^{\infty} g(x)dx < +\infty.$$

Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)dx = \int_0^{\infty} f(x)dx.$$

(Για τους σχετικούς ορισμούς, ανατρέξτε στις Ασκήσεις 7 και 8 του Κεφαλαίου 6.)

Το παραπάνω αποτελεί μία ασθενή μορφή του θεωρήματος κυριαρχούμενης συγκλίσεως του Lebesgue (Θεώρημα 11.32). Ακόμη και στην περίπτωση των κατά Riemann ολοκληρωμάτων, η ομοιόμορφη σύγκλιση μπορεί να αντικατασταθεί από την κατά σημείο σύγκλιση, εάν υποτεθεί ότι $f \in \mathcal{R}$. (Παραπέμπουμε στα άρθρα των F. Cunningham στο *Math. Mag.*, vol. 40, 1967, pp. 179-186, και H. Kestelman στο *Amer. Math. Monthly*, vol. 77, 1970, pp. 182-187.)

Άσκηση 13. Υποθέτουμε ότι $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι μία ακολουθία αυξουσών συναρτήσεων στον R^1 με $0 \le f_n \le 1$ για κάθε δείκτη n.

(α) Αποδείξτε ότι υπάρχει μία συνάρτηση f και μία γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων αριθμών $\{n_k\}$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ με

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \qquad (x \in R^1)$$

κατά σημείο. (Το παραπάνω αποτέλεσμα συνήθως ονομάζεται *θεώρημα διαλογής του Helly*[4].)

[4] Σ. τ. Μ.: Eduard Helly (1884-1943). Εβραϊκής καταγωγής μαθηματικός, γεννημένος στην Αυστρία.

Ο Helly σπούδασε στο Πανεπιστήμιο της Βιέννης και εκπόνησε τη διδακτορική του διατριβή το έτος 1907, υπό την επίβλεψη του Franz Mertens (1840-1927). Έλαβε μία υποτροφία για να συνεχίσει τις σπουδές του στο Πανεπιστήμιο του Göttingen. Εκεί μαθήτευσε υπό τους σπουδαίους μαθηματικούς David Hilbert (1862-1943), Felix Klein (1849-1925), Hermann Minkowski (1864-1909) και Carl David Runge (1856-1927). Ο Helly επέστρεψε το 1908 στη Βιέννη, όμως δεν μπόρεσε να διορισθεί σε ακαδημαϊκή θέση και αναγκάστηκε να παραδίδει ιδιαίτερα μαθήματα.

Με το ξέσπασμα του Πρώτου Παγκοσμίου Πολέμου, ο Helly κατετάγη στον Αυστριακό στρατό. Υπηρέτησε ως υπολοχαγός και, το έτος 1915, τραυματίσθηκε από σφαίρα στον πνεύμονα, γεγονός που ζημίωσε σοβαρά την υγεία του έως το τέλος της ζωής του. Αμέσως αιχμαλωτίσθηκε από τους Ρώσους. Παρέμεινε αιχμάλωτος στη Ρωσία και μετά το τέλος του Πρώτου Παγκοσμίου Πολέμου, το έτος 1918. Ύστερα από μία μακρά περιπέτεια, που περιελάμβανε πέρασμα από την Άπω Ανατολή, την Αίγυπτο και τη Μέση Ανατολή, ο Helly κατάφερε κατά το έτος 1920 να επιστρέψει στη Βιέννη.

(β) Εάν επιπλέον η f είναι συνεχής, τότε αποδείξτε ότι η σύγκλιση στο (α) είναι ομοιόμορφη.

Υπόδειξη:

(i) Υπάρχει μία υπακολουθία $\{f_{n_i}\}$ $(i = 1, 2, 3, \dots)$ η οποία συγκλίνει κατά σημείο σε κάθε ρητό αριθμό r προς ένα όριο $f(r)$.

(ii) Για $x \in R^1$ ορίζουμε $f(x) = \sup f(r)$, όπου το ελάχιστο άνω φράγμα λαμβάνεται υπεράνω όλων των ρητών αριθμών r με $r \leq x$.

(iii) Αποδείξτε ότι $\lim_{i\to\infty} f_{n_i}(x) = f(x)$ για κάθε σημείο συνέχειας της f. (Στο σημείο αυτό η μονοτονία κατέχει σημαντική θέση.)

(iv) Μία υπακολουθία της $\{f_{n_i}\}$ $(i = 1, 2, 3, \dots)$ συγκλίνει σε κάθε σημείο ασυνέχειας της f, εφόσον το σύνολο των σημείων αυτών είναι το πολύ αριθμήσιμο.

Τα παραπάνω αποδεικνύουν το (α). Για την απόδειξη του (β), τροποποιήστε την απόδειξη του (iii) καταλλήλως.

Άσκηση 14. Θεωρούμε μία πραγματική συνεχή συνάρτηση f στον R^1 με τις

Το έτος 1921 ο Helly παντρεύτηκε (μία επίσης μαθηματικό) και διορίσθηκε ως μαθηματικός σε μία άμισθη ακαδημαϊκή θέση στην Αυστρία, ικανοποιώντας τις βιοποριστικές του ανάγκες αυτού και της συζύγού του εργαζόμενος σε μία τράπεζα και αργότερα σε μία ασφαλιστική εταιρία. Το έτος 1938, ο Helly μετανάστευσε στις Η. Π. Α. για να αποφύγει τον άμεσο κίνδυνο από τους Ναζί για αυτόν και την οικογένειά του, λόγω της εβραϊκής του καταγωγής.

Στις Η. Π. Α., η ζωή του Helly δεν βελτιώθηκε ιδιαιτέρως. Στην αρχή παρέδιδε και πάλι ιδιαίτερα μαθήματα. Με την υποστήριξη του Albert Einstein (1879-1955), εδόθη, το έτος 1939, στον Helly μία θέση καθηγητή στο Κολέγιο του Paterson, στο New Jersey. Δύο έτη μετά ο Helly διορίσθηκε στο Κολέγιο του Monmouth, επίσης στο New Jersey. Το έτος 1942 ο Helly με την γυναίκα του εργάσθηκαν ως μαθηματικοί στο Στρατιωτικό Σώμα του Chicago. Την περίοδο εκείνη προσεφέρθη στον Helly μία έδρα Μαθηματικών στο Ινστιτούτο Τεχνολογίας του Illinois. Μόλις πίστεψε ο Helly ότι η ζωή άρχισε να του χαμογελά, υπέστη καρδιακή προσβολή και πέθανε.

Το πεδίο εργασίας του Helly ήταν η Συναρτησιακή Ανάλυση. Απέδειξε το φημισμένο θεώρημα-ακρογωνιαίο λίθο της Συναρτησιακής Αναλύσεως των Hahn και Banach το έτος 1912, δεκαπέντε έτη πριν ο Hans Hahn (1879-1934) το δημοσιεύσει και είκοσι έτη πριν ο Stefan Banach (1892-1945) το θέσει σε νέο πλαίσιο. Επίσης, απέδειξε μία μορφή του Θεωρήματος Ομοιομόρφου Φραξίματος, των Stefan Banach και Hugo Dyonizy Steinhaus (1887-1972).

ακόλουθες ιδιότητες: $0 \leq f \leq 1$, $f(t+2) = f(t)$ για κάθε $t \in R^1$ και

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{εάν } 0 \leq t \leq \frac{1}{3}, \\ 1 & \text{εάν } \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Για κάθε πραγματικό αριθμό t θέτουμε $\Phi(t) = (x(t), y(t))$, όπου

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(3^{2n-1}t), \qquad y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(3^{2n}t).$$

Αποδείξτε ότι η Φ είναι *συνεχής* και ότι απεικονίζει το $[0, 1]$ *επί* του μοναδιαίου τετράγωνου $I^2 \subset R^2$. Ιδιαιτέρως, αποδείξτε ότι η Φ απεικονίζει το σύνολο του Cantor *επί* του I^2.

Υπόδειξη: Κάθε σημείο $(x_0, y_0) \in I^2$ έχει συντεταγμένες της μορφής

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_{2n-1}, \qquad y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_{2n},$$

όπου για κάθε δείκτη n το a_n είναι ίσο με 0 ή 1. Εάν

$$t_0 = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n-1}(2a_n),$$

τότε δείξτε ότι $f(3^n t_0) = a_n$ για κάθε δείκτη n και επομένως $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$.

(Αυτό το απλό παράδειγμα καμπύλης που «γεμίζει» το τετράγωνο οφείλεται στον I. J. Schoenberg, *Bull. A. M. S.*, vol. 44, 1938, pp. 519.)

Άσκηση 15. Θεωρούμε μία πραγματική συνεχή συνάρτηση f, ορισμένη στον R^1. Θεωρούμε επίσης την ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, όπου για πραγματικό αριθμό t και δείκτη n είναι $f_n(t) = f(nt)$. Με την υπόθεση ότι η $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ είναι ισοσυνεχής στο $[0, 1]$, ποιο συμπέρασμα μπορεί να εξαχθεί για την f;

Άσκηση 16. Υποθέτουμε ότι $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ είναι μία ισοσυνεχής ακολουθία συναρτήσεων, ορισμένων σε έναν συμπαγή χώρο K, η οποία είναι συγκλίνουσα κατά σημείο στο K. Αποδείξτε ότι συγκλίνει ομοιομόρφως στο K.

Άσκηση 17. Δώστε τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας και της ισοσυνέχειας για απεικονίσεις με τιμές σε οποιονδήποτε μετρικό χώρο. Δείξτε ότι τα Θεωρήματα 7.9 και 7.12 παραμένουν αληθή για απεικονίσεις με τιμές σε οποιονδήποτε μετρικό χώρο, ότι τα Θεωρήματα 7.8 και 7.11 παραμένουν αληθή για απεικονίσεις με τιμές σε οποιονδήποτε πλήρη μετρικό χώρο, και ότι τα θεωρήματα 7.10, 7.16, 7.17, 7.24 και 7.25 παραμένουν αληθή για διανυσματικές συναρτήσεις, δηλαδή για απεικονίσεις με τιμές σε κάποιον Ευκλείδειο χώρο R^k.

Άσκηση 18. Θεωρούμε μία ομοιομόρφως φραγμένη ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, οι οποίες είναι κατά Riemann ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Για κάθε $x \in [a, b]$ και θετικό ακέραιο αριθμό n θέτουμε

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει ομοιομόρφως συγκλίνουσα υπακολουθία $\{F_{n_k}\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ στο $[a, b]$.

Άσκηση 19. Ας είναι K ένας συμπαγής μετρικός χώρος και S ένα υποσύνολο του $\mathcal{C}(K)$. Αποδείξτε ότι το S είναι συμπαγές (σε σχέση με τη μετρική που ορίζεται στην Ενότητα 7.14) εάν και μόνον εάν το S είναι ομοιομόρφως κλειστό, κατά σημείο φραγμένο και ισοσυνεχές.[5]

Υπόδειξη: Εάν το S δεν είναι ισοσυνεχές, τότε το S περιέχει μία ακολουθία η οποία δεν έχει ισοσυνεχή υπακολουθία και επομένως δεν έχει ομοιομόρφως συγκλίνουσα υπακολουθία στο K.

Άσκηση 20. Εάν f είναι πραγματική συνεχής συνάρτηση στο [0, 1] και εάν

$$\int_0^1 f(x)x^n dx = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

[5] Σ. τ. Μ.: Το συμπέρασμα αυτό έχει μείνει γνωστό στη βιβλιογραφία ως Θεώρημα των Arzelà και Ascoli.

Cesare Arzelà (1847-1912). Ιταλός μαθηματικός.

Giulio Ascoli (1843-1896). Ιταλός μαθηματικός.

τότε αποδείξτε ότι $f = 0$.

Υπόδειξη: Το ολοκλήρωμα του γινομένου της f με οποιοδήποτε πολύωνυμο ισούται με 0. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Weierstrass για να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)^2 dx = 0$.

Άσκηση 21. Ας είναι K ο μοναδιαίος κύκλος στο μιγαδικό επίπεδο (δηλαδή το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z με $|z| = 1$) και $\mathcal{A}$ η άλγεβρα των, ορισμένων στο K, συναρτήσεων f της μορφής

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{N} c_n e^{in\theta} \quad (\theta \in R^1)$$

Τότε, η $\mathcal{A}$ διαχωρίζει τα σημεία του K και δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του K. Εντούτοις, υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις στον K που δεν βρίσκονται στην ομοιόμορφη κλειστή θήκη της $\mathcal{A}$.

Υπόδειξη: Για κάθε $f \in \mathcal{A}$ ισχύει ότι

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta = 0.$$

Αυτό αληθεύει επίσης για κάθε f που ανήκει στην ομοιόμορφη κλειστή θήκη της $\mathcal{A}$.

Άσκηση 22. Υποθέτουμε ότι α είναι μία αύξουσα συνάρτηση στο $[a, b]$. Εάν $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ στο $[0, 1]$, τότε αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $\{P_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ με

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f - P_n|^2 d\alpha = 0.$$

(Συγκρίνετε με την Άσκηση 12 του Κεφαλαίου 6.)

Άσκηση 23. Θέτουμε $P_0 = 0$ και για $n = 0, 1, 2, \dots$ ορίζουμε

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x^2 - P_n^2(x)}{2} \quad (x \in [-1, 1]).$$

Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = |x| \qquad (x \in [-1, 1])$$

ομοιομόρφως στο $[-1, 1]$.

(Το αποτέλεσμα αυτό καθιστά δυνατή την απόδειξη του θεωρήματος των Stone και Weierstrass ανεξαρτήτως του Θεωρήματος 7.26.)

Υπόδειξη: Για $x \in [-1, 1]$ και $n = 0, 1, 2, \ldots$ χρησιμοποιήστε την ισότητα

$$|x| - P_{n+1}(x) = [|x| - P_n(x)]\left[1 - \frac{|x| + P_n(x)}{2}\right]$$

για να αποδείξετε ότι $0 \le P_n(x) \le P_{n+1}(x) \le |x|$ και ότι

$$|x| - P_n(x) \le |x|\left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^n < \frac{2}{n+1}.$$

Άσκηση 24. Υποθέτουμε ότι X είναι ένας μετρικός χώρος με μετρική d. Θεωρούμε ένα σημείο $a \in X$. Σε κάθε $p \in X$ αντιστοιχίζουμε τη συνάρτηση f_p, η οποία ορίζεται στον X από τη σχέση

$$f_p(x) = d(x, p) - d(x, a) \qquad (x \in X).$$

Αποδείξτε ότι $|f_p(x)| \le d(a, p)$ για κάθε $x \in X$ και επομένως $f_p \in \mathcal{C}(X)$.

Αποδείξτε ότι

$$\|f_p - f_q\| = d(p, q)$$

για κάθε $p, q \in X$.

Εάν Φ είναι η απεικόνιση που ορίζεται στον X από τη σχέση $\Phi(p) = f_p$ για κάθε $p \in X$, τότε αποδείξτε ότι είναι *ισομετρία* (δηλαδή απεικόνιση που διατηρεί τις αποστάσεις) επί του $\Phi(X) \subset \mathcal{C}(X)$.

Ας είναι Y η κλειστή θήκη του $\Phi(X)$ στον $\mathcal{C}(X)$. Αποδείξτε ότι ο Y είναι πλήρης.

Συνεπώς, *ο X είναι ισομετρικός με ένα πυκνό υποσύνολο ενός πλήρους μετρικού χώρου.*

(Στην Άσκηση 24 του Κεφαλαίου 3 παρουσιάζεται μία διαφορετική απόδειξη του γεγονότος αυτού.)

Άσκηση 25. Υποθέτουμε ότι ϕ είναι μία πραγματική συνεχής και φραγμένη συνάρτηση, με πεδίο ορισμού τη λωρίδα του επιπέδου R που ορίζεται ως εξής: $(x, y) \in R$ εάν και μόνον εάν $0 \leq x \leq 1$, $y \in R^1$. Αποδείξτε ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = \phi(x, y), \quad y(0) = c$$

(ο c είναι σταθερός πραγματικός αριθμός) έχει λύση. (Σημειώνουμε ότι οι υποθέσεις αυτού του θεωρήματος υπάρξεως είναι ασθενέστερες από το αντίστοιχο θεώρημα μοναδικότητας. Ανατρέξτε στην Άσκηση 27 του Κεφαλαίου 5.)

Υπόδειξη: Θεωρούμε έναν θετικό ακέραιο αριθμό n. Για $i = 0, \ldots, n$ θέτουμε $x_i = i/n$. Ας είναι f_n μία συνεχής συνάρτηση στο $[0, 1]$ με $f_n(0) = c$ και

$$f_n'(t) = \phi(x_i, f_n(x_i)) \text{ εάν } x_i < t < x_{i+1}.$$

Θέτουμε

$$\Delta_n(t) = f_n'(t) - \phi(t, f_n(t))$$

όταν το t δεν ισούται με κάποιο από τα σημεία $x_0, \ldots, x_n$ και $\Delta_n(t) = 0$ όταν το t ισούται με κάποιο x_i ($i = 0, \ldots, n$). Τότε,

$$f_n(x) = c + \int_0^x [\phi(t, f_n(t)) + \Delta_n(t)]dt \qquad (x \in [0, 1]).$$

Θεωρούμε έναν πραγματικό αριθμό M με $|\phi| \leq M$. Επαληθεύστε τους παρακάτω ισχυρισμούς:

(α) $|f_n'| \leq M$, $|\Delta_n| \leq 2M$, $\Delta_n \in \mathcal{R}$ στο $[0, 1]$ και $|f_n| \leq |c| + M$ για κάθε δείκτη n.

(β) Η ακολουθία $\{f_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) είναι ισοσυνεχής στο $[0, 1]$, εφόσον $|f_n'| \leq M$ για κάθε δείκτη n.

(γ) Υπάρχει υπακολουθία $\{f_{n_k}\}$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) που συγκλίνει ομοιομόρφως προς μία συνάρτηση f στο $[0, 1]$.

(δ) Εφόσον η ϕ είναι ομοιομόρφως συνεχής στο σύνολο των (x, y) με $0 \leq x \leq 1$ και $|y| \leq |c| + M$, έπεται ότι

$$\lim_{k\to\infty} \phi(t, f_{n_k}(t)) = \phi(t, f(t)) \qquad (t \in [0, 1])$$

ομοιομόρφως στο [0, 1].

(ε) $\lim_{n\to\infty} \Delta_n = 0$ ομοιομόρφως στο [0, 1], εφόσον

$$\Delta_n(t) = \phi(x_i, f_n(x_i)) - \phi(t, f_n(t))$$

για κάθε $t \in (x_i, x_{i+1})$, κάθε δείκτη n και $i = 0, \dots, n$.

(στ) Συνεπώς,

$$f(x) = c + \int_0^x \phi(t, f(t))dt \qquad (x \in [0, 1]).$$

Η συνάρτηση αυτή είναι η λύση του προβλήματος.

Άσκηση 26. Αποδείξτε ένα ανάλογο θεώρημα υπάρξεως για το αρχικό πρόβλημα τιμών

$$\mathbf{y}'(x) = \Phi(x, \mathbf{y}(x)), \qquad \mathbf{y}(0) = \mathbf{c},$$

όπου $\mathbf{c} \in R^k$, $\mathbf{y}$ είναι μία απεικόνιση από το [0, 1] στον R^k, Φ είναι μία απεικόνιση ορισμένη στο σύνολο των σημείων $(x, \mathbf{z})$ του R^{k+1} με $0 \le x \le 1$ και $\mathbf{z} \in R^k$, με τιμές στον R^k. (Συγκρίνετε με την Άσκηση 28 του Κεφαλαίου 5.)

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την εκδοχή του Θεωρήματος 7.25 για διανυσματικές συναρτήσεις.

Κεφάλαιο 8

ΟΡΙΣΜΕΝΕΣ ΕΙΔΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

Σε αυτήν την ενότητα θα αποδείξουμε ορισμένες ιδιότητες των συναρτήσεων που αναπαριστώνται από δυναμοσειρά, δηλαδή συναρτήσεις f της μορφής

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{1}$$

ή γενικότερα

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \tag{2}$$

όπου a είναι σταθερός αριθμός, για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f.

Οι συναρτήσεις αυτής της μορφής ονομάζονται *αναλυτικές συναρτήσεις.*

Θα περιοριστούμε σε πραγματικές τιμές της μεταβλητής. Συνεπώς, αντί για κύκλους συγκλίσεως (ανατρέξτε στο Θεώρημα 3.39) θα εργαζόμαστε με διαστήματα συγκλίσεως.

Λέγεται ότι η συνάρτηση f *αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά γύρω από το σημείο* $x = 0$ εάν και μόνον εάν η (1) συγκλίνει για κάθε $x \in (-R, R)$, για κάποιο $R > 0$ (περιλαμβανόμενης και της περιπτώσεως $R = +\infty$). Παρομοίως, λέγεται ότι η συνάρτηση f *αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά γύρω από το σημείο* $x = a$ εάν και μόνον εάν η (2) συγκλίνει για κάθε πραγματικό αριθμό x με $|x - a| < R$. Για λόγους απλουστεύσεως, θα λαμβάνουμε συνήθως $a = 0$, δίχως να βλάπτεται η γενικότητα.

Θεώρημα 8.1. *Υποθέτουμε ότι η σειρά*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{3}$$

συγκλίνει για κάθε πραγματικό αριθμό x με $|x| < R$. Ορίζουμε τη συνάρτηση f μέσω της σχέσεως

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (|x| < R). \tag{4}$$

Τότε, για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ η δυναμοσειρά (3) συγκλίνει ομοιομόρφως στο $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-R, R)$ με

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \qquad (|x| < R). \tag{5}$$

Απόδειξη. Ας είναι $\varepsilon > 0$. Για κάθε πραγματικό αριθμό x με $|x| \leq R - \varepsilon$ έχουμε ότι

$$|c_n x^n| \leq |c_n (R - \varepsilon)^n| \qquad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Εφόσον η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (R - \varepsilon)^n$$

συγκλίνει απολύτως (κάθε δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως στο εσωτερικό του διαστήματος συγκλίσεώς της, σύμφωνα με το κριτήριο της ρίζας), το Θεώρημα 7.10 φανερώνει την ομοιόμορφη σύγκλιση της δυναμοσειράς (3) στο $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$.

Εφόσον $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, έχουμε ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|c_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Επομένως, οι σειρές (4) και (5) έχουν το ίδιο διάστημα συγκλίσεως.

Η (5), ως δυναμοσειρά, συγκλίνει ομοιομόρφως στο $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 7.17 (για σειρές αντί για ακολουθίες). Άρα, έπεται ότι η (5) ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x με $|x| \leq R - \varepsilon$.

Όμως, για κάθε πραγματικό αριθμό x με $|x| < R$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ με $|x| \leq R - \varepsilon$. Αυτό φανερώνει ότι η (5) ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x με $|x| < R$.

Η συνέχεια της f είναι προκύπτει αμέσως από την παραγωγισιμότητά της (Θεώρημα 5.2). $\square$

Πόρισμα. *Υπό τις συνθήκες του Θεωρήματος 8.1, η f έχει παραγώγους κάθε τάξεως στο $(-R, R)$, οι οποίες δίδονται από την ισότητα*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n x^{n-k} \qquad (|x| < R) \tag{6}$$

για κάθε $k = 0, 1, 2, \dots$. Ιδιαιτέρως, ισχύει ότι

$$f^{(k)}(0) = k! c_k \qquad (k = 0, 1, 2, \dots). \tag{7}$$

(Με $f^{(0)}$ εννοείται η f και για $k = 1, 2, 3, \ldots$ $f^{(k)}$ είναι η k τάξεως παράγωγος της f.)

Απόδειξη. Η ισότητα (6) προκύπτει εάν εφαρμόσουμε διαδοχικά το Θεώρημα 8.1 στις $f, f', f'', \ldots$. Θέτοντας $x = 0$ στην (6) λαμβάνουμε την (7). □

Η ισότητα (7) παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον. Αφενός, φανερώνει ότι οι συντελεστές του αναπτύγματος σε δυναμοσειρά της συναρτήσεως f καθορίζονται από την τιμή της f και των παραγώγων σε ένα μόνο σημείο. Αφετέρου, εάν δίδονται οι συντελεστές της δυναμοσειράς, τότε οι τιμές των παραγώγων της f στο κέντρο του διαστήματος συγκλίσεως υπολογίζονται αμέσως.

Παρ' όλα αυτά, σημειώστε ότι μπορεί μία συνάρτηση f να έχει παραγώγους κάθε τάξεως, δίχως η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, όπου οι συντελεστές δίδονται από την (7), να συγκλίνει προς την τιμή $f(x)$ για οποιοδήποτε x με $x \neq 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, η f δεν μπορεί να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά γύρω από το σημείο $x = 0$. Διότι εάν υπήρχαν συντελεστές $a_0, a_1, a_2, \ldots$ με $f(x) = \sum a_n x^n$ για κάθε x που ανήκει σε ένα κατάλληλο διάστημα, τότε θα ίσχυε ότι

$$n!a_n = f^{(n)}(0) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

και συνεπώς $a_n = c_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Ένα παράδειγμα αυτής της καταστάσεως δίδεται στην Άσκηση 1.

Εάν η σειρά (3) συγκλίνει σε ένα ακραίο σημείο, έστω το $x = R$, τότε η f είναι συνεχής όχι μόνο στο $(-R, R)$, αλλά και στο $x = R$. Αυτό έπεται από το παρακάτω θεώρημα, το οποίο οφείλεται στον Abel (για λόγους απλουστεύσεως, λαμβάνουμε $R = 1$):

Θεώρημα 8.2. *Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ συγκλίνει. Θέτουμε*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (-1 < x < 1).$$

Τότε,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n. \tag{8}$$

Απόδειξη. Για $n = 0, 1, 2, \dots$ θέτουμε $s_n = c_0 + \cdots + c_n$ και επίσης θέτουμε $s_{-1} = 0$. Τότε, για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό m και πραγματικό αριθμό x με $|x| < 1$ έχουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{m} c_n x^n = \sum_{n=0}^{m} (s_n - s_{n-1}) x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{m-1} s_n x^n + s_m x^m.$$

Θεωρούμε x με $|x| < 1$. Λαμβάνοντας $m \to \infty$ αποκτούμε ότι

$$f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n. \tag{9}$$

Υποθέτουμε ότι $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Ας είναι $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε θετικό ακέραιο αριθμό N ούτως ώστε εάν $n > N$, τότε

$$|s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Εφόσον

$$(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 \qquad (|x| < 1),$$

από την (9) λαμβάνουμε ότι

$$|f(x) - s| = \left| (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s) x^n \right| \leq (1-x) \sum_{n=0}^{N} |s_n - s||x|^n + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

εάν $x > 1 - \delta$ για κάποιο καταλλήλως επιλεγμένο $\delta > 0$. Αυτό συνεπάγεται την (8). □

Ως εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος, θα αποδείξουμε το Θεώρημα 3.51:

Εάν οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *συγκλίνουν αντιστοίχως προς τα* A, B, C *και εάν* $c_n = a_0 b_n + \cdots + a_n b_0$ *για κάθε δείκτη* n, *τότε* $C = AB$.

Για $x \in [0, 1]$ θέτουμε

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \qquad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Για $x \in [0, 1)$ οι σειρές αυτές συγκλίνουν απολύτως και συνεπώς μπορούν να πολλαπλασιασθούν όρο προς όρο, σύμφωνα με τον Ορισμό 3.48. Εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό βρίσκουμε ότι

$$f(x)g(x) = h(x) \qquad (0 \leq x < 1). \tag{10}$$

Βάσει του Θεωρήματος 8.2, ισχύει ότι

$$f(x) \to A, \qquad g(x) \to B, \qquad h(x) \to C \tag{11}$$

καθώς $x \to 1$. Οι εξισώσεις (10) και (11) φανερώνουν ότι $AB = C$.

Για τη συνέχεια, θα χρειασθούμε ένα θεώρημα σχετικό με την εναλλαγή της σειράς αθροίσεως. (Ανατρέξτε στις Ασκήσεις 2 και 3.)

Θεώρημα 8.3. *Θεωρούμε μία διπλή ακολουθία* $\{a_{ij}\}$ *(*$i, j = 1, 2, 3, \ldots$*) και υποθέτουμε ότι*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| = b_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{12}$$

και ότι η $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ *συγκλίνει. Τότε,*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}. \tag{13}$$

Απόδειξη. Μπορούμε να αποδείξουμε την (13) με μία διαδικασία παρόμοια (αν και περισσότερο περίπλοκη) με αυτήν του Θεωρήματος 3.55. Παρ' όλα αυτά, η ακόλουθη απόδειξη είναι μάλλον πιο ενδιαφέρουσα.

Θεωρούμε ένα αριθμήσιμο σύνολο πραγματικών αριθμών E, αποτελούμενο από τα σημεία $x_0, x_1, x_2, \ldots$, και υποθέτουμε ότι $x_n \to x_0$ καθώς $n \to \infty$. Ορίζουμε

$$f_i(x_0) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots), \tag{14}$$

$$f_i(x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \qquad (i, n = 1, 2, 3, \dots), \tag{15}$$

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \qquad (x \in E). \tag{16}$$

Οι (14) και (15), σε συνδυασμό με την (12), φανερώνουν ότι για κάθε δείκτη i η f_i είναι συνεχής στο x_0. Εφόσον $|f_i(x)| \le b_i$ για κάθε δείκτη i και $x \in E$, η (16) συγκλίνει ομοιομόρφως και επομένως η g είναι συνεχής στο x_0 (Θεώρημα 7.11). Συνεπώς, έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} &= \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_0) = g(x_0) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.
\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 8.4. *Υποθέτουμε ότι*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

όπου η σειρά συγκλίνει για κάθε πραγματικό αριθμό x *με* $|x| < R$. *Εάν* $-R < a < R$, *τότε η* f *μπορεί να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά γύρω από το σημείο* $x = a$, *η οποία συγκλίνει για κάθε πραγματικό αριθμό* x *με* $|x - a| < R - |a|$. *Επιπλέον,*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (|x-a| < R - |a|). \tag{17}$$

Το παραπάνω θεώρημα αποτελεί επέκταση του Θεωρήματος 5.15 και είναι επίσης γνωστό ως *θεώρημα του Taylor*.

Απόδειξη. Για κάθε πραγματικό αριθμό x με $|x-a| < R - |a|$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n[(x-a)+a]^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^{n-m}(x-a)^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} c_n a^{n-m} \right] (x-a)^m. \end{aligned}$$

Αυτή είναι η επιθυμητή ανάπτυξη γύρω από το σημείο $x = a$. Για την ισχύ της, πρέπει να δικαιολογήσουμε την εναλλαγή στη σειρά αθροίσεως. Το Θεώρημα 8.3 φανερώνει ότι αυτό είναι επιτρεπτό εάν η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left| c_n \binom{n}{m} a^{n-m}(x-a)^m \right| \tag{18}$$

συγκλίνει. Όμως, η (18) ταυτίζεται με την

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|(|x-a| + |a|)^n \tag{19}$$

και η (19) συγκλίνει εάν $|x-a| + |a| < R$.

Η μορφή των συντελεστών της (17) προκύπτει από την (7). □

Σημειώνουμε ότι η (17) μπορεί να συγκλίνει σε διάστημα μεγαλύτερο από αυτό των σημείων x με $|x-a| < R - |a|$.

Εάν δύο δυναμοσειρές συγκλίνουν προς την ίδια συνάρτηση στο διάστημα $(-R, R)$, τότε η (7) φανερώνει ότι οι δύο δυναμοσειρές πρέπει να έχουν τους ίδιους συντελεστές. Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι το ίδιο συμπέρασμα μπορεί να αποδειχθεί με πολύ ασθενέστερες συνθήκες.

Θεώρημα 8.5. *Υποθέτουμε ότι οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ συγκλίνουν στο διάστημα $S = (-R, R)$. Ας είναι E το σύνολο των σημείων $x \in S$ με*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n. \tag{20}$$

Εάν το E έχει οριακό σημείο στο S, τότε ισχύει ότι $a_n = b_n$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$. Συνεπώς, σε αυτήν την περίπτωση, η (2) ισχύει για κάθε $x \in S$.

Απόδειξη. Για $n = 0, 1, 2, \ldots$ θέτουμε $c_n = a_n - b_n$. Επίσης, θέτουμε

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (x \in S). \tag{21}$$

Τότε, $f(x) = 0$ για κάθε $x \in E$.

Θεωρούμε το σύνολο A των οριακών σημείων του E στο S και B το σύνολο όλων των υπολοίπων σημείων του S. Εξ ορισμού του οριακού σημείου, είναι σαφές ότι το B είναι ανοικτό. Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να αποδείξουμε ότι και το A είναι ανοικτό. Τότε, τα A και B είναι αποσυνδετά ανοικτά σύνολα. Συνεπώς, είναι διαχωρισμένα (Ορισμός 2.45). Εφόσον $S = A \cup B$ και το S είναι συνεκτικό, κάποιο από τα A και B πρέπει να είναι κενό. Σύμφωνα με την υπόθεση, το A δεν είναι κενό. Άρα, το B είναι κενό, γεγονός που φανερώνει ότι $A = S$. Εφόσον η f είναι συνεχής στο S, έχουμε ότι $A \subset E$. Κατά συνέπεια, $E = S$ και η (7) φανερώνει ότι $c_n = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$, το οποίο είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Συνεπώς, αρκεί να αποδείξουμε ότι το A είναι ανοικτό. Θεωρούμε λοιπόν $x_0 \in A$. Τότε, το Θεώρημα 8.4 φανερώνει ότι υπάρχουν $d_0, d_1, d_2, \ldots$ με

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n \qquad (|x - x_0| < R - |x_0|). \tag{22}$$

Ισχυριζόμαστε ότι $d_n = 0$ για κάθε δείκτη n. Ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει αυτό. Τότε, θεωρούμε τον μικρότερο μη αρνητικό ακέραιο αριθμό k με $d_k \neq 0$. Συνεπώς,

$$f(x) = (x - x_0)^k g(x) \qquad (|x - x_0| < R - |x_0|), \tag{23}$$

όπου

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} d_{k+m} (x - x_0)^m \qquad (|x - x_0| < R - |x_0|). \tag{24}$$

Εφόσον η g είναι συνεχής στο x_0 και

$$g(x_0) = d_k \neq 0,$$

υπάρχει $\delta > 0$ ούτως ώστε $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in S$ με $|x - x_0| < \delta$. Από την (23) έπεται ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in S$ με $0 < |x - x_0| < \delta$. Όμως, αυτό αντίκειται στο γεγονός ότι το x_0 είναι οριακό σημείο του E.

Συνεπώς, $d_n = 0$ για κάθε δείκτη n. Επομένως $f(x) = 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x για τον οποίον ισχύει η (22), δηλαδή σε μία περιοχή του x_0. Αυτό φανερώνει ότι το A είναι όντως ανοικτό. $\square$

Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ Η ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Θεωρούμε τη σειρά

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \text{ μιγαδικός αριθμός}). \tag{25}$$

Το κριτήριο του λόγου φανερώνει ότι η σειρά συγκλίνει για κάθε μιγαδικό αριθμό z. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.50 για τον πολλαπλασιασμό απολύτως συγκλινουσών σειρών, λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned} E(z)E(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, προκύπτει ο ακόλουθος σημαντικός προσθετικός τύπος

$$E(z+w) = E(z)E(w) \quad (z, w \text{ μιγαδικοί αριθμοί}). \tag{26}$$

Μία συνέπεια αυτού του τύπου αποτελεί η ισότητα

$$E(z)E(-z) = E(z-z) = E(0) = 1 \quad (z \text{ μιγαδικός αριθμός}). \tag{27}$$

Αυτή φανερώνει ότι $E(z) \neq 0$ για κάθε μιγαδικό αριθμό z. Από την (25) λαμβάνουμε ότι $E(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x με $x > 0$. Συνεπώς, η (27) φανερώνει ότι $E(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x. Η (25) χορηγεί ότι $E(x) \to +\infty$ καθώς $x \to +\infty$. Άρα, από την (27) συνάγουμε ότι $E(x) \to 0$ καθώς $x \to -\infty$. Λόγω της (25) έχουμε ότι εάν $0 < x < y$, τότε $E(x) < E(y)$. Από την (27) έπεται ότι $E(-y) < E(-x)$. Κατά συνέπεια, η E είναι γνησίως αύξουσα σε όλη την πραγματική ευθεία.

Ο προσθετικός τύπος φανερώνει επίσης ότι

$$\lim_{h \to 0} \frac{E(z+h) - E(z)}{h} = E(z) \lim_{h \to 0} \frac{E(h) - 1}{h} = E(z) \tag{28}$$

για κάθε μιγαδικό αριθμό z. Η τελευταία ισότητα προκύπτει αμέσως από την (25).

Με επανειλημμένη εφαρμογή της (26) λαμβάνουμε ότι

$$E(z_1 + \cdots + z_n) = E(z_1) \cdots E(z_n) \tag{29}$$

για οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς $z_1, \ldots, z_n$. Ας θέσουμε $z_1 = \cdots = z_n = 1$. Εφόσον $E(1) = e$, όπου e είναι ο αριθμός που ορίζεται στον Ορισμό 3.30, λαμβάνουμε ότι

$$E(n) = e^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{30}$$

Εάν $p = n/m$, όπου n, m είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί, τότε

$$[E(p)]^m = E(mp) = E(n) = e^n \tag{31}$$

και επομένως

$$E(p) = e^p \qquad (p \text{ θετικός ρητός αριθμός}). \tag{32}$$

Από την (27) έχουμε ότι $E(-p) = e^{-p}$ για κάθε θετικό ρητό αριθμό p. Συνεπώς, η (32) ισχύει για κάθε ρητό αριθμό p.

Στην Άσκηση 6 του Κεφαλαίου 1 είχαμε προτείνει τον ορισμό

$$x^y = \sup x^p \tag{33}$$

για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς y και x με $x > 1$, όπου το ελάχιστο άνω φράγμα λαμβάνεται υπεράνω όλων των ρητών αριθμών p με $p < y$. Κατά συνέπεια, εάν ορίσουμε για κάθε πραγματικό αριθμό x

$$e^x = \sup e^p, \tag{34}$$

όπου το ελάχιστο άνω φράγμα λαμβάνεται υπεράνω όλων των ρητών αριθμών p με $p < x$, τότε οι ιδιότητες της συνέχειας και της μονοτονίας της E σε συνδυασμό με την (32) φανερώνουν ότι

$$E(x) = e^x \tag{35}$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x. Από την (35) εξηγείται γιατί η E ονομάζεται εκθετική συνάρτηση.

Στη θέση του e^x χρησιμοποιούμε επίσης και τον συμβολισμό $\exp(x)$, ιδίως όταν το όρισμα αποτελείται από πολύπλοκη έκφραση.

Στην πραγματικότητα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάλλιστα την (35) ως τον ορισμό της e^x, αντί της (34). Το πλεονέκτημα της (35) είναι ότι διευκολύνει στη διερεύνηση των ιδιοτήτων της e^x. Σύντομα θα δούμε ότι και η (33) μπορεί να αντικατασταθεί από ένα βολικότερο ορισμό (ανατρέξτε στη (43)).

Θα επανέλθουμε στο συνήθη συμβολισμό e^x αντί του $E(x)$ και θα συνοψίσουμε όσα έχουμε αποδείξει έως τώρα.

Θεώρημα 8.6. *Θεωρούμε τη συνάρτηση e^x, ορισμένη στον R^1 από τις (25) και (35). Τότε:*

(α) *Η e^x είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στον R^1.*

(β) *Ισχύει ότι $(e^x)' = e^x$.*

(γ) *Η e^x είναι γνησίως αύξουσα και $e^x > 0$ για κάθε $x \in R^1$.*

(δ) *Ισχύει ότι $e^{x+y} = e^x e^y$ για κάθε $x, y \in R^1$.*

(ε) *Ισχύει ότι $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ και $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.*

(στ) *Ισχύει ότι $\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$ για οποιονδήποτε μη αρνητικό ακέραιο αριθμό n.*

Απόδειξη. Έχουμε ήδη αποδείξει τα μέρη (α) έως και (ε). Η (25) φανερώνει ότι

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

για $x > 0$, συνεπώς

$$x^n e^{-x} < \frac{(n+1)!}{x}.$$

Από αυτό αποδεικνύεται το (στ). □

Το (στ) φανερώνει ότι η e^x συγκλίνει προς το $+\infty$ «ταχύτερα» από οποιαδήποτε δύναμη του x καθώς $x \to +\infty$.

Εφόσον η E είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη στον R^1, έχει αντίστροφη συνάρτηση L, η οποία είναι επίσης γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη και έχει πεδίο ορισμού το $E(R^1)$, δηλαδή το σύνολο όλων των θετικών αριθμών[1]. Η L ορίζεται από την ισότητα

$$E(L(y)) = y \qquad (y > 0) \tag{36}$$

ή ισοδύναμα

$$L(E(x)) = x \qquad (x \text{ πραγματικός αριθμός}). \tag{37}$$

Παραγωγίζοντας την (37), λαμβάνουμε ότι (ανατρέξτε στο Θεώρημα 5.5)

$$L'(E(x))E(x) = 1 \qquad (x \text{ πραγματικός αριθμός}).$$

Θέτοντας $y = E(x)$, προκύπτει ότι

$$L'(y) = \frac{1}{y} \qquad (y > 0). \tag{38}$$

[1] Σ .τ. Μ.: Εκ πρώτης όψεως δεν είναι σαφές ότι $E(R^1) = (0, +\infty)$. Παρακάτω παρατίθεται μία απόδειξη αυτού του γεγονότος.

Αφενός, έχουμε ότι $E(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x, δηλαδή ότι $E(R^1) \subset (0, +\infty)$. Αφετέρου, θεωρούμε ένα θετικό αριθμό y. Εφόσον $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, υπάρχει $x_1 \in R^1$ με $e^{x_1} < y$. Εφόσον $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, υπάρχει $x_2 \in R^1$ με $y < e^{x_2}$. Άρα, από το Θεώρημα 4.23 συνάγουμε την ύπαρξη πραγματικού αριθμού x με $e^x = y$. Κατά συνέπεια, $(0, \infty) \subset E(R^1)$.

Οι δύο σχέσεις εγκλείσεως αποδεικνύουν το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Λαμβάνοντας $x = 0$ στην (37) διαπιστώνουμε ότι $L(1) = 0$. Άρα, η (38) συνεπάγεται ότι

$$L(y) = \int_1^y \frac{1}{x} dx \quad (y > 0). \tag{39}$$

Αρκετά συχνά, η (39) λαμβάνεται ως η αφετηρία για τη θεωρία της λογαριθμικής και εκθετικής συναρτήσεως. Θέτοντας $u = E(x)$, $v = E(y)$, η (26) χορηγεί ότι

$$L(uv) = L(E(x)E(y)) = L(E(x+y)) = x + y,$$

δηλαδή

$$L(uv) = L(u) + L(v) \quad (u, v > 0). \tag{40}$$

Αυτό φανερώνει ότι η L κατέχει την οικεία ιδιότητα των λογαρίθμων. Ο συνήθης συμβολισμός για την $L(x)$ είναι φυσικά ο $\log x$.

Όσον αφορά τη συμπεριφορά της log στο $+\infty$ και στο 0, το Θεώρημα 8.6(ε) φανερώνει ότι

$$\log x \to +\infty \text{ καθώς } x \to +\infty$$

και

$$\log x \to -\infty \text{ καθώς } x \to 0.$$

Διαπιστώνουμε εύκολα ότι

$$x^n = E(nL(x)) \tag{41}$$

για κάθε $x > 0$ και ακέραιο αριθμό n. Παρομοίως, εάν m είναι θετικός ακέραιος αριθμός και $x > 0$, τότε

$$x^{1/m} = E\left(\frac{1}{m}L(x)\right), \tag{42}$$

εφόσον κάθε μέλος της (42) όταν υψωθεί στη δύναμη του m δίδει το ίδιο αποτέλεσμα, σύμφωνα με την (36). Συνδυάζοντας τις (41) και (42), αποκτούμε τη σχέση

$$x^\alpha = E(\alpha L(x)) = e^{\alpha \log x} \tag{43}$$

για κάθε ρητό αριθμό α και $x > 0$.

Εν συνεχεία, ορίζουμε τη δύναμη x^α για κάθε πραγματικό αριθμό α και $x > 0$, μέσω της (43). Η συνέχεια και η μονοτονία των E και L φανερώνουν ότι ο ορισμός αυτός οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα με τον ορισμό που είχε προταθεί νωρίτερα. Τα συμπεράσματα της Ασκήσεως 6 του κεφαλαίου 1 είναι τετριμμένες συνέπειες της (43).

Εάν παραγωγίσουμε την (43) λαμβάνουμε, σύμφωνα με το Θεώρημα 5.5, ότι

$$(x^\alpha)' = E(\alpha L(x))\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{44}$$

Σημειώνουμε ότι έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει την (44) για ακέραιες τιμές του α. Σε αυτήν την περίπτωση, η (44) προκύπτει απλά από το Θεώρημα 5.3(β). Είναι αρκετά δύσκολο να αποδειχθεί η (44) ευθέως από τον ορισμό της παραγώγου όταν η x^α ορίζεται από την (33) και ο α είναι άρρητος αριθμός.

Ο γνωστός τύπος ολοκληρώσεως για την x^α έπεται από τη (44) όταν $\alpha \neq -1$ και από την (38) όταν $\alpha = -1$.

Επιθυμούμε να αποδείξουμε μία ακόμη ιδιότητα της συναρτήσεως log, την ισότητα

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-\alpha}\log x = 0 \tag{45}$$

για κάθε $\alpha > 0$. Το νόημα της ισότητας αυτής είναι το εξής: Η $\log x$ συγκλίνει προς το $+\infty$ «βραδύτερα» από οποιαδήποτε θετική δύναμη του x καθώς $x \to +\infty$.

Για την απόδειξη, θεωρούμε $\varepsilon > 0$ με $\varepsilon < \alpha$. Εάν $x > 1$, τότε

$$\begin{aligned} x^{-\alpha}\log x &= x^{-\alpha}\int_1^x t^{-1}dt \\ &< x^{-\alpha}\int_1^x t^{\varepsilon-1}dt \\ &= x^{-\alpha}\,\frac{x^\varepsilon - 1}{\varepsilon} \\ &< \frac{x^{\varepsilon-\alpha}}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Από αυτό έπεται η (45). Για την απόδειξη της (45), μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 8.6(στ).

ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις C και S, ορισμένες στον R^1 μέσω των σχέσεων

$$C(x) = \frac{1}{2}[E(ix) + E(-ix)], \qquad S(x) = \frac{1}{2i}[E(ix) - E(-ix)] \tag{46}$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x. Θα δείξουμε ότι οι C και S συμπίπτουν αντιστοίχως με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις cos και sin, των οποίων ο ορισμός συνήθως βασίζεται σε γεωμετρικές θεωρήσεις.

Σύμφωνα με την (25), ισχύει ότι $E(\bar{z}) = \overline{E(z)}$ για κάθε μιγαδικό αριθμό z. Συνεπώς, η (46) φανερώνει ότι οι C και S είναι πραγματικές συναρτήσεις. Επίσης, για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει ότι

$$E(ix) = C(x) + iS(x). \tag{47}$$

Δηλαδή, για $x \in R^1$ οι τιμές $C(x)$ και $S(x)$ είναι το πραγματικό και αντιστοίχως το φανταστικό μέρος της τιμής $E(ix)$. Σύμφωνα με την (27), για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει ότι

$$|E(ix)|^2 = E(ix)\overline{E(ix)} = E(ix)E(-ix) = 1,$$

επομένως

$$|E(ix)| = 1 \qquad (x \text{ πραγματικός αριθμός}). \tag{48}$$

Από την (46) συνάγουμε ότι $C(0) = 1$ και $S(0) = 0$. Η (28) φανερώνει ότι

$$C' = -S, \qquad S' = C. \tag{49}$$

Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x με $C(x) = 0$. Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν αληθεύει. Εφόσον $C(0) = 1$, έπεται ότι $C(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x με $x > 0$. Συνεπώς, λόγω της (49), $S'(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x με $x > 0$. Αυτό σημαίνει ότι η S είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Άρα, εφόσον $S(0) = 0$, ισχύει ότι $S(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x με $x > 0$. Κατά συνέπεια, εάν $0 < x < y$, τότε

$$S(x)(y - x) < \int_x^y S(t)dt = C(x) - C(y) \le 2, \tag{50}$$

όπου η τελευταία ανισότητα έπεται από τις (47) και (48). Εφόσον $S(x) > 0$, η (50) δεν μπορεί να αληθεύει για επαρκώς μεγάλο πραγματικό αριθμό y. Συνεπώς καταλήγουμε σε αντίφαση.

Ας είναι x_0 ο μικρότερος θετικός αριθμός με $C(x_0) = 0$. Ο αριθμός αυτός υπάρχει, εφόσον το σύνολο των θέσεων μηδενισμού μίας συνεχούς συναρτήσεως είναι κλειστό σύνολο και $C(0) \neq 0$. Ορίζουμε τον αριθμό π μέσω της σχέσεως

$$\pi = 2x_0. \tag{51}$$

Τότε, $C(\pi/2) = 0$. Η (48) φανερώνει ότι $S(\pi/2) = \pm 1$. Εφόσον $C(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, \pi/2)$, η S είναι αύξουσα στο $(0, \pi/2)$. Άρα, $S(\pi/2) = 1$. Επομένως,

$$E\left(\frac{\pi i}{2}\right) = i$$

και ο προσθετικός τύπος χορηγεί τις ισότητες

$$E(\pi i) = -1, \qquad E(2\pi i) = 1. \tag{52}$$

Ως εκ τούτου

$$E(z + 2\pi i) = E(z) \qquad (z \text{ μιγαδικός αριθμός}). \tag{53}$$

Θεώρημα 8.7.

(α) *Η συνάρτηση E είναι περιοδική*[2] *με περίοδο $2\pi i$.*

(β) *Οι συναρτήσεις C και S είναι περιοδικές με περίοδο 2π.*

(γ) *Εάν t είναι πραγματικός αριθμός με $0 < t < 2\pi$, τότε $E(it) \neq 1$.*

(δ) *Εάν z είναι μιγαδικός αριθμός με $|z| = 1$, τότε υπάρχει μοναδικός αριθμός $t \in [0, 2\pi)$ με $E(it) = z$.*

[2] Σ. τ. Μ.: Μία μιγαδική συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κατάλληλο σύνολο E μιγαδικών αριθμών, ονομάζεται *περιοδική* εάν και μόνον εάν υπάρχει μιγαδικός αριθμός T ούτως ώστε για κάθε $z \in E$ να ισχύει ότι $f(z + T) = f(z)$.

Σημειώνουμε ότι ο ορισμός αυτός εμπεριέχει την περίπτωση όπου η συνάρτηση είναι ορισμένη σε σύνολο πραγματικών αριθμών, λαμβάνει πραγματικές τιμές και έχει πραγματική περίοδο.

Απόδειξη. Το (α) είναι ακριβώς η (53). Το (β) έπεται από το (α) και τη (46).

Θεωρούμε έναν πραγματικό αριθμό t με $0 < t < \pi/2$. Ας είναι $E(it) = x + iy$, όπου οι x και y είναι πραγματικοί αριθμοί. Τα προαναφερθέντα του θεωρήματος φανερώνουν ότι $0 < x < 1$ και $0 < y < 1$. Σημειώνουμε ότι

$$E(4it) = (x + iy)^4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 4ixy(x^2 - y^2).$$

Εάν ο $E(4it)$ είναι πραγματικός αριθμός, τότε $x^2 - y^2 = 0$. Εφόσον, λόγω της (48), $x^2 + y^2 = 1$, έπεται ότι $x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$. Άρα, $E(4it) = -1$. Αυτό αποδεικνύει το (γ).

Εάν $0 \le t_1 < t_2 < 2\pi$, τότε

$$E(it_2)[E(it_1)]^{-1} = E(it_2 - it_1) \neq 1,$$

σύμφωνα με το (γ). Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό περί μοναδικότητας στο (δ).

Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό περί υπάρξεως στο (δ), θεωρούμε μιγαδικό αριθμό z με $|z| = 1$. Γράφουμε $z = x + iy$, όπου οι x και y είναι πραγματικοί αριθμοί. Αρχικά, υποθέτουμε ότι $x \ge 0$ και $y \ge 0$. Στο $[0, \pi/2]$ η C φθίνει από το 1 στο 0. Συνεπώς, $C(t) = x$ για κάποιο $t \in [0, \pi/2]$. Εφόσον $C^2 + S^2 = 1$ και $S(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [0, \pi/2]$, έπεται ότι $z = E(it)$.

Εάν $x < 0$ και $y \ge 0$, τότε το προηγούμενο εφαρμόζεται για το $-iz$. Επομένως, $-iz = E(it)$ για κάποιο $t \in [0, \pi/2]$. Εφόσον $i = E(\pi i/2)$, λαμβάνουμε ότι $z = E(i(t + \pi/2))$.

Εάν $y < 0$, τότε οι προηγούμενες δύο περιπτώσεις φανερώνουν ότι $-z = E(it)$ για κάποιο $t \in (0, \pi)$. Συνεπώς, $z = -E(it) = E(i(t + \pi))$.

Αυτό αποδεικνύει το (δ). □

Από το (δ) του προηγουμένου θεωρήματος και τη (48) προκύπτει ότι η καμπύλη γ που ορίζεται από τη σχέση

$$\gamma(t) = E(it) \qquad (0 \le t \le 2\pi) \tag{54}$$

είναι απλή κλειστή καμπύλη με πεδίο τιμών τον μοναδιαίο κύκλο του επιπέδου. Εφόσον $\gamma'(t) = iE(it)$ για κάθε $t \in R^1$, το μήκος της γ είναι είναι

$$\int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| dt = 2\pi,$$

σύμφωνα με το Θεώρημα 6.27. Αυτό βεβαίως είναι και το αναμενόμενο αποτέλεσμα για το μήκος κύκλου ακτίνας 1 και από αυτό φαίνεται ότι το π, όπως ορίζεται από την (51), έχει το σύνηθες γεωμετρικό νόημα.

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι το σημείο $\gamma(t)$ διαγράφει ένα κυκλικό τόξο μήκους t_0 καθώς το όρισμα t αυξάνει από 0 έως t_0 $(0 \le t_0 \le 2\pi)$. Εάν για $t \in [0, 2\pi]$ θεωρήσουμε το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία

$$z_1 = 0, \qquad z_2 = \gamma(t), \qquad z_3 = C(t),$$

τότε διαπιστώνουμε ότι τα $C(t)$ και $S(t)$ είναι όντως τα $\cos t$ και $\sin t$ αντιστοίχως εάν αυτά ορισθούν με το συνήθη τρόπο, ως λόγοι πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου.

Πρέπει να τονισθεί ότι έχουμε επάγει τις βασικές ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων από τις (25) και (46) χωρίς καμία επίκληση γεωμετρικής έννοιας. Υπάρχουν και άλλες προσεγγίσεις μη γεωμετρικού χαρακτήρα σε αυτές τις συναρτήσεις. Τα άρθρα των W. F. Eberlein (*Amer. Math. Monthly*, vol. 74, 1967, pp. 1223-1225) και G. B. Robinson (*Math. Mag.*, vol. 41, 1968, pp. 66-70) ασχολούνται με αυτά τα θέματα.

Η ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε με απλό τρόπο το γεγονός ότι το σώμα των μιγαδικών αριθμών είναι *αλγεβρικά πλήρες*, δηλαδή ότι κάθε μη σταθερό πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές έχει τουλάχιστον μία θέση μηδενισμού.[3]

Θεώρημα 8.8. *Υποθέτουμε ότι* $a_0, \ldots, a_n$ *είναι μιγαδικοί αριθμοί με* $a_n \neq 0$, *όπου* n *είναι θετικός ακέραιος αριθμός. Εάν* P *είναι το*

[3] Σ. τ. Μ.: Το συμπέρασμα αυτό είναι γνωστό ως το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας.

πολυώνυμο που ορίζεται από την ισότητα

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad (z \text{ μιγαδικός αριθμός}),$$

τότε $P(z) = 0$ *για κάποιον μιγαδικό αριθμό* z.

Απόδειξη. Δίχως να υφίσταται βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $a_n = 1$. Θέτουμε

$$\mu = \inf_{z \in R^2} |P(z)| \tag{55}$$

Εάν z είναι ένας μιγαδικός αριθμός με $|z| = R$, τότε

$$|P(z)| \geq R^n [1 - |a_{n-1}| R^{-1} - \cdots - |a_0| R^{-n}]. \tag{56}$$

Η δεξιά πλευρά της (56) συγκλίνει προς το $+\infty$ καθώς $R \to +\infty$. Κατά συνέπεια, υπάρχει θετικός αριθμός R_0 ούτως ώστε $|P(z)| > \mu$ για κάθε μιγαδικό αριθμό z με $|z| > R_0$. Εφόσον η $|P|$ είναι συνεχής στον κλειστό κυκλικό δίσκο με κέντρο το 0 και ακτίνα R_0, το Θεώρημα 4.16 φανερώνει ότι $|P(z_0)| = \mu$ για κάποιον μιγαδικό αριθμό z_0.

Ισχυριζόμαστε ότι $\mu = 0$. Υποθέτοντας την αντίθετη περίπτωση, θεωρούμε το πολυώνυμο Q, όπου $Q(z) = P(z + z_0)/P(z_0)$ για κάθε μιγαδικό αριθμό z. Τότε, το Q είναι μη σταθερό πολυώνυμο με $Q(0) = 1$ και $|Q| \geq 1$. Θεωρούμε τον μικρότερο ακέραιο αριθμό k με $1 \leq k \leq n$ ούτως ώστε το Q να γράφεται στη μορφή

$$Q(z) = 1 + b_k z^k + \cdots + b_n z^n, \qquad b_k \neq 0 \tag{57}$$

για κάθε μιγαδικό αριθμό z, όπου $b_k, \ldots, b_n$ είναι μιγαδικοί αριθμοί. Σύμφωνα με το Θεώρημα 8.7(δ), υπάρχει πραγματικός αριθμός θ ούτως ώστε

$$e^{ik\theta} b_k = -|b_k|. \tag{58}$$

Εάν είναι $r > 0$ με $r^k |b_k| < 1$, τότε η (58) συνεπάγεται ότι

$$|1 + b_k r^k e^{ik\theta}| = 1 - r^k |b_k|$$

και επομένως

$$|Q(re^{i\theta})| \leq 1 - r^k\{|b_k| - r|b_{k+1}| - \cdots - r^{n-k}|b_n|\}.$$

Για επαρκώς μικρό θετικό αριθμό r, η έκφραση εντός των αγκίστρων είναι θετική και επομένως $|Q(re^{i\theta})| < 1$, γεγονός που συνιστά αντίφαση.

Συνεπώς, $\mu = 0$, δηλαδή $P(z_0) = 0$. □

Η Άσκηση 27 περιέχει ένα γενικότερο αποτέλεσμα.

ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

Ορισμός 8.9. Ένα *τριγωνομετρικό πολυώνυμο* f είναι μία συνάρτηση της μορφής

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (x \text{ πραγματικός αριθμός}), \tag{59}$$

όπου οι $a_0, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N$ είναι μιγαδικοί αριθμοί. Βάσει των ισοτήτων (46), η (59) μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} \qquad (x \text{ πραγματικός αριθμός}), \tag{60}$$

όπου οι $c_{-N}, \ldots, c_0, c_1, \ldots, c_N$ είναι μιγαδικοί αριθμοί, η οποία είναι περισσότερο βολική. Είναι σαφές ότι κάθε τριγωνικό πολυώνυμο είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π.

Εάν n είναι ένας μη μηδενικός ακέραιος αριθμός, τότε η e^{inx} είναι η παράγωγος της e^{inx}/in, η οποία έχει επίσης περίοδο 2π. Άρα,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}dx = \begin{cases} 1 & \text{εάν } n = 0, \\ 0 & \text{εάν } n = \pm 1, \pm 2, \ldots. \end{cases} \tag{61}$$

Ας πολλαπλασιάσουμε την (60) με την e^{-imx}, όπου m είναι ένας ακέραιος αριθμός. Εάν ολοκληρώσουμε το προκύπτον γινόμενο, τότε η (61) φανερώνει ότι

$$c_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}dx \tag{62}$$

εάν $|m| \leq N$. Εάν $|m| > N$, το ολοκλήρωμα στην (62) είναι ίσο με 0.

Από τις (60) και (62) μπορούμε να κάνουμε την εξής παρατήρηση: Το τριγωνομετρικό πολυώνυμο f, το οποίο δίδεται από την (60), είναι *πραγματικό* εάν και μόνον εάν $c_{-n} = \overline{c_n}$ για οποιονδήποτε δείκτη $n = 0, \ldots, N$.

Σε εναρμόνιση με την (60) ορίζουμε ως *τριγωνομετρική σειρά* μία σειρά της μορφής

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \qquad (x \text{ πραγματικός αριθμός}), \tag{63}$$

όπου οι συντελεστές $\ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots$ είναι μιγαδικοί αριθμοί. Το N τάξεως μερικό άθροισμα τη (63) ορίζεται ως η δεξιά πλευρά της (60).

Εάν f είναι μία ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$ συνάρτηση, τότε οι αριθμοί c_m $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, όπως ορίζονται από την (62), ονομάζονται οι *συντελεστές Fourier*[4] της f και η σειρά (63) που μορφοποιείται από αυτούς τους συντελεστές ονομάζεται η *σειρά Fourier* της f.

[4] Σ. τ. Μ.: Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830). Γάλλος μαθηματικός και φυσικός. Μελέτησε τη μαθηματική θεωρία της αγωγής της θερμότητας, διετύπωσε τη μερική διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη διάχυση της θερμότητας και την επέλυσε με χρήση των τριγωνομετρικών σειρών που φέρουν το όνομά του.

Ο Fourier μαθήτευσε σε εκκλησιαστικό σχολείο στη γενέτειρά του Auxerre, το οποίο τελούσε υπό τη διεύθυνση των Βενεδικτίνων. Ως σκοπό είχε την ιερατική. Γρήγορα έστρεψε το ενδιαφέρον του προς τα Μαθηματικά. Από τη νεανική του ηλικία ασχολήθηκε με την επίλυση αριθμητικών εξισώσεων. Την περίοδο της Γαλλικής Επαναστάσεως δραστηριοποιήθηκε πολιτικά και για ένα διάστημα είχε φυλακισθεί. Το έτος 1789 ο Fourier ανέγνωσε ένα υπόμνημα επί των αριθμητικών εξισώσεων ενώπιον των μελών της Ακαδημίας των Επιστημών των Παρισίων. Περί το έτος 1794 σπούδασε Μαθηματικά στην École Normale, στο Παρίσι, και λίγα έτη αργότερα δίδαξε εκεί Μαθηματικά, καθώς και στο Πολυτεχνείο, ως βοηθός του Joseph Louis Lagrange (1736-1813) και του Gaspard Monge (1746-1818).

Το έτος 1798 ο Fourier ακολούθησε τον στρατό του Ναπολέοντα, ως επιστημονικός σύμβουλος, στην εισβολή στην Αίγυπτο. Εκεί, πρωτοστάτησε στην ίδρυση του Ινστιτούτου της Αιγύπτου και διαφόρων άλλων εκπαιδευτικών ιδρυμάτων. Παραλλήλως προς τα καθήκοντα του και τη μαθηματική του έρευνα, εντρύφησε στην Αιγυπτιολογία και οργάνωσε αρχαιολογικές ανασκαφές. Συνέγραψε και ένα σχετικό βιβλίο με τίτλο «Description de l' Égypte».

Ο Fourier επέστρεψε στη Γαλλία όταν τερματίσθηκε η στρατιωτική επιχείρηση του Ναπολέοντα, το έτος 1801. Το επόμενο έτος ο Fourier διορίσθηκε νομάρχης της επαρχίας Isère.

Το εύλογο ερώτημα που προκύπτει είναι εάν η σειρά Fourier της f συγκλίνει προς την f ή γενικότερα εάν η f καθορίζεται από τους αντίστοιχους προς αυτήν συντελεστές Fourier. Δηλαδή, όταν είναι γνωστοί οι συντελεστές Fourier, μπορούμε να προσδιορίσουμε την αντίστοιχη συνάρτηση και με ποιόν τρόπο;

Η μελέτη τέτοιου είδους σειρών, ιδιαιτέρως το πρόβλημα αναπαραστάσεως δεδομένης συναρτήσεως από τριγωνομετρική σειρά, έχει ως αφετηρία φυσικά προβλήματα όπως η θεωρία ταλαντώσεων και η θεωρία αγωγής θερμότητας. (Η πραγματεία του Fourier «Théorie analytique de chaleur» εξεδόθη το έτος 1822). Τα δύσκολα και λεπτά προβλήματα που ανέκυψαν από την μελέτη τέτοιων θεμάτων είχαν ως αποτέλεσμα την εις βάθος αναθεώρηση και την εκ νέου διαμόρφωση της θεωρίας συναρτήσεων μίας μεταβλητής. Μεταξύ των εξεχόντων μαθηματικών, τα ονόματα των Riemann, Cantor και Lebesgue συνδέονται στενά με αυτό το πεδίο επιστημονικής έρευνας, το οποίο, στη σημερινή εποχή με όλες τις γενικεύσεις και διακλαδώσεις που έχει, μπορεί να θεωρηθεί ότι κατέχει κεντρική θέση στην ολότητα της Μαθηματικής Αναλύσεως.

Θα αρκεστούμε στην απόδειξη ορισμένων θεωρημάτων, τα οποία είναι εύκολα προσβάσιμα μέσω των μεθόδων που έχουν αναπτυχθεί στα προηγούμενα κεφάλαια του βιβλίου. Για την διεξαγωγή μίας περισσότερο αυστηρής μελέτης, το κατά Lebesgue ολοκλήρωμα αποτελεί το φυσιολογικό και απαραίτητο μαθηματικό εργαλείο.

Παρά τα βαριά καθήκοντά του, ο Fourier συνέχισε τις μαθηματικές μελέτες του και το έτος 1804 συνέγραψε μία εργασία που συνόψιζε τις έρευνές του στις αριθμητικές εξισώσεις. Το έτος 1812 ο Fourier υπέβαλε στην Ακαδημία των Επιστημών των Παρισίων μία μελέτη περί της αγωγής θερμότητας, τον πρόδρομο της φημισμένης εργασίας του, και απέσπασε το Μέγα Βραβείο της Ακαδημίας. Οι κριτές Pierre Simon Laplace (1749-1827), Lagrange και Adrien Marie Legendre (1752-1833) είχαν αρχικά επιφυλάξεις σχετικά με την αυστηρότητα των συλλογισμών του, όμως εν τέλει του απένειμαν το βραβείο, αντιλαμβανόμενοι τη σπουδαιότητα της εργασίας του Fourier.

Το έτος 1822 ο Fourier εξελέγη Μόνιμος Γραμματέας της Ακαδημίας των Επιστημών των Παρισίων και εξέδωσε τη φημισμένη εργασία του «Théorie Analytique de Chaleur» («Αναλυτική Θεωρία της Θερμότητας»), η οποία κατέχει περίοπτη θέση στην ιστορία των Μαθηματικών.

Αρχικά, θα μελετήσουμε γενικότερα σύνολα συναρτήσεων τα οποία κατέχουν ιδιότητα ανάλογη της (61).

Ορισμός 8.10. Θεωρούμε μία ακολουθία μιγαδικών συναρτήσεων $\{\phi_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), ορισμένων και ολοκληρώσιμων στο $[a, b]$. Η ακολουθία αυτή ονομάζεται *ορθογώνιο σύνολο συναρτήσεων* στο $[a, b]$ εάν και μόνον εάν για οποιουσδήποτε θετικούς ακέραιους αριθμούς n, m με $n \neq m$ ισχύει ότι

$$\int_a^b \phi_n(x)\overline{\phi_m(x)}dx = 0. \tag{64}$$

Η ακολουθία $\{\phi_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) ονομάζεται *ορθοκανονικό σύνολο συναρτήσεων* στο $[a, b]$ εάν και μόνον εάν ισχύει επιπροσθέτως ότι

$$\int_a^b |\phi_n(x)|^2 dx = 1 \tag{65}$$

για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n.

Επί παραδείγματι, οι συναρτήσεις $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{inx}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) συνιστούν ορθοκανονικό σύνολο συναρτήσεων στο $[-\pi, \pi]$. Το ίδιο ισχύει και για τις συναρτήσεις

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \cdots.$$

Θεωρούμε ένα ορθοκανονικό σύνολο συναρτήσεων $\{\phi_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) στο $[a, b]$ και μία μιγαδική συνάρτηση f, ορισμένη και ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Για $n = 1, 2, 3, \ldots$ ονομάζουμε τον αριθμό

$$c_n = \int_a^b f(t)\overline{\phi_n(t)}dt \tag{66}$$

n τάξεως συντελεστή Fourier της f ως προς το ορθοκανονικό σύνολο $\{\phi_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Γράφουμε

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n \tag{67}$$

και ονομάζουμε τη σειρά αυτή *σειρά Fourier* της f ως προς το ορθοκανονικό σύνολο $\{\phi_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Σημειώνουμε ότι το σύμβολο $\sim$ στην (67) δεν υπονοεί τίποτε σχετικό με τη σύγκλιση της σειράς. Απλώς δηλώνει ότι οι συντελεστές της σειράς δίδονται από την (66).

Τα ακόλουθα θεωρήματα φανερώνουν ότι τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier της f κατέχουν μία ιδιότητα ελαχίστου. Έως το τέλος της ενότητας θα θεωρούμε ότι f είναι μία μιγαδική συνάρτηση με $f \in \mathcal{R}$ στο $[a, b]$, αν και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ασθενέστερη υπόθεση.

Θεώρημα 8.11. *Υποθέτουμε ότι $\{\phi_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο συναρτήσεων στο $[a, b]$. Για έναν θετικό ακέραιο αριθμό n, ας είναι*

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} c_m \phi_m \tag{68}$$

το n τάξεως μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της συναρτήσεως f. Υποθέτουμε ότι $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ είναι μιγαδικοί αριθμοί. Θέτουμε

$$t_n = \sum_{m=1}^{n} \gamma_m \phi_m. \tag{69}$$

Τότε, ισχύει ότι

$$\int_a^b |f - s_n|^2 dx \leq \int_a^b |f - t_n|^2 dx. \tag{70}$$

Η ισότητα στην (70) ισχύει εάν και μόνον εάν

$$\gamma_m = c_m \qquad (m = 1, \ldots, n). \tag{71}$$

Δηλαδή, μεταξύ των συναρτήσεων της μορφής t_n, η s_n αποτελεί την βέλτιστη δυνατή μέση τετραγωνική προσέγγιση της f.

Απόδειξη. Σύμφωνα με τον ορισμό των $c_1, \ldots, c_n$ έχουμε ότι

$$\int_a^b f \overline{t_n} dx = \int_a^b f \sum_{m=1}^{n} \overline{\gamma_m}\, \overline{\phi_m} dx = \sum_{m=1}^{n} c_m \overline{\gamma_m} dx.$$

Εφόσον το $\{\phi_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι ορθοκανονικό σύνολο συναρτήσεων,

$$\int_a^b |t_n|^2 dx = \int_a^b t_n \overline{t_n} dx = \int_a^b \sum_{m=1}^n \gamma_m \phi_m \sum_{k=1}^n \overline{\gamma_k}\, \overline{\phi_k} dx = \sum_{m=1}^n |\gamma_m|^2.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f - t_n|^2 dx &= \int_a^b |f|^2 dx - \int_a^b f \overline{t_n} dx - \int_a^b \bar{f} t_n dx + \int_a^b |t_n|^2 dx \\
&= \int_a^b |f|^2 dx - \sum_{m=1}^n c_m \overline{\gamma_m} - \sum_{m=1}^n \overline{c_m}\, \gamma_m + \sum_{m=1}^n \gamma_m \overline{\gamma_m} \\
&= \int_a^b |f|^2 dx - \sum_{m=1}^n |c_m|^2 + \sum_{m=1}^n |\gamma_m - c_m|^2.
\end{aligned}$$

Εφόσον $\int_a^b |f - s_n|^2 dx = \int_a^b |f|^2 dx - \sum_{m=1}^n |c_m|^2$, προκύπτει η ζητούμενη ανισότητα. Από τα προηγούμενα είναι προφανές ότι η ισότητα ισχύει εάν και μόνον εάν $\gamma_m = c_m$ για κάθε $m = 1, \dots, n$.

Θέτοντας στο παραπάνω $\gamma_m = c_m$ για κάθε $m = 1, \dots, n$, λαμβάνουμε ότι

$$\int_a^b |s_n|^2 dx = \sum_{m=1}^n |c_m|^2 \le \int_a^b |f|^2 dx, \tag{72}$$

εφόσον $\int_a^b |f - t_n|^2 dx \ge 0$. □

Θεώρημα 8.12. *Εάν $\{\phi_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο συναρτήσεων στο $[a, b]$ και εάν*

$$f \sim \sum_{n=1}^\infty c_n \phi_n,$$

τότε

$$\sum_{n=1}^\infty |c_n|^2 \le \int_a^b |f(x)|^2 dx. \tag{73}$$

Ιδιαιτέρως,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0. \tag{74}$$

Απόδειξη. Λαμβάνοντας $n \to \infty$ στην (72) αποκτούμε την (73). □

Η ανισότητα (73) ονομάζεται *ανισότητα του Bessel*[5].

8.13 Τριγωνομετρικές σειρές. Εφεξής, θα εργαζόμαστε μόνο με το τριγωνομετρικό σύστημα συναρτήσεων. Θα θεωρούμε συναρτήσεις f περιόδου 2π, οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες στο $[-\pi, \pi]$ (και συνεπώς σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα). Σε αυτήν την περίπτωση, η σειρά Fourier της f είναι η (63) όπου οι συντελεστές $\ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots$ δίδονται από την (62). Για $x \in [-\pi, \pi]$ και μη αρνητικό ακέραιο αριθμό N θα συμβολίζουμε με

$$s_N(x) = s_N(f, x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} \tag{75}$$

το N τάξεως μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της f. Η ανισότητα (72) λαμβάνει τώρα τη μορφή

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |s_N(x)|^2 dx = \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx. \tag{76}$$

Για να αποκτήσουμε μία πιο εύχρηστη μορφή για το μερικό άθροισμα N τάξεως s_N, εισάγουμε τον *πυρήνα του Dirichlet* D_N, που ορίζεται ως εξής: για $x \in [-\pi, \pi]$

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin(x/2)}. \tag{77}$$

[5] Σ. τ. Μ.: Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846). Γερμανός μαθηματικός και αστρονόμος. Ως νεαρός, ο Bessel εντρύφησε στην εκμάθηση γλωσσών, στη Γεωγραφία και αργότερα εστράφη στη σπουδή της Αστρονομίας και των Μαθηματικών. Στην ηλικία των 20 ετών, ο Bessel καθόρισε την τροχιά του κομήτη του Halley (ο οποίος έλαβε την ονομασία του από τον αστρονόμο Edmund Halley (1656-1743)) από παρατηρήσεις που είχαν γίνει το έτος 1607. Το έτος 1810 ο Bessel διορίσθηκε διευθυντής του αστεροσκοπείου του Königsberg και έλαβε το διδακτορικό του δίπλωμα από το Πανεπιστήμιο του Göttingen. Παρέμεινε στο Königsberg έως το τέλος της ζωής του. Μελέτησε τις θέσεις και την κίνηση περισσοτέρων από 50.000 αστέρες. Το έτος 1817, μελετώντας ένα πρόβλημα του πασίγνωστου αστρονόμου Johannes Kepler (1571-1630), ο Bessel εισήγαγε τις λεγόμενες συναρτήσεις Bessel. Ο Bessel ανέπτυξε, το έτος 1824, περαιτέρω τη θεωρία των φερώνυμων συναρτήσεων. Ανακάλυψε, το έτος 1838, την αστρική παράλλαξη 61 Cygni.

Η πρώτη από αυτές τις ισότητες αποτελεί τον ορισμό της D_N. Η δεύτερη προκύπτει όταν οι δύο πλευρές τις ισότητας

$$(e^{ix}-1)D_N(x) = e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}$$

πολλαπλασιασθούν με $e^{-ix/2}$, όπου $x \in [-\pi, \pi]$.

Σύμφωνα με τις (62) και (75), για $x \in [-\pi, \pi]$ και μη αρνητικό ακέραιο αριθμό N έχουμε

$$\begin{aligned} s_N(f,x) &= \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt\right)e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-t)}\right)dt \end{aligned}$$

και επομένως

$$s_N(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_N(x-t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_N(t)dt. \qquad (78)$$

Η περιοδικότητα των εμπλεκομένων συναρτήσεων φανερώνει ότι το διάστημα ολοκληρώσεως είναι επουσιώδες, αρκεί να έχει μήκος 2π. Αυτό φανερώνει ότι τα ολοκληρώματα στην (78) είναι όντως ίσα.

Θα αποδείξουμε ένα θεώρημα για την κατά σημείο σύγκλιση των σειρών Fourier.

Θεώρημα 8.14. *Εάν για κάποιο $x \in [-\pi, \pi]$ υπάρχουν σταθερές $\delta > 0$ και M ούτως ώστε*

$$|f(x+t) - f(x)| \le M|t| \qquad (79)$$

για κάθε $t \in (-\delta, \delta)$, τότε

$$\lim_{N\to\infty} s_N(f,x) = f(x). \qquad (80)$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση g στο $[-\pi, \pi]$ που ορίζεται ως εξής: Εάν $t \in [-\pi, \pi]$ με $t \neq 0$, τότε

$$g(t) = \frac{f(x-t) - f(x)}{\sin(t/2)}. \qquad (81)$$

Επίσης, $g(0) = 0$. Σύμφωνα με τον Ορισμό (77), ισχύει ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)dx = 1$$

για κάθε μη αρνητικό ακέραιο αριθμό N. Συνεπώς, η (78) φανερώνει ότι

$$\begin{aligned} s_N(f,x) \;-\; f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)tdt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[g(t)\cos\frac{t}{2}\right]\sin(Nt)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[g(t)\sin\frac{t}{2}\right]\cos(Nt)dt \end{aligned}$$

για κάθε μη αρνητικό ακέραιο αριθμό N. Σύμφωνα με τις (79) και (81), οι $g(t)\cos(t/2)$ και $g(t)\sin(t/2)$ είναι φραγμένες. Συνεπώς, τα τελευταία ολοκληρώματα συγκλίνουν προς το 0 καθώς $N \to \infty$, σύμφωνα με την (74). Αυτό αποδεικνύει την (80). □

Πόρισμα. *Εάν $f(x) = 0$ για κάθε x σε ένα ανοικτό διάστημα J, τότε $\lim_{N\to\infty} s_N(f,x) = 0$, για κάθε $x \in J$.*

Το παραπάνω πόρισμα μπορεί να λάβει και την εξής διατύπωση:
Εάν $f(t) = g(t)$ για κάθε t σε μία περιοχή του x, τότε

$$s_N(f,x) - s_N(g,x) = s_N(f-g,x) \to 0 \;\; \textit{καθώς} \;\; N \to \infty.$$

Το παραπάνω ονομάζεται συνήθως το *θεώρημα επιτοπίσεως*. Φανερώνει ότι, για $x \in [-\pi,\pi]$, η συμπεριφορά της ακολουθίας $\{s_N(f,x)\}$ ($N = 0, 1, 2, \ldots$) όσον αφορά τη σύγκλιση εξαρτάται από τις τιμές της f σε μία (οσοδήποτε μικρή) περιοχή του x. Δύο σειρές Fourier μπορούν να έχουν την ίδια συμπεριφορά σε ένα διάστημα και τελείως διαφορετική σε κάποιο άλλο. Συνεπώς, υπάρχει μία αξιοσημείωτη αντίθεση μεταξύ των σειρών Fourier και των δυναμοσειρών (ανατρέξτε στο Θεώρημα 8.5).

Θα κλείσουμε την ενότητα με δύο θεωρήματα προσεγγίσεως.

Θεώρημα 8.15. *Εάν η f είναι συνεχής συνάρτηση με περίοδο 2π και εάν $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο P με*

$$|P(x) - f(x)| < \varepsilon$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Απόδειξη. Εάν για κάθε πραγματικό αριθμό x ταυτίσουμε το x με το $x+2\pi$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τις ορισμένες στον R^1 συναρτήσεις περιόδου 2π ως συναρτήσεις ορισμένες στον μοναδιαίο κύκλο του επιπέδου T, μέσω της απεικονίσεως $x \to e^{ix}$ ($x \in R^1$). Τα σύνολο των τριγωνομετρικών πολυωνύμων, δηλαδή των συναρτήσεων της μορφής (60), αποτελούν μία αυτοεπισυναπτή άλγεβρα $\mathcal{A}$, η οποία διαχωρίζει τα σημεία του T και δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του T. Εφόσον το T είναι συμπαγές, το Θεώρημα 7.33 φανερώνει ότι η $\mathcal{A}$ είναι πυκνή στον $\mathcal{C}(T)$. Αυτός ακριβώς είναι ο ισχυρισμός του θεωρήματος. □

Μία ακριβέστερη μορφή του θεωρήματος εμφανίζεται στην Άσκηση 15.

8.16 Το θεώρημα του Parseval[6]**.** *Εάν f, g είναι κατά Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις περιόδου 2π και εάν*

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad g(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}, \tag{82}$$

τότε ισχύει ότι

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_N(f,x)|^2 dx = 0, \tag{83}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \overline{\gamma_n}, \tag{84}$$

και

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \tag{85}$$

[6] Σ. τ. Μ.: Marc Antoine Parseval des Chênes (1755-1836). Γάλλος μαθηματικός. Συνέγραψε μόνο πέντε εργασίες, οι οποίες είχαν σημαντικές εφαρμογές στη θεωρία των Σειρών Fourier. Ο Parseval είχε έντονη πολιτική δράση και υπέστη διωγμούς για τις φιλοβασιλικές πεποιθήσεις του.

Απόδειξη. Για μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση h στο $[-\pi, \pi]$ εισάγουμε τον συμβολισμό

$$\|h\|_2 = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |h(x)|^2 dx\right\}^{1/2}. \tag{86}$$

Θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Εφόσον $f \in \mathcal{R}$ στο $[-\pi, \pi]$ και $f(\pi) = f(-\pi)$, από την κατασκευή που περιγράφηκε στην Άσκηση 12 του Κεφαλαίου 6 προκύπτει η ύπαρξη συνεχούς συναρτήσεως h, περιόδου 2π, με

$$\|f - h\|_2 < \varepsilon. \tag{87}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 8.15, υπάρχει ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο P ούτως ώστε $|h(x) - P(x)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$. Συνεπώς, ισχύει ότι $\|h - P\|_2 < \varepsilon$. Εάν το P έχει βαθμό N_0, τότε το Θεώρημα 8.11 φανερώνει ότι

$$\|h - s_N(h)\|_2 \leq \|h - P\|_2 < \varepsilon \tag{88}$$

για κάθε μη αρνητικό ακέραιο αριθμό N με $N \geq N_0$. Σύμφωνα με την (72), με την $h - f$ στη θέση της f, έχουμε ότι

$$\|s_N(h) - s_N(f)\|_2 = \|s_N(h - f)\|_2 \leq \|h - f\|_2 < \varepsilon \tag{89}$$

για κάθε μη αρνητικό ακέραιο αριθμό N.

Τώρα, η τριγωνική ανισότητα (Άσκηση 11 του Κεφαλαίου 6), συνδυαζόμενη με τις (87), (88) και (89), φανερώνει ότι

$$\|f - s_N(f)\|_2 < 3\varepsilon \quad (N \geq N_0). \tag{90}$$

Αυτό αποδεικνύει την (83). Εν συνεχεία, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_N(f, x)\overline{g(x)}dx &= \sum_{n=-N}^{N} c_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\overline{g(x)}dx \\ &= \sum_{n=-N}^{N} c_n\overline{\gamma_n} \end{aligned} \tag{91}$$

και η ανισότητα του Schwarz φανερώνει ότι

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f\overline{g}dx - \int_{-\pi}^{\pi} s_N(f)\overline{g}dx\right| \le \int_{-\pi}^{\pi} |f - s_N(f)||g|dx \tag{92}$$
$$\le \left\{\int_{-\pi}^{\pi} |f - s_N|^2 dx \int_{-\pi}^{\pi} |g|^2 dx\right\}^{1/2},$$

η οποία συγκλίνει προς το 0 καθώς $N \to \infty$, σύμφωνα με την (83). Συγκρίνοντας τις (91) και (92), συνάγουμε την (84). Τελικά, η (85) είναι ειδική περίπτωση της (84), για $g = f$ □

Μία γενικότερη εκδοχή του Θεωρήματος 8.16 υπάρχει στο Κεφάλαιο 11.

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΓΑΜΜΑ

Η συνάρτηση αυτή σχετίζεται στενά με τα παραγοντικά και αναφύεται με απρόσμενο τρόπο σε διάφορες περιοχές της Αναλύσεως. Η εμφάνιση, η ιστορική διαδρομή και η ανάπτυξή της περιγράφεται σε ένα ενδιαφέρον άρθρο του P. J. Davis (*Amer. Math. Monthly*, vol. 66, 1959, pp. 849-869). Το βιβλίο του Artin, το οποίο αναφέρεται στη Βιβλιογραφία, αποτελεί μία καλή στοιχειώδη εισαγωγή στο θέμα.

Η παρουσίαση μας θα είναι συνοπτική, με λίγα σχόλια έπειτα από κάθε θεώρημα. Η ενότητα αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως εκτενής άσκηση και ως ευκαιρία για να εφαρμοσθούν οι μέθοδοι που έχουν αναπτυχθεί στα προηγούμενα κεφάλαια.

Ορισμός 8.17. Για $x \in (0, +\infty)$ ορίζουμε

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt. \tag{93}$$

Για αυτές τιμές του x το ολοκλήρωμα όντως συγκλίνει. (Εάν $x < 1$, τότε πρέπει να ελεγχθούν επίσης τα 0 και ∞.)

Θεώρημα 8.18.

(α) *Για* $x \in (0, +\infty)$ *ισχύει η ισότητα*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

(β) *Ισχύει ότι* $\Gamma(n+1) = n!$ *για* $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(γ) *Η συνάρτηση* $\log \Gamma$ *είναι κυρτή στο* $(0, +\infty)$.

Απόδειξη. Με ολοκλήρωση κατά μέρη αποδεικνύουμε το (α). Εφόσον $\Gamma(1) = 1$, το (β) προκύπτει από το (α) με επαγωγή. Εάν $p, q \in (1, +\infty)$ με $(1/p) + (1/q) = 1$, τότε εφαρμόζουμε την ανισότητα του Hölder (Άσκηση 10 του Κεφαλαίου 6) στην (93) και λαμβάνουμε ότι

$$\Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \le \Gamma(x)^{1/p}\Gamma(y)^{1/q}$$

για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το (γ). □

Είναι αρκετά εκπληκτικό το γεγονός ότι οι τρεις αυτές ιδιότητες χαρακτηρίζουν τη συνάρτηση Γ πλήρως. Το γεγονός αυτό αποδείχθηκε από τους Bohr[7] και Mollerup[8].

[7] Σ. τ. Μ.: Harald August Bohr (1887-1951). Δανός μαθηματικός. Αδελφός του διασήμου φυσικού Niels Bohr (1885-1962). Εργάσθηκε σε θέματα σχετικά με τις σειρές Dirichlet και την Αναλυτική Θεωρία Αριθμών. Επίσης, ήταν ο δημιουργός της Θεωρίας των Σχεδόν Περιοδικών Συναρτήσεων.

Ο Bohr εισήχθη στο Πανεπιστήμιο της Κοπεγχάγης το έτος 1904 και έξη έτη αργότερα έλαβε τον τίτλο του διδάκτορα. Κατά τα έτη 1910 έως και 1915 ήταν υφηγητής του Πανεπιστημίου της Κοπεγχάγης. Από το έτος 1915 έως και το 1930 ήταν καθηγητής Μαθηματικών στο Πολυτεχνείο της Κοπεγχάγης. Από το έτος 1930 έως τον θάνατό του ήταν καθηγητής Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Κοπεγχάγης.

Ο Bohr είναι επίσης γνωστός για την βοήθεια που παρείχε προς τους μαθηματικούς που εγκατέλειπαν τη Γερμανία, λόγω της ανόδου των Ναζί στην εξουσία, το έτος 1933. Ασκούσε μεγάλη επιρροή στη διεθνή μαθηματική κοινότητα της εποχής και συνεργάσθηκε με πολλούς διάσημους μαθηματικούς ανά την υφήλιο. Υπήρξε ο πρώτος πρόεδρος του πρώτου ινστιτούτου Μαθηματικών που ιδρύθηκε στη Δανία, το έτος 1934.

[8] Σ. τ. Μ.: Johannes Mollerup (1872-1937). Δανός μαθηματικός. Σπούδασε στο Πανεπιστήμιο της Κοπεγχάγης, από όπου έλαβε το μεταπτυχιακό του δίπλωμα του το έτος 1896 και το διδακτορικό του δίπλωμα το έτος 1903. Τρία έτη αργότερα συνέχισε τις σπουδές

Θεώρημα 8.19. *Υποθέτουμε ότι f είναι μία θετική συνάρτηση στο $(0,+\infty)$ με τις εξής ιδιότητες:*

(α) $f(x+1) = xf(x)$ *για κάθε* $x \in (0,+\infty)$.

(β) $f(1) = 1$.

(γ) *Η* $\log f$ *είναι κυρτή.*

Τότε, $f = \Gamma$.

Απόδειξη. Εφόσον η Γ ικανοποιεί τα (α), (β) και (γ) στη θέση της f, αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in (0,+\infty)$ η τιμή $f(x)$ καθορίζεται κατά μοναδικό τρόπο από τα (α), (β) και (γ). Σύμφωνα με το (α), αρκεί να το αποδείξουμε αυτό για κάθε $x \in (0,1)$.

Θέτουμε $\phi = \log f$. Τότε,

$$\phi(x+1) = \phi(x) + \log x \qquad (x \in (0,+\infty)), \tag{94}$$

$\phi(1) = 0$ και η ϕ είναι κυρτή. Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x με $0 < x < 1$ και θετικό ακέραιο αριθμό n. Σύμφωνα με την (94), ισχύει ότι $\phi(n+1) = \log(n!)$. Θεωρούμε τα πηλίκα διαφορών της ϕ στα διαστήματα $[n, n+1]$, $[n+1, n+1+x]$, $[n+1, n+2]$. Εφόσον η ϕ είναι κυρτή, ισχύει ότι

$$\log n \leq \frac{\phi(n+1+x) - \phi(n+1)}{x} \leq \log(n+1).$$

Επανειλημμένη εφαρμογή της (94) φανερώνει ότι

$$\phi(n+1+x) = \phi(x) + \log[x(x+1)\cdots(x+n)].$$

Συνεπώς,

$$0 \leq \phi(x) - \log\left[\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\right] \leq x\log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

του στα Πανεπιστήμια των Karlsruhe και Göttingen. Η πρώιμη ερευνητική του δραστηριότητα περιεστράφη γύρω από τη Γεωμετρία και τη Θεωρία Συνόλων. Αργότερα, ο Mollerup εστράφη προς τη Θεωρία Ολοκληρωτικών Εξισώσεων. Ο Mollerup υπήρξε υφηγητής στο Πολυτεχνείο της Κοπεγχάγης κατά τα έτη 1915 έως και 1916. Αμέσως μετά διορίσθηκε καθηγητής στο ίδιο ίδρυμα. Είναι γνωστός για τις κοινές έρευνες του με τον Harald August Bohr (1887-1951) και για την από κοινού συγγραφή ενός σημαντικού, για τη μαθηματική εκπαίδευση στη Δανία, βιβλίου Μαθηματικής Αναλύσεως.

Η τελευταία έκφραση συγκλίνει προς το 0 καθώς $n \to \infty$. Άρα, το $\phi(x)$ καθορίζεται κατά μοναδικό τρόπο, όπως επιθυμούμε. □

Ως δευτερεύον προϊόν των παραπάνω προκύπτει η ισότητα

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}, \tag{95}$$

τουλάχιστον για $x \in (0, 1)$. Από αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η (95) ισχύει για κάθε $x \in (0, +\infty)$, εφόσον $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Θεώρημα 8.20. *Εάν* $x, y \in (0, +\infty)$, *τότε*

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{96}$$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι η λεγόμενη *συνάρτηση βήτα* $B(x, y)$.

Απόδειξη. Σημειώνουμε ότι $B(1, y) = 1/y$ και ότι η $\log B(x, y)$ είναι κυρτή συνάρτηση του x για κάθε $y \in (0, +\infty)$, σύμφωνα με την ανισότητα του Hölder, όπως στο Θεώρημα 8.18. Επίσης, ισχύει ότι

$$B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y) \qquad (x, y > 0). \tag{97}$$

Για να αποδείξουμε την (97), εκτελούμε ολοκλήρωση κατά μέρη στην

$$B(x+1, y) = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^x (1-t)^{x+y-1}dt.$$

Οι τρεις αυτές ιδιότητες της B φανερώνουν ότι για κάθε $y \in (0, +\infty)$ το Θεώρημα 8.19 εφαρμόζεται στην συνάρτηση f που ορίζεται από την ισότητα

$$f(x) = \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)} B(x, y)$$

για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Συνεπώς, $f(x) = \Gamma(x)$. □

8.21 Ορισμένες συνέπειες. Η αντικατάσταση $t = \sin^2\theta$ μετατρέπει την (96) στην

$$2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{98}$$

Λαμβάνοντας $x = y = \frac{1}{2}$, οδηγούμαστε στη σχέση

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{99}$$

Η αντικατάσταση $t = s^2$ μετατρέπει την (93) στην

$$\Gamma(x) = 2\int_0^\infty s^{2x-1}e^{-s^2}ds \qquad (0 < x < \infty). \tag{100}$$

Λαμβάνοντας σε αυτήν $x = \frac{1}{2}$, προκύπτει η

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}ds = \sqrt{\pi}. \tag{101}$$

Σύμφωνα με την (99), η ισότητα

$$\Gamma(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \tag{102}$$

για $x \in (0, +\infty)$ προκύπτει ευθέως από το Θεώρημα 8.19.

8.22 Ο τύπος του Stirling[9]**.** Ο τύπος του Stirling παρέχει μία απλή προσεγγιστική έκφραση του $\Gamma(x+1)$ όταν ο x είναι αρκετά μεγάλος θετικός

[9] Σ. τ. Μ.: James Stirling (1692-1770). Σκώτος μαθηματικός.

Ο Stirling εισήχθη στο Κολέγιο Balliol της Οξφόρδης, το έτος 1710, και έδειξε αμέσως τη μαθηματική του ικανότητα. Συμμετείχε ενεργά στις ταραχές που ξέσπασαν στο φοιτητικό σώμα τα έτη 1714 έως 1716 εξαιτίας της πολιτικής καταστάσεως. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να χάσει την υποτροφία του στο κολέγιο. Το έτος 1717 ο Stirling πήγε στην Ιταλία για να διεκδικήσει μία θέση στην Padova, την οποία και τελικά έχασε. Στη διάρκεια της παραμονής του στην Ιταλία διδάχθηκε τα μυστικά των υαλοποιών της Βενετίας. Το έτος 1722 ο Stirling επέστρεψε στη Γλασκόβη. Τρία έτη μετά πήγε στο Λονδίνο, όπου και για παρέμεινε δέκα έτη. Εξελέγη μέλος της Βασιλικής Ακαδημίας του Λονδίνου το έτος 1726. Το έτος 1730 ο Stirling δημοσίευσε ένα σημαντικό βιβλίο Διαφορικού Λογισμού. Πέντε έτη αργότερα ο Stirling επέστρεψε στη Σκωτία και έγινε διευθυντής μίας εταιρίας μεταλλευμάτων. Το έτος 1746 προσεφέρθη στον Stirling η ακαδημαϊκή θέση του θανόντος Colin Maclaurin (1698-1746) στο Εδιμβούργο, την οποία αρνήθηκε για πολιτικούς λόγους. Το έτος 1753 ο Stirling παραιτήθηκε από τη Βασιλική Εταιρία του Λονδίνου, λόγω χρεών και αδυναμίας πληρωμής των ετησίων συνδρομών του.

αριθμός (συνεπώς και για το $n!$ όταν ο n είναι αρκετά μεγάλος θετικός ακέραιος αριθμός.) Ο τύπος είναι ο

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{(x/e)^x\sqrt{2\pi x}} = 1. \tag{103}$$

Θα αποδείξουμε τώρα αυτόν τον τύπο. Θέτουμε $t = x(1+u)$ στην (93). Τότε, λαμβάνουμε ότι

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1}e^{-x}\int_{-1}^{\infty}[(1+u)e^{-u}]^x du \tag{104}$$

για $x \in (0, +\infty)$. Ορίζουμε τη συνάρτηση h στο $(-1, +\infty)$ ούτως ώστε $h(0) = 1$ και

$$(1+u)e^{-u} = \exp\left[-\frac{u^2}{2}h(u)\right] \tag{105}$$

όταν είναι u με $u > -1$ και $u \neq 0$. Τότε, για τέτοιον αριθμό u ισχύει ότι

$$h(u) = \frac{2}{u^2}[u - \log(1+u)]. \tag{106}$$

Από αυτό έπεται ότι η h είναι συνεχής και φθίνει κατά μονότονο τρόπο από το $+\infty$ στο 0 καθώς το όρισμά της αυξάνει από το -1 στο $+\infty$.

Η αντικατάσταση $u = s\sqrt{2/x}$ στην (104) χορηγεί την ισότητα

$$\Gamma(x+1) = x^x e^{-x}\sqrt{2x}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_x(s)ds, \tag{107}$$

όπου για $x \in (0, +\infty)$ είναι

$$\psi_x(s) = \begin{cases} \exp[-s^2 h(s\sqrt{2/x})] & \text{εάν} \quad -\sqrt{x/2} < s, \\ 0 & \text{εάν} \quad s \leq -\sqrt{2/x}. \end{cases}$$

Σημειώνουμε τα ακόλουθα γεγονότα για την ψ_x:

(α) Για $s \in R^1$ ισχύει ότι $\psi_x(s) \to e^{-s^2}$ καθώς $x \to +\infty$.

(β) Η παραπάνω σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $[-A, A]$ για οποιονδήποτε θετικό αριθμό A.

(γ) Εάν $s < 0$, τότε $0 < \psi_x(s) < e^{-s^2}$.

(δ) Εάν $s > 0$ και $x > 1$, τότε $0 < \psi_x(s) < \psi_1(s)$.

(ε) $\int_0^\infty \psi_1(s)ds < +\infty$.

Το θεώρημα περί συγκλίσεως που διατυπώνεται στην Άσκηση 12 του Κεφαλαίου 7 μπορεί να εφαρμοσθεί στο ολοκλήρωμα (107). Συνεπώς, το ολοκλήρωμα αυτό συγκλίνει προς το $\sqrt{\pi}$ καθώς $x \to +\infty$, σύμφωνα με την (101). Αυτό αποδεικνύει την (103).

Μία λεπτομερέστερη εκδοχή αυτού του θεωρήματος μπορεί να βρεθεί στο βιβλίο του R. C. Buck «Advanced Calculus», στις σελίδες 216 έως και 218. Για δύο άλλες εντελώς διαφορετικές αποδείξεις παραπέμπουμε στο άρθρο του W. Feller στο *Amer. Math. Monthly*, vol. 74, 1967, pp.1223-1225 (με μία διόρθωση στο vol. 75, 1968, p. 518) και στο βιβλίο του Artin, στις σελίδες 20 έως και 24.

Στην Άσκηση 20 παρουσιάζεται μία απλούστερη απόδειξη ενός λιγότερο ακριβούς αποτελέσματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Ορίζουμε τη συνάρτηση f μέσω της σχέσεως

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{εάν } x \neq 0, \\ 0 & \text{εάν } x = 0. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η f έχει παραγώγους κάθε τάξεως στο $x = 0$ και ότι $f^{(n)}(0) = 0$ για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Άσκηση 2. Για $i, j = 1, 2, 3, \ldots$ ας είναι a_{ij} ο αριθμός στην i γραμμή και j στήλη του πίνακα

$$\begin{array}{ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

Δηλαδή,

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{εάν } i < j, \\ -1 & \text{εάν } i = j, \\ 2^{j-i} & \text{εάν } i > j. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = -2, \qquad \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = 0.$$

Άσκηση 3. Εάν $\{a_{ij}\}$ $(i, j = 1, 2, 3, \dots)$ είναι μία διπλή ακολουθία μη αρνητικών αριθμών, τότε αποδείξτε ότι

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$$

(Η περίπτωση $+\infty = +\infty$ δεν εξαιρείται.)

Άσκηση 4. Αποδείξτε τις παρακάτω ισότητες:

(α) $\lim_{x\to 0} \dfrac{b^x - 1}{x} = \log b$, όπου $b > 0$.

(β) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(x+1)}{x} = 1$.

(γ) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$.

(δ) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Άσκηση 5. Υπολογίστε τα ακόλουθα όρια:

(α) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e - (1+x)^{1/x}}{x}$.

(β) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{\log n}[n^{1/n} - 1]$.

(γ) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x(1-\cos x)}$.

(δ) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{\tan x - x}$.

Άσκηση 6. Θεωρούμε μία πραγματική συνάρτηση f, ορισμένη στον R^1, με την ιδιότητα $f(x)f(y) = f(x+y)$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x και y.

(α) Υποθέτοντας ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ότι δεν μηδενίζεται πουθενά, αποδείξτε ότι

$$f(x) = e^{cx},$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x, όπου c είναι σταθερή.

(β) Αποδείξτε το ίδιο, υποθέτοντας απλώς ότι η f είναι συνεχής.

Άσκηση 7. Εάν x είναι πραγματικός αριθμός με $0 < x < \frac{\pi}{2}$, τότε αποδείξτε ότι

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Άσκηση 8. Για $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ και πραγματικό αριθμό x αποδείξτε ότι

$$|\sin nx| \leq n|\sin x|.$$

Σημειώνουμε ότι αυτή η ανισότητα δεν αληθεύει απαραιτήτως για άλλες τιμές του n. Επί παραδείγματι,

$$|\sin \frac{1}{2}\pi| > \frac{1}{2}|\sin \pi|.$$

Άσκηση 9.

(α) Για θετικό ακέραιο αριθμό N θέτουμε $s_N = 1 + (1/2) + \cdots + (1/N)$. Αποδείξτε ότι το όριο

$$\lim_{N\to\infty} (s_N - \log N)$$

υπάρχει. (Το όριο αυτό συμβολίζεται συνήθως με γ και ονομάζεται η *σταθερή του Euler*[10]. Η τιμή του είναι $0,5772\ldots$. Δεν είναι γνωστό εάν ο αριθμός γ είναι ρητός ή όχι.)

(β) Πόσο κατά προσέγγιση μεγάλος πρέπει να είναι ο θετικός ακέραιος αριθμός m ούτως ώστε εάν $N = 10^m$, τότε $s_N > 100$;

[10] Σ. τ. Μ.: Leonhard Euler (1707-1783). Μεγαλοφυής Ελβετός μαθηματικός. Ασχολήθηκε με πολλούς τομείς των Μαθηματικών και της Φυσικής και θεωρείται ως ο παραγωγικότερος μαθηματικός στην Ιστορία των Μαθηματικών.

Ο Euler εισήχθη στο Πανεπιστήμιο της Βασιλείας το έτος 1720, έχοντας αποκτήσει ήδη την

Άσκηση 10. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum 1/p$ αποκλίνει, όπου το άθροισμα λαμβάνεται υπεράνω όλων των πρώτων αριθμών p.

(Αυτό φανερώνει ότι το σύνολο των πρώτων αριθμών είναι αρκετά μεγάλο υποσύνολο των θετικών ακεραίων.)

Υπόδειξη: Δεδομένου θετικού ακεραίου αριθμού N, ας είναι $p_1, \ldots, p_k$ οι πρώτοι αριθμοί που διαιρούν τουλάχιστον ένα θετικό ακέραιο αριθμό

απαιτούμενη μόρφωση, για να σπουδάσει Θεολογία και Εβραϊκά, σύμφωνα με την επιταγή του ιερέα πατέρα του. Σύντομα κέρδισε την προσοχή του Johann Bernoulli (1667-1748), με την μεσολάβηση του οποίου επείσθη ο πατέρας του Euler ούτως ώστε να επιτρέψει στον υιό του να σπουδάσει Μαθηματικά. Ο Euler έλαβε το πτυχίο του το έτος 1722 και το μεταπτυχιακό του δίπλωμά του το έτος 1724. Δύο έτη αργότερα ο Euler έλαβε ένα βραβείο από την Ακαδημία των Επιστημών των Παρισίων σε ένα θέμα ναυσιπλοΐας. Το έτος 1727, με την προτροπή και υποστήριξη των Nicholas Bernoulli (1687-1759) και Daniel Bernoulli (1700-1782), ο Euler πήγε στην Πετρούπολη, όπου και προσελήφθη ως συνεργάτης της νεοϊδρυθείσας Ακαδημίας των Επιστημών της Πετρουπόλεως, στο τμήμα της Ιατρικής. Επίσης, κατά τα έτη 1727 έως και 1730, ο Euler υπηρέτησε ως υπολοχαγός στο Ρωσικό ναυτικό. Το έτος 1730 ο Euler έγινε καθηγητής Φυσικής της Ακαδημίας και τρία έτη αργότερα καθηγητής Μαθηματικών. Το έτος 1733 ο Euler παντρεύτηκε. Περί το έτος 1735 έχασε την όραση του από το δεξιό του μάτι, λόγω μίας ασθένειας που προκλήθηκε από την ακατάπαυστη εργασία.

Ύστερα από πρόσκληση του Φρειδερίκου του Μεγάλου, ο Euler πήγε στο Βερολίνο, το έτος 1741, με σκοπό να ενταχθεί στην Ακαδημία των Επιστημών του Βερολίνου. Επέστρεψε στην Πετρούπολη το έτος 1766, λόγω διαφορών με τον Φρειδερίκο τον Μεγάλο. Σύντομα, έχασε και την όρασή του από το άλλο του μάτι, ύστερα από μία εγχείρηση καταρράκτη. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι η παραγωγικότητα του Euler διπλασιάσθηκε ύστερα από την πλήρη απώλεια της οράσεώς του. Το έτος 1776, ύστερα από τον θάνατο της γυναίκας του, ο Euler παντρεύτηκε και πάλι. Συνολικά, απέκτησε δεκατρία παιδιά, εκ των οποίων έζησαν μόνον τα πέντε. Πέθανε από καρδιακή προσβολή, στην ηλικία των εβδομήντα επτά ετών, σε μία στιγμή που έπαιζε με τα παιδιά του.

Το έργο του Euler αποτελείται από 886 άρθρα και βιβλία. Ο όγκος του έργου του υπολογίζεται σε περίπου ογδόντα τόμους μεγάλου μεγέθους, οκτακοσίων σελίδων ο καθένας.

μικρότερο ή ίσο του N. Τότε,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} &\leq \prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{p_j}+\frac{1}{p_j^2}+\cdots\right)\\ &= \prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)^{-1}\\ &\leq \exp\sum_{j=1}^{k}\frac{2}{p_j}.\end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα προκύπτει διότι ισχύει ότι

$$(1-x)^{-1} \leq e^{2x}$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x με $0 \leq x \leq 1/2$.

(Υπάρχουν αρκετές αποδείξεις αυτού του γεγονότος. Για του λόγου το αληθές, ανατρέξτε στα άρθρα των I. Niven στο *Amer. Math. Monthly*, vol. 78, 1971, pp. 272-273 και R. Bellman στο *Amer. Math. Monthly*, vol. 50, 1943, pp. 318-319.)

Άσκηση 11. Υποθέτουμε ότι f είναι μία πραγματική συνάρτηση στον R^1 με $f \in \mathcal{R}$ στο $[0, A]$ για κάθε θετικό αριθμό A. Υποθέτουμε επίσης ότι $f(x) \to 1$ καθώς $x \to +\infty$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{t\to 0} t\int_0^{\infty} e^{-tx} f(x)dx = 1,$$

όπου το όριο θεωρείται ότι λαμβάνεται εκ δεξιών του 0.

Άσκηση 12. Υποθέτουμε ότι δ είναι ένας πραγματικός αριθμός με $0 < \delta < \pi$. Θεωρούμε μία συνάρτηση f, ορισμένη στον R^1, περιόδου 2π, με $f(x) = 1$ εάν x είναι πραγματικός αριθμός με $|x| < \delta$ και $f(x) = 0$ εάν x είναι πραγματικός αριθμός με $\delta < |x| \leq \pi$.

(α) Υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f.

(β) Συμπεράνετε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\delta)}{n} = \frac{\pi-\delta}{2}.$$

(γ) Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Parseval για να αποδείξετε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\delta)}{n^2\delta} = \frac{\pi - \delta}{2}.$$

(δ) Λάβετε $\delta \to 0$ και αποδείξτε ότι

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$

(ε) Θεωρήστε $\delta = \pi/2$ στο (γ). Τι προκύπτει;

Άσκηση 13. Θεωρούμε μία συνάρτηση f, ορισμένη στον R^1, περιόδου 2π, με $f(x) = x$ για κάθε πραγματικό αριθμό x με $0 \leq x < 2\pi$. Εφαρμόστε το θεώρημα του Parseval για να αποδείξετε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Άσκηση 14. Θεωρούμε μία συνάρτηση f, ορισμένη στον R^1, περιόδου 2π, με $f(x) = (\pi - |x|)^2$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi)$. Αποδείξτε ότι

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos nx$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x και συνάγετε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(Ένα άρθρο του E. L. Stark περιέχει πολλές αναφορές σε σειρές της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, όπου s είναι θετικός ακέραιος αριθμός. Το άρθρο αυτό βρίσκεται στο *Math. Mag.*, vol. 47, 1974, pp. 197-202.)

Άσκηση 15. Για μη αρνητικό ακέραιο αριθμό N και πραγματικό αριθμό x θέτουμε

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} D_n(x),$$

όπου D_n $(n = 0, 1, 2, \dots)$ είναι ο πυρήνας του Dirichlet[11] , όπως ορίζεται όπως στην (77). Αποδείξτε ότι

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \cdot \frac{1 - \cos(N+1)x}{1 - \cos x}$$

και ότι

(α) $K_N \geq 0$,

[11] Σ. τ. Μ.: Gustav Peter Lejeune Dirichlet (1805-1859). Βέλγος μαθηματικός. Εργάσθηκε κυρίως στην Ανάλυση, στη Θεωρία Αριθμών καθώς και στη Φυσική.

Ο Dirichlet από μικρός είχε αναπτύξει μεγάλο πάθος για τα Μαθηματικά. Χαρακτηριστικό είναι το γεγονός ότι ξόδευε όλο το χαρτζιλίκι του (το οποίο δεν του έλειπε διότι η οικονομική κατάσταση της οικογενείας του ήταν άριστη) για την αγορά βιβλίων Μαθηματικών. Φοίτησε στο γυμνάσιο της Βόννης και στο κολέγιο των Ιησουιτών στην Κολονία, όπου είχε ως καθηγητή τον γνωστό φυσικό Georg Simon Ohm (1789-1854), και ήταν άριστος μαθητής. Τελειώνοντας τον μέσο κύκλο σπουδών του, ο Dirichlet ενεγράφη το έτος 1822 στο Πανεπιστήμιο των Παρισίων. Εκεί σπούδασε υπό τους Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), Pierre Simon Laplace (1749-1827), Adrien Marie Legendre (1752-1833), Siméon Denis Poisson (1781-1840), Sylvestre François Lacroix (1765-1843), Jean Baptiste Biot (1774-1862), Jean Nicolas Pierre Hachette (1769-1834) και Louis Francoeur (1773-1849). Μελέτησε εμβριθώς τα έργα του Carl Friedrich Gauss (1777-1855) και υπήρξε ένας από τους πιο ένθερμους υποστηρικτές του. Στο Παρίσι, ο Dirichlet εργάσθηκε και ως οικοδιδάσκαλος στην οικία ενός στρατηγού, όπου και διέμενε, παραλλήλως προς τις μελέτες του.

Ο Dirichlet επέστρεψε στη Γερμανία, το έτος 1826, και ανεκηρύχθη επίτιμος διδάκτορας του Πανεπιστημίου της Κολονίας ούτως ώστε να έχει και τα τυπικά προσόντα για να διδάξει σε γερμανικά πανεπιστήμια, διότι ήδη ήταν καταξιωμένος μαθηματικός. Το επόμενο έτος ο Dirichlet δίδαξε στο Πανεπιστήμιο του Breslau και το μεθεπόμενο εγκαταστάθηκε στο Βερολίνο, όπου και παρέμεινε έως το 1855, ως καθηγητής του Πανεπιστημίου του Βερολίνου. Για ένα μικρό χρονικό διάστημα υπήρξε καθηγητής και στο Στρατιωτικό Κολέγιο του Βερολίνου. Το έτος 1831 ο Dirichlet εξελέγη μέλος της Ακαδημίας των Επιστημών του Βερολίνου. Την ίδια περίοδο παντρεύτηκε την αδελφή του διάσημου μουσουργού Felix Mendelssohn. Το έτος 1843 ο Dirichlet πήρε δεκαοκτάμηνη άδεια και πήγε στην Ιταλία μαζί με τον καλό του φίλο Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), όπου και είχαν επαφές με διαφόρους μαθηματικούς. Το έτος 1855 ο Dirichlet διαδέχθηκε τον Gauss στο Πανεπιστήμιο του Göttingen, λόγω του θανάτου του τελευταίου. Παρέμεινε στη θέση αυτή έως τον θάνατό του, ο οποίος επήλθε από καρδιακή προσβολή, το έτος 1858.

Ο Dirichlet θεωρείται ότι έθεσε με την εργασία του τα θεμέλια για την Αναλυτική Θεωρία Αριθμών. Επίσης, θεωρείται ο πατέρας της σύγχρονης Θεωρίας Τριγωνομετρικών Σειρών.

(β) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(x)dx = 1$,

(γ) $K_N(x) \leq \dfrac{1}{N+1} \cdot \dfrac{2}{1-\cos\delta}$ εάν $0 < \delta \leq |x| \leq \pi$.

Εάν $s_N = s_N(f, x)$ είναι το N τάξεως μερικό άθροισμα της σειράς Fourier μίας συναρτήσεως f στο σημείο x, τότε θεωρούμε τον αριθμητικό μέσο

$$\sigma_N = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_N}{N+1}.$$

Αποδείξτε ότι

$$\sigma_N(f, x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_N(t)dt$$

και συνάγετε το θεώρημα του Fejér[12]:

Εάν η f είναι συνεχής συνάρτηση περιόδου 2π, τότε $\sigma_N(f, x) \to f(x)$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$, ομοιομόρφως.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τα μέρη (α), (β) και (γ) και εργασθείτε όπως στο Θεώρημα 7.26.

Άσκηση 16. Αποδείξτε μία ασθενέστερη εκδοχή του θεωρήματος του Fejér:

[12] Σ. τ. Μ.: Lipót Fejér (1880-1959). Ούγγρος μαθηματικός. Το πραγματικό του όνομα ήταν Leopold Weiss, το οποίο και άλλαξε περί το έτος 1900. Εργάσθηκε κυρίως στην Αρμονική Ανάλυση.

Στην ηλικία των δεκαεννέα ετών ο Fejér κέρδισε ένα βραβείο σε έναν από τους πρώτους διαγωνισμούς Μαθηματικών της Ουγγαρίας. Από το έτος αυτό έως το 1902 σπούδασε Μαθηματικά στο Πανεπιστήμιο της Βουδαπέστης και στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου, όπου και φοίτησε υπό τον Hermann Amandus Schwarz (1843-1921). Ο τελευταίος δεν δεχόταν πλέον να του μιλά όταν ο Fejér άλλαξε το όνομά του. Έλαβε το διδακτορικό του δίπλωμα το έτος 1902 από το Πανεπιστήμιο της Βουδαπέστης.

Κατά τα έτη 1902 έως και 1905, ο Fejér δίδαξε στο Πανεπιστήμιο της Βουδαπέστης και κατά τα έτη 1905 έως και 1911 δίδαξε στο Πανεπιστήμιο του Kolozvár της Ουγγαρίας (τώρα Cluj της Ρουμανίας). Το έτος 1911 ο Fejér διορίσθηκε στην έδρα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου της Βουδαπέστης, θέση που κράτησε έως τον θάνατό του.

Ο Fejér ήταν ο καθοδηγητής του ρεύματος της Αναλύσεως στην Ουγγαρία. Μεταξύ των συνεργατών του συγκαταλέγονται ο μεγάλος Έλληνας μαθηματικός Κωνσταντίνος Καραθεοδωρής (1873-1950) και ο Frigyes Riesz (1880-1956).

Εάν f είναι μία συνάρτηση περιόδου 2π με $f \in \mathcal{R}$ στο $[-\pi, \pi]$ και την ιδιότητα ότι τα $f(x+)$, $f(x-)$ υπάρχουν σε κάποιο σημείο x, τότε

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N(f, x) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)].$$

Άσκηση 17. Υποθέτουμε ότι f είναι μία συνάρτηση στο R^1 περιόδου 2π, φραγμένη και μονότονη στο $[-\pi, \pi)$ με συντελεστές Fourier τους αριθμούς $\dots c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2 \dots$, όπως αυτοί ορίζονται στην (62).

(α) Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 17 του Κεφαλαίου 6 για να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\{nc_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι φραγμένη.

(β) Συνδυάστε το μέρος (α) με την Άσκηση 16 και την Άσκηση 14(ε) του Κεφαλαίου 3 για να αποδείξετε ότι

$$\lim_{N\to\infty} s_N(f, x) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x.

(γ) Υποθέτουμε μόνον ότι $f \in \mathcal{R}$ στο $[-\pi, \pi]$ και ότι η f είναι μονότονη σε κάποιο ανοικτό διάστημα $(\alpha, \beta) \subset [-\pi, \pi]$. Αποδείξτε ότι το συμπέρασμα του (β) ισχύει για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

(Το παραπάνω αποτελεί εφαρμογή του θεωρήματος επιτοπίσεως).

Άσκηση 18. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g, όπου για $x \in R^1$ είναι

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - \sin^2 x \tan x \\ g(x) &= 2x^2 - \sin^2 x - x \tan x. \end{aligned}$$

Για κάθε μία από αυτές τις συναρτήσεις διαπιστώστε εάν είναι θετικές ή αρνητικές στο $(0, \pi/2)$ ή εάν αλλάζουν πρόσημο. Τεκμηριώστε την απάντηση σας.

Άσκηση 19. Υποθέτουμε ότι f είναι μία συνάρτηση στον R^1 περιόδου 2π και ότι α είναι ένας πραγματικός αριθμός ούτως ώστε ο α/π να είναι άρρητος. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x + n\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Υπόδειξη: Αποδείξτε το συμπέρασμα πρώτα για τη συνάρτηση e^{ikx}.

Άσκηση 20. Ο ακόλουθος υπολογισμός χορηγεί μία καλή προσέγγιση στον τύπο του Stirling.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g στο $[1, +\infty)$ όπου για $m = 1, 2, 3, \ldots$ είναι

$$f(x) = (m + 1 - x)\log m + (x - m)\log(m + 1)$$

όταν $m \leq x < m + 1$ και

$$g(x) = \frac{x}{m} - 1 + \log m$$

όταν $m - \frac{1}{2} \leq x \leq m + \frac{1}{2}$. Σχεδιάστε τα γραφήματα των f και g. Σημειώνουμε ότι $f(x) \leq \log x \leq g(x)$ για κάθε πραγματικό αριθμό x με $x \geq 1$ και ότι

$$\int_1^n f(x)dx = \log(n!) - \frac{1}{2}\log n > -\frac{1}{8} + \int_1^n g(x)dx$$

για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n. Ολοκληρώστε την $\log x$ υπεράνω του διαστήματος $[1, n]$. Συμπεράνετε ότι

$$\frac{7}{8} < \log(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n + n < 1$$

για $n = 2, 3, 4, \ldots$. (*Σημείωση:* $\log\sqrt{2\pi} = 0.918\ldots$.) Συνεπώς,

$$e^{7/8} < \frac{n!}{(n/e)^n\sqrt{n}} < e.$$

Άσκηση 21. Για $n = 1, 2, 3, \ldots$ θέτουμε

$$L_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει αριθμός $C > 0$ ούτως ώστε

$$L_n > C\log n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ή ακριβέστερα ότι η ακολουθία

$$\left\{L_n - \frac{4}{\pi^2}\log n\right\} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

είναι φραγμένη.

Άσκηση 22. Ας είναι α ένας πραγματικός αριθμός και x ένας πραγματικός αριθμός με $-1 < x < 1$. Αποδείξτε τον *δυωνυμικό τύπο του Newton*

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Υπόδειξη: Συμβολίζουμε τη δεξιά πλευρά της ισότητας με $f(x)$. Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει. Αποδείξτε ότι

$$(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$$

για κάθε $x \in (1, -1)$. Επιλύστε αυτήν τη διαφορική εξίσωση.

Δείξτε επίσης ότι

$$(1-x)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} x^n$$

για κάθε $x \in (1, -1)$ και $\alpha > 0$.

Άσκηση 23. Θεωρούμε μία συνεχώς παραγωγίσιμη *κλειστή* καμπύλη γ του μιγαδικού επιπέδου με διάστημα παραμετρήσεως το $[a, b]$. Υποθέτουμε ότι $\gamma(t) \neq 0$ για κάθε $t \in [a, b]$. Ορίζουμε τον *δείκτη* της γ ως

$$\operatorname{Ind}(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt.$$

Αποδείξτε ότι ο $\operatorname{Ind}(\gamma)$ είναι πάντοτε ακέραιος αριθμός.

Υπόδειξη: Υπάρχει συνάρτηση ϕ, ορισμένη στο $[a, b]$, με $\phi' = \gamma'/\gamma$ και $\phi(a) = 0$. Συνεπώς, η $\gamma \exp(-\phi)$ είναι σταθερή. Εφόσον $\gamma(a) = \gamma(b)$, έπεται ότι $\exp \phi(b) = \exp \phi(a) = 1$. Σημειώστε ότι $\phi(b) = 2\pi i \operatorname{Ind}(\gamma)$.

Υπολογίστε τον $\operatorname{Ind}(\gamma)$ όταν $a = 0$, $b = 2\pi$ και $\gamma(t) = e^{int}$ ($t \in [0, 2\pi]$).

Εξηγήστε γιατί ο αριθμός $\operatorname{Ind}(\gamma)$ ονομάζεται *αριθμός περιστροφής* της γ γύρω από το 0.

Άσκηση 24. Ας είναι γ όπως στην Άσκηση 23. Υποθέτουμε επιπλέον ότι το πεδίο τιμών της γ δεν τέμνει τον άξονα των αρνητικών πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι $\operatorname{Ind}(\gamma) = 0$.

Υπόδειξη: Για $c \in [0, +\infty)$ η $\operatorname{Ind}(\gamma + c)$ είναι συνεχής συνάρτηση του c με ακέραιες τιμές. Επίσης, $\operatorname{Ind}(\gamma + c) \to 0$ καθώς $c \to +\infty$.

Άσκηση 25. Υποθέτουμε ότι γ_1 και γ_2 είναι καμπύλες όπως στην Άσκηση 23 με την ιδιότητα ότι

$$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |\gamma_1(t)| \qquad (a \leq t \leq b).$$

Αποδείξτε ότι $\operatorname{Ind}(\gamma_1) = \operatorname{Ind}(\gamma_2)$.

Υπόδειξη: Θέτουμε $\gamma = \gamma_2/\gamma_1$. Τότε, $|1 - \gamma| < 1$. Συνεπώς, ισχύει ότι $\operatorname{Ind}(\gamma) = 0$, σύμφωνα με την Άσκηση 24. Επίσης,

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\gamma_2'}{\gamma_2} - \frac{\gamma_1'}{\gamma_1}.$$

Άσκηση 26. Ας είναι γ μία *κλειστή* καμπύλη του μιγαδικού επιπέδου (όχι απαραιτήτως παραγωγίσιμη) με διάστημα παραμετρήσεως το $[0, 2\pi]$ ούτως ώστε $\gamma(t) \neq 0$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$.

Θεωρούμε $\delta > 0$ ούτως ώστε $|\gamma(t)| > \delta$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$. Εάν P_1 και P_2 είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα με $|P_j(t) - \gamma(t)| < \delta/4$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$ και $j = 1, 2$ (η ύπαρξη τους εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 8.15), τότε αποδείξτε ότι

$$\operatorname{Ind}(P_1) = \operatorname{Ind}(P_2),$$

εφαρμόζοντας την Άσκηση 25.

Ορίζουμε ως $\operatorname{Ind}(\gamma)$ αυτήν την κοινή τιμή.

Αποδείξτε ότι οι ισχυρισμοί των Ασκήσεων 24 και 25 παραμένουν αληθείς δίχως την υπόθεση περί παραγωγισιμότητας.

Άσκηση 27. Θεωρούμε μία μιγαδική συνεχή συνάρτηση f, ορισμένη στο μιγαδικό επίπεδο. Υποθέτουμε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος αριθμός n και μιγαδικός αριθμός $c \neq 0$ ούτως ώστε

$$\lim_{|z| \to \infty} z^{-n} f(z) = c.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει μιγαδικός αριθμός z με $f(z) = 0$.

Σημειώνουμε ότι αυτό το γεγονός αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος 8.8.

Υπόδειξη: Υποθέτουμε ότι $f(z) \neq 0$ για κάθε μιγαδικό αριθμό z. Για $r \in [0, +\infty)$, $t \in [0, 2\pi]$ ορίζουμε

$$\gamma_r(t) = f(re^{it}).$$

Αποδείξτε τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

(α) $\mathrm{Ind}(\gamma_0) = 0$.

(β) $\mathrm{Ind}(\gamma_r) = n$ για κάθε επαρκώς μεγάλο θετικό αριθμό r.

(γ) Η $\mathrm{Ind}(\gamma_r)$ είναι συνεχής συνάρτηση του r στο $[0, \infty)$.

(Στα (β) και (γ) χρησιμοποιήστε το τελευταίο μέρος της Ασκήσεως 26.)

Αποδείξτε ότι τα (α), (β) και (γ) είναι αντικρουόμενα μεταξύ τους εφόσον $n > 0$.

Άσκηση 28. Ας είναι $\overline{D}$ ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος στο μιγαδικό επίπεδο. (Δηλαδή, $z \in \overline{D}$ εάν και μόνον εάν $|z| \leq 1$.) Θεωρούμε μία απεικόνιση g του $\overline{D}$ στον μοναδιαίο κύκλο T. (Δηλαδή, $|g(z)| = 1$ για κάθε $z \in \overline{D}$.)

Αποδείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $z \in T$ με $g(z) = -z$.

Υπόδειξη: Για $r \in [0, 1]$, $t \in [0, 2\pi]$ θέτουμε

$$\gamma_r(t) = g(re^{it}).$$

Επίσης, για $t \in [0, 2\pi]$ θέτουμε $\psi(t) = e^{-it}\gamma_1(t)$. Εάν $g(z) \neq -z$ για κάθε $z \in T$, τότε $\psi(t) \neq -1$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$. Άρα, $\mathrm{Ind}(\psi) = 0$, σύμφωνα με τις Ασκήσεις 24 και 26. Συνεπώς, $\mathrm{Ind}(\gamma_1) = 1$. Όμως, $\mathrm{Ind}(\gamma_0) = 0$. Καταλήξτε σε αντίφαση, όπως στην Άσκηση 27.

Άσκηση 29. Αποδείξτε ότι κάθε συνεχής απεικόνιση f του $\overline{D}$ στο $\overline{D}$ έχει σταθερό σημείο στο $\overline{D}$.

(Αυτό είναι το διδιάστατο ανάλογο του *θεωρήματος σταθερού σημείου του Brouwer*[13].)

[13] Σ. τ. Μ.: Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1882-1966). Ολλανδός μαθηματικός, από τους διαπρεπέστερους του εικοστού αιώνα. Υπήρξε ο ιδρυτής του δόγματος της Μαθηματικής Διαισθησιοκρατίας. Ήταν ένας από τους βασικούς πρωτεργάτες της Τοπολογίας και κατά την γνώμη πολλών θεωρείται ο θεμελιωτής της.

Υπόδειξη: Υποθέτουμε ότι $f(z) \neq z$ για κάθε $z \in \overline{D}$. Σε κάθε $z \in \overline{D}$ αντιστοιχίζουμε το σημείο $g(z) \in T$, το οποίο βρίσκεται στο ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινά από το $f(z)$ και περνά από το z. Τότε, η συνάρτηση g απεικονίζει το $\overline{D}$ στο T, ισχύει ότι $g(z) = z$ για κάθε $z \in T$ και η g είναι συνεχής, διότι για κάθε $z \in \overline{D}$ ισχύει ότι

$$g(z) = z - s(z)[f(z) - z],$$

όπου ο αριθμός $s(z)$ είναι η μοναδική μη αρνητική θέση μηδενισμού μίας δευτεροβάθμιας εξισώσεως, οι συντελεστές της οποίας είναι συνεχείς συναρτήσεις των f και z. Εφαρμόστε την Άσκηση 28.

Ο Brouwer έλαβε το διδακτορικό του δίπλωμα από το Πανεπιστήμιο του Amsterdam το έτος 1907, σε θέμα περί των θεμελίων των Μαθηματικών. Περί το έτος 1909 εργάσθηκε αμισθεί ως υφηγητής στο Πανεπιστήμιο του Amsterdam. Από το έτος 1912 έως και το 1951 ο Brouwer κατείχε την θέση τακτικού καθηγητή στη Θεωρία Συνόλων και στη Θεωρία Συναρτήσεων του Πανεπιστημίου του Amsterdam. Κατά την διάρκεια των ετών 1909 έως και 1913 έκανε σχεδόν όλη την εργασία του στην Τοπολογία.

Ο Brouwer απέρριπτε στις αποδείξεις του την Αρχή του Αποκλειομένου Τρίτου. Εξέδωσε μία Θεωρία Συνόλων (1918), μία Θεωρία Μέτρου (1919) και μία Θεωρία Συναρτήσεων (1923), χωρίς να χρησιμοποιήσει την Αρχή του Αποκλειομένου Τρίτου. Το δόγμα του ερχόταν σε ουσιώδη αντίθεση με την Τυποκρατία του David Hilbert (1862-1943) και τον Λογικισμό του Bertrand Russell (1872-1970), τα οποία ήταν τα υπόλοιπα σπουδαιότερα φιλοσοφικά ρεύματα των Μαθηματικών στις αρχές του εικοστού αιώνα.

Κεφάλαιο 9

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Ξεκινούμε αυτό το κεφάλαιο με μία ορισμένης εκτάσεως πραγμάτευση συνόλων διανυσμάτων στον Ευκλείδειο χώρο R^n. Τα αλγεβρικά αποτελέσματα που εκτίθενται σε αυτό το εδάφιο επεκτείνονται δίχως αλλαγές σε πεπερασμένης διαστάσεως διανυσματικούς χώρους υπεράνω οποιουδήποτε σώματος. Είναι όμως επαρκές να παραμείνουμε στο οικείο πλαίσιο εργασίας που καθορίζεται από τους Ευκλείδειους χώρους.

Ορισμός 9.1.

(α) Ένα μη κενό σύνολο $X \subset R^n$ ονομάζεται *διανυσματικός χώρος* εάν και μόνον εάν $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in X$ και $c\mathbf{x} \in X$ για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ και κάθε πραγματικό αριθμό c.

(β) Εάν $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in R^n$ και $c_1, \ldots, c_k$ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε το διάνυσμα

$$c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k$$

ονομάζεται *γραμμικός συνδυασμός* των $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$. Εάν $S \subset R^n$, τότε λέγεται ότι το S *παράγει* το σύνολο E ή ότι το E είναι το *επέκταμα* του S εάν και μόνον εάν το E είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του S.

Παρατηρούμε ότι κάθε επέκταμα συνόλου είναι διανυσματικός χώρος.

(γ) Ένα σύνολο αποτελούμενο από τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ (για ένα σύνολο αυτής της μορφής χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$) ονομάζεται *ανεξάρτητο* εάν και μόνον εάν η σχέση $c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ ($c_1, \ldots, c_k \in R^1$) συνεπάγεται ότι $c_1 = \cdots = c_k = 0$. Στην αντίθετη περίπτωση, το $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ ονομάζεται *εξαρτημένο*.

Παρατηρούμε ότι ένα ανεξάρτητο σύνολο δεν περιέχει το μηδενικό διάνυσμα.

(δ) Ένας διανυσματικός χώρος X λέγεται ότι έχει *διάσταση* r εάν και μόνον εάν περιέχει ένα ανεξάρτητο σύνολο r διανυσμάτων και δεν περιέχει κανένα ανεξάρτητο υποσύνολο $r + 1$ διανυσμάτων. Σε αυτήν την περίπτωση, γράφουμε $\dim X = r$.

Το σύνολο που αποτελείται από το $\mathbf{0}$ είναι διανυσματικός χώρος. Η διάστασή του είναι 0.

(ε) Ένα ανεξάρτητο υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου X που παράγει τον X ονομάζεται *(διανυσματική) βάση* του X.

Παρατηρούμε ότι εάν $B = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r\}$ είναι μία βάση του X, τότε κάθε $\mathbf{x} \in X$ έχει μονοσήμαντη αναπαράσταση της μορφής $\sum_{j=1}^{r} c_j\mathbf{x}_j$. Τέτοιου είδους αναπαράσταση όντως υφίσταται διότι το B παράγει τον X και είναι μονοσήμαντη διότι το B είναι ανεξάρτητο. Οι αριθμοί $c_1, \ldots, c_r$ ονομάζονται *συντεταγμένες* του $\mathbf{x}$ αναφορικά με τη βάση B.

Το γνωστότερο παράδειγμα βάσεως είναι το σύνολο $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, όπου για $j = 1, 2, \ldots, n$ $\mathbf{e}_j$ είναι το διάνυσμα στον R^n με j-συνιστώσα 1 και όλες τις άλλες 0. Εάν $\mathbf{x} \in R^n$ με $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, τότε $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j$. Το σύνολο

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$$

ονομάζεται η *συνήθης βάση* του R^n.

Θεώρημα 9.2. *Θεωρούμε έναν θετικό ακέραιο αριθμό r. Εάν ένας διανυσματικός χώρος X παράγεται από ένα σύνολο r διανυσμάτων, τότε* $\dim X \leq r$.

Απόδειξη. Εάν αυτό ήταν ψευδές, τότε θα υπήρχε ένας διανυσματικός χώρος X που περιέχει ένα ανεξάρτητο σύνολο $Q = \{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{r+1}\}$ και που παράγεται από ένα σύνολο S_0 αποτελούμενο από r διανύσματα.

Υποθέτουμε ότι $0 \leq i < r$ και ότι έχει κατασκευασθεί ένα σύνολο S_i το οποίο παράγει τον X και αποτελείται από τα διανύσματα $\mathbf{y}_j$, όπου $1 \leq j \leq i$, μαζί με τα $r - i$ διανύσματα $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{r-i}$ του S_0. (Δηλαδή, το S_i προκύπτει από το S_0 αντικαθιστώντας i από τα στοιχεία του Q, δίχως να μεταβληθεί το επέκταμα.) Εφόσον το S_i παράγει τον X, το $\mathbf{y}_{i+1}$ βρίσκεται στο επέκταμα του S_i. Επομένως, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $a_1, \ldots, a_{i+1}, b_1, \ldots, b_{r-i}$ με $a_{i+1} = 1$ ούτως ώστε

$$\sum_{j=1}^{i+1} a_j \mathbf{y}_j + \sum_{k=1}^{r-i} b_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}.$$

Εάν οι $b_1 \ldots, b_{r-i}$ ήταν όλοι ίσοι με 0, τότε η ανεξαρτησία του Q θα συνεπαγόταν το μηδενισμό των $a_1, \ldots, a_{i+1}$, γεγονός αδύνατο. Από αυτό έπεται ότι κάποιο $\mathbf{x}_k \in S_i$ είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων στοιχείων του $T_i = S_i \cup \{\mathbf{y}_{i+1}\}$. Εξαιρούμε το στοιχείο αυτό από το T_i και ονομάζουμε το εναπομείναν σύνολο S_{i+1}. Τότε, το S_{i+1} παράγει επίσης τον X και έχει τις ίδιες ιδιότητες όπως το S_i, με το $i + 1$ στη θέση του i.

Επομένως, ξεκινώντας με το S_0, κατασκευάζουμε τα σύνολα $S_1, \ldots, S_r$. Το τελευταίο αυτών αποτελείται από τα $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r$ και η κατασκευή φανερώνει ότι το σύνολο αυτό παράγει τον X. Όμως, το Q είναι ανεξάρτητο και επομένως το $\mathbf{y}_{r+1}$ δεν βρίσκεται στο επέκταμα του S_r. Χάρη σε αυτήν την αντίφαση αποδεικνύεται το θεώρημα. □

Πόρισμα. *Ισχύει ότι* $\dim R^n = n$.

Απόδειξη. Εφόσον το $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ παράγει το R^n, το προηγούμενο θεώρημα φανερώνει ότι $\dim R^n \leq n$. Εφόσον το $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ είναι ανεξάρτητο, ισχύει επίσης ότι $\dim R^n \geq n$. □

Θεώρημα 9.3. *Υποθέτουμε ότι* X *είναι ένας διανυσματικός χώρος με* $\dim X = n$.

(α) *Ένα σύνολο* E *αποτελούμενο από* n *διανύσματα του* X *παράγει τον* X *εάν και μόνον εάν το* E *είναι ανεξάρτητο.*

(β) *Το* X *περιέχει μία βάση και κάθε βάση αποτελείται από* n *διανύσματα.*

(γ) *Εάν* $1 \leq r \leq n$ *και εάν το* $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r\}$ *είναι ανεξάρτητο υποσύνολο του* X, *τότε ο* X *έχει μία βάση που περιέχει το* $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r\}$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $E = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$. Εφόσον $\dim X = n$, το σύνολο $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}\}$ είναι εξαρτημένο για κάθε $\mathbf{y} \in X$. Εάν το E είναι ανεξάρτητο, τότε το $\mathbf{y}$ βρίσκεται στο επέκταμα του E. Άρα, το E παράγει τον X. Αντιστρόφως, εάν το E είναι εξαρτημένο, τότε μπορεί να εξαιρεθεί κάποιο στοιχείο του E, δίχως να μεταβληθεί το επέκταμα του E. Συνεπώς, το E δεν μπορεί να παράγει τον X, σύμφωνα με το Θεώρημα 9.2. Αυτό αποδεικνύει το (α).

Εφόσον $\dim X = n$, ο X περιέχει ένα ανεξάρτητο σύνολο n διανυσμάτων και το (α) φανερώνει ότι αυτό το σύνολο είναι βάση του X. Το (β) έπεται από το 9.1(δ) και το 9.2.

Για την απόδειξη του (γ), θεωρούμε μία βάση $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ του X. Το σύνολο

$$S = \{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$$

παράγει τον X και είναι εξαρτημένο, εφόσον περιέχει περισσότερα από n διανύσματα. Το επιχείρημα που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του

Θεωρήματος 9.2 φανερώνει ότι κάποιο από τα $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων στοιχείων του S. Εάν εξαιρέσουμε αυτό το στοιχείο, το εναπομείναν σύνολο παράγει επίσης τον X. Αυτή η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί r φορές και να μας οδηγήσει σε μία βάση του X που περιέχει το $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r\}$, σύμφωνα με το (α). □

Ορισμός 9.4. Μία απεικόνιση A ενός διανυσματικού χώρου X σε έναν διανυσματικό χώρο Y ονομάζεται *γραμμικός μετασχηματισμός* (ή *γραμμική απεικόνιση*) εάν και μόνον εάν

$$\begin{aligned} &A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2, \\ &A(c\mathbf{x}) = cA\mathbf{x} \end{aligned}$$

για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ και κάθε πραγματικό αριθμό c. Σημειώνουμε ότι συχνά χρησιμοποιείται η γραφή $A\mathbf{x}$ αντί της $A(\mathbf{x})$ όταν ο A είναι γραμμικός μετασχηματισμός.

Παρατηρούμε ότι $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ όταν η A είναι γραμμική. Επίσης, παρατηρούμε ότι ένας γραμμικός μετασχηματισμός A του X στον Y είναι πλήρως καθορισμένος από τη δράση του επί μίας βάσεως: Εάν $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ είναι μία βάση του X, τότε κάθε $\mathbf{x} \in X$ έχει μονοσήμαντη αναπαράσταση της μορφής

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{x}_i$$

και η γραμμικότητα της A μας επιτρέπει να εκφράσουμε το $A\mathbf{x}$ από τα διανύσματα $A\mathbf{x}_1, \ldots, A\mathbf{x}_n$ και τις συντεταγμένες $c_1, \ldots, c_n$, σύμφωνα με τη σχέση

$$A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i A\mathbf{x}_i.$$

Οι γραμμικοί μετασχηματισμοί του X στον X συχνά ονομάζονται *γραμμικοί τελεστές* του X. Ένας γραμμικός τελεστής A του X λέγεται *αντιστρέψιμος* εάν και μόνον εάν είναι (i) 1-1 και (ii) απεικονίζει τον X επί του X. Σε αυτήν την περίπτωση, μπορούμε να ορίσουμε έναν τελεστή A^{-1} στον X απαιτώντας να ισχύει η ισότητα $A^{-1}(A\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ για κάθε $\mathbf{x} \in X$. Είναι εύκολη η επαλήθευση της ισότητας $A(A^{-1}\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ για κάθε $\mathbf{x} \in X$, καθώς και η επαλήθευση της γραμμικότητας του A^{-1}.

Ένα σημαντικό γεγονός το οποίο σχετίζεται με γραμμικούς τελεστές σε πεπερασμένης διαστάσεως διανυσματικούς χώρους είναι ότι κάθε μία από τις παραπάνω συνθήκες (i) και (ii) συνεπάγεται την άλλη.

Θεώρημα 9.5. *Ένας γραμμικός τελεστής A σε έναν πεπερασμένης διαστάσεως διανυσματικό χώρο X είναι 1-1 εάν και μόνον εάν το πεδίο τιμών του είναι ο X.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μία βάση $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ του X. Η γραμμικότητα του A φανερώνει ότι το πεδίο τιμών $\mathcal{R}(A)$ είναι ακριβώς το επέκταμα του συνόλου $Q = \{A\mathbf{x}_1, \ldots, A\mathbf{x}_n\}$. Συνεπώς, από το Θεώρημα 9.3(α) συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{R}(A) = X$ εάν και μόνον εάν το Q είναι ανεξάρτητο. Θα αποδείξουμε ότι το τελευταίο συμβαίνει εάν και μόνον εάν ο A είναι 1-1.

Υποθέτουμε ότι ο A είναι 1-1 και ότι $\sum_{i=1}^{n} c_i A\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ για κάποιους πραγματικούς αριθμούς $c_1, \ldots, c_n$. Τότε, $A(\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{x}_i) = \mathbf{0}$ και επομένως $\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$. Άρα, $c_1 = \ldots = c_n = 0$. Από αυτό προκύπτει η ανεξαρτησία του Q.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι το Q είναι ανεξάρτητο.
Ας είναι $A(\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{x}_i) = \mathbf{0}$ για κάποιους πραγματικούς αριθμούς $c_1, \ldots, c_n$. Τότε, $\sum_{i=1}^{n} c_i A\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ και επομένως $c_1 = \ldots = c_n = 0$. Συνεπώς, καταλήγουμε στο εξής: $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ εάν και μόνον εάν $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Εάν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ με $A\mathbf{x} = A\mathbf{y}$, τότε $A(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = A\mathbf{x} - A\mathbf{y} = \mathbf{0}$ και επομένως $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$. Αυτό φανερώνει ότι η A είναι 1-1. □

Ορισμός 9.6.

(α) Συμβολίζουμε με $L(X, Y)$ το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων του διανυσματικού χώρου X στον διανυσματικό χώρο Y. Αντί του $L(X, X)$, γράφουμε απλώς $L(X)$. Εάν $A_1, A_2 \in L(X, Y)$ και εάν c_1, c_2 είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε ορίζουμε την απεικόνιση $c_1A_1 + c_2A_2$ ως

$$(c_1A_1 + c_2A_2)\mathbf{x} = c_1A_1\mathbf{x} + c_2A_2\mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in X).$$

Είναι σαφές ότι $c_1A_1 + c_2A_2 \in L(X, Y)$.

(β) Εάν X, Y, Z είναι διανυσματικοί χώροι και $A \in L(X, Y)$, $B \in L(Y, Z)$, τότε ορίζουμε το *γινόμενο* BA ως τη σύνθεση των A και B:

$$(BA)\mathbf{x} = B(A\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \in X).$$

Τότε, $BA \in L(X, Z)$.

Σημειώνουμε ότι ο BA δεν ισούται απαραιτήτως με τον AB, ακόμη και όταν $X = Y = Z$.

(γ) Για $A \in L(R^n, R^m)$ ορίζουμε ως *στάθμη* $\|A\|$ του A το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου των αριθμών της μορφής $|A\mathbf{x}|$ με $\mathbf{x} \in R^n$ και $|\mathbf{x}| \leq 1$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $\mathbf{x} \in R^n$ ισχύει η ανισότητα

$$|A\mathbf{x}| \leq \|A\||\mathbf{x}|.$$

Επίσης, εάν λ είναι πραγματικός αριθμός με $|A\mathbf{x}| \leq \lambda|\mathbf{x}|$ για κάθε $\mathbf{x} \in R^n$, τότε $\|A\| \leq \lambda$.

Θεώρημα 9.7.

(α) *Εάν $A \in L(R^n, R^m)$, τότε $\|A\| < +\infty$ και η A είναι ομοιομόρφως συνεχής απεικόνιση του R^n στον R^m.*

(β) *Εάν $A, B \in L(R^n, R^m)$ και εάν c είναι πραγματικός αριθμός, τότε*

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \qquad \|cA\| = |c|\|A\|.$$

Λαμβάνοντας ως απόσταση μεταξύ των A, B τον αριθμό $\|A - B\|$, το $L(R^n, R^m)$ καθίσταται μετρικός χώρος.

(γ) *Εάν $A \in L(R^n, R^m)$ και $B \in L(R^m, R^k)$, τότε*

$$\|BA\| \leq \|B\|\|A\|.$$

Απόδειξη.

(α) Ας είναι $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ η συνήθης βάση του R^n. Υποθέτουμε ότι $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n c_i\mathbf{e}_i$, όπου $c_1, \ldots, c_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί, με $|\mathbf{x}| \leq 1$. Επομένως $|c_i| \leq 1$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Τότε,

$$|A\mathbf{x}| = \left|\sum_{i=1}^n c_iA\mathbf{e}_i\right| \leq \sum_{i=1}^n |c_i||A\mathbf{e}_i| \leq \sum_{i=1}^n |A\mathbf{e}_i|$$

και επομένως

$$\|A\| \leq \sum_{i=1}^{n} |A\mathbf{e}_i| < +\infty.$$

Εφόσον $|A\mathbf{x} - A\mathbf{y}| \leq \|A\||\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$, η A είναι ομοιομόρφως συνεχής.

(β) Η ανισότητα του (β) έπεται από τις σχέσεις

$$|(A + B)\mathbf{x}| = |A\mathbf{x} + B\mathbf{x}| \leq |A\mathbf{x}| + |B\mathbf{x}| \leq (\|A\| + \|B\|)|\mathbf{x}|$$

για κάθε $\mathbf{x} \in R^n$ Το δεύτερο μέρος του (β) αποδεικνύεται παρομοίως. Εάν $A, B, C \in L(R^n, R^m)$, τότε λαμβάνουμε την τριγωνική ανισότητα

$$\|A - C\| \leq \|(A - B) + (B - C)\| \leq \|A - B\| + \|B - C\|.$$

Επίσης, εύκολα επαληθεύονται και οι υπόλοιπες ιδιότητες της μετρικής (Ορισμός 2.15).

(γ) Εν τέλει, το (γ) προκύπτει από τις σχέσεις

$$|(BA)\mathbf{x}| = |B(A\mathbf{x})| \leq \|B\||A\mathbf{x}| \leq \|B\|\|A\||\mathbf{x}|$$

για κάθε $\mathbf{x} \in R^n$ □

Εφόσον έχει ορισθεί μετρική στον $L(R^n, R^m)$, υφίστανται σε αυτόν οι έννοιες του ανοικτού συνόλου, της συνέχειας κ. λ. π.. Στο επόμενο θεώρημα οι έννοιες αυτές θα αξιοποιηθούν.

Θεώρημα 9.8. *Ας είναι Ω το σύνολο των αντιστρέψιμων γραμμικών τελεστών του R^n.*

(α) *Εάν $A \in \Omega$, $B \in L(R^n)$ και εάν*

$$\|B - A\|\|A^{-1}\| < 1,$$

τότε $B \in \Omega$.

(β) *Το Ω είναι ανοικτό υποσύνολο του $L(R^n)$ και η απεικόνιση $A \to A^{-1}$ είναι συνεχής στο Ω.*

(Η απεικόνιση αυτή είναι, κατά προφανή τρόπο, 1-1 απεικόνιση του Ω επί του Ω και ισούται με την αντίστροφή της.)

Απόδειξη.

(α) Θέτουμε $\|A^{-1}\| = 1/a$ και $\|B - A\| = b$. Τότε, ισχύει ότι $b < a$. Για οποιοδήποτε $\mathbf{x} \in R^n$ έχουμε ότι

$$a|\mathbf{x}| = a|A^{-1}A\mathbf{x}| \leq a\|A^{-1}\||A\mathbf{x}| = |A\mathbf{x}| \leq |(A-B)\mathbf{x}| + |B\mathbf{x}| \leq b|\mathbf{x}| + |B\mathbf{x}|$$

και επομένως

$$(a-b)|\mathbf{x}| \leq |B\mathbf{x}| \qquad (\mathbf{x} \in R^n). \tag{1}$$

Εφόσον $a - b > 0$, η (1) φανερώνει ότι $B\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ εάν $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Άρα, η B είναι 1-1. Από το Θεώρημα 9.5 προκύπτει ότι $B \in \Omega$. Το τελευταίο ισχύει για κάθε $B \in L(R^n)$ με $\|B - A\| < a$. Συνεπώς, λαμβάνουμε το (α) και ότι το Ω είναι ανοικτό.

(β) Εν συνεχεία, αντικαθιστούμε στην (1) το $\mathbf{x}$ με $B^{-1}\mathbf{y}$. Τότε, η προκύπτουσα ανισότητα

$$(a-b)|B^{-1}\mathbf{y}| \leq |BB^{-1}\mathbf{y}| = |\mathbf{y}| \qquad (\mathbf{y} \in R^n) \tag{2}$$

φανερώνει ότι $\|B^{-1}\| \leq (a-b)^{-1}$. Επομένως, η ισότητα

$$B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}(A-B)A^{-1},$$

συνδυαζόμενη με το Θεώρημα 9.7(γ), συνεπάγεται ότι

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \|B^{-1}\| \; \|(A-B)\| \; \|A^{-1}\| \leq \frac{b}{a(a-b)}.$$

Με αυτήν αποδεικνύεται ο ισχυρισμός περί συνέχειας στο (β), εφόσον $b \to 0$ καθώς $B \to A$. □

9.9 Πίνακες. Υποθέτουμε ότι $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ και $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m\}$ είναι βάσεις των διανυσματικών χώρων X και Y αντιστοίχως. Τότε, κάθε $A \in L(X, Y)$ καθορίζει ένα σύνολο αριθμών a_{ij} $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ ούτως ώστε

$$A\mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{y}_i \qquad (1 \leq j \leq n). \tag{3}$$

Είναι περισσότερο εύχρηστη η τοποθέτηση των αριθμών αυτών σε μία ορθογώνια διάταξη m γραμμών και n στηλών, η οποία ονομάζεται $m \times n$ *πίνακας:*

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι για $j = 1, \ldots, n$ οι συντεταγμένες a_{ij} $(i = 1, \ldots, m)$ του διανύσματος $A\mathbf{x}_j$ (αναφορικά με τη βάση $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m\}$) εμφανίζονται κατά σειρά στη j-στήλη του $[A]$. Βάσει αυτού, τα διανύσματα $A\mathbf{x}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ ονομάζονται ορισμένες φορές και *διανύσματα στήλες* του $[A]$. Με αυτήν την ορολογία, *το πεδίο τιμών του A παράγεται από τα διανύσματα στήλες του $[A]$.*

Εάν $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{x}_j$ $(c_1, \ldots, c_n \in R^1)$, τότε η γραμμικότητα της A, συνδυαζόμενη με την (3), φανερώνει ότι

$$A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j \right) \mathbf{y}_i. \tag{4}$$

Συνεπώς, οι συντεταγμένες του $A\mathbf{x}$ είναι οι $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j$ $(i = 1, \ldots, m)$. Σημειώνουμε ότι στην (3) η άθροιση πραγματοποιείται υπεράνω του πρώτου δείκτη του a_{ij}. Όταν όμως υπολογίζουμε συντεταγμένες, αθροίζουμε υπεράνω του δευτέρου δείκτη.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχει δοθεί ένας $m \times n$ πίνακας πραγματικών αριθμών a_{ij} $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$. Εάν A είναι η απεικόνιση που ορίζεται μέσω της (4), τότε είναι σαφές ότι $A \in L(X, Y)$ και ότι ο $[A]$ ισούται με το δεδομένο πίνακα. Με αυτόν τον τρόπο ορίζεται μία φυσική 1-1 αντιστοιχία του $L(X, Y)$ επί του συνόλου των $m \times n$ πινάκων πραγματικών αριθμών. Πρέπει όμως να δώσουμε έμφαση στο γεγονός ότι ο $[A]$ δεν εξαρτάται μόνον από την A, αλλά και από την επιλογή των βάσεων των X και Y. Σε μία γραμμική απεικόνιση A αντιστοιχούν πολλοί διαφορετικοί πίνακες, εάν μεταβληθούν οι αντίστοιχες βάσεις και αντιστρόφως. Συνήθως, θα εργαζόμαστε με εκ των προτέρων επιλεγμένες βάσεις. (Ορισμένες επιπλέον παρατηρήσεις υπάρχουν στην Ενότητα 9.37.)

Εάν Z είναι ένας ακόμη διανυσματικός χώρος με βάση $\{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_p\}$, εάν η A δίδεται από την (3) και εάν

$$B\mathbf{y}_i = \sum_{k=1}^{p} b_{ki}\mathbf{z}_k, \qquad (BA)\mathbf{x}_j = \sum_{k=1}^{p} c_{kj}\mathbf{z}_k$$

για οποιουσδήποτε δείκτες $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, τότε έχουμε ότι $A \in L(X, Y)$, $B \in L(Y, Z)$, $BA \in L(X, Z)$. Εφόσον

$$B(A\mathbf{x}_j) = B\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{y}_i = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}B\mathbf{y}_i = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\sum_{k=1}^{p} b_{ki}\mathbf{z}_k = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij}\right)\mathbf{z}_k$$

για κάθε δείκτη $j = 1, \ldots, n$, η ανεξαρτησία του $\{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_p\}$ συνεπάγεται ότι

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij} \qquad (1 \le k \le p,\ 1 \le j \le n). \tag{5}$$

Η ισότητα αυτή φανερώνει τον τρόπο υπολογισμού του πίνακα $[BA]$ με χρήση των $[A]$, $[B]$. Εάν ορίσουμε ως γινόμενο $[B][A]$ τον $[BA]$, τότε η (5) περιγράφει το συνήθη πολλαπλασιασμό πινάκων.

Τελειώνοντας, υποθέτουμε ότι $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ και $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m\}$ είναι οι συνήθεις βάσεις των R^n και R^m αντιστοίχως και ότι η A ορίζεται από την (4). Η ανισότητα του Schwarz φανερώνει ότι

$$|A\mathbf{x}|^2 = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j\right)^2 \le \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \sum_{j=1}^{n} c_j^2\right) = \sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij}^2|\mathbf{x}|^2.$$

Άρα,

$$\|A\| \le \left\{\sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij}^2\right\}^{1/2}. \tag{6}$$

Εάν εφαρμόσουμε την (6) στη $B - A$ αντί της A, όπου $A, B \in L(R^n, R^m)$, διαπιστώνουμε ότι όταν τα στοιχεία a_{ij} $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ του πίνακα είναι συνεχείς συναρτήσεις κάποιας μεταβλητής, τότε το ίδιο ισχύει και για την A. Ακριβέστερα:

Εάν S είναι ένας μετρικός χώρος, εάν $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ είναι πραγματικές συνεχείς συναρτήσεις στον S και εάν για κάθε $p \in S$ η απεικόνιση A_p είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός του R^n στον R^m που έχει ως στοιχεία του πίνακά του τα $a_{ij}(p)$ $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$, τότε η απεικόνιση $p \to A_p$ είναι συνεχής απεικόνιση του S στον $L(R^n, R^m)$.

ΔΙΑΦΟΡΙΣΗ

9.10 Προκαταρτικά. Για τη διαμόρφωση του ορισμού της παραγώγου μίας συναρτήσεως με πεδίο ορισμού το R^n (ή ένα ανοικτό υποσύνολο του R^n) θα εξετάσουμε αρχικά την οικεία περίπτωση $n = 1$, όπου θα ερμηνεύσουμε την έννοια της παραγώγου με τέτοιο τρόπο ώστε να επεκτείνεται ο συνήθης ορισμός και στην περίπτωση $n > 1$ με φυσιολογικό τρόπο.

Εάν f είναι μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $(a, b) \subset R^1$ και εάν $x \in (a, b)$, τότε η $f'(x)$ ορίζεται συνήθως ως ο πραγματικός αριθμός

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{7}$$

με δεδομένη, φυσικά, την ύπαρξη αυτού του ορίου. Άρα,

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + r(h) \tag{8}$$

για κάθε h που ανήκει σε κατάλληλη περιοχή του 0, όπου το «υπόλοιπο» $r(h)$ είναι μικρό, υπό την έννοια ότι ισχύει η σχέση

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0. \tag{9}$$

Σημειώνουμε ότι η (8) εκφράζει τη διαφορά $f(x+h) - f(x)$ ως το άθροισμα της *γραμμικής απεικονίσεως* που αντιστοιχίζει το h στο $f'(x)h$, με ένα μικρό υπόλοιπο.

Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε την παράγωγο της f στο x ως έναν γραμμικό τελεστή στον R^1 που αντιστοιχίζει το h στο $f'(x)h$, παρά ως αριθμό.

(Παρατηρούμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός a εγείρει ένα γραμμικό τελεστή στον R^1. Ο τελεστής αυτός είναι απλώς ο πολλαπλασιασμός με a. Αντιστρόφως, κάθε γραμμικός τελεστής στον R^1 ταυτίζεται με πολλαπλασιασμό με κάποιον πραγματικό αριθμό. Αυτή η φυσική 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των R^1 και $L(R^1)$ είναι το κίνητρο των προηγουμένων θεωρήσεων.)

Θεωρούμε τώρα μία συνάρτηση $\mathbf{f}$, η οποία απεικονίζει το $(a, b) \subset R^1$ στον R^m. Σε αυτήν την περίπτωση, η $\mathbf{f}'(x)$ ορίζεται σε ένα σημείο $x \in (a, b)$ ως το διάνυσμα $\mathbf{y} \in R^m$ (εάν υφίσταται) για το οποίο ισχύει ότι

$$\lim_{h \to 0} \left\{ \frac{\mathbf{f}(x+h) - \mathbf{f}(x)}{h} - \mathbf{y} \right\} = \mathbf{0}. \tag{10}$$

Το τελευταίο μπορεί να αναδιατυπωθεί και ως εξής:

$$\mathbf{f}(x+h) - \mathbf{f}(x) = h\mathbf{y} + \mathbf{r}(h), \tag{11}$$

για κάθε h που ανήκει σε κατάλληλη περιοχή του 0, όπου $\mathbf{r}(h)/h \to \mathbf{0}$ καθώς $h \to 0$. Ο κύριος όρος της δεξιάς πλευράς της (11) είναι ξανά *γραμμική* απεικόνιση του h. Κάθε $\mathbf{y} \in R^m$ επάγει και έναν γραμμικό μετασχηματισμό του R^1 στον R^m, αντιστοιχίζοντας σε κάθε $h \in R^1$ το διάνυσμα $h\mathbf{y} \in R^m$ και αντιστρόφως. Αυτή η ταυτοποίηση του R^m με τον $L(R^1, R^m)$ μας επιτρέπει να θεωρήσουμε την $\mathbf{f}'(x)$ ως στοιχείο του $L(R^1, R^m)$.

Άρα, εάν η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη απεικόνιση του $(a, b) \subset R^1$ στον R^m και εάν $x \in (a, b)$, τότε ο $\mathbf{f}'(x)$ είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός που ικανοποιεί την

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{f}(x+h) - \mathbf{f}(x) - \mathbf{f}'(x)h}{h} = \mathbf{0} \tag{12}$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{h \to 0} \frac{|\mathbf{f}(x+h) - \mathbf{f}(x) - \mathbf{f}'(x)h|}{|h|} = 0. \tag{13}$$

Τώρα, μπορούμε να προχωρήσουμε στην επιθυμητή γενίκευση για την περίπτωση $n > 1$.

Ορισμός 9.11. Υποθέτουμε ότι E είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του R^n, ότι $\mathbf{f}$ είναι μία συνάρτηση που απεικονίζει το E στον R^m και ότι $\mathbf{x} \in E$. Η $\mathbf{f}$ λέγεται *διαφορίσιμη* στο $\mathbf{x}$ εάν και μόνον εάν υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός A του R^n στον R^m ούτως ώστε

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x})-A\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} = 0. \tag{14}$$

Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = A. \tag{15}$$

Η εν λόγω συνάρτηση λέγεται *διαφορίσιμη* στο E εάν και μόνον εάν είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του E.

Στη (14), γίνεται βεβαίως αντιληπτό ότι $\mathbf{h} \in R^n$. Εάν το $|\mathbf{h}|$ είναι αρκετά μικρό, τότε $\mathbf{x}+\mathbf{h} \in E$, εφόσον το E είναι ανοικτό. Επομένως, ορίζεται το $\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})$ και ανήκει στον R^m. Εφόσον $A \in L(R^n, R^m)$, έχουμε σαφώς ότι $A\mathbf{h} \in R^m$. Άρα,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x})-A\mathbf{h} \in R^m.$$

Στη (14), η στάθμη του αριθμητή είναι αυτή του R^m και του παρονομαστή αυτή του R^n.

Υπάρχει ένα προφανές πρόβλημα περί της μοναδικότητας της παραγώγου που πρέπει να επιλυθεί πριν προχωρήσουμε παραπέρα.

Θεώρημα 9.12. *Υποθέτουμε ότι τα E και $\mathbf{f}$ και $\mathbf{x}$ έχουν το ίδιο νόημα όπως στον Ορισμό 9.11 και ότι η (14) ισχύει με την A_1 στη θέση του A και με την A_2 στη θέση του A. Τότε, $A_1 = A_2$.*

Απόδειξη. Εάν θέσουμε $B = A_1 - A_2$, τότε η ανισότητα

$$|B\mathbf{h}| \le |\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x})-A_1\mathbf{h}| + |\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x})-A_2\mathbf{h}|$$

φανερώνει ότι $|B\mathbf{h}|/|\mathbf{h}| \to 0$ καθώς $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$. Για δεδομένο $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ έπεται ότι

$$\frac{|B(t\mathbf{h})|}{|t\mathbf{h}|} \to 0 \text{ καθώς } t \to 0. \tag{16}$$

Η γραμμικότητα της B φανερώνει ότι η αριστερή πλευρά της (16) είναι ανεξάρτητη του t. Άρα, $B\mathbf{h} = \mathbf{0}$ για κάθε $\mathbf{h} \in R^n$, δηλαδή $B = 0$. □

Παρατήρηση 9.13.

(α) Η σχέση (14) αναδιατυπώνεται στη μορφή

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}+\mathbf{r}(\mathbf{h}), \tag{17}$$

όπου το υπόλοιπο $\mathbf{r}(\mathbf{h})$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\frac{|\mathbf{r}(\mathbf{h})|}{|\mathbf{h}|}=0. \tag{18}$$

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη (17) όπως στην Ενότητα 9.10 λέγοντας ότι για δεδομένο $\mathbf{x}$ και μικρό $\mathbf{h}$ η αριστερή πλευρά της (17) είναι κατά προσέγγιση ίση με το $\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}$, δηλαδή την τιμή μίας γραμμικής απεικονίσεως στο $\mathbf{h}$.

(β) Ας υποθέσουμε ότι $\mathbf{f}$ και E είναι όπως στον Ορισμό 9.11 και ότι η $\mathbf{f}$ είναι διαφορίσιμη στο E. Για κάθε $\mathbf{x}\in E$, η $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός του R^n στον R^m. Κατ' αυτόν τον τρόπο, ορίζεται μία συνάρτηση $\mathbf{f}'$ η οποία απεικονίζει το E στον $L(R^n, R^m)$.

(γ) Παρατηρώντας τη (17), διαπιστώνουμε ότι η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο στο οποίο είναι διαφορίσιμη.

(δ) Η παράγωγος, όπως ορίζεται στη (14) ή στη (17), ονομάζεται συχνά το *διαφορικό* της $\mathbf{f}$ στο $\mathbf{x}$ ή η *ολική παράγωγος* της $\mathbf{f}$ στο $\mathbf{x}$, σε αντιδιαστολή με την έννοια της μερικής παραγώγου, η οποία θα εμφανισθεί αργότερα.

Παράδειγμα 9.14. Έχουμε ορίσει ως παραγώγους συναρτήσεων που απεικονίζουν το R^n στο R^m να είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί του R^n στον R^m. Ποια είναι η παράγωγος ενός τέτοιου μετασχηματισμού; Η απάντηση είναι απλή.

Εάν $A\in L(R^n, R^m)$ *και* $\mathbf{x}\in R^n$, *τότε*

$$A'(\mathbf{x})=A. \tag{19}$$

Σημειώνουμε ότι το $\mathbf{x}$ εμφανίζεται στην αριστερή πλευρά της (19) αλλά όχι στη δεξιά. Και οι δύο πλευρές της (19) είναι στοιχεία του $L(R^n, R^m)$, ενώ $A\mathbf{x}\in R^m$.

Η απόδειξη της (19) είναι τετριμμένη, εφόσον

$$A(\mathbf{x}+\mathbf{h})-A\mathbf{x}=A\mathbf{h}, \tag{20}$$

λόγω της γραμμικότητας της A. Συνεπώς, από τον Ορισμό 9.11 προκύπτει αμέσως το ζητούμενο.

Εν συνεχεία, θα επεκτείνουμε τον κανόνα της αλυσίδας (Θεώρημα 5.5) στην παρούσα κατάσταση.

Θεώρημα 9.15. *Υποθέτουμε ότι E είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του R^n και ότι $\mathbf{f}$ είναι μία συνάρτηση που απεικονίζει το E στον R^m η οποία είναι διαφορίσιμη στο $\mathbf{x}_0 \in E$. Επίσης, υποθέτουμε ότι $\mathbf{g}$ είναι μία συνάρτηση που απεικονίζει ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το $\mathbf{f}(E)$ στον R^k η οποία είναι διαφορίσιμη στο $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. Τότε, η απεικόνιση $\mathbf{F}$ του E στον R^k που ορίζεται από την ισότητα*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \qquad (\mathbf{x} \in E)$$

είναι διαφορίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και ισχύει ότι

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x_0}) = \mathbf{g}'(\mathbf{f}(\mathbf{x_0}))\mathbf{f}'(\mathbf{x_0}). \tag{21}$$

Στη δεξιά πλευρά της (21) έχουμε το γινόμενο δύο γραμμικών μετασχηματισμών, όπως ορίζεται στην Ενότητα 9.6.

Απόδειξη. Θέτουμε $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, $A = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$, $B = \mathbf{g}'(\mathbf{y}_0)$ και ορίζουμε

$$\mathbf{u}(\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - A\mathbf{h},$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{k}) = \mathbf{g}(\mathbf{y}_0 + \mathbf{k}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_0) - B\mathbf{k}$$

για κάθε $\mathbf{h} \in R^n$ και $\mathbf{k} \in R^m$ για τα οποία ορίζονται τα $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})$ και $\mathbf{g}(\mathbf{y}_0+\mathbf{k})$. Τότε,

$$|\mathbf{u}(\mathbf{h})| = \varepsilon(\mathbf{h})|\mathbf{h}|, \quad |\mathbf{v}(\mathbf{k})| = \eta(\mathbf{k})|\mathbf{k}|, \tag{22}$$

όπου $\varepsilon(\mathbf{h}) \to 0$ καθώς $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ και $\eta(\mathbf{k}) \to 0$ καθώς $\mathbf{k} \to \mathbf{0}$.

Δεδομένου $\mathbf{h}$, θέτουμε $\mathbf{k} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. Τότε,

$$|\mathbf{k}| = |A\mathbf{h} + \mathbf{u}(\mathbf{h})| \leq [\|A\| + \varepsilon(\mathbf{h})]|\mathbf{h}| \tag{23}$$

και

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})-\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)-BA\mathbf{h} &= \mathbf{g}(\mathbf{y}_0+\mathbf{k})-\mathbf{g}(\mathbf{y}_0)-BA\mathbf{h}\\ &= B(\mathbf{k}-A\mathbf{h})+\mathbf{v}(\mathbf{k})\\ &= B\mathbf{u}(\mathbf{h})+\mathbf{v}(\mathbf{k}).\end{aligned}$$

Άρα, για $\mathbf{h}\neq\mathbf{0}$ οι (22) και (23) συνεπάγονται ότι

$$\frac{|\mathbf{F}(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})-\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)-BA\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|}\le \|B\|\varepsilon(\mathbf{h})+[\|A\|+\varepsilon(\mathbf{h})]\eta(\mathbf{k}).$$

Θεωρούμε ότι $\mathbf{h}\to\mathbf{0}$. Τότε, $\varepsilon(\mathbf{h})\to 0$. Επίσης, $\mathbf{k}\to\mathbf{0}$, λόγω της (23), επομένως $\eta(\mathbf{k})\to 0$. Από αυτό έπεται ότι $\mathbf{F}'(\mathbf{x_0})=BA$, γεγονός ισοδύναμο με την (21). □

9.16 Μερικές παράγωγοι. Θεωρούμε μία συνάρτηση $\mathbf{f}$, η οποία απεικονίζει ένα ανοικτό σύνολο $E\subset R^n$ στον R^m. Ας είναι $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ και $\{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m\}$ οι συνήθεις βάσεις των R^n και R^m αντιστοίχως. Οι *συνιστώσες* της $\mathbf{f}$ είναι οι πραγματικές συναρτήσεις $f_1,\dots,f_m$ που ορίζονται από τη σχέση

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{m} f_i(\mathbf{x})\mathbf{u}_i \qquad (\mathbf{x}\in E) \tag{24}$$

ή ισοδύναμα από τις σχέσεις $f_i(\mathbf{x})=\mathbf{f}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}_i$ $(1\le i\le m)$.

Για $\mathbf{x}\in E$, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$, ορίζουμε

$$(D_j f_i)(\mathbf{x})=\lim_{t\to 0}\frac{f_i(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_j)-f_i(\mathbf{x})}{t}, \tag{25}$$

προϋποθέτοντας ότι το όριο αυτό υπάρχει. Γράφοντας $f_i(x_1,\dots,x_n)$ στη θέση του $f_i(\mathbf{x})$, παρατηρούμε ότι η $D_j f_i$ είναι η παράγωγος της f_i ως προς τη μεταβλητή x_j, με σταθερές τις υπόλοιπες μεταβλητές. Συνήθως, χρησιμοποιείται ο συμβολισμός

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \tag{26}$$

αντί του $D_j f_i$ και η $D_j f_i$ ονομάζεται *μερική παράγωγος.*

Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις στη θεωρία συναρτήσεων μίας μεταβλητής όπου η ύπαρξη της παραγώγου είναι απαραίτητη. Η επέκταση των περιπτώσεων αυτών στη θεωρία των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών απαιτεί οι αντίστοιχες μερικές παράγωγοι να είναι συνεχείς ή τουλάχιστον φραγμένες. Επί παραδείγματι, οι συναρτήσεις f και g στην Άσκηση 7 του Κεφαλαίου 4 δεν είναι συνεχείς, παρά το γεγονός ότι οι μερικές παράγωγοι τους υπάρχουν σε κάθε σημείο του R^2. Ακόμη και για συνεχείς συναρτήσεις, η ύπαρξη όλων των μερικών παραγώγων δεν συνεπάγεται απαραιτήτως τη διαφορισιμότητά τους, υπό την έννοια του Ορισμού 9.11. Ανατρέξτε στις Ασκήσεις 6, 14 και στο Θεώρημα 9.21.

Όμως, εάν μία συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο $\mathbf{x}$, τότε οι μερικές παράγωγοί της υπάρχουν στο $\mathbf{x}$ και προσδιορίζουν τον γραμμικό μετασχηματισμό $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ πλήρως:

Θεώρημα 9.17. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση* $\mathbf{f}$ *απεικονίζει το ανοικτό σύνολο* $E \subset R^n$ *στον* R^m *και ότι είναι διαφορίσιμη στο σημείο* $\mathbf{x} \in E$. *Τότε, οι μερικές παράγωγοι* $(D_j f_i)(\mathbf{x})$ $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$ *υπάρχουν και ισχύει ότι*

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{m} (D_j f_i)(\mathbf{x})\mathbf{u}_i \qquad (1 \le j \le n). \tag{27}$$

Όπως στην Ενότητα 9.16, $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ και $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ είναι οι συνήθεις βάσεις των R^n και R^m αντιστοίχως.

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν δείκτη j με $1 \le j \le n$. Εφόσον η $\mathbf{f}$ είναι διαφορίσιμη στο $\mathbf{x}$, ισχύει ότι

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{x})(t\mathbf{e}_j) + \mathbf{r}(t\mathbf{e}_j),$$

όπου $|\mathbf{r}(t\mathbf{e}_j)|/t \to 0$ καθώς $t \to 0$. Επομένως, η γραμμικότητα της $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ φανερώνει ότι

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{t} = \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{e}_j. \tag{28}$$

Εάν αναπαραστήσουμε την $\mathbf{f}$ μέσω των συνιστωσών της όπως στην (24), τότε η (28) μετατρέπεται στην

$$\lim_{t\to 0}\sum_{i=1}^{m}\frac{f_i(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_j)-f_i(\mathbf{x})}{t}\mathbf{u}_i=\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{e}_j. \tag{29}$$

Από το παραπάνω έπεται ότι κάθε πηλίκο σε αυτό το άθροισμα έχει όριο καθώς $t \to 0$ (ανατρέξτε στο Θεώρημα 4.10), επομένως κάθε $(D_j f_i)(\mathbf{x})$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ υπάρχει και η (27) έπεται από την (29). □

Παρακάτω έχουμε ορισμένες συνέπειες του Θεωρήματος 9.17:

Ας είναι $[\mathbf{f}'(\mathbf{x})]$ ο πίνακας που αναπαριστά την $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ ως προς τις συνήθεις βάσεις, όπως στην Ενότητα 9.9.

Το $\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{e}_j$ είναι το j-διάνυσμα στήλη του $[\mathbf{f}'(\mathbf{x})]$, επομένως η (27) φανερώνει ότι ο αριθμός $(D_j f_i)(\mathbf{x})$ βρίσκεται στην i-γραμμή και στη j-στήλη. Άρα,

$$[\mathbf{f}'(\mathbf{x})]=\begin{bmatrix}(D_1 f_1)(\mathbf{x}) & \cdots & (D_n f_1)(\mathbf{x})\\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ (D_1 f_m)(\mathbf{x}) & \cdots & (D_n f_m)(\mathbf{x})\end{bmatrix}.$$

Εάν $\mathbf{h}=\sum_{j=1}^{n} h_j\mathbf{e}_j$ ($h_1,\ldots,h_n$ πραγματικοί αριθμοί) είναι ένα διάνυσμα του R^n, τότε η (27) συνεπάγεται ότι

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}=\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{n}(D_j f_i)(\mathbf{x})h_j\right\}\mathbf{u}_i. \tag{30}$$

Παράδειγμα 9.18. Θεωρούμε μία παραγωγίσιμη απεικόνιση γ του διαστήματος $(a,b)\subset R^1$ σε ένα ανοικτό σύνολο $E\subset R^n$. Δηλαδή, η γ είναι μία παραγωγίσιμη καμπύλη του E. Θεωρούμε επίσης μία πραγματική διαφορίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το E. Ορίζουμε τη συνάρτηση g μέσω της ισότητας

$$g(t)=f(\gamma(t)) \qquad (a<t<b). \tag{31}$$

Τότε, από τον κανόνα αλυσίδας λαμβάνουμε ότι

$$g'(t)=f'(\gamma(t))\gamma'(t) \qquad (a<t<b). \tag{32}$$

Εφόσον $\gamma'(t) \in L(R^1, R^n)$ και $f'(\gamma(t)) \in L(R^n, R^1)$ για κάθε $t \in (a, b)$, η (32) ορίζει τη $g'(t)$ ως γραμμικό μετασχηματισμό του R^1. Αυτό εναρμονίζεται με το γεγονός ότι η g απεικονίζει το (a, b) στον R^1. Όμως, η $g'(t)$ μπορεί να θεωρηθεί και ως πραγματικός αριθμός. (Αυτό έχει ήδη αναλυθεί στην Ενότητα 9.10.) Ο αριθμός αυτός μπορεί να υπολογισθεί μέσω των μερικών παραγώγων της f και των παραγώγων των συνιστωσών της γ, όπως θα φανεί παρακάτω.

Σε αντιστοιχία με τη συνήθη βάση $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ του R^n, ο $[\gamma'(t)]$ $(t \in (a, b))$ είναι ο $n \times 1$ πίνακας (*πίνακας στήλη*) ο οποίος έχει το στοιχείο $\gamma_i'(t)$ στην i-γραμμή, όπου $\gamma_1 \dots, \gamma_n$ είναι οι συνιστώσες της γ. Για κάθε $\mathbf{x} \in E$, ο $[f'(\mathbf{x})]$ είναι ο $1 \times n$ πίνακας (*πίνακας γραμμή*) ο οποίος έχει το στοιχείο $(D_j f)(\mathbf{x})$ στη j-στήλη. Άρα, ο $[g'(t)]$ είναι ο 1×1 πίνακας με μοναδικό στοιχείο τον πραγματικό αριθμό

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} (D_i f)(\gamma(t))\gamma_i'(t). \tag{33}$$

Η παραπάνω σχέση είναι μία ειδική περίπτωση του κανόνα αλυσίδας που εμφανίζεται συχνά. Μπορεί να αναδιατυπωθεί με τον παρακάτω τρόπο.

Σε κάθε $\mathbf{x} \in E$ αντιστοιχίζουμε ένα διάνυσμα, τη λεγόμενη *κλίση* της f στο $\mathbf{x}$, το οποίο ορίζεται ως

$$(\nabla f)(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} (D_i f)(\mathbf{x})\mathbf{e}_i. \tag{34}$$

Εφόσον

$$\gamma'(t) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i'(t)\mathbf{e}_i \quad (t \in (a, b)), \tag{35}$$

η (33) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$g'(t) = (\nabla f)(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \quad (t \in (a, b)), \tag{36}$$

δηλαδή ως το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $(\nabla f)(\gamma(t))$ και $\gamma'(t)$.

Θεωρούμε τώρα $\mathbf{x} \in E$. Ας είναι $\mathbf{u} \in R^n$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα (δηλαδή $|\mathbf{u}| = 1$). Ας είναι επίσης

$$\gamma(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{u} \qquad (t \in R^1). \tag{37}$$

Τότε, $\gamma'(t) = \mathbf{u}$ για κάθε πραγματικό αριθμό t. Επομένως, η (36) φανερώνει ότι

$$g'(0) = (\nabla f)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}. \tag{38}$$

Από την άλλη πλευρά, η (37) φανερώνει ότι

$$g(t) - g(0) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}).$$

Συνεπώς, η (38) χορηγεί την

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t} = (\nabla f)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}. \tag{39}$$

Το όριο στην (39) συνήθως ονομάζεται *διευθυντική παράγωγος* της f στο $\mathbf{x}$ κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{u}$. Συμβολίζεται ως $(D_{\mathbf{u}} f)(\mathbf{x})$.

Εάν η f και το $\mathbf{x}$ θεωρηθούν σταθερά, ενώ το $\mathbf{u}$ μεταβάλλεται, τότε η (39) φανερώνει ότι η $(D_{\mathbf{u}} f)(\mathbf{x})$ λαμβάνει το μέγιστό της όταν το $\mathbf{u}$ είναι ίσο με το γινόμενο ενός θετικού πραγματικού αριθμού με το $(\nabla f)(\mathbf{x})$. (Η περίπτωση $(\nabla f)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ πρέπει να αποκλεισθεί.)

Εάν $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{e}_i$ ($u_1, \ldots, u_n$ πραγματικοί αριθμοί), τότε η (39) φανερώνει ότι το $(D_{\mathbf{u}} f)(\mathbf{x})$ μπορεί να εκφρασθεί μέσω των μερικών παραγώγων της f στο $\mathbf{x}$, σύμφωνα με τον τύπο

$$(D_{\mathbf{u}} f)(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n (D_i f)(\mathbf{x}) u_i. \tag{40}$$

Ορισμένες από τις παραπάνω ιδέες χρησιμοποιούνται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 9.19. *Υποθέτουμε ότι* $\mathbf{f}$ *είναι μία διαφορίσιμη απεικόνιση ενός κυρτού συνόλου* $E \subset R^n$ *στον* R^m *και ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός* M *ούτως ώστε*

$$\|\mathbf{f}'(\mathbf{x})\| \leq M$$

για κάθε $\mathbf{x} \in E$. *Τότε,*

$$|\mathbf{f}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})| \leq M|\mathbf{b} - \mathbf{a}|$$

για κάθε $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$.

Απόδειξη. Θεωρούμε $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$. Ορίζουμε

$$\gamma(t) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

για κάθε $t \in R^1$ με $\gamma(t) \in E$. Εφόσον το E είναι κυρτό, ισχύει ότι $\gamma(t) \in E$ όταν $t \in [0, 1]$. Για $t \in [0, 1]$ θέτουμε

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(\gamma(t)).$$

Τότε,

$$\mathbf{g}'(t) = \mathbf{f}'(\gamma(t))\gamma'(t) = \mathbf{f}'(\gamma(t))(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

και επομένως

$$|\mathbf{g}'(t)| \leq \|\mathbf{f}'(\gamma(t))\||\mathbf{b} - \mathbf{a}| \leq M|\mathbf{b} - \mathbf{a}|$$

για κάθε $t \in [0, 1]$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.19,

$$|\mathbf{g}(1) - \mathbf{g}(0)| \leq M|\mathbf{b} - \mathbf{a}|.$$

Όμως, $\mathbf{g}(0) = \mathbf{f}(\mathbf{a})$, $\mathbf{g}(1) = \mathbf{f}(\mathbf{b})$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Πόρισμα. *Στα παραπάνω, εάν ισχύει επιπροσθέτως ότι* $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ *για οποιοδήποτε* $\mathbf{x} \in E$, *τότε η* $\mathbf{f}$ *είναι σταθερή.*

Απόδειξη. Στο προηγούμενο θεώρημα λαμβάνουμε $M = 0$. □

Ορισμός 9.20. Μία διαφορίσιμη απεικόνιση $\mathbf{f}$ ενός ανοικτού συνόλου $E \subset R^n$ στον R^m ονομάζεται *συνεχώς διαφορίσιμη* εάν και μόνον εάν η $\mathbf{f}'$ είναι συνεχής απεικόνιση από το E στο $L(R^n, R^m)$.

Πιο συγκεκριμένα, απαιτείται το εξής: Για κάθε $\mathbf{x} \in E$ και $\varepsilon > 0$ να υπάρχει $\delta > 0$ ούτως ώστε

$$\|\mathbf{f}'(\mathbf{y}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\| \leq \varepsilon$$

εάν $\mathbf{y} \in E$ και $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leq \delta$.

Ισοδύναμα, η $\mathbf{f}$ λέγεται $\mathcal{C}'$-απεικόνιση και συμβολίζουμε το γεγονός αυτό με $\mathbf{f} \in \mathcal{C}'(E)$.

Θεώρημα 9.21. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση* $\mathbf{f}$ *απεικονίζει το ανοικτό σύνολο* $E \subset R^n$ *στον* R^m. *Τότε,* $\mathbf{f} \in \mathcal{C}'(E)$ *εάν και μόνον εάν οι μερικές παράγωγοι* $D_j f_i$ *υπάρχουν και είναι συνεχείς στο* E *για οποιουσδήποτε δείκτες* i, j *με* $1 \leq i \leq m$ *και* $1 \leq j \leq n$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\mathbf{f} \in \mathcal{C}'(E)$. Λόγω της (27), ισχύει ότι

$$(D_j f_i)(\mathbf{x}) = (\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{u}_i$$

για οποιουσδήποτε δείκτες i, j και $\mathbf{x} \in E$. Επομένως,

$$(D_j f_i)(\mathbf{y}) - (D_j f_i)(\mathbf{x}) = \{[\mathbf{f}'(\mathbf{y}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})]\mathbf{e}_j\} \cdot \mathbf{u}_i.$$

Εφόσον $|\mathbf{u}_i| = |\mathbf{e}_j| = 1$, έπεται ότι

$$|(D_j f_i)(\mathbf{y}) - (D_j f_i)(\mathbf{x})| \leq |[\mathbf{f}'(\mathbf{y}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})]\mathbf{e}_j| \leq \|\mathbf{f}'(\mathbf{y}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\|.$$

Κατά συνέπεια, η $D_j f_i$ είναι συνεχής για οποιουσδήποτε δείκτες i και j.

Για την αντίστροφη συνεπαγωγή, αρκεί να θεωρήσουμε την περίπτωση $m = 1$. (Γιατί;) Θεωρούμε $\mathbf{x} \in E$ και $\varepsilon > 0$. Εφόσον το E είναι ανοικτό, υπάρχει μία ανοικτή σφαιρική περιοχή $S \subset E$ με κέντρο το $\mathbf{x}$ και ακτίνα r. Η συνέχεια των συναρτήσεων $D_j f$ $(1 \leq j \leq n)$ φανερώνει ότι το r μπορεί να επιλεγεί ούτως ώστε να ισχύει ότι

$$|(D_j f)(\mathbf{y}) - (D_j f)(\mathbf{x})| < \frac{\varepsilon}{n} \qquad (\mathbf{y} \in S, 1 \leq j \leq n). \tag{41}$$

Θεωρούμε ένα διάνυσμα $\mathbf{h} = \sum_{j=1}^n h_j \mathbf{e}_j$ ($h_1, \ldots, h_n$ πραγματικοί αριθμοί) με $|\mathbf{h}| < r$. Θέτουμε $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ και $\mathbf{v}_k = h_1\mathbf{e}_1 + \cdots + h_k\mathbf{e}_k$ για $1 \leq k \leq n$. Τότε,

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} [f(\mathbf{x} + \mathbf{v}_j) - f(\mathbf{x} + \mathbf{v}_{j-1})]. \tag{42}$$

Εφόσον $|\mathbf{v}_k| < r$ για $1 \le k \le n$ και εφόσον το S είναι κυρτό, τα διαστήματα με άκρα τα $\mathbf{x} + \mathbf{v}_{j-1}$ και $\mathbf{x} + \mathbf{v}_j$ βρίσκονται στο S. Εφόσον $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{j-1} + h_j \mathbf{e}_j$, το θεώρημα μέσης τιμής (Θεώρημα 5.10) φανερώνει ότι ο j τάξεως όρος του αθροίσματος στη (42) ισούται με

$$h_j (D_j f)(\mathbf{x} + \mathbf{v}_{j-1} + \theta_j h_j \mathbf{e}_j)$$

για κάποιο $\theta_j \in (0, 1)$, και η τελευταία έκφραση διαφέρει από το $h_j(D_j f)(\mathbf{x})$ λιγότερο από $|h_j|\varepsilon/n$, σύμφωνα με τη (41). Λόγω της (42), έπεται ότι

$$\left| f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{n} h_j (D_j f)(\mathbf{x}) \right| \le \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |h_j| \varepsilon \le |\mathbf{h}| \varepsilon$$

για κάθε διάνυσμα $\mathbf{h}$ με $|\mathbf{h}| < r$.

Αυτό φανερώνει ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $\mathbf{x}$ και ότι ο $f'(\mathbf{x})$ είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός που αντιστοιχίζει το διάνυσμα $\mathbf{h} = \sum_{j=1}^{n} h_j \mathbf{e}_j$ στον αριθμό $\sum_{j=1}^{n} h_j (D_j f)(\mathbf{x})$. Ο πίνακας $[f'(\mathbf{x})]$ αποτελείται από τη γραμμή $(D_1 f)(\mathbf{x}), \ldots, (D_n f)(\mathbf{x})$. Εφόσον οι συναρτήσεις $D_1 f, \ldots, D_n f$ είναι συνεχείς στο E, η τελευταία παρατήρηση της Ενότητας 9.9 φανερώνει ότι $f \in \mathcal{C}'(E)$. □

Ο ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΗΣ ΣΥΣΤΟΛΗΣ

Θα παρεμβάλουμε τώρα ένα θεώρημα σταθερού σημείου, το οποίο ισχύει σε τυχόντες πλήρεις μετρικούς χώρους. Θα το εφαρμόσουμε παρακάτω, στο θεώρημα αντίστροφης συναρτήσεως.

Ορισμός 9.22. Θεωρούμε έναν μετρικό χώρο X με μετρική d. Μία συνάρτηση φ που απεικονίζει τον X στον X ονομάζεται *συστολή* του X στον X εάν και μόνον εάν υπάρχει αριθμός πραγματικός αριθμός c με $c < 1$ ούτως ώστε

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \le c\, d(x, y) \tag{43}$$

για κάθε $x, y \in X$.

Θεώρημα 9.23. *Εάν X είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος και φ μία συστολή του X στον X, τότε υπάρχει μοναδικό σημείο $x \in X$ με $\varphi(x) = x$.*

Με διαφορετική διατύπωση, η φ έχει μοναδικό σταθερό σημείο.

Η απόδειξη περί μοναδικότητας είναι απλή. Διότι εάν $\varphi(x) = x$ και $\varphi(y) = y$, τότε η (43) χορηγεί την ανισότητα $d(x, y) \leq cd(x, y)$, η οποία ισχύει μόνον εάν $d(x, y) = 0$.

Το ουσιώδες μέρος του θεωρήματος είναι ακριβώς η *ύπαρξη* του σταθερού σημείου. Ουσιαστικά, η απόδειξη χορηγεί μία κατασκευαστική μέθοδο για την εύρεση του σταθερού σημείου.

Απόδειξη. Θεωρούμε $x_0 \in X$ και ορίζουμε την ακολουθία $\{x_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) αναδρομικά, θέτοντας

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{44}$$

Θεωρούμε πραγματικό αριθμό c με $c < 1$ ούτως ώστε να ισχύει η (43). Τότε, για κάθε δείκτη n με $n \geq 1$ προκύπτει ότι

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(\varphi(x_n), \varphi(x_{n-1})) \leq cd(x_n, x_{n-1}).$$

Επομένως, με χρήση επαγωγής λαμβάνουμε ότι

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq c^n d(x_1, x_0) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{45}$$

Εάν n, m είναι δείκτες με $n < m$, τότε έπεται ότι

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{i=n+1}^{m} d(x_i, x_{i-1}) \\ &\leq (c^n + c^{n+1} + \cdots + c^{m-1}) d(x_1, x_0) \\ &\leq [(1-c)^{-1} d(x_1, x_0)] c^n. \end{aligned}$$

Άρα, η $\{x_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) είναι ακολουθία Cauchy. Εφόσον ο X είναι πλήρης, υπάρχει $x \in X$ με $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Εφόσον η φ είναι συστολή, είναι ομοιομόρφως συνεχής στον X. Επομένως,

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

□

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Το θεώρημα αντίστροφης συναρτήσεως δηλώνει, στην ουσία του, ότι μία συνεχώς διαφορίσιμη απεικόνιση $\mathbf{f}$ είναι αντιστρέψιμη στην περιοχή κάθε σημείου $\mathbf{x}$ στο οποίο ο γραμμικός μετασχηματισμός $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ είναι αντιστρέψιμος:

Θεώρημα 9.24. *Υποθέτουμε ότι* $\mathbf{f}$ *είναι μία* $\mathcal{C}'$*-απεικόνιση ενός ανοικτού συνόλου* $E \subset R^n$ *στον* R^n *με τον* $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ *αντιστρέψιμο για κάποιο* $\mathbf{a} \in E$. *Εάν* $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$, *τότε:*

(α) *Υπάρχουν ανοικτά σύνολα* U, V *του* R^n *ούτως ώστε* $\mathbf{a} \in U$, $\mathbf{b} \in V$, *η* $\mathbf{f}$ *είναι 1-1 στο* U *και* $\mathbf{f}(U) = V$.

(β) *Εάν* $\mathbf{g}$ *είναι η αντίστροφη απεικόνιση της* $\mathbf{f}$ *(η οποία, σύμφωνα με το* (α)*, υπάρχει), η οποία ορίζεται στο* V *από τη σχέση*

$$\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in U),$$

τότε $\mathbf{g} \in \mathcal{C}'(V)$.

Γράφοντας την εξίσωση $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ υπό τη μορφή συνιστωσών, καταλήγουμε στην ακόλουθη ερμηνεία του θεωρήματος: Το σύστημα των n εξισώσεων

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \qquad (1 \le i \le n)$$

μπορεί να λυθεί ως προς $x_1, \dots, x_n$ με όρους των $y_1, \dots, y_n$ εάν τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ βρίσκονται σε κατάλληλες περιοχές των $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ αντιστοίχως. Οι λύσεις είναι μοναδικές και αποτελούν συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις των $y_1, \dots, y_n$.

Απόδειξη.

(α) Θέτουμε $A = \mathbf{f}'(\mathbf{a})$ και θεωρούμε πραγματικό αριθμό λ με

$$2\lambda \|A^{-1}\| = 1. \tag{46}$$

Εφόσον η $\mathbf{f}'$ είναι συνεχής στο $\mathbf{a}$, υπάρχει ανοικτή σφαιρική περιοχή $U \subset E$ με κέντρο το $\mathbf{a}$ ούτως ώστε

$$\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}) - A\| < \lambda \qquad (\mathbf{x} \in U). \tag{47}$$

Σε κάθε $\mathbf{y} \in R^n$ αντιστοιχίζουμε μία συνάρτηση φ, οριζόμενη από την ισότητα

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x})) \qquad (\mathbf{x} \in E). \tag{48}$$

Σημειώνουμε ότι $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ *εάν και μόνον εάν το* $\mathbf{x}$ *είναι σταθερό σημείο της* φ.

Εφόσον $\varphi'(\mathbf{x}) = I - A^{-1}\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = A^{-1}(A - \mathbf{f}'(\mathbf{x}))$ (όπου I είναι ο ταυτοτικός τελεστής), οι (46) και (47) συνεπάγονται ότι

$$\|\varphi'(\mathbf{x})\| < \frac{1}{2} \qquad (\mathbf{x} \in U). \tag{49}$$

Άρα,

$$|\varphi(\mathbf{x}_1) - \varphi(\mathbf{x}_2)| \leq \frac{1}{2}|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \qquad (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U), \tag{50}$$

σύμφωνα με το Θεώρημα 9.19. Από αυτό έπεται ότι η φ έχει το πολύ ένα σταθερό σημείο στο U και επομένως $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ για το πολύ ένα $\mathbf{x} \in U$.

Συνεπώς, *η* $\mathbf{f}$ *είναι 1-1 στο* U.

Εν συνεχεία, θέτουμε $V = \mathbf{f}(U)$ και επιλέγουμε $\mathbf{y}_0 \in V$. Τότε, $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ για κάποιο $\mathbf{x}_0 \in U$. Ας είναι B η ανοικτή σφαιρική περιοχή με κέντρο το $\mathbf{x}_0$ και ακτίνα $r > 0$ καταλλήλως μικρή ούτως ώστε το $\overline{B}$ να βρίσκεται στο U. Θα δείξουμε ότι $\mathbf{y} \in V$ όταν $|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0| < \lambda r$. Αυτό βεβαίως αποδεικνύει ότι το V είναι ανοικτό.

Θεωρούμε ένα διάνυσμα $\mathbf{y}$ με $|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0| < \lambda r$. Εάν φ είναι όπως στη (48), τότε έχουμε ότι

$$|\varphi(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0| = |A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)| < \|A^{-1}\|\lambda r = \frac{r}{2}.$$

Εάν $\mathbf{x} \in \overline{B}$, τότε από την (50) έπεται ότι

$$|\varphi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_0| \leq |\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0)| + |\varphi(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0| < \frac{1}{2}|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| + \frac{r}{2} \leq r.$$

Άρα, $\varphi(\mathbf{x}) \in B$. Σημειώνουμε ότι η ισχύει (50) όταν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \overline{B}$.

Συνεπώς, η φ είναι συστολή από το $\overline{B}$ στο $\overline{B}$. Το $\overline{B}$ είναι πλήρες, ως κλειστό υποσύνολο του R^n. Επομένως, το Θεώρημα 9.23 συνεπάγεται ότι η φ έχει ένα σταθερό σημείο $\mathbf{x} \in \overline{B}$. Δηλαδή, ισχύει ότι $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Άρα, $\mathbf{y} \in \mathbf{f}(\overline{B}) \subset \mathbf{f}(U) = V$.

Αυτό αποδεικνύει το μέρος (α) του θεωρήματος.

(β) Θεωρούμε $\mathbf{y} \in V$ και διάνυσμα $\mathbf{k}$ με $\mathbf{y}+\mathbf{k} \in V$. Τότε, υπάρχουν $\mathbf{x} \in U$ και διάνυσμα $\mathbf{h}$ με $\mathbf{x}+\mathbf{h} \in U$ ούτως ώστε $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{y}+\mathbf{k} = \mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})$. Με φ όπως στη (48) έχουμε ότι

$$\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{h} + A^{-1}[\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})] = \mathbf{h} - A^{-1}\mathbf{k}.$$

Σύμφωνα με την (50), $|\mathbf{h} - A^{-1}\mathbf{k}| \leq \frac{1}{2}|\mathbf{h}|$. Άρα, $|A^{-1}\mathbf{k}| \geq \frac{1}{2}|\mathbf{h}|$ και

$$|\mathbf{h}| \leq 2\|A^{-1}\||\mathbf{k}| = \lambda^{-1}|\mathbf{k}|. \tag{51}$$

Σύμφωνα με τις (46), (47) και το Θεώρημα 9.8, η $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ έχει αντίστροφη απεικόνιση, την οποία συμβολίζουμε με T. Εφόσον

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}+\mathbf{k}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}) - T\mathbf{k} = \mathbf{h} - T\mathbf{k} = -T[\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}],$$

η (51) συνεπάγεται ότι

$$\frac{|\mathbf{g}(\mathbf{y}+\mathbf{k}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}) - T\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|} \leq \frac{\|T\|}{\lambda} \cdot \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|}.$$

Καθώς $\mathbf{k} \to \mathbf{0}$, η (51) φανερώνει ότι $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$. Επομένως, η δεξιά πλευρά της τελευταίας ανισότητας συγκλίνει προς το 0. Άρα, το ίδιο ισχύει και για την αριστερή πλευρά. Συνεπώς, έχουμε αποδείξει ότι $\mathbf{g}'(\mathbf{y}) = T$. Όμως, ο T είναι ο αντίστροφος του $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{y}))$. Δηλαδή,

$$\mathbf{g}'(\mathbf{y}) = \{\mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{y}))\}^{-1} \qquad (\mathbf{y} \in V). \tag{52}$$

Εν τέλει, σημειώνουμε ότι η $\mathbf{g}$ είναι συνεχής απεικόνιση του V επί του U (εφόσον η $\mathbf{g}$ είναι διαφορίσιμη), ότι η $\mathbf{f}'$ είναι συνεχής απεικόνιση του U στο σύνολο Ω των αντιστρέψιμων στοιχείων του $L(R^n)$ και ότι η αντιστροφή είναι συνεχής απεικόνιση του Ω επί του Ω, σύμφωνα με το Θεώρημα 9.8. Εάν συνδυάσουμε αυτά με την (52) καταλήγουμε ότι $\mathbf{g} \in \mathcal{C}'(V)$.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Σημείωση. Η πλήρης ισχύς της υποθέσεως $\mathbf{f} \in \mathcal{C}'(E)$ χρησιμοποιήθηκε μόνο στη τελευταία παράγραφο της προηγούμενης αποδείξεως. Όλα τα υπόλοιπα, έως τη (52), προέκυψαν από την ύπαρξη της $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ για κάθε $\mathbf{x} \in E$, από την αντιστρεψιμότητα του $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ και από τη συνέχεια της $\mathbf{f}'$ απλώς στο σημείο $\mathbf{a}$. Σχετικά με τα παραπάνω, παραπέμπουμε στο άρθρο του A. Nijenhuis στο *Amer. Math. Monthly*, vol. 81, 1974, pp. 969-980.

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί άμεση συνέπεια του μέρους (α) του θεωρήματος αντίστροφης συναρτήσεως.

Θεώρημα 9.25. *Εάν* $\mathbf{f}$ *είναι μία* $\mathcal{C}'$*-απεικόνιση ενός ανοικτού συνόλου* $E \subset R^n$ *στον* R^n *και εάν ο* $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ *είναι αντιστρέψιμος για κάθε* $\mathbf{x} \in E$, *τότε το* $\mathbf{f}(W)$ *είναι ανοικτό υποσύνολο του* R^n *για οποιοδήποτε ανοικτό σύνολο* $W \subset E$.

Με διαφορετική διατύπωση, η $\mathbf{f}$ είναι *ανοικτή απεικόνιση* του E στον R^n.

Οι υποθέσεις του θεωρήματος εξασφαλίζουν το γεγονός ότι κάθε $\mathbf{x} \in E$ έχει μία περιοχή στην οποία η $\mathbf{f}$ είναι 1-1. Αυτό εκφράζεται λέγοντας ότι η $\mathbf{f}$ είναι *τοπικά* 1-1 στο E. Όμως, η $\mathbf{f}$ δεν είναι απαραιτήτως 1-1 στο E υπό αυτές τις περιστάσεις. Για ένα τέτοιο παράδειγμα, ανατρέξτε στην Άσκηση 17.

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Εάν f είναι μία συνεχώς διαφορίσιμη πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο επίπεδο, τότε η εξίσωση $f(x, y) = 0$ μπορεί να λυθεί ως προς y σε μία περιοχή οποιουδήποτε σημείου (a, b) για το οποίο ισχύει $f(a, b) = 0$ και $\partial f/\partial y \neq 0$ σε αυτό. Παρομοίως, μπορεί να λυθεί ως προς x σε μία περιοχή οποιουδήποτε σημείου (a, b) για το οποίο ισχύει $f(a, b) = 0$ και $\partial f/\partial x \neq 0$ σε αυτό. Ένα απλό παράδειγμα στο οποίο διαφαίνεται η ανάγκη για τη συνθήκη $\partial f/\partial y \neq 0$ αποτελεί η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

Η προηγούμενη «άτυπη» πρόταση αποτελεί την απλούστερη περίπτωση ($n = 1$, $m = 1$ στο Θεώρημα 9.28) του λεγομένου «θεωρήματος πεπλεγμένης συναρτήσεως». Η απόδειξή του χρησιμοποιεί ουσιωδώς το γεγονός ότι οι συνεχώς διαφορίσιμοι μετασχηματισμοί συμπεριφέρονται τοπικά όπως οι παράγωγοί τους. Θα αποδείξουμε πρώτα το Θεώρημα 9.27, το οποίο και συνιστά τη «γραμμική εκδοχή» του Θεωρήματος 9.28.

Συμβολισμός 9.26. Εάν $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ και $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) \in R^m$, τότε συμβολίζουμε ως $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ το σημείο (ή διάνυσμα)

$$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \in R^{n+m}.$$

Σε ό,τι ακολουθεί, το πρώτο όρισμα στο $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ή σε παρόμοιο σύμβολο θα είναι πάντοτε ένα διάνυσμα του R^n και το δεύτερο θα είναι διάνυσμα του R^m.

Κάθε $A \in L(R^{n+m}, R^n)$ μπορεί να διασπασθεί σε δύο γραμμικούς μετασχηματισμούς A_x, A_y, οι οποίοι ορίζονται από τις σχέσεις

$$A_x\mathbf{h} = A(\mathbf{h}, \mathbf{0}), \quad A_y\mathbf{k} = A(\mathbf{0}, \mathbf{k}) \tag{53}$$

για κάθε $\mathbf{h} \in R^n$, $\mathbf{k} \in R^m$. Σε αυτήν την περίπτωση, έχουμε ότι $A_x \in L(R^n)$, $A_y \in L(R^m, R^n)$ και

$$A(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = A_x\mathbf{h} + A_y\mathbf{k}. \tag{54}$$

Τώρα, η «γραμμική εκδοχή» του θεωρήματος πεπλεγμένης συναρτήσεως είναι σχεδόν προφανής.

Θεώρημα 9.27. *Εάν $A \in L(R^{n+m}, R^n)$ και εάν ο A_x είναι αντιστρέψιμος, τότε σε κάθε $\mathbf{k} \in R^m$ αντιστοιχίζεται ένα μοναδικό $\mathbf{h} \in R^n$ με $A(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = \mathbf{0}$.*

Το $\mathbf{h}$ *μπορεί να υπολογισθεί από το* $\mathbf{k}$ *μέσω της σχέσεως*

$$\mathbf{h} = -(A_x)^{-1}A_y\mathbf{k}. \tag{55}$$

Απόδειξη. Λόγω της (54), ισχύει ότι $A(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = \mathbf{0}$ εάν και μόνον εάν

$$A_x\mathbf{h} + A_y\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με την (55), όταν ο A_x είναι αντιστρέψιμος. □

Το συμπέρασμα του Θεωρήματος 9.27 μας φανερώνει ότι η εξίσωση $A(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = \mathbf{0}$ μπορεί να λυθεί (κατά μοναδικό τρόπο) ως προς $\mathbf{h}$, για δεδομένο $\mathbf{k}$, και ότι η λύση είναι γραμμική συνάρτηση του $\mathbf{k}$. Ο αναγνώστης που είναι εξοικειωμένος με τη Γραμμική Άλγεβρα θα αναγνωρίσει στα παραπάνω μία γνωστή πρόταση, σχετική με συστήματα γραμμικών εξισώσεων.

Θεώρημα 9.28. *Ας είναι* $\mathbf{f}$ *μία* $\mathcal{C}'$*-απεικόνιση ενός ανοικτού συνόλου* $E \subset R^{n+m}$ *στον* R^n *ούτως ώστε* $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ *για κάποιο* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in E$*. Θέτουμε* $A = \mathbf{f}'(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *και υποθέτουμε ότι ο* A_x *είναι αντιστρέψιμος.*

Τότε, υπάρχουν ανοικτά σύνολα $U \subset R^{n+m}$ *και* $W \subset R^m$ *με* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in U$ *και* $\mathbf{b} \in W$*, τα οποία έχουν την εξής ιδιότητα:*

Σε κάθε $\mathbf{y} \in W$ *αντιστοιχίζεται ένα μοναδικό* $\mathbf{x}$ *ούτως ώστε*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \quad \textit{και} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}. \tag{56}$$

Εάν ορίσουμε $\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$*, τότε η* $\mathbf{g}$ *είναι* $\mathcal{C}'$*-απεικόνιση του* W *στο* R^n*,* $\mathbf{g}(\mathbf{b}) = \mathbf{a}$*,*

$$\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = \mathbf{0} \qquad (\mathbf{y} \in W) \tag{57}$$

και

$$\mathbf{g}'(\mathbf{b}) = -(A_x)^{-1}A_y. \tag{58}$$

Η συνάρτηση $\mathbf{g}$ ορίζεται «πεπλεγμένα» από την (57). Από αυτό προκύπτει και το όνομα του θεωρήματος.

Η εξίσωση $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ μπορεί να γραφεί ως σύστημα n εξισώσεων με $n + m$ μεταβλητές:

$$\begin{array}{l} f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0. \end{array} \tag{59}$$

Η υπόθεση περί αντιστρεψιμότητας του A_x σημαίνει ότι ο $n \times n$ πίνακας

$$\begin{bmatrix} D_1 f_1 & \cdots & D_n f_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ D_1 f_n & \cdots & D_n f_n \end{bmatrix},$$

εκτιμώμενος στο $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, ορίζει έναν αντιστρέψιμο γραμμικό τελεστή στον R^n. Με διαφορετική διατύπωση, τα διανύσματα στήλες του εν λόγω πίνακα πρέπει να είναι ανεξάρτητα ή ισοδύναμα η ορίζουσά του πρέπει να είναι μη μηδενική. (Ανατρέξτε στο Θεώρημα 9.36.) Εάν επιπλέον η (59) ισχύει όταν $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ και $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, τότε το συμπέρασμα του θεωρήματος είναι ότι η (59) μπορεί να λυθεί ως προς $x_1, \ldots, x_n$ για κάθε διάνυσμα $\mathbf{y}$ επαρκώς κοντά στο $\mathbf{b}$ και οι λύσεις είναι συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις του $\mathbf{y}$.

Απόδειξη. Ορίζουμε την απεικόνιση $\mathbf{F}$ μέσω της ισότητας

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{y}) \qquad ((\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E). \tag{60}$$

Τότε, η $\mathbf{F}$ είναι μία $\mathcal{C}'$-απεικόνιση του E στον R^{n+m}. Ισχυριζόμαστε ότι ο $\mathbf{F}'(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του $L(R^{n+m})$:

Εφόσον $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$, ισχύει ότι

$$\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{h}, \mathbf{b} + \mathbf{k}) = A(\mathbf{h}, \mathbf{k}) + \mathbf{r}(\mathbf{h}, \mathbf{k}),$$

όπου $\mathbf{r}$ είναι το υπόλοιπο που προκύπτει από τον ορισμό του $\mathbf{f}'(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Εφόσον

$$\mathbf{F}(\mathbf{a} + \mathbf{h}, \mathbf{b} + \mathbf{k}) - \mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{h}, \mathbf{b} + \mathbf{k}), \mathbf{k}) = (A(\mathbf{h}, \mathbf{k}), \mathbf{k}) + (\mathbf{r}(\mathbf{h}, \mathbf{k}), \mathbf{0}),$$

έπεται ότι ο $\mathbf{F}'(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός του R^{n+m} ο οποίος απεικονίζει το $(\mathbf{h}, \mathbf{k})$ στο $(A(\mathbf{h}, \mathbf{k}), \mathbf{k})$. Εάν το τελευταίο διάνυσμα είναι μηδενικό, τότε $A(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = \mathbf{0}$ και $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, επομένως $A(\mathbf{h}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ και το Θεώρημα 9.27 συνεπάγεται ότι $\mathbf{h} = \mathbf{0}$. Κατά συνέπεια, ο $\mathbf{F}'(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ είναι 1-1 και επομένως αντιστρέψιμος (Θεώρημα 9.5).

Άρα, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα αντίστροφης συναρτήσεως στην $\mathbf{F}$. Συνεπώς, προκύπτει η ύπαρξη ανοικτών συνόλων U, V του R^{n+m} με $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in U$, $(\mathbf{0}, \mathbf{b}) \in V$ ούτως ώστε η $\mathbf{F}$ να είναι 1-1 απεικόνιση του U επί του V.

Ας είναι W το σύνολο των $\mathbf{y} \in R^m$ με $(\mathbf{0}, \mathbf{y}) \in V$. Παρατηρούμε ότι $\mathbf{b} \in W$.

Εφόσον το V είναι ανοικτό, είναι σαφές ότι και το W είναι ανοικτό.

Εάν $\mathbf{y} \in W$, τότε $(\mathbf{0}, \mathbf{y}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ για κάποιο $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U$. Σύμφωνα με την (60), προκύπτει ότι $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$.

Υποθέτουμε, διατηρώντας το ίδιο $\mathbf{y}$, ότι $(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \in U$ και $\mathbf{f}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \mathbf{0}$. Τότε,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = (\mathbf{f}(\mathbf{x}', \mathbf{y}), \mathbf{y}) = (\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{y}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Εφόσον η $\mathbf{F}$ είναι 1-1, έπεται ότι $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$.

Αυτό αποδεικνύει το πρώτο μέρος του θεωρήματος.

Για την απόδειξη του δευτέρου μέρους, ορίζουμε για $\mathbf{y} \in W$ το διάνυσμα $\mathbf{g}(\mathbf{y})$ ούτως ώστε να έχουμε $(\mathbf{g}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) \in U$ και να ισχύει η (57). Τότε,

$$\mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = (\mathbf{0}, \mathbf{y}) \qquad (\mathbf{y} \in W). \tag{61}$$

Εάν $\mathbf{G}$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της $\mathbf{F}$, τότε $\mathbf{G} \in \mathcal{C}'$, σύμφωνα με το θεώρημα αντίστροφης συναρτήσεως. Επομένως, η (61) χορηγεί την

$$(\mathbf{g}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = \mathbf{G}(\mathbf{0}, \mathbf{y}) \qquad (\mathbf{y} \in W). \tag{62}$$

Εφόσον $\mathbf{G} \in \mathcal{C}'$, η (62) φανερώνει ότι $\mathbf{g} \in \mathcal{C}'$.

Εν τέλει, για τον υπολογισμό του $\mathbf{g}'(\mathbf{b})$ θέτουμε $\Phi(\mathbf{y}) = (\mathbf{g}(\mathbf{y}), \mathbf{y})$. Τότε,

$$\Phi'(\mathbf{y})\mathbf{k} = (\mathbf{g}'(\mathbf{y})\mathbf{k}, \mathbf{k}) \qquad (\mathbf{y} \in W, \mathbf{k} \in R^m). \tag{63}$$

Λόγω της (57), ισχύει ότι $\mathbf{f}(\Phi(\mathbf{y})) = \mathbf{0}$ για κάθε $\mathbf{y} \in W$. Συνεπώς, ο κανόνας της αλυσίδας φανερώνει ότι

$$\mathbf{f}'(\Phi(\mathbf{y}))\Phi'(\mathbf{y}) = 0.$$

Εάν $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, τότε $\Phi(\mathbf{y}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ και $\mathbf{f}'(\Phi(\mathbf{y})) = A$. Άρα,

$$A\Phi'(\mathbf{b}) = 0. \tag{64}$$

Τώρα, από τις (54), (63) και (64) έπεται ότι

$$A_x\mathbf{g}'(\mathbf{b})\mathbf{k} + A_y\mathbf{k} = A(\mathbf{g}'(\mathbf{b})\mathbf{k}, \mathbf{k}) = A\Phi'(\mathbf{b})\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

για κάθε $\mathbf{k} \in R^m$. Συνεπώς,

$$A_x\mathbf{g}'(\mathbf{b}) + A_y = 0. \tag{65}$$

Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με την (58). Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Σημείωση. Μέσω των συνιστωσών των $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$, η (65) μετατρέπεται στην

$$\sum_{j=1}^{n}(D_j f_i)(\mathbf{a}, \mathbf{b})(D_k g_j)(\mathbf{b}) = -(D_{n+k} f_i)(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

ή αλλιώς

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial g_j}{\partial y_k}\right) = -\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\right),$$

όπου $1 \le i \le n$, $1 \le k \le m$.

Για κάθε δείκτη k το παραπάνω αποτελεί ένα σύστημα n γραμμικών εξισώσεων στο οποίο οι παράγωγοι $\partial g_j/\partial y_k$ $(1 \le j \le n)$ κατέχουν το ρόλο των αγνώστων.

Παράδειγμα 9.29. Λαμβάνουμε $n = 2$, $m = 3$ και θεωρούμε την απεικόνιση $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ του R^5 στον R^2, οριζόμενη από τις ισότητες

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) &= 2e^{x_1} + x_2 y_1 - 4y_2 + 3 \\ f_2(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) &= x_2 \cos x_1 - 6x_1 + 2y_1 - y_3. \end{aligned}$$

Εάν $\mathbf{a} = (0, 1)$ και $\mathbf{b} = (3, 2, 7)$, τότε $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$.

Ο πίνακας του μετασχηματισμού $A = \mathbf{f}'(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, ως προς τις συνήθεις βάσεις, είναι ο

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 0 \\ -6 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Κατά συνέπεια,

$$[A_x] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}, \qquad [A_y] = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα στήλες του $[A_x]$ είναι ανεξάρτητα. Συνεπώς, ο $[A_x]$ είναι αντιστρέψιμος και το θεώρημα πεπλεγμένης συναρτήσεως φανερώνει την ύπαρξη μίας $\mathcal{C}'$-απεικονίσεως $\mathbf{g}$, ορισμένης σε μία περιοχή του $(3, 2, 7)$, ούτως ώστε $\mathbf{g}(3, 2, 7) = (0, 1)$ και $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ για κάθε διάνυσμα $\mathbf{y}$ που ανήκει σε αυτήν την περιοχή.

Μπορούμε να κάνουμε χρήση της (58) για τον υπολογισμό του $\mathbf{g}'(3, 2, 7)$: Εφόσον

$$[(A_x)^{-1}] = [A_x]^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix},$$

η (58) δίδει ότι

$$[\mathbf{g}'(3, 2, 7)] = -\frac{1}{20}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{20} \\ -\frac{1}{2} & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$

Με όρους μερικών παραγώγων, καταλήγουμε στις ισότητες

$$D_1 g_1 = \frac{1}{4} \qquad D_2 g_1 = \frac{1}{5} \quad D_3 g_1 = -\frac{3}{20}$$

$$D_1 g_2 = -\frac{1}{2} \quad D_2 g_2 = \frac{6}{5} \quad D_3 g_2 = \frac{1}{10},$$

στο σημείο $(3, 2, 7)$.

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΒΑΘΜΙΔΑΣ

Παρά το γεγονός ότι θεώρημα που αναγγέλλεται στον τίτλο της ενότητας δεν είναι τόσο σημαντικό όσο το θεώρημα αντίστροφης συναρτήσεως ή το θεώρημα πεπλεγμένης συναρτήσεως, το περιλαμβάνουμε ως μία ενδιαφέρουσα επίδειξη του γενικού κανόνα ότι η τοπική συμπεριφορά μίας συνεχώς διαφορίσιμης απεικονίσεως $\mathbf{F}$ κοντά σε ένα σημείο $\mathbf{x}$ μοιάζει με τη συμπεριφορά του γραμμικού μετασχηματισμού $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$.

Πριν τη διατύπωση του θεωρήματος, θα παρουσιάσουμε ορισμένα γεγονότα σχετικά με τους γραμμικούς μετασχηματισμούς.

Ορισμός 9.30. Υποθέτουμε ότι X και Y είναι διανυσματικοί χώροι και ότι $A \in L(X, Y)$, όπως στον Ορισμό 9.6. Ο *μηδενικός χώρος* του A, $\mathcal{N}(A)$, είναι το σύνολο των $\mathbf{x} \in X$ με $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Είναι σαφές ότι ο $\mathcal{N}(A)$ είναι διανυσματικός χώρος στον X.

Παρομοίως, το *πεδίο τιμών* του A, $\mathcal{R}(A)$, είναι διανυσματικός χώρος στον Y.

Η *βαθμίδα* του A ορίζεται ως η διάσταση του $\mathcal{R}(A)$ και συμβολίζεται ως $\operatorname{rank} A$.

Επί παραδείγματι, τα αντιστρέψιμα στοιχεία του $L(R^n)$ είναι ακριβώς τα στοιχεία βαθμίδας n. Αυτό προκύπτει από το Θεώρημα 9.5.

Εάν $A \in L(X, Y)$ και ο A έχει βαθμίδα 0, τότε $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ για κάθε $\mathbf{x} \in X$, επομένως $\mathcal{N}(A) = X$. Σε σχέση με αυτό, ανατρέξτε στην Άσκηση 25.

9.31 Προβολές. Ας είναι X ένας διανυσματικός χώρος. Ένας γραμμικός τελεστής $P \in L(X)$ ονομάζεται *προβολή* εάν και μόνον εάν $P^2 = P$.

Πιο συγκεκριμένα, $P(P\mathbf{x}) = P\mathbf{x}$ για κάθε $\mathbf{x} \in X$. Δηλαδή, ο P διατηρεί σταθερό κάθε διάνυσμα του πεδίου τιμών του.

Παρακάτω αναφέρουμε ορισμένες στοιχειώδεις ιδιότητες των προβολών:

(α) *Εάν P είναι προβολή του X, τότε κάθε $\mathbf{x} \in X$ έχει μονοσήμαντη αναπαράσταση της μορφής*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2,$$

όπου $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{R}(P)$ και $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{N}(P)$.

Για την κατασκευή της αναπαραστάσεως, θέτουμε $\mathbf{x}_1 = P\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x} - \mathbf{x}_1$. Τότε $P\mathbf{x}_2 = P\mathbf{x} - P\mathbf{x}_1 = P\mathbf{x} - P^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Σχετικά με το μονοσήμαντο της αναπαραστάσεως, εφαρμόζουμε τον P στην ισότητα $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$. Εφόσον $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{R}(P)$, είναι $P\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1$. Εφόσον $P\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, έπεται ότι $\mathbf{x}_1 = P\mathbf{x}$.

(β) *Εάν X είναι ένας πεπερασμένης διαστάσεως διανυσματικός χώρος και εάν X_1 είναι ένας διανυσματικός χώρος στον X, τότε υπάρχει προβολή P στον X με $\mathcal{R}(P) = X_1$.*

Η περίπτωση όπου ο X_1 περιέχει μόνον το $\mathbf{0}$ είναι τετριμμένη: θέτουμε $P\mathbf{x} = \mathbf{0}$ για κάθε $\mathbf{x} \in X$.

Υποθέτουμε ότι $\dim X_1 = k > 0$. Λόγω του Θεωρήματος 9.3, ο X έχει μία βάση $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ ούτως ώστε το $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ να είναι βάση του X_1. Ορίζουμε

$$P(c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n) = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k$$

για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $c_1, \ldots, c_n$.

Τότε, $P\mathbf{x} = \mathbf{x}$ για κάθε $\mathbf{x} \in X_1$ και $X_1 = \mathcal{R}(P)$.

Σημειώνουμε ότι το $\{\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ είναι βάση του $\mathcal{N}(P)$. Σημειώνουμε επίσης ότι υπάρχουν απείρου πλήθους προβολές στον X με πεδίο τιμών το X_1 όταν $0 < \dim X_1 < \dim X$.

Θεώρημα 9.32. *Υποθέτουμε ότι m, n, r είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί με $m \geq r$, $n \geq r$, ότι $\mathbf{F}$ είναι μία $\mathcal{C}'$-απεικόνιση ενός ανοικτού συνόλου $E \subset R^n$ στον R^m και ότι ο $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ έχει βαθμίδα r για κάθε $\mathbf{x} \in E$.*

Θεωρούμε $\mathbf{a} \in E$ και θέτουμε $A = \mathbf{F}'(\mathbf{a})$. Ας είναι Y_1 το πεδίο τιμών του A και ας είναι P μία προβολή στον R^m με πεδίο τιμών το Y_1. Ας είναι επίσης Y_2 ο μηδενικός χώρος του P.

Τότε, υπάρχουν ανοικτά σύνολα U και V στον R^n με $\mathbf{a} \in U$, $U \subset E$ και υπάρχει μία 1-1 $\mathcal{C}'$-απεικόνιση $\mathbf{H}$ του V επί του U (με αντίστροφη συνάρτηση επίσης συνεχώς διαφορίσιμη) ούτως ώστε

$$\mathbf{F}(\mathbf{H}(\mathbf{x})) = A\mathbf{x} + \varphi(A\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \in V), \tag{66}$$

όπου φ είναι $\mathcal{C}'$-απεικόνιση του ανοικτού συνόλου $A(V) \subset Y_1$ στον Y_2.

Ύστερα από την απόδειξη, θα παρουσιάσουμε μία γεωμετρικού χαρακτήρα περιγραφή της (66).

Απόδειξη. Εάν $r = 0$, τότε το Θεώρημα 9.19 φανερώνει ότι η $\mathbf{F}$ είναι σταθερή σε μία περιοχή U του $\mathbf{a}$ και η (66) ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο, με $V = U$, $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in V$), $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{F}(\mathbf{a})$.

Εφεξής, θεωρούμε ότι $r > 0$. Εφόσον $\dim Y_1 = r$, ο Y_1 έχει μία βάση $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r\}$. Επιλέγουμε $\mathbf{z}_i \in R^n$ ούτως ώστε $A\mathbf{z}_i = \mathbf{y}_i$ $(1 \leq i \leq r)$ και ορίζουμε μία γραμμική απεικόνιση S από τον Y_1 στον R^n μέσω της ισότητας

$$S(c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_1\mathbf{y}_r) = c_1\mathbf{z}_1 + \cdots + c_1\mathbf{z}_r \tag{67}$$

για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $c_1, \ldots, c_r$.

Τότε, $AS\mathbf{y}_i = A\mathbf{z}_i = \mathbf{y}_i$ για κάθε δείκτη i με $1 \leq i \leq r$. Άρα,

$$AS\mathbf{y} = \mathbf{y} \qquad (\mathbf{y} \in Y_1). \tag{68}$$

Ορίζουμε μία απεικόνιση $\mathbf{G}$, από το E στον R^n, μέσω της ισότητας

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + SP[\mathbf{F}(\mathbf{x}) - A\mathbf{x}] \qquad (\mathbf{x} \in E). \tag{69}$$

Εφόσον $\mathbf{F}'(\mathbf{a}) = A$, διαφορίζοντας την (69) διαπιστώνουμε ότι $\mathbf{G}'(\mathbf{a}) = I$, όπου I είναι ο ταυτοτικός τελεστής στον R^n. Σύμφωνα με το θεώρημα αντίστροφης συναρτήσεως, υπάρχουν ανοικτά σύνολα U και V στον R^n με $\mathbf{a} \in U$ ούτως ώστε η $\mathbf{G}$ να είναι 1-1 απεικόνιση του U επί του V. Ας είναι $\mathbf{H}$ η αντίστροφή της. Τότε, η $\mathbf{H}$ είναι επίσης συνεχώς διαφορίσιμη. Επιπλέον, σμικρύνοντας τα U και V εάν είναι αναγκαίο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το V είναι κυρτό και ότι ο $\mathbf{H}'(\mathbf{x})$ είναι αντιστρέψιμος για κάθε $\mathbf{x} \in V$.

Σημειώνουμε ότι, βάσει της (68), $ASPA = A$, εφόσον $PA = A$. Επομένως, η (69) χορηγεί την

$$A\mathbf{G}(\mathbf{x}) = P\mathbf{F}(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \in E). \tag{70}$$

Ιδιαιτέρως, η (70) ισχύει για $\mathbf{x} \in U$. Εάν αντικαταστήσουμε το $\mathbf{x}$ με το $\mathbf{H}(\mathbf{x})$, τότε αποκτούμε ότι

$$P\mathbf{F}(\mathbf{H}(\mathbf{x})) = A\mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in V). \tag{71}$$

Ορίζουμε την απεικόνιση ψ μέσω της ισότητας

$$\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{H}(\mathbf{x})) - A\mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in V). \tag{72}$$

Εφόσον $PA = A$, η (71) συνεπάγεται ότι $P\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ για κάθε $\mathbf{x} \in V$. Συνεπώς, η ψ είναι μία $\mathcal{C}'$-απεικόνιση του V στον Y_2.

Εφόσον το V είναι ανοικτό, είναι σαφές ότι το $A(V)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του πεδίου τιμών του A, δηλαδή του $\mathcal{R}(A) = Y_1$.

Για την ολοκλήρωση της αποδείξεως, δηλαδή για την εξαγωγή της (66) από την (72), μένει να αποδείξουμε ότι υπάρχει μία $\mathcal{C}'$-απεικόνιση φ του $A(V)$ στον Y_2 που ικανοποιεί τη σχέση

$$\varphi(A\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \in V). \tag{73}$$

Αρχικά, θα αποδείξουμε ότι

$$\psi(\mathbf{x}_1) = \psi(\mathbf{x}_2) \tag{74}$$

εάν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ με $A\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_2$.

Για $\mathbf{x} \in V$ θέτουμε $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{H}(\mathbf{x}))$. Εφόσον ο $\mathbf{H}'(\mathbf{x})$ έχει βαθμίδα n για κάθε $\mathbf{x} \in V$ και ο $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ έχει βαθμίδα r για κάθε $\mathbf{x} \in U$, έπεται ότι

$$\operatorname{rank}\Phi'(\mathbf{x}) = \operatorname{rank}\mathbf{F}'(\mathbf{H}(\mathbf{x}))\mathbf{H}'(\mathbf{x}) = r \qquad (\mathbf{x} \in V). \tag{75}$$

Θεωρούμε $\mathbf{x} \in V$. Ας είναι M το πεδίο τιμών του $\Phi'(\mathbf{x})$. Τότε, $M \subset R^m$ και $\dim M = r$. Λόγω της (71), ισχύει ότι

$$P\Phi'(\mathbf{x}) = A. \tag{76}$$

Άρα, ο P απεικονίζει τον M επί του $\mathcal{R}(A) = Y_1$. Εφόσον οι M και Y_1 έχουν την ίδια διάσταση, έπεται ότι η P (περιορισμένη στον M) είναι 1-1.

Υποθέτουμε τώρα ότι $A\mathbf{h} = \mathbf{0}$. Τότε, $P\Phi'(\mathbf{x})\mathbf{h} = \mathbf{0}$, σύμφωνα με την (76). Όμως, $\Phi'(\mathbf{x})\mathbf{h} \in M$ και η P είναι 1-1 στον M. Άρα, $\Phi'(\mathbf{x})\mathbf{h} = \mathbf{0}$. Εάν συνδυάσουμε τα προηγούμενα με την (72), τότε παρατηρούμε ότι έχουμε αποδείξει το εξής:

Εάν $\mathbf{x} \in V$ *και* $A\mathbf{h} = \mathbf{0}$, *τότε* $\psi'(\mathbf{x})\mathbf{h} = \mathbf{0}$.

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε την (74). Υποθέτουμε ότι $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ με $A\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_2$. Θέτουμε $\mathbf{h} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ και ορίζουμε την απεικόνιση $\mathbf{g}$ μέσω της ισότητας

$$\mathbf{g}(t) = \psi(\mathbf{x}_1 + t\mathbf{h}) \qquad (0 \le t \le 1). \tag{77}$$

Η κυρτότητα του V φανερώνει ότι $\mathbf{x}_1 + t\mathbf{h} \in V$ για κάθε $t \in [0, 1]$. Άρα,

$$\mathbf{g}'(t) = \psi'(\mathbf{x}_1 + t\mathbf{h})\mathbf{h} = \mathbf{0} \qquad (0 \le t \le 1), \tag{78}$$

επομένως $\mathbf{g}(1) = \mathbf{g}(0)$. Όμως, $\mathbf{g}(1) = \psi(\mathbf{x}_2)$ και $\mathbf{g}(0) = \psi(\mathbf{x}_1)$. Αυτό αποδεικνύει την (74).

Σύμφωνα με την (74), το $\psi(\mathbf{x})$ εξαρτάται μόνον από το $A\mathbf{x}$ για $\mathbf{x} \in V$. Κατ' αυτόν τον τρόπο, μέσω της (73) η φ είναι καλώς ορισμένη στο $A(V)$. Μένει να αποδειχθεί ότι $\varphi \in \mathcal{C}'$.

Θεωρούμε $\mathbf{y}_0 \in A(V)$ και $\mathbf{x}_0 \in V$ με $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0$. Εφόσον το V είναι ανοικτό, το $\mathbf{y}_0$ έχει μία περιοχή W στον Y_1 ούτως ώστε το διάνυσμα

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + S(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \tag{79}$$

να βρίσκεται στο V όταν $\mathbf{y} \in W$. Σύμφωνα με την (68),

$$A\mathbf{x} = A\mathbf{x}_0 + \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}.$$

Άρα, οι (73) και (79) χορηγούν την ισότητα

$$\varphi(\mathbf{y}) = \psi(\mathbf{x}_0 - S\mathbf{y}_0 + S\mathbf{y}) \qquad (\mathbf{y} \in W). \tag{80}$$

Η παραπάνω ισότητα φανερώνει ότι $\varphi \in \mathcal{C}'$ στο W, άρα στο $A(V)$, εφόσον το $\mathbf{y}_0$ έχει επιλεγεί αυθαίρετα στο $A(V)$.

Η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Θα παρουσιάσουμε τώρα την ουσία του θεωρήματος σχετικά με τη γεωμετρική συμπεριφορά της $\mathbf{F}$.

Εάν $\mathbf{y} \in \mathbf{F}(U)$, τότε $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{H}(\mathbf{x}))$ για κάποιο $\mathbf{x} \in V$. Η (66) φανερώνει ότι $P\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Επομένως,

$$\mathbf{y} = P\mathbf{y} + \varphi(P\mathbf{y}) \qquad (\mathbf{y} \in \mathbf{F}(U)). \tag{81}$$

Η τελευταία ισότητα φανερώνει ότι το $\mathbf{y}$ καθορίζεται από την προβολή του, $P\mathbf{y}$, και ότι η P, περιορισμένη στο $\mathbf{F}(U)$, είναι μία 1-1 απεικόνιση του $\mathbf{F}(U)$ επί του $A(V)$. Συνεπώς, το $\mathbf{F}(U)$ είναι μία «r-διάστατη επιφάνεια» με ακριβώς ένα σημείο «επάνω» από κάθε σημείο του $A(V)$. Επίσης, το $\mathbf{F}(U)$ μπορεί να θεωρηθεί και ως το γράφημα της φ.

Εάν $\Phi = \mathbf{F} \circ \mathbf{H}$, όπως στην απόδειξη, τότε η (66) φανερώνει ότι τα ισοϋψή σύνολα της Φ (δηλαδή τα σύνολα στα οποία η Φ λαμβάνει μία δεδομένη τιμή) είναι ακριβώς τα ισοϋψή σύνολα της A στο V. Αυτά είναι «επίπεδα», εφόσον αποτελούν τομές του V με μεταφορές του διανυσματικού χώρου $\mathcal{N}(A)$. Σημειώνουμε ότι $\dim \mathcal{N}(A) = n - r$ (Άσκηση 25).

Τα ισοϋψή σύνολα της $\mathbf{F}$ στο U είναι οι εικόνες μέσω της $\mathbf{H}$ των επίπεδων ισοϋψών συνόλων της Φ στο V. Άρα, είναι «$(n - r)$-διάστατες επιφάνειες» στο U.

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Οι ορίζουσες είναι αριθμοί που αντιστοιχούν σε τετραγωνικούς πίνακες (δηλαδή σε πίνακες με ίδιο πλήθος γραμμών και στηλών) και συνεπώς σε τελεστές που αναπαριστώνται από αυτούς τους πίνακες. Μία ορίζουσα είναι μηδενική εάν και μόνον εάν ο αντίστοιχος τελεστής δεν είναι αντιστρέψιμος. Επομένως, οι ορίζουσες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με την αλήθεια των υποθέσεων των προηγουμένων θεωρημάτων. Στο Κεφάλαιο 10, οι ορίζουσες θα αποβούν ακόμη περισσότερο σημαντικές.

Ορισμός 9.33. Εάν $(j_1, \ldots, j_n)$ είναι διατεταγμένη n-άδα ακεραίων αριθμών, τότε ορίζουμε

$$s(j_1, \ldots, j_n) = \prod_{p<q} \operatorname{sgn}(j_q - j_p), \tag{82}$$

όπου $\operatorname{sgn}x = 1$ εάν $x > 0$, $\operatorname{sgn}x = -1$ εάν $x < 0$ και $\operatorname{sgn}x = 0$ εάν $x = 0$. Τότε, η $s(j_1, \ldots, j_n)$ ισούται με 1 ή -1 ή 0 και η παράσταση αυτή μεταβάλλει το πρόσημό της, εάν υπάρξει εναλλαγή δύο j-δεικτών.

Ας είναι $[A]$ ο πίνακας ενός γραμμικού τελεστή A στον R^n, ως προς τη συνήθη βάση $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, με στοιχείο στην i-γραμμή και j-στήλη το $a(i, j)$

$(1 \le i \le n, 1 \le j \le n)$. Η *ορίζουσα* του $[A]$ ορίζεται ως ο αριθμός

$$\det[A] = \sum s(j_1, \dots, j_n) a(1, j_1) a(2, j_2) \cdots a(n, j_n). \tag{83}$$

Το άθροισμα στην (83) λαμβάνεται υπεράνω όλων των διατεταγμένων n-άδων ακεραίων αριθμών $(j_1, \dots, j_n)$ με $1 \le j_r \le n$ $(1 \le r \le n)$.

Τα διανύσματα στήλες του $[A]$ είναι τα

$$\mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^{n} a(i, j) \mathbf{e}_i \quad (1 \le j \le n). \tag{84}$$

Ορισμένες φορές, διευκολύνει η θεώρηση της $\det[A]$ ως συνάρτηση των διανυσμάτων στηλών του $[A]$. Εάν ορίσουμε

$$\det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \det[A],$$

τότε η det είναι πραγματική συνάρτηση στο σύνολο των διατεταγμένων n-άδων διανυσμάτων του R^n.

Θεώρημα 9.34.

(α) *Εάν I είναι ο ταυτοτικός τελεστής στον R^n, τότε*

$$\det[I] = \det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1.$$

(β) *Η* det *είναι γραμμική απεικόνιση σε κάθε ένα από τα διανύσματα $\mathbf{x}_j$ $(j = 1, \dots, n)$ όταν τα υπόλοιπα διατηρηθούν σταθερά.*

(γ) *Εάν ο πίνακας $[A]_1$ προκύπτει από τον $[A]$ εναλλάσσοντας δύο στήλες, τότε* $\det[A]_1 = -\det[A]$.

(δ) *Εάν ο $[A]$ έχει δύο ίσες στήλες, τότε* $\det[A] = 0$.

Απόδειξη. Εάν $A = I$, τότε $a(i, i) = 1$ και $a(i, j) = 0$ για οποιουσδήποτε δείκτες i, j με $i \ne j$. Άρα,

$$\det[I] = s(1, \dots, n) = 1,$$

το οποίο αποδεικνύει το (α). Λόγω της (82), είναι $s(j_1, \dots, j_n) = 0$ εάν δύο από τους j-δείκτες ισούνται. Καθένα από τα εναπομείναντα $n!$ γινόμενα στην

(83) περιέχει ακριβώς ένα παράγοντα από κάθε στήλη. Αυτό αποδεικνύει το (β). Το μέρος (γ) αποτελεί άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι το $s(j_1, \dots, j_n)$ αλλάζει πρόσημο εάν δύο από τους j-δείκτες υποστούν εναλλαγή. Το (δ) είναι πόρισμα του (γ). □

Θεώρημα 9.35. *Εάν* $[A]$, $[B]$ *είναι* $n \times n$ *πίνακες, τότε*

$$\det([B][A]) = \det[B]\det[A].$$

Απόδειξη. Εάν $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ είναι οι στήλες του $[A]$, τότε ορίζουμε

$$\Delta_B(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \Delta_B[A] = \det([B][A]). \tag{85}$$

Οι στήλες του $[B][A]$ είναι τα διανύσματα $B\mathbf{x}_1, \dots, B\mathbf{x}_n$. Άρα,

$$\Delta_B(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \det(B\mathbf{x}_1, \dots, B\mathbf{x}_n). \tag{86}$$

Σύμφωνα με την (86) και το Θεώρημα 9.34, η Δ_B έχει επίσης τις ιδιότητες (β), (γ) και (δ) του Θεωρήματος 9.34. Από το 9.34(β) και την (84) έπεται ότι

$$\Delta_B[A] = \Delta_B\left(\sum_{i=1}^{n} a(i,1)\mathbf{e}_i, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\right) = \sum_{i=1}^{n} a(i,1)\Delta_B(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n).$$

Επαναλαμβάνοντας αυτήν τη διαδικασία με τα $\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, αποκτούμε την

$$\Delta_B[A] = \sum a(i_1,1)a(i_2,2)\cdots a(i_n,n)\Delta_B(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_n}), \tag{87}$$

όπου το άθροισμα λαμβάνεται υπεράνω όλων των διατεταγμένων n-άδων $(i_1, \dots, i_n)$ με $1 \le i_r \le n$ $(1 \le r \le n)$. Από τα 9.34(γ) και 9.34(δ) έχουμε ότι

$$\Delta_B(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_n}) = t(i_1, \dots, i_n)\Delta_B(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n), \tag{88}$$

όπου η t ισούται με 1 ή 0 ή -1. Εφόσον $[B][I] = [B]$, η (85) φανερώνει ότι

$$\Delta_B(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = \det[B]. \tag{89}$$

Αντικαθιστώντας τις (88) και (89) στην (87) αποκτούμε τη σχέση

$$\det([B][A]) = \left\{\sum a(i_1,1)\cdots a(i_n,n)t(i_1, \dots, i_n)\right\}\det[B],$$

για κάθε $n \times n$ πίνακα $[B]$. Λαμβάνοντας $B = I$, παρατηρούμε ότι το άθροισμα μέσα στα άγκιστρα ισούται με την $\det[A]$. Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. □

Θεώρημα 9.36. *Ένας γραμμικός τελεστής* A *του* R^n *είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνον εάν* $\det[A] \neq 0$.

Απόδειξη. Εάν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε το Θεώρημα 9.35 φανερώνει ότι

$$\det[A]\det[A^{-1}] = \det[AA^{-1}] = \det[I] = 1$$

και επομένως $\det[A] \neq 0$.

Εάν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, τότε οι στήλες $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ του $[A]$ είναι εξαρτημένες (Θεώρημα 9.5). Άρα, υπάρχει μία, έστω η $\mathbf{x}_k$, ούτως ώστε

$$\mathbf{x}_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} c_j \mathbf{x}_j = \mathbf{0}, \tag{90}$$

για κάποιους πραγματικούς αριθμούς c_j $(1 \leq j \leq n)$. Λόγω των (β) και (δ) του Θεωρήματος 9.34, το $\mathbf{x}_k$ μπορεί να αντικατασταθεί από το $\mathbf{x}_k + c_j \mathbf{x}_j$ δίχως να μεταβληθεί η ορίζουσα, για κάθε δείκτη j με $j \neq k$. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία, βρίσκουμε ότι το $\mathbf{x}_k$ μπορεί να αντικατασταθεί με το διάνυσμα της αριστερής πλευράς της (90), δηλαδή με το $\mathbf{0}$, δίχως να μεταβληθεί η ορίζουσα. Όμως, ένας πίνακας που έχει το $\mathbf{0}$ ως στήλη έχει ορίζουσα ίση με το 0. Συνεπώς, $\det[A] = 0$. □

Παρατήρηση 9.37. Υποθέτουμε ότι $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ είναι βάσεις του R^n. Κάθε γραμμικός τελεστής του R^n ορίζει δύο πίνακες $[A]$ και $[A]_U$ με στοιχεία a_{ij} και α_{ij} $(i, j = 1, \dots, n)$ αντιστοίχως, τα οποία ορίζονται από τις ισότητες

$$A\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_i, \qquad A\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\mathbf{u}_i$$

για κάθε $1 \leq j \leq n$. Εάν $\mathbf{u}_j = B\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\mathbf{e}_i$ για $1 \leq j \leq n$, τότε το $A\mathbf{u}_j$ ισούται με

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} B\mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\alpha_{kj} \right) \mathbf{e}_i$$

και επίσης με

$$AB\mathbf{e}_j = A\sum_{k=1}^{n} b_{kj}\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)\mathbf{e}_i.$$

Συνεπώς, $\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\alpha_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ για κάθε i, $j = 1, \ldots, n$, ή αλλιώς

$$[B][A]_U = [A][B]. \tag{91}$$

Εφόσον ο B είναι αντιστρέψιμος, $\det[B] \neq 0$. Άρα, συνδυάζοντας την (91) με το Θεώρημα 9.35, αποκτούμε ότι

$$\det[A]_U = \det[A]. \tag{92}$$

Επομένως, η ορίζουσα του πίνακα ενός γραμμικού τελεστή δεν εξαρτάται από την επιλογή της βάσεως στην οποία αντιστοιχεί ο πίνακας. Κατά συνέπεια, *έχει νόημα η έννοια της ορίζουσας ενός γραμμικού τελεστή, δίχως να γίνεται αναφορά σε προεπιλεγμένη βάση.*

9.38 Ορίζουσες Jacobi[1]**.** Εάν $\mathbf{f}$ είναι μία συνάρτηση που απεικονίζει το ανοικτό σύνολο $E \subset R^n$ στον R^n και εάν είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο

[1] Σ. τ. Μ.: Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851). Σπουδαίος Γερμανός μαθηματικός. Εργάσθηκε στην Ανάλυση και στην Άλγεβρα.

Ο Jacobi καταγόταν από οικογένεια με μεγάλη οικονομική άνεση. Από μικρή ηλικία έδειξε σημάδια διάνοιας. Χαρακτηριστικό είναι το γεγονός ότι τελείωσε τη δευτεροβάθμια εκπαίδευσή του στην ηλικία των δώδεκα ετών και χρειάσθηκε να περιμένει τέσσερα έτη έως ότου να συμπληρώσει το κατώτερο απαιτούμενο όριο ηλικίας για την εισαγωγή του στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου, το έτος 1821. Τέσσερα έτη αργότερα ο Jacobi έλαβε το διδακτορικό του δίπλωμα. Στη διάρκεια των σπουδών του μοίρασε εξίσου τον χρόνο του στη Φιλολογία, τη Φιλοσοφία και τα Μαθηματικά και αμφιταλαντευόταν σχετικά με την επιλογή κατευθύνσεως. Λίγο καιρό μετά, άρχισε να εργάζεται ως υφηγητής στο ίδιο πανεπιστήμιο, αποδεικνύοντας ότι ήταν εμπνευσμένος και προοδευτικός διδάσκαλος. Το έτος 1826, διορίσθηκε υφηγητής στο Πανεπιστήμιο του Königsberg. Με προτροπή του Carl Friedrich Gauss (1777-1855) προς τον Υπουργό Παιδείας, ο Jacobi προήχθη σε επίκουρο καθηγητή το επόμενο έτος εις βάρος άλλων συναδέλφων, οι οποίοι όμως αναγνώρισαν σύντομα την αξία του. Το έτος 1829 ο Jacobi προήχθη σε τακτικό καθηγητή. Δημοσίευσε το μνημειώδες έργο του «Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum» το ίδιο έτος. Το έτος 1840 ο Jacobi χρεοκόπησε. Η απώλεια της περιουσίας του δεν είχε συνέπειες στη μαθηματική του έρευνα, αλλά τον έφερε μπροστά σε δύσκολες καταστάσεις. Το έτος 1843 ο

$\mathbf{x} \in E$, τότε η ορίζουσα του γραμμικού τελεστή $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ ονομάζεται η *ορίζουσα Jacobi*[2] *της* $\mathbf{f}$ *στο* $\mathbf{x}$. Συμβολικά,

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \det \mathbf{f}'(\mathbf{x}). \tag{93}$$

Χρησιμοποιούμε επίσης το συμβολισμό

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \tag{94}$$

αντί του $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ εάν $(y_1, \ldots, y_n) = \mathbf{f}(x_1, \ldots, x_n)$.

Με όρους οριζουσών Jacobi, η ουσιώδης υπόθεση στο θεώρημα αντίστροφης συναρτήσεως είναι η $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \neq 0$ (συγκρίνετε με το Θεώρημα 9.36). Εάν το θεώρημα πεπλεγμένης συναρτήσεως διατυπωθεί με χρήση των συναρτήσεων στην (59), τότε η υπόθεση που διατυπώνεται εκεί μετατρέπεται στην

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0.$$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΕΩΣ

Ορισμός 9.39. Υποθέτουμε ότι f είναι μία πραγματική συνάρτηση, ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $E \subset R^n$, με μερικές παραγώγους $D_1 f, \ldots, D_n f$.

Jacobi κατέρρευσε πλήρως λόγω υπερκοπώσεως. Για την ανάρρωσή του, διέμεινε πέντε μήνες στην Ιταλία και επέστρεψε στο Βερολίνο το έτος 1844, αλλά δεν του εδόθη η προηγούμενη του θέση. Εκτιμώντας το επιστημονικό ανάστημα του Jacobi, ο βασιλιάς της Πρωσίας επιχορηγούσε τον Jacobi. Το έτος 1848 ο Jacobi προσπάθησε να ασχοληθεί με την πολιτική ανεπιτυχώς. Λόγω αυτής της προσπάθειας, ο βασιλιάς σταμάτησε την επιχορήγηση, διότι ο Jacobi ετάχθη με τη Φιλελεύθερη Λέσχη. Σε αυτήν την περίοδο, ο Jacobi ήταν οικονομικά εξαθλιωμένος και επωμισμένος με τη φροντίδα της γυναίκας του και των πέντε παιδιών του. Στο επόμενο έτος προτάθηκε στον Jacobi μία ακαδημαϊκή θέση στο Πανεπιστήμιο της Βιέννης, αλλά ο βασιλιάς άρχισε ξανά την επιχορήγηση, εν μέρει επειδή λυπόταν τον Jacobi και εν μέρει επειδή δεν ήθελε να φύγει από τη Γερμανία ο διασημότερος μαθηματικός της Ευρώπης μετά τον Gauss. Ο Jacobi πέθανε από ευλογιά το 1851, στην ηλικία των σαράντα επτά ετών.

[2] Σ. τ. Μ.: Στην ελληνική βιβλιογραφία έχει επικρατήσει ο όρος *Ιακωβιανή ορίζουσα*, ο οποίος είναι, τουλάχιστον κατά την προσωπική άποψη του μεταφραστή, ατυχής.

Όταν οι συναρτήσεις $D_j f$ $(j = 1, \ldots, n)$ είναι διαφορίσιμες, τότε ορίζονται οι *δεύτερης τάξεως μερικές παράγωγοι* της f από την ισότητα

$$D_{ij} f = D_i D_j f \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Η f λέγεται *κλάσεως* $\mathcal{C}''$ *στο* E εάν και μόνον εάν οι συναρτήσεις $D_{ij} f$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ είναι συνεχείς στο E. Το γεγονός αυτό συμβολίζεται ως $f \in \mathcal{C}''(E)$.

Μία απεικόνιση $\mathbf{f}$ του E στον R^m λέγεται κλάσεως $\mathcal{C}''$ εάν και μόνον εάν κάθε συνιστώσα της $\mathbf{f}$ είναι κλάσεως $\mathcal{C}''$.

Είναι δυνατό να συμβεί $D_{ij} f \neq D_{ji} f$ σε κάποιο σημείο και για κάποιους δείκτες i, j, ακόμη και εάν υπάρχουν οι δύο παράγωγοι (ανατρέξτε στην Άσκηση 27). Όμως, όπως θα συναντήσουμε παρακάτω, ισχύει ότι $D_{ij} f = D_{ji} f$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ όταν οι παράγωγοι αυτές είναι συνεχείς.

Για λόγους απλουστεύσεως (και δίχως απώλεια της γενικότητας) θα διατυπώσουμε τα δύο επόμενα θεωρήματα για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Το πρώτο αποτελεί ένα θεώρημα μέσης τιμής.

Θεώρημα 9.40. *Υποθέτουμε ότι f είναι μία πραγματική συνάρτηση η οποία ορίζεται σε ένα ανοικτό σύνολο $E \subset R^2$ και ότι οι $D_1 f$ και $D_{21} f$ υπάρχουν σε κάθε σημείο του E. Υποθέτουμε ότι $Q \subset E$ είναι ένα κλειστό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες συντεταγμένων, το οποίο έχει τα σημεία (a, b) και $(a + h, b + k)$ σε αντικείμενες κορυφές του. ($h \neq 0$, $k \neq 0$.) Θέτουμε*

$$\Delta(f, Q) = f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b).$$

Τότε, υπάρχει ένα σημείο (x, y) στο εσωτερικό του Q με

$$\Delta(f, Q) = hk(D_{21} f)(x, y). \tag{95}$$

Σημειώνουμε την αναλογία μεταξύ της (95) και του Θεωρήματος 5.10. Το εμβαδό του Q είναι το hk.

Απόδειξη. Για κάθε πραγματικό αριθμό t μεταξύ των a και $a+h$ (οι περιπτώσεις $t=a$ και $t=a+h$ επιτρέπονται) θέτουμε $u(t)=f(t,b+k)-f(t,b)$. Εφαρμόζοντας δύο φορές το Θεώρημα 5.10, βρίσκουμε αριθμό x μεταξύ των a και $a+h$ (με $x\neq a$, $x\neq a+h$) και αριθμό y μεταξύ των b και $b+k$ (με $y\neq b$, $y\neq b+k$) ούτως ώστε

$$\begin{aligned}\Delta(f,Q) &= u(a+h)-u(a)\\ &= hu'(x)\\ &= h[(D_1f)(x,b+k)-(D_1f)(x,b)]\\ &= hk(D_{21}f)(x,y).\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 9.41. *Υποθέτουμε ότι f είναι μία πραγματική συνάρτηση η οποία ορίζεται σε ένα ανοικτό σύνολο $E\subset R^2$ και ότι οι D_1f, $D_{21}f$, D_2f υπάρχουν σε κάθε σημείο του E. Υποθέτουμε επίσης ότι η $D_{21}f$ είναι συνεχής σε ένα σημείο $(a,b)\in E$.*

Τότε, η $D_{12}f$ υπάρχει στο (a,b) και

$$(D_{12}f)(a,b)=(D_{21}f)(a,b). \tag{96}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $A=(D_{21}f)(a,b)$. Θεωρούμε $\varepsilon>0$. Ας είναι Q ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο όπως στο Θεώρημα 9.40, όπου οι h,k είναι επαρκώς μικροί, κατ' απόλυτη τιμή, αριθμοί. Τότε, έχουμε ότι

$$|A-(D_{21}f)(x,y)|<\varepsilon$$

για κάθε $(x,y)\in Q$. Άρα,

$$\left|\frac{\Delta(f,Q)}{hk}-A\right|<\varepsilon$$

σύμφωνα με την (95). Θεωρούμε το h σταθερό και λαμβάνουμε $k\to 0$. Εφόσον η D_2f υπάρχει στο E, η τελευταία ανισότητα συνεπάγεται ότι

$$\left|\frac{(D_2f)(a+h,b)-(D_2f)(a,b)}{h}-A\right|\leq\varepsilon. \tag{97}$$

Εφόσον ο ε είναι τυχών θετικός αριθμός και εφόσον η (97) ισχύει για κάθε επαρκώς μικρό $h \neq 0$, έπεται ότι $(D_{12}f)(a,b) = A$. Η ισότητα αυτή είναι ακριβώς η (96). $\square$

Πόρισμα. *Εάν* $f \in \mathcal{C}''(E)$, *τότε* $D_{21}f = D_{12}f$.

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Υποθέτουμε ότι φ είναι μία συνάρτηση δύο μεταβλητών, η οποία μπορεί να ολοκληρωθεί ως προς τη μία μεταβλητή και να παραγωγισθεί ως προς την άλλη. Υπό ποιες υποθέσεις το αποτέλεσμα παραμένει αμετάβλητο, εάν οι δύο διαδικασίες εκτελεσθούν με αντίστροφη σειρά; Διατυπώνουμε το ερώτημα με ακρίβεια: Ποιες συνθήκες πρέπει να τεθούν στην φ ούτως ώστε να ισχύει η ισότητα

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \varphi(x,t)dx = \int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)dx \quad ; \tag{98}$$

(Στην Άσκηση 28 παρατίθεται ένα αντιπαράδειγμα.)

Για διευκόλυνση, θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$\varphi^t(x) = \varphi(x,t). \tag{99}$$

Με αυτό, η φ^t είναι συνάρτηση μίας μεταβλητής για κάθε κατάλληλο t.

Θεώρημα 9.42. *Υποθέτουμε ότι:*

(α) φ *είναι μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των σημείων (x,t) με* $a \leq x \leq b$, $c \leq t \leq d$.

(β) α *είναι μία αύξουσα συνάρτηση στο* $[a,b]$.

(γ) $\varphi^t \in \mathcal{R}(\alpha)$ *για κάθε* $t \in [c,d]$.

(δ) s *είναι ένας πραγματικός αριθμός με* $c < s < d$ *ούτως ώστε για κάθε* $\varepsilon > 0$ *να υπάρχει* $\delta > 0$ *με*

$$|(D_2\varphi)(x,t) - (D_2\varphi)(x,s)| < \varepsilon$$

για κάθε $x \in [a, b]$ *και* $t \in (s - \delta, s + \delta)$.

Ορίζουμε τη συνάρτηση f *μέσω της σχέσεως*

$$f(t) = \int_a^b \varphi(x, t) d\alpha(x) \qquad (c \leq t \leq d). \tag{100}$$

Τότε, $(D_2\varphi)^s \in \mathcal{R}(\alpha)$, *η* $f'(s)$ *υπάρχει και ισχύει ότι*

$$f'(s) = \int_a^b (D_2\varphi)(x, s) d\alpha(x). \tag{101}$$

Σημειώνουμε ότι η (γ) δηλώνει απλώς την ύπαρξη των ολοκληρωμάτων στην (100) για κάθε $t \in [c, d]$. Σημειώνουμε επίσης ότι η (δ) ισχύει όταν η $D_2\varphi$ είναι συνεχής στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο επί του οποίου ορίζεται η φ.

Απόδειξη. Ας είναι $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε $\delta > 0$, όπως προκύπτει από το μέρος (δ). Θεωρούμε επίσης τα πηλίκα διαφορών

$$\psi(x, t) = \frac{\varphi(x, t) - \varphi(x, s)}{t - s},$$

για κάθε $x \in [a, b]$ και $t \in [c, d]$ με $0 < |t - s| < \delta$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.10, για κάθε σημείο (x, t) υπάρχει ένας αριθμός u μεταξύ των s και t ούτως ώστε

$$\psi(x, t) = (D_2\varphi)(x, u).$$

Συνεπώς, η (δ) συνεπάγεται ότι

$$|\psi(x, t) - (D_2\varphi)(x, s)| < \varepsilon \quad (a \leq x \leq b,\ 0 < |t - s| < \delta). \tag{102}$$

Σημειώνουμε ότι

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} = \int_a^b \psi(x, t) d\alpha(x) \tag{103}$$

για κάθε $t \in [c, d]$ με $0 < |t - s| < \delta$.

Από την (102) προκύπτει ότι $\psi^t \to (D_2\varphi)^s$ ομοιομόρφως στο $[a, b]$ καθώς $t \to s$. Εφόσον κάθε ψ^t ($t \in [c, d]$) ανήκει στο $\mathcal{R}(\alpha)$, η επιθυμητή σχέση προκύπτει από την (103) και το Θεώρημα 7.16. $\square$

Παράδειγμα 9.43. Φυσικά, μπορούν να αποδειχθούν ανάλογα θεωρήματα με το $(-\infty, +\infty)$ στη θέση του $[a, b]$. Αντί αυτού, θα επεξεργαστούμε ένα παράδειγμα. Ορίζουμε τις συναρτήσεις f, g μέσω των σχέσεων

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(xt)dx \tag{104}$$

και

$$g(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} \sin(xt)dx \tag{105}$$

για κάθε $t \in R^1$. Και τα δύο ολοκληρώματα υπάρχουν (συγκλίνουν απολύτως), εφόσον οι απόλυτες τιμές των υπό ολοκλήρωση ποσοτήτων είναι μικρότερες ή ίσες από τις $\exp(-x^2)$ και $|x| \exp(-x^2)$ αντιστοίχως.

Σημειώνουμε ότι η g προκύπτει από την f παραγωγίζοντας την υπό ολοκλήρωση ποσότητα ως προς t. Ισχυριζόμαστε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ότι

$$f'(t) = g(t) \qquad (t \in R^1). \tag{106}$$

Για την απόδειξη αυτού, εξετάζουμε αρχικά τα πηλίκα διαφορών του συνημιτόνου: Εάν α, β είναι πραγματικοί αριθμοί με $\beta > 0$, τότε

$$\frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos\alpha}{\beta} + \sin\alpha = \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\alpha+\beta} (\sin\alpha - \sin t)dt. \tag{107}$$

Εφόσον $|\sin\alpha - \sin t| \le |\alpha - t|$ για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό t, η δεξιά πλευρά της (107) είναι κατ' απόλυτη τιμή μικρότερη ή ίση από το $\beta/2$. Η περίπτωση $\beta < 0$ αντιμετωπίζεται παρομοίως. Επομένως,

$$\left| \frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos\alpha}{\beta} + \sin\alpha \right| \le |\beta|, \tag{108}$$

για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β (θεωρώντας ότι η αριστερή πλευρά ισούται με 0 όταν $\beta = 0$).

Τώρα, θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς t και h με $h \neq 0$. Εφαρμόζουμε την (108) με $\alpha = xt$, $\beta = xh$. Τότε, από τις (104) και (105) έπεται ότι

$$\left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} - g(t) \right| \le |h| \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx.$$

Λαμβάνοντας $h \to 0$, αποκτούμε την (106).

Ας προχωρήσουμε παραπέρα: Εάν εφαρμόσουμε ολοκλήρωση κατά μέρη στην (104), τότε συνάγουμε ότι

$$f(t) = 2\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\frac{\sin(xt)}{t}dx \quad (t \in R^1). \tag{109}$$

Άρα, $tf(t) = -2g(t)$ για κάθε πραγματικό αριθμό t και η (106) συνεπάγεται ότι η f ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$2f'(t) + tf(t) = 0 \quad (t \in R^1). \tag{110}$$

Εάν επιλύσουμε αυτήν τη διαφορική εξίσωση και χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $f(0) = \sqrt{\pi}$ (ανατρέξτε στην Ενότητα 8.21), βρίσκουμε ότι

$$f(t) = \sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{t^2}{4}\right) \tag{111}$$

για κάθε πραγματικό αριθμό t. Επομένως, το ολοκλήρωμα στην (104) υπολογίζεται επακριβώς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Εάν S είναι ένα μη κενό υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου X, τότε αποδείξτε (κατά τον ισχυρισμό στην Ενότητα 9.1) ότι το επέκταμα του S είναι διανυσματικός χώρος.

Άσκηση 2. Αποδείξτε (κατά τον ισχυρισμό στην Ενότητα 9.6) ότι ο BA είναι γραμμικός μετασχηματισμός εάν οι A, B είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί. Αποδείξτε επίσης ότι ο A^{-1} είναι γραμμικός και αντιστρέψιμος μετασχηματισμός.

Άσκηση 3. Υποθέτουμε ότι $A \in L(X, Y)$ και ότι $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ εάν και μόνον εάν $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Αποδείξτε ότι ο A είναι 1-1.

Άσκηση 4. Αποδείξτε (κατά τον ισχυρισμό στην Ενότητα 9.30) ότι οι μηδενικοί χώροι και τα πεδία τιμών γραμμικών μετασχηματισμών είναι διανυσματικοί χώροι.

Άσκηση 5. Αποδείξτε ότι σε κάθε $A \in L(R^n, R^1)$ αντιστοιχεί ένα και μοναδικό $\mathbf{y} \in R^n$ με $A\mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ για κάθε $\mathbf{x} \in R^n$. Αποδείξτε επίσης ότι $\|A\| = |\mathbf{y}|$.

Υπόδειξη: Υπό ορισμένες συνθήκες, ισχύει η ισότητα στην ανισότητα του Schwarz.

Άσκηση 6. Εάν f είναι η πραγματική συνάρτηση στον R^2 με $f(0,0) = 0$ και

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ εάν } (x, y) \neq (0, 0),$$

τότε αποδείξτε ότι οι $(D_1 f)(x, y)$ και $(D_2 f)(x, y)$ υπάρχουν σε κάθε σημείο (x, y) του R^2, παρά το γεγονός ότι η f δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

Άσκηση 7. Υποθέτουμε ότι f είναι μία πραγματική συνάρτηση, ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $E \subset R^n$, και ότι οι μερικές παράγωγοί της $D_1 f, \dots, D_n f$ είναι φραγμένες στο E. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο E.

Υπόδειξη: Προχωρήστε όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 9.21.

Άσκηση 8. Υποθέτουμε ότι f είναι μία πραγματική διαφορίσιμη συνάρτηση σε ένα ανοικτό σύνολο $E \subset R^n$ και ότι η f έχει τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο $\mathbf{x} \in E$. Αποδείξτε ότι $f'(\mathbf{x}) = 0$.

Άσκηση 9. Εάν $\mathbf{f}$ είναι μία διαφορίσιμη απεικόνιση ενός *συνεκτικού* ανοικτού συνόλου $E \subset R^n$ στον R^m και εάν $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in E$, τότε αποδείξτε ότι η $\mathbf{f}$ είναι σταθερή στο E.

Άσκηση 10. Εάν f είναι πραγματική συνάρτηση, ορισμένη σε ένα κυρτό σύνολο $E \subset R^n$, με $(D_1 f)(\mathbf{x}) = 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in E$, τότε αποδείξτε ότι η τιμή $f(\mathbf{x})$ εξαρτάται μόνον από τα $x_2, \dots, x_n$.

Δείξτε ότι η υπόθεση περί κυρτότητας του E μπορεί να αντικατασταθεί από ασθενέστερη υπόθεση, αλλά ότι τελικά κάποια συνθήκη είναι απαραίτητη. Επί παραδείγματι, εάν $n = 2$ και το E έχει πεταλοειδές σχήμα, τότε η πρόταση μπορεί να είναι ψευδής.

Άσκηση 11. Εάν f και g είναι πραγματικές διαφορίσιμες συναρτήσεις στον R^n, τότε αποδείξτε ότι

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

και ότι $\nabla(1/f) = -f^{-2}\nabla f$ όταν η f δεν μηδενίζεται πουθενά.

Άσκηση 12. Θεωρούμε δύο πραγματικούς αριθμούς a, b με $0 < a < b$. Ορίζουμε μία απεικόνιση $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ του R^2 στον R^3 μέσω των σχέσεων

$$\begin{aligned} f_1(s,t) &= (b + a\cos s)\cos t, \\ f_2(s,t) &= (b + a\cos s)\sin t, \\ f_3(s,t) &= a\sin s \end{aligned}$$

για κάθε $(s, t) \in R^2$. Περιγράψτε το πεδίο τιμών K της $\mathbf{f}$. (Αυτό είναι ένα συγκεκριμένο συμπαγές υποσύνολο του R^3.)

(α) Δείξτε ότι υπάρχουν ακριβώς τέσσερα σημεία $\mathbf{p} \in K$ με

$$(\nabla f_1)(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})) = \mathbf{0}.$$

Βρείτε αυτά τα σημεία.

(β) Καθορίστε το σύνολο των σημείων $\mathbf{q} \in K$ με

$$(\nabla f_3)(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{q})) = \mathbf{0}.$$

(γ) Δείξτε ότι ένα από τα σημεία $\mathbf{p}$ του (α) αντιστοιχεί σε τοπικό μέγιστο της f_1, ένα από αυτά αντιστοιχεί σε τοπικό ελάχιστο και τα υπόλοιπα δύο δεν αντιστοιχούν σε ακρότατα (αυτά ονομάζονται *σαγματικά σημεία*).

Ποια από τα σημεία του (β) αντιστοιχούν σε μέγιστα ή ελάχιστα;

(δ) Ας είναι λ ένας άρρητος αριθμός. Για κάθε πραγματικό αριθμό t ορίζουμε $\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(t, \lambda t)$. Αποδείξτε ότι η $\mathbf{g}$ είναι 1-1 απεικόνιση του R^1 επί ενός πυκνού υποσυνόλου του K. Αποδείξτε επίσης ότι

$$|\mathbf{g}'(t)|^2 = a^2 + \lambda^2(b + a\cos t)^2$$

για κάθε πραγματικό αριθμό t.

Άσκηση 13. Υποθέτουμε ότι $\mathbf{f}$ είναι μία διαφορίσιμη απεικόνιση του R^1 στον R^3, με $|\mathbf{f}(t)| = 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό t. Αποδείξτε ότι $\mathbf{f}'(t) \cdot \mathbf{f}(t) = 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό t.

Ερμηνεύστε γεωμετρικά αυτό το γεγονός.

Άσκηση 14. Θεωρούμε την συνάρτηση f στον R^2 με $f(0,0) = 0$ και

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \text{ εάν } (x, y) \neq (0, 0).$$

(α) Αποδείξτε ότι οι $D_1 f$ και $D_2 f$ είναι φραγμένες συναρτήσεις στον R^2. (Άρα, η f είναι συνεχής.)

(β) Ας είναι $\mathbf{u}$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα στον R^2. Δείξτε ότι η διευθυντική παράγωγος $(D_{\mathbf{u}} f)(0, 0)$ υπάρχει και ότι η απόλυτη τιμή της είναι το πολύ ίση με 1.

(γ) Ας είναι γ μία διαφορίσιμη απεικόνιση του R^1 στον R^2 (δηλαδή η γ είναι διαφορίσιμη καμπύλη του R^2) με $\gamma(0) = (0, 0)$ και $|\gamma'(0)| > 0$. Για $t \in R^1$ θέτουμε $g(t) = f(\gamma(t))$. Αποδείξτε ότι η g είναι διαφορίσιμη για κάθε $t \in R^1$.

Εάν $\gamma \in \mathcal{C}'$, τότε αποδείξτε ότι $g \in \mathcal{C}'$.

(δ) Παρά το γεγονός αυτό, αποδείξτε ότι η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

Υπόδειξη: Ο τύπος (40) δεν ισχύει σε αυτήν την περίπτωση.

Άσκηση 15. Θεωρούμε την συνάρτηση f στον R^2 με $f(0,0) = 0$ και

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x^2 y - \frac{4x^6 y^2}{(x^4 + y^2)^2} \text{ εάν } (x, y) \neq (0, 0).$$

(α) Για κάθε $(x, y) \in R^2$ αποδείξτε ότι

$$4x^4y^2 \leq (x^4 + y^2)^2.$$

Συμπεράνετε ότι η f είναι συνεχής.

(β) Για $\theta \in [0, 2\pi]$, $t \in R^1$ ορίζουμε

$$g_\theta(t) = f(t\cos\theta, t\sin\theta).$$

Για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$ αποδείξτε ότι $g_\theta(0) = 0$, $g'_\theta(0) = 0$, $g''_\theta(0) = 2$. Επομένως, κάθε g_θ έχει γνήσιο τοπικό ελάχιστο στο $t = 0$.

Με διαφορετική διατύπωση, ο περιορισμός της f σε κάθε ευθεία που διέρχεται από το $(0, 0)$ έχει γνήσιο τοπικό ελάχιστο στο $(0, 0)$.

(γ) Παρ' όλα αυτά, αποδείξτε ότι το $(0, 0)$ δεν είναι τοπικό ελάχιστο για την f, εφόσον για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει ότι $f(x, x^2) = -x^4$.

Άσκηση 16. Δείξτε ότι η συνέχεια της $\mathbf{f}'$ σε ένα σημείο $\mathbf{a}$ αποτελεί ουσιώδη συνθήκη στο θεώρημα αντίστροφης συναρτήσεως, ακόμη και στην περίπτωση $n = 1$: Εάν

$$f(t) = t + 2t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right)$$

για $t \neq 0$ και $f(0) = 0$, τότε $f'(0) = 1$, η f' είναι φραγμένη στο $(-1, 1)$, όμως η f δεν είναι 1-1 σε καμία περιοχή του 0.

Άσκηση 17. Ας είναι $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ η απεικόνιση του R^2 στον R^2 που ορίζεται μέσω των ισοτήτων

$$f_1(x, y) = e^x \cos y, \qquad f_2(x, y) = e^x \sin y$$

για κάθε $(x, y) \in R^2$.

(α) Ποιο είναι το πεδίο τιμών της $\mathbf{f}$;

(β) Δείξτε ότι η ορίζουσα Jacobi της $\mathbf{f}$ δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του R^2. Συνεπώς, κάθε σημείο του R^2 έχει μία περιοχή στην οποία η $\mathbf{f}$ είναι 1-1. Εντούτοις, η $\mathbf{f}$ δεν είναι 1-1 στον R^2.

(γ) Θέτουμε $\mathbf{a} = (0, \pi/3)$ και $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$. Ας είναι $\mathbf{g}$ η (συνεχής) αντίστροφη συνάρτηση της $\mathbf{f}$, ορισμένη σε μία περιοχή του $\mathbf{b}$. Τότε ισχύει ότι $\mathbf{g}(\mathbf{b}) = \mathbf{a}$. Βρείτε τη σαφή έκφραση της $\mathbf{g}$, υπολογίστε τις $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$, $\mathbf{g}'(\mathbf{b})$ και επαληθεύστε τον τύπο (52).

(δ) Ποιες είναι οι εικόνες, μέσω της $\mathbf{f}$, των ευθειών που είναι παράλληλες προς τους άξονες συντεταγμένων;

Άσκηση 18. Απαντήστε στα ανάλογα ερωτήματα για την απεικόνιση που ορίζεται από τις σχέσεις

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy.$$

Άσκηση 19. Δείξτε ότι το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} 3x + y - z + u^2 &= 0 \\ x - y + 2z + u &= 0 \\ 2x + 2y - 3z + 2u &= 0 \end{aligned}$$

μπορεί να λυθεί: ως προς x, y, u με απροσδιόριστο το z, ως προς x, z, u με απροσδιόριστο το y, ως προς y, z, u με απροσδιόριστο το x. Όμως, δεν μπορεί να λυθεί ως προς x, y, z με απροσδιόριστο το u.

Άσκηση 20. Θεωρήστε $n = m = 1$ στο θεώρημα πεπλεγμένης συναρτήσεως και ερμηνεύστε το θεώρημα (καθώς επίσης και την απόδειξή του) γραφικά.

Άσκηση 21. Ορίζουμε την f στο R^2 μέσω της ισότητας

$$f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$$

για κάθε $(x, y) \in R^2$.

(α) Βρείτε τα τέσσερα σημεία του R^2 στα οποία η κλίση της f είναι ίση με 0. Αποδείξτε ότι η f έχει ακριβώς ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο στο R^2.

(β) Θεωρούμε το σύνολο S όλων των σημείων $(x, y) \in R^2$ στα οποία ισχύει ότι $f(x, y) = 0$. Βρείτε τα σημεία του S τα οποία δεν έχουν περιοχή στην οποία η εξίσωση $f(x, y) = 0$ μπορεί να λυθεί ως προς y με απροσδιόριστο το x (ή ως προς x με απροσδιόριστο το y). Περιγράψτε το S με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια.

Άσκηση 22. Εργασθείτε ομοίως για τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x, y) = 2x^3 + 6xy^2 - 3x^2 + 3y^2 \quad ((x, y) \in R^2).$$

Άσκηση 23. Ορίζουμε τη συνάρτηση f στο R^3 μέσω της σχέσεως

$$f(x, y_1, y_2) = x^2 y_1 - e^x + y_2.$$

Δείξτε ότι $f(0, 1, -1) = 0$, ότι $(D_1 f)(0, 1, -1) \neq 0$ και ότι υπάρχει επομένως μία διαφορίσιμη συνάρτηση g σε κάποια περιοχή του $(1, -1)$ στο R^2 ούτως ώστε $g(1, -1) = 0$ και

$$f(g(y_1, y_2), y_1, y_2) = 0$$

για κάθε (y_1, y_2) σε αυτήν την περιοχή. Υπολογίστε τις $(D_1 g)(1, -1)$ και $(D_2 g)(1, -1)$.

Άσκηση 24. Για $(x, y) \neq (0, 0)$ ορίζουμε την $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ μέσω των σχέσεων

$$f_1(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f_2(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Υπολογίστε την βαθμίδα του $\mathbf{f}'(x, y)$ και βρείτε το πεδίο τιμών της $\mathbf{f}$.

Άσκηση 25. Θεωρούμε $A \in L(R^n, R^m)$ με βαθμίδα r.

(α) Ορίζουμε τον S όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 9.32. Δείξτε ότι ο SA είναι προβολή στον R^n, με μηδενικό χώρο τον $\mathcal{N}(A)$ και πεδίο τιμών τον $\mathcal{R}(S)$.

Υπόδειξη: Σύμφωνα με την (68), ισχύει ότι $SASA = SA$.

(β) Χρησιμοποιήστε το (α) για να αποδείξετε ότι

$$\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{R}(A) = n.$$

Άσκηση 26. Αποδείξτε ότι η ύπαρξη (ακόμη και η συνέχεια) της $D_{21}f$ δεν συνεπάγεται απαραιτήτως την ύπαρξη της $D_1 f$. Ως παράδειγμα, θεωρήστε τη συνάρτηση f, ορισμένη στον R^2 μέσω της σχέσεως $f(x, y) = g(x)$ $((x, y) \in R^2)$, όπου η g είναι πραγματική συνάρτηση στον R^1 η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο.

Άσκηση 27. Θεωρούμε τη συνάρτηση f στον R^2 με $f(0, 0) = 0$ και

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \text{ εάν } (x, y) \neq (0, 0),$$

Αποδείξτε ότι:

(α) Οι f, $D_1 f$, $D_2 f$ είναι συνεχείς στο R^2.

(β) Οι $D_{12}f$ και $D_{21}f$ υπάρχουν σε κάθε σημείο του R^2 και είναι συνεχείς, εκτός του σημείου (0, 0).

(γ) $(D_{12}f)(0, 0) = 1$ και $(D_{21}f)(0, 0) = -1$.

Άσκηση 28. Θεωρούμε την απεικόνιση φ στον R^2 που ορίζεται ως εξής: Για $x \in R^1$ και $t \geq 0$ θέτουμε

$$\varphi(x, t) = \begin{cases} x & \text{εάν } \ x \leq \sqrt{t}, \\ -x + 2\sqrt{t} & \text{εάν } \ \sqrt{t} \leq x \leq 2\sqrt{t}, \\ 0 & \text{εάν } \ 2\sqrt{t} \leq x. \end{cases}$$

Για $x \in R^1$ και $t < 0$ θέτουμε $\varphi(x, t) = -\varphi(x, |t|)$.

Αποδείξτε ότι η φ είναι συνεχής στο R^2 και ότι

$$(D_2\varphi)(x, 0) = 0$$

για κάθε μη αρνητικό πραγματικό αριθμό x.

Ορίζουμε τη συνάρτηση f στον R^1 μέσω της ισότητας

$$f(t) = \int_0^1 \varphi(x, t)dx \quad (t \in R^1).$$

Δείξτε ότι $f(t) = t$ εάν $|t| < \frac{1}{4}$. Άρα,

$$f'(0) \neq \int_0^1 (D_2\varphi)(x, 0)dx.$$

Άσκηση 29. Θεωρούμε ένα ανοικτό υποσύνολο E του R^n. Έχουμε ορίσει τις κλάσεις $\mathcal{C}'(E)$ και $\mathcal{C}''(E)$. Επαγωγικά, η κλάση $\mathcal{C}^{(k)}(E)$ μπορεί να ορισθεί για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό k, ως εξής: $f \in \mathcal{C}^{(k)}(E)$ εάν και μόνον εάν οι μερικές παράγωγοι $D_1 f, \ldots, D_n f$ ανήκουν στην $\mathcal{C}^{(k-1)}(E)$.

Υποθέτουμε ότι $f \in \mathcal{C}^{(k)}(E)$. Δείξτε (με επαναλαμβανόμενη εφαρμογή του Θεωρήματος 9.41) ότι η k τάξεως μερική παράγωγος

$$D_{i_1 i_2 \cdots i_k} f = D_{i_1} D_{i_2} \cdots D_{i_k} f$$

παραμένει αμετάβλητη εάν μεταταχθούν οι δείκτες $i_1, i_2 \ldots i_k$.

Επί παραδείγματι, εάν $n \geq 3$, τότε

$$D_{1213} f = D_{3112} f$$

για κάθε $f \in \mathcal{C}^{(4)}$.

Άσκηση 30. Θεωρούμε $f \in \mathcal{C}^{(m)}(E)$, όπου E είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του R^n. Θεωρούμε επίσης $\mathbf{a} \in E$ και υποθέτουμε ότι το $\mathbf{x} \in R^n$ είναι επαρκώς κοντά στο $\mathbf{0}$ ούτως ώστε το σημείο

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{x}$$

να βρίσκεται στο E για κάθε $t \in [0, 1]$. Ορίζουμε τη συνάρτηση h μέσω της ισότητας

$$h(t) = f(\mathbf{p}(t))$$

για κάθε $t \in R^1$ με $\mathbf{p}(t) \in E$.

(α) Για κάθε ακέραιο αριθμό k με $1 \leq k \leq m$ δείξτε (με επαναλαμβανόμενη εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας) ότι

$$h^{(k)}(t) = \sum (D_{i_1 \cdots i_k} f)(\mathbf{p}(t)) x_{i_1} \ldots x_{i_k},$$

όπου το άθροισμα λαμβάνεται υπεράνω όλων των διατεταγμένων k-άδων ακεραίων αριθμών $(i_1, \ldots, i_k)$ με $1 \leq i_j \leq n$ $(1 \leq j \leq k)$.

(β) Λόγω του θεωρήματος του Taylor (Θεώρημα 5.15), ισχύει ότι

$$h(1) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} + \frac{h^{(m)}(t)}{m!},$$

για κάποιο $t \in (0, 1)$. Χρησιμοποιήστε αυτήν τη σχέση για να αποδείξετε το θεώρημα του Taylor σε n μεταβλητές, δείχνοντας ότι ο τύπος

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{a}) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \sum (D_{i_1 \cdots i_k} f)(\mathbf{a}) x_{i_1} \ldots x_{i_k} + r(\mathbf{x})$$

αναπαριστά το $f(\mathbf{x}+\mathbf{a})$ ως το άθροισμα του λεγομένου *πολυωνύμου Taylor βαθμού* $m-1$ με ένα υπόλοιπο που ικανοποιεί τη σχέση

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{r(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|^{m-1}} = 0.$$

Κάθε εσωτερικό άθροισμα λαμβάνεται όπως στο μέρος (α). Ως συνήθως, η παράγωγος μηδενικής τάξης της f είναι η ίδια η f. Επομένως, ο σταθερός όρος του πολυωνύμου Taylor της f στο $\mathbf{a}$ ισούται με $f(\mathbf{a})$.

(γ) Η Άσκηση 29 φανερώνει ότι παρουσιάζεται επανάληψη όρων στο πολυώνυμο Taylor. Επί παραδείγματι, η D_{113} εμφανίζεται τρεις φορές, ως D_{113}, D_{131}, D_{311}. Το άθροισμα των αντιστοίχων τριών όρων μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$3(D_1^2 D_3 f)(\mathbf{a}) x_1^2 x_3.$$

Αποδείξτε (υπολογίζοντας τη συχνότητα εμφανίσεως κάθε παραγώγου) ότι το πολυώνυμο Taylor στο (β) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\sum \frac{(D_1^{s_1} \cdots D_n^{s_n} f)(\mathbf{a})}{s_1! \cdots s_n!} x_1^{s_1} \cdots x_n^{s_n}.$$

Το άθροισμα εκτείνεται υπεράνω όλων των διατεταγμένων n-άδων $(s_1, \ldots, s_n)$, όπου οι δείκτες $s_1, \ldots, s_n$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί με $s_1 + \cdots + s_n \le m-1$.

Άσκηση 31. Υποθέτουμε ότι $f \in \mathcal{C}^{(3)}$ σε κάποια περιοχή ενός σημείου $\mathbf{a} \in R^2$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι η f έχει κλίση $\mathbf{0}$ στο $\mathbf{a}$, όμως τουλάχιστον μία δεύτερης τάξεως μερική παράγωγός της είναι μη μηδενική στο $\mathbf{a}$. Δείξτε με ποιον τρόπο μπορεί να διαπιστωθεί, χρησιμοποιώντας το πολυώνυμο Taylor (βαθμού 2) της $\mathbf{f}$ στο $\mathbf{a}$, εάν η f έχει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο ή τίποτε από τα δύο στο $\mathbf{a}$.

Επεκτείνετε το συμπέρασμα στον R^n.

Κεφάλαιο 10

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΜΟΡΦΩΝ

Η ολοκλήρωση μπορεί να μελετηθεί σε πολλά επίπεδα. Στο Κεφάλαιο 6 αναπτύχθηκε η θεωρία για συναρτήσεις με ομαλή συμπεριφορά σε διαστήματα πραγματικών αριθμών. Στο Κεφάλαιο 11 θα συναντήσουμε μία υψηλού επιπέδου θεωρία ολοκληρώσεως, η οποία εφαρμόζεται σε μία κατά πολύ ευρύτερη κλάση συναρτήσεων, με πεδία ορισμού σύνολα τα οποία δεν είναι απαραιτήτως υποσύνολα του R^n. Το παρόν κεφάλαιο διαπραγματεύεται θέματα της θεωρίας ολοκληρώσεως τα οποία σχετίζονται στενά με τη γεωμετρική δομή των Ευκλειδείων χώρων, όπως ο τύπος της αλλαγής μεταβλητών, τα επικαμπύλια ολοκληρώματα και ο μηχανισμός λειτουργίας των διαφορικών μορφών, ο οποίος χρησιμοποιείται στη διατύπωση και απόδειξη του n-διαστάτου αναλόγου του θεμελιώδους θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού: του θεωρήματος του Stokes[1].

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Ορισμός 10.1. Υποθέτουμε ότι I^k είναι ένα k-διάστημα, αποτελούμενο από όλα τα διανύσματα

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$$

με

$$a_i \leq x_i \leq b_i \quad (i = 1, \ldots, k). \tag{1}$$

Για θετικό ακέραιο αριθμό j με $1 \leq j \leq k$ συμβολίζουμε με I^j το j-διάστημα στον R^j που ορίζεται από τις j πρώτες ανισότητες της (1).

Θεωρούμε μία πραγματική συνεχή συνάρτηση f, ορισμένη στο I^k. Θέτουμε $f_k = f$ και ορίζουμε την f_{k-1} στο I^{k-1} μέσω της σχέσεως

$$f_{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}) = \int_{a_k}^{b_k} f_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k) dx_k$$

για κάθε $(x_1, \ldots, x_{k-1}) \in I^{k-1}$. Η ομοιόμορφη συνέχεια της f_k στο I^k φανερώνει ότι η f_{k-1} είναι συνεχής στο I^{k-1}. Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί και με αυτόν τον τρόπο λαμβάνουμε συναρτήσεις f_j $(1 \leq j \leq k)$, συνεχείς στο I^j, ούτως ώστε η f_{j-1} να είναι το ολοκλήρωμα της f_j ως προς τη μεταβλητή x_j υπεράνω του $[a_j, b_j]$. Ύστερα από k βήματα

[1] Σ. τ. Μ.: George Gabriel Stokes (1819-1903). Ιρλανδός μαθηματικός και φυσικός. Θεωρείται ως ο θεμελιωτής της Υδροδυναμικής.

Το έτος 1837 ο Stokes εισήχθη στο Πανεπιστήμιο του Cambridge από όπου απεφοίτησε μετά τέσσερα έτη. Το έτος 1841 ο Stokes έγινε υφηγητής του Κολεγίου Pembroke. Οκτώ έτη μετά διορίσθηκε ως καθηγητής Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Cambridge, θέση που διατήρησε έως τον θάνατό του. Το έτος 1851 ο Stokes εξελέγη μέλος της Βασιλικής Εταιρίας του Λονδίνου. Διετέλεσε γραμματέας της Εταιρίας από το έτος 1854 για μία τριακονταετία, οπότε και εξελέγη πρόεδρος.

καταλήγουμε σε έναν *αριθμό* f_0 , τον οποίο ονομάζουμε *ολοκλήρωμα της* f *υπεράνω του* I^k και τον συμβολίζουμε ως

$$\int_{I^k} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad \text{ή} \quad \int_{I^k} f. \tag{2}$$

Εκ των προτέρων, ο ορισμός αυτός εξαρτάται από τη σειρά με την οποία εκτελούνται οι ολοκληρώσεις. Όμως, η εξάρτηση αυτή είναι φαινομενική. Για να το αποδείξουμε αυτό, συμβολίζουμε προσωρινά με $L(f)$ το ολοκλήρωμα (2) και με $L'(f)$ το αποτέλεσμα που προκύπτει εάν οι k ολοκληρώσεις εκτελεσθούν με κάποια διαφορετική σειρά.

Θεώρημα 10.2. *Για κάθε* $f \in \mathcal{C}(I^k)$ *ισχύει ότι* $L(f) = L'(f)$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h \in \mathcal{C}(I^k)$ που ορίζεται από την ισότητα $h(\mathbf{x}) = h_1(x_1)\cdots h_k(x_k)$ $(\mathbf{x} \in I^k)$, όπου $h_j \in \mathcal{C}([a_j, b_j])$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Τότε,

$$L(h) = \prod_{i=1}^{k} \int_{a_i}^{b_i} h_i(x_i)dx_i = L'(h).$$

Εάν $\mathcal{A}$ είναι το σύνολο των πεπερασμένων αθροισμάτων συναρτήσεων αυτής της μορφής, τότε έπεται ότι $L(g) = L'(g)$ για κάθε $g \in \mathcal{A}$. Επιπλέον, η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα συνεχών συναρτήσεων στο I^k στην οποία μπορεί να εφαρμοσθεί το θεώρημα των Stone και Weierstrass.

Θέτουμε $V = \prod_{i=1}^{k}(b_i - a_i)$. Εάν $f \in \mathcal{C}(I^k)$ και $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $g \in \mathcal{A}$ με $\|f - g\| < \varepsilon/V$, όπου γενικώς για $h \in \mathcal{C}(I^k)$ η $\|h\|$ ορίζεται ως το $\max_{\mathbf{x}\in I^k} |h(\mathbf{x})|$. Τότε, $|L(f - g)| < \varepsilon$ και $|L'(f - g)| < \varepsilon$. Εφόσον

$$L(f) - L'(f) = L(f - g) + L'(g - f),$$

συνάγουμε ότι $|L(f) - L'(f)| < 2\varepsilon$. Εφόσον ο ε είναι τυχών θετικός αριθμός, προκύπτει το ζητούμενο. □

Η Άσκηση 2 σχετίζεται με τα παραπάνω.

Ορισμός 10.3. Ο *φορέας* μίας (πραγματικής ή μιγαδικής) συναρτήσεως f στον R^k ορίζεται ως η κλειστή θήκη του συνόλου των σημείων $\mathbf{x} \in R^k$ με

$f(\mathbf{x}) \neq 0$. Εάν f είναι μία συνεχής συνάρτηση με συμπαγή φορέα, τότε θεωρούμε ένα k-διάστημα I^k που περιέχει τον φορέα της f και ορίζουμε

$$\int_{R^k} f = \int_{I^k} f. \tag{3}$$

Το ολοκλήρωμα που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο είναι προφανώς ανεξάρτητο της επιλογής του I^k, αρκεί το I^k να περιέχει τον φορέα της f.

Τώρα, παρακινούμαστε να επεκτείνουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος υπεράνω του R^k σε συναρτήσεις που προκύπτουν ως (κάποιου είδους) όρια συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα. Δεν θα αναπτύξουμε εδώ τις συνθήκες υπό τις οποίες είναι αυτό δυνατό. Το κατάλληλο πλαίσιο εργασίας για την απάντηση αυτού του ερωτήματος είναι η θεωρία ολοκληρώσεως του Lebesgue. Απλώς, θα αρκεσθούμε να περιγράψουμε ένα πολύ απλό παράδειγμα, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη του θεωρήματος του Stokes.

Παράδειγμα 10.4. Ας είναι Q^k το k-μονόπλοκο[2], δηλαδή το σύνολο που αποτελείται από τα σημεία $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ του R^k με $x_1 + \cdots + x_k \leq 1$ και $x_i \geq 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$. Επί παραδείγματι, όταν $k = 3$, τότε το Q^k είναι το τετράεδρο που έχει ως κορυφές τα $\mathbf{0}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Εάν $f \in \mathcal{C}(Q^k)$, τότε επεκτείνουμε την f σε μία συνάρτηση στο I^k θέτοντας $f(\mathbf{x}) = 0$ για κάθε σημείο $\mathbf{x}$ εκτός του Q^k και ορίζουμε

$$\int_{Q^k} f = \int_{I^k} f. \tag{4}$$

Ως I^k θεωρούμε τον «μοναδιαίο κύβο», που ορίζεται από τις ανισότητες

$$0 \leq x_i \leq 1 \qquad (i = 1, \ldots, k).$$

Εφόσον η f μπορεί να είναι ασυνεχής στο I^k, πρέπει να αποδειχθεί η ύπαρξη του ολοκληρώματος στη δεξιά πλευρά της (4). Επίσης, επιθυμούμε

[2] Σ. τ. Μ.: Ο «επίσημος» ορισμός του *συνήθους k-μονοπλόκου* Q^k δίδεται στον Ορισμό 10.26.

να αποδείξουμε ότι το ολοκλήρωμα αυτό είναι ανεξάρτητο από τη σειρά εκτελέσεως των διαδοχικών ολοκληρώσεων.

Προς αυτό, θεωρούμε έναν πραγματικό αριθμό δ με $0 < \delta < 1$ και θέτουμε

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{εάν} \quad t \le 1-\delta, \\ \dfrac{1-t}{\delta} & \text{εάν} \quad 1-\delta < t \le 1, \\ 0 & \text{εάν} \quad 1 < t, \end{cases} \tag{5}$$

και ορίζουμε τη συνάρτηση F στο I^k μέσω της ισότητας

$$F(\mathbf{x}) = \varphi(x_1 + \cdots + x_k) f(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \in I^k). \tag{6}$$

Τότε, $F \in \mathcal{C}(I^k)$.

Θέτουμε $\mathbf{y} = (x_1, \ldots, x_{k-1})$, $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, x_k)$. Για κάθε $\mathbf{y} \in I^{k-1}$, το σύνολο των σημείων x_k με $F(\mathbf{y}, x_k) \neq f(\mathbf{y}, x_k)$ είναι είτε κενό είτε ένα διάστημα με μήκος το οποίο δεν υπερβαίνει το δ. Εφόσον $0 \le \varphi \le 1$, έπεται ότι

$$|F_{k-1}(\mathbf{y}) - f_{k-1}(\mathbf{y})| \le \delta \|f\| \quad (\mathbf{y} \in I^{k-1}), \tag{7}$$

όπου η $\|f\|$ έχει το ίδιο νόημα όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 10.2 και οι F_{k-1}, f_{k-1} είναι όπως στον Ορισμό 10.1.

Καθώς $\delta \to 0$, από την (7) προκύπτει ότι η f_{k-1} ισούται με το ομοιόμορφο όριο μίας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων. Άρα, $f_{k-1} \in \mathcal{C}(I^{k-1})$ και επομένως οι ολοκληρώσεις δεν παρουσιάζουν πρόβλημα.

Αυτό αποδεικνύει την ύπαρξη του ολοκληρώματος (4). Επιπλέον, η (7) φανερώνει ότι

$$\left| \int_{I^k} F(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{I^k} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \le \delta \|f\|. \tag{8}$$

Σημειώνουμε ότι η (8) αληθεύει ανεξαρτήτως από τη σειρά εκτελέσεως των ολοκληρώσεων. Εφόσον $F \in \mathcal{C}(I^k)$, το $\int_{I^k} F$ παραμένει αμετάβλητο από αλλαγές της σειράς ολοκληρώσεων. Επομένως, η (8) φανερώνει ότι αληθεύει το ίδιο και για το $\int_{I^k} f$.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Ο επόμενος στόχος είναι η απόδειξη του τύπου αλλαγής μεταβλητών, ο οποίος και διατυπώνεται στο Θεώρημα 10.9. Για να διευκολυνθούμε στην απόδειξη, θα ασχοληθούμε αρχικά με τις λεγόμενες πρωταρχικές απεικονίσεις και με τις διαμερίσεις της μονάδας. Οι πρωταρχικές απεικονίσεις μας βοηθούν να αντιληφθούμε με περισσότερη σαφήνεια την τοπική συμπεριφορά μίας $\mathcal{C}'$-απεικονίσεως με αντιστρέψιμη παράγωγο. Η διαμέριση της μονάδας είναι μία χρήσιμη τεχνική που καθιστά δυνατή την αξιοποίηση πληροφοριών τοπικού χαρακτήρα σε ολικό επίπεδο.

ΠΡΩΤΑΡΧΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Ορισμός 10.5. Εάν $\mathbf{G}$ είναι μία απεικόνιση του ανοικτού συνόλου $E \subset R^n$ στον R^n, τότε η $\mathbf{G}$ λέγεται *πρωταρχική* εάν και μόνον εάν υπάρχει ακέραιος αριθμός m με $1 \leq m \leq n$ και πραγματική συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το E ούτως ώστε

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{n} x_i \mathbf{e}_i + g(\mathbf{x})\mathbf{e}_m \qquad (\mathbf{x} \in E). \tag{9}$$

Δηλαδή, μία πρωταρχική απεικόνιση είναι μία απεικόνιση η οποία διατηρεί όλες τις συντεταγμένες του ορίσματός της σταθερές εκτός από το πολύ μία. Σημειώνουμε ότι η (9) γράφεται στη μορφή

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + [g(\mathbf{x}) - x_m]\mathbf{e}_m \qquad (\mathbf{x} \in E). \tag{10}$$

Εάν η g είναι διαφορίσιμη σε κάποιο σημείο $\mathbf{a} \in E$, τότε ισχύει το ίδιο και για τη $\mathbf{G}$. Ο πίνακας $[\alpha_{ij}]$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ του τελεστή $\mathbf{G}'(\mathbf{a})$ έχει ως m-γραμμή την

$$(D_1 g)(\mathbf{a}), \dots, (D_m g)(\mathbf{a}), \dots, (D_n g)(\mathbf{a}). \tag{11}$$

Για $j \neq m$ είναι $\alpha_{jj} = 1$ και για $i \neq j$ είναι $\alpha_{ij} = 0$. Επομένως, η ορίζουσα Jacobi της $\mathbf{G}$ στο $\mathbf{a}$ είναι η

$$J_{\mathbf{G}}(\mathbf{a}) = \det[\mathbf{G}'(\mathbf{a})] = (D_m g)(\mathbf{a}). \tag{12}$$

Συνεπώς, διαπιστώνουμε ότι (Θεώρημα 9.36) *ο* $\mathbf{G}'(\mathbf{a})$ *είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνον εάν* $(D_m g)(\mathbf{a}) \neq 0$.

Ορισμός 10.6. Ένας γραμμικός τελεστής B του R^n ονομάζεται *απεικόνιση εναλλαγής* εάν και μόνον εάν εναλλάσσει δύο μέλη της συνήθους βάσεως μεταξύ τους και διατηρεί τα υπόλοιπα σταθερά.

Επί παραδείγματι, η απεικόνιση εναλλαγής B του R^4 που εναλλάσσει τα $\mathbf{e}_2$ και $\mathbf{e}_4$ δίδεται από την ισότητα

$$B(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + x_4\mathbf{e}_4) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_4 + x_3\mathbf{e}_3 + x_4\mathbf{e}_2 \tag{13}$$

ή ισοδύναμα

$$B(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + x_4\mathbf{e}_4) = x_1\mathbf{e}_1 + x_4\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + x_2\mathbf{e}_4 \tag{14}$$

για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x_1, x_2, x_3, x_4. Επομένως, ο B μπορεί να θεωρηθεί ως ο μετασχηματισμός που εναλλάσσει δύο μεταβλητές αντί δύο διανύσματα της βάσεως.

Στην απόδειξη που ακολουθεί, θα χρησιμοποιήσουμε τις προβολές $P_0, \ldots, P_n$ στον R^n, οριζόμενες μέσω των σχέσεων $P_0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ και

$$P_m\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_m\mathbf{e}_m \tag{15}$$

για κάθε $\mathbf{x} \in R^n$ και θετικό ακέραιο αριθμό m με $1 \leq m \leq n$. Άρα, η P_m είναι η προβολή όπου το πεδίο τιμών και ο μηδενικός χώρος της παράγονται από τα $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ και $\{\mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ αντιστοίχως.

Θεώρημα 10.7. *Υποθέτουμε ότι* $\mathbf{F}$ *είναι μία* $\mathcal{C}'$*-απεικόνιση ενός ανοικτού συνόλου* $E \subset R^n$ *στον* R^n *με* $\mathbf{0} \in E$, $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ *και με τον* $\mathbf{F}'(\mathbf{0})$ *αντιστρέψιμο.*

Τότε, υπάρχει μία περιοχή του $\mathbf{0}$ *στον* R^n*, στην οποία υφίσταται η αναπαράσταση*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = B_1 \cdots B_{n-1}\mathbf{G}_n \circ \cdots \circ \mathbf{G}_1(\mathbf{x}) \tag{16}$$

για κάθε σημείο $\mathbf{x}$ *που ανήκει σε αυτήν την περιοχή. Σε αυτήν την ισότητα, κάθε* $\mathbf{G}_i$ *είναι πρωταρχική* $\mathcal{C}'$*-απεικόνιση σε κάποια περιοχή του* $\mathbf{0}$ *με* $\mathbf{G}_i(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ *και με τον* $\mathbf{G}_i'(\mathbf{0})$ *αντιστρέψιμο για κάθε* $i = 1, \ldots, n$*. Επίσης, ο* B_i *είναι ή απεικόνιση εναλλαγής ή ο ταυτοτικός τελεστής για κάθε* $i = 1, \ldots, n-1$*.*

Εν συντομία, η (16) αναπαριστά την $\mathbf{F}$ τοπικά ως σύνθεση πρωταρχικών απεικονίσεων και απεικονίσεων εναλλαγής.

Απόδειξη. Θέτουμε $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}$. Υποθέτουμε ότι $1 \le m \le n-1$ και κάνουμε την ακόλουθη επαγωγική υπόθεση (η οποία ισχύει προφανώς όταν $m = 1$):

Η V_m *είναι περιοχή του* $\mathbf{0}$*,* $\mathbf{F}_m \in \mathcal{C}'(V_m)$*,* $\mathbf{F}_m(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$*, ο* $\mathbf{F}_m'(\mathbf{0})$ *είναι αντιστρέψιμος και*

$$P_{m-1}\mathbf{F}_m(\mathbf{x}) = P_{m-1}\mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in V_m). \tag{17}$$

Από την (17) έχουμε ότι

$$\mathbf{F}_m(\mathbf{x}) = P_{m-1}\mathbf{x} + \sum_{i=m}^{n} \alpha_i(\mathbf{x})\mathbf{e}_i \qquad (\mathbf{x} \in V_m), \tag{18}$$

όπου $\alpha_m, \ldots, \alpha_n$ είναι πραγματικές $\mathcal{C}'$-συναρτήσεις στην V_m. Επομένως,

$$\mathbf{F}_m'(\mathbf{0})\mathbf{e}_m = \sum_{i=m}^{n} (D_m\alpha_i)(\mathbf{0})\mathbf{e}_i. \tag{19}$$

Εφόσον ο $\mathbf{F}_m'(\mathbf{0})$ είναι αντιστρέψιμος, η αριστερή πλευρά της (19) δεν είναι ίση με $\mathbf{0}$ και επομένως υπάρχει ακέραιος αριθμός k με $m \le k \le n$ και $(D_m\alpha_k)(\mathbf{0}) \neq 0$.

Ας είναι B_m η απεικόνιση εναλλαγής που εναλλάσσει τη m-συντεταγμένη με τη k-συντεταγμένη (εάν $k = m$, τότε ως B_m θεωρούμε τον ταυτοτικό τελεστή). Ορίζουμε

$$\mathbf{G}_m(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + [\alpha_k(\mathbf{x}) - x_m]\mathbf{e}_m \qquad (\mathbf{x} \in V_m). \tag{20}$$

Τότε, $\mathbf{G}_m \in \mathcal{C}'(V_m)$, η $\mathbf{G}_m$ είναι πρωταρχική και ο $\mathbf{G}_m'(\mathbf{0})$ είναι αντιστρέψιμος, εφόσον $(D_m\alpha_k)(\mathbf{0}) \neq 0$.

Επομένως, το θεώρημα αντίστροφης συναρτήσεως φανερώνει την ύπαρξη ενός ανοικτού συνόλου U_m με $\mathbf{0} \in U_m \subset V_m$ ούτως ώστε η $\mathbf{G}_m$ να είναι 1-1 απεικόνιση του U_m επί μίας περιοχής V_{m+1} του $\mathbf{0}$, στην οποία η $\mathbf{G}_m^{-1}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη. Ορίζουμε την απεικόνιση $\mathbf{F}_{m+1}$ μέσω της σχέσεως

$$\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{y}) = B_m \mathbf{F}_m \circ \mathbf{G}_m^{-1}(\mathbf{y}) \quad (\mathbf{y} \in V_{m+1}). \tag{21}$$

Τότε, $\mathbf{F}_{m+1} \in \mathcal{C}'(V_{m+1})$, $\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ και ο $\mathbf{F}'_{m+1}(\mathbf{0})$ είναι αντιστρέψιμος (λόγω του κανόνα της αλυσίδας). Επίσης, για $\mathbf{x} \in U_m$ είναι

$$\begin{aligned} P_m \mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{G}_m(\mathbf{x})) &= P_m B_m \mathbf{F}_m(\mathbf{x}) \\ &= P_m[P_{m-1}\mathbf{x} + \alpha_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_m + \cdots] \\ &= P_{m-1}\mathbf{x} + \alpha_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_m \\ &= P_m \mathbf{G}_m(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{22}$$

και επομένως

$$P_m \mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{y}) = P_m \mathbf{y} \qquad (\mathbf{y} \in V_{m+1}). \tag{23}$$

Συνεπώς, η αρχική επαγωγική υπόθεση ισχύει με το $m+1$ στη θέση του m. (Στην (22), αρχικά χρησιμοποιήσαμε την (21), ύστερα την (18) και τον ορισμό του B_m, έπειτα τον ορισμό του P_m και εν τέλει την (20).)

Εφόσον $B_m B_m = I$ (ο ταυτοτικός τελεστής), η (21), λαμβάνοντας $\mathbf{y} = \mathbf{G}_m(\mathbf{x})$, ισοδυναμεί με την

$$\mathbf{F}_m(\mathbf{x}) = B_m \mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{G}_m(\mathbf{x})) \qquad (\mathbf{x} \in U_m). \tag{24}$$

Εάν εφαρμόσουμε αυτήν τη σχέση διαδοχικά για $m = 1, \ldots, n-1$, τότε αποκτούμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 \\ &= B_1 \mathbf{F}_2 \circ \mathbf{G}_1 \\ &= B_1 B_2 \mathbf{F}_3 \circ \mathbf{G}_2 \circ \mathbf{G}_1 \\ &= \cdots \\ &= B_1 \cdots B_{n-1} \mathbf{F}_n \circ \mathbf{G}_{n-1} \circ \cdots \circ \mathbf{G}_1, \end{aligned}$$

σε κάποια περιοχή του $\mathbf{0}$. Σύμφωνα με την (17), η $\mathbf{F}_n$ είναι πρωταρχική. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

ΔΙΑΜΕΡΙΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΝΑΔΑΣ

Θεώρημα 10.8. *Υποθέτουμε ότι K είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του R^n και ότι $\{V_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ είναι μία ανοικτή κάλυψη του K. Τότε, υπάρχουν συναρτήσεις $\psi_1, \ldots, \psi_s \in \mathcal{C}(R^n)$ ούτως ώστε:*

(α) $0 \leq \psi_i \leq 1$ *για κάθε δείκτη i με $1 \leq i \leq s$.*

(β) *Για κάθε δείκτη i με $1 \leq i \leq s$ υπάρχει ένας δείκτης $\alpha \in A$ ούτως ώστε η ψ_i να έχει τον φορέα της περιεχόμενο στο V_α.*

(γ) $\psi_1(\mathbf{x}) + \cdots + \psi_s(\mathbf{x}) = 1$ *για κάθε $\mathbf{x} \in K$.*

Λόγω του (γ), η οικογένεια $\{\psi_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots s)$ ονομάζεται *διαμέριση της μονάδας*. Ορισμένες φορές, η (β) εκφράζεται λέγοντας ότι η $\{\psi_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots s)$ είναι *υποκείμενη* στην κάλυψη $\{V_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$.

Πόρισμα. *Εάν $f \in \mathcal{C}(R^n)$ και εάν ο φορέας της f βρίσκεται στο K, τότε*

$$f = \sum_{i=1}^{s} \psi_i f, \tag{25}$$

και κάθε συνάρτηση $\psi_i f$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ έχει τον φορέα της περιεχόμενο σε κάποιο V_α για κάποιον δείκτη $\alpha \in A$.

Η αξία της (25) έγκειται στο γεγονός ότι η f αναπαριστάται ως το άθροισμα συνεχών συναρτήσεων $\psi_i f$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ με «μικρούς» φορείς.

Απόδειξη. Σε κάθε $\mathbf{x} \in K$ αντιστοιχίζουμε έναν δείκτη $\alpha(\mathbf{x})$ ούτως ώστε $\mathbf{x} \in V_{\alpha(\mathbf{x})}$. Τότε, υπάρχουν ανοικτές σφαιρικές περιοχές $B(\mathbf{x})$ και $W(\mathbf{x})$ με κέντρο το $\mathbf{x}$ ούτως ώστε

$$\overline{B(\mathbf{x})} \subset W(\mathbf{x}) \subset \overline{W(\mathbf{x})} \subset V_{\alpha(\mathbf{x})}. \tag{26}$$

Εφόσον το K είναι συμπαγές, υπάρχουν σημεία $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s$ του K με

$$K \subset B(\mathbf{x}_1) \cup \cdots \cup B(\mathbf{x}_s). \tag{27}$$

Σύμφωνα με την (26), υπάρχουν συναρτήσεις $\varphi_1, \ldots, \varphi_s \in \mathcal{C}(R^n)$ ούτως ώστε για κάθε δείκτη $i = 1, \ldots, s$ να ισχύει ότι: $\varphi_i(\mathbf{x}) = 1$ για κάθε $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_i)$, $\varphi_i(\mathbf{x}) = 0$ για κάθε σημείο $\mathbf{x}$ εκτός του $W(\mathbf{x}_i)$ και $0 \le \varphi_i(\mathbf{x}) \le 1$ για κάθε $\mathbf{x} \in R^n$. Ορίζουμε $\psi_1 = \varphi_1$ και

$$\psi_{i+1} = (1 - \varphi_1) \cdots (1 - \varphi_i)\varphi_{i+1} \tag{28}$$

για $i = 1, \ldots, s - 1$.

Οι ιδιότητες (α) και (β) είναι σαφείς. Η σχέση

$$\psi_1 + \cdots + \psi_i = 1 - (1 - \varphi_1) \cdots (1 - \varphi_i) \tag{29}$$

είναι προφανής για $i = 1$. Εάν η (29) ισχύει για κάποιον δείκτη i με $i < s$, τότε προσθέτοντας τις (28) και (29) λαμβάνουμε την (29) με το $i + 1$ στη θέση του i. Επομένως,

$$\sum_{i=1}^{s} \psi_i(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{i=1}^{s} [1 - \varphi_i(\mathbf{x})] \qquad (\mathbf{x} \in R^n). \tag{30}$$

Εάν $\mathbf{x} \in K$, τότε $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_i)$ για κάποιον δείκτη i. Επομένως, $\varphi_i(\mathbf{x}) = 1$ και το γινόμενο στην (30) ισούται με 0. Αυτό αποδεικνύει το (γ). □

ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Μπορούμε τώρα να περιγράψουμε την επίδραση της αλλαγής μεταβλητών σε ένα πολλαπλό ολοκλήρωμα. Για λόγους απλότητας, θα περιοριστούμε σε συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα, παρά το γεγονός ότι αυτό είναι αρκετά περιοριστικό για πολλές εφαρμογές. Αυτό θα καταστεί σαφές στις Ασκήσεις 9 έως και 13.

Θεώρημα 10.9. *Υποθέτουμε ότι T είναι μία 1-1 $\mathcal{C}'$-απεικόνιση ενός ανοικτού συνόλου $E \subset R^k$ στον R^k ούτως ώστε $J_T(\mathbf{x}) \neq 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in E$. Εάν f είναι μία συνεχής συνάρτηση στον R^k με συμπαγή φορέα, ο οποίος περιέχεται στο $T(E)$, τότε*

$$\int_{R^k} f(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \int_{R^k} f(T(\mathbf{x}))|J_T(\mathbf{x})|d\mathbf{x}. \tag{31}$$

Υπενθυμίζουμε ότι J_T είναι η ορίζουσα Jacobi του T. Η υπόθεση $J_T(\mathbf{x}) \neq 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in E$ φανερώνει, σύμφωνα με το θεώρημα αντίστροφης συναρτήσεως, ότι η T^{-1} είναι συνεχής στο $T(E)$ και αυτό εξασφαλίζει ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση στη δεξιά πλευρά της (31) έχει συμπαγή φορέα στο E (Θεώρημα 4.14).

Θα σχολιάσουμε προς στιγμή την εμφάνιση της *απόλυτης τιμής* της $J_T(\mathbf{x})$ στην (31). Θεωρούμε ότι $k = 1$ και υποθέτουμε ότι η T είναι 1-1 $\mathcal{C}'$-απεικόνιση από τον R^1 στον R^1. Τότε, $J_T(x) = T'(x)$ για κάθε $x \in R^1$. Εάν επιπλέον η T είναι *γνησίως αύξουσα*, τότε έχουμε ότι

$$\int_{R^1} f(y)dy = \int_{R^1} f(T(x))T'(x)dx, \tag{32}$$

σύμφωνα με τα Θεωρήματα 6.17 και 6.19, για κάθε συνεχή συνάρτηση f με συμπαγή φορέα. Όμως, εάν η T είναι γνησίως φθίνουσα, τότε $T' < 0$. Και εάν η f είναι θετική στο εσωτερικό του φορέα της, τότε η αριστερή πλευρά της (32) είναι θετική και η δεξιά αρνητική. Η σωστή εξίσωση λαμβάνεται εάν η T' αντικατασταθεί από την $|T'|$ στην (32).

Επί της ουσίας, τα ολοκληρώματα που θεωρούμε είναι ολοκληρώματα συναρτήσεων σε υποσύνολα του R^k, όπου δεν εισάγουμε έννοια κατευθύνσεως ή προσανατολισμού. Όταν ασχοληθούμε με την ολοκλήρωση διαφορικών μορφών υπεράνω επιφανειών θα υιοθετήσουμε διαφορετική οπτική γωνία.

Απόδειξη. Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις έπεται ότι η (31) είναι αληθής, εάν η T είναι πρωταρχική $\mathcal{C}'$-απεικόνιση (ανατρέξτε στον Ορισμό 10.5), και το Θεώρημα 10.2 φανερώνει ότι η (31) είναι αληθής εάν η T είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός που απλώς εναλλάσσει δύο συντεταγμένες.

Εάν το θεώρημα αληθεύει για δύο μετασχηματισμούς P, Q και εάν $S = P \circ Q$, τότε

$$\begin{aligned} \int_{R^k} f(\mathbf{z})d\mathbf{z} &= \int_{R^k} f(P(\mathbf{y}))|J_P(\mathbf{y})|d\mathbf{y} \\ &= \int_{R^k} f(P(Q(\mathbf{x})))|J_P(Q(\mathbf{x}))||J_Q(\mathbf{x})|d\mathbf{x} \\ &= \int_{R^k} f(S(\mathbf{x}))|J_S(\mathbf{x})|d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

εφόσον

$$\begin{aligned} J_P(Q(\mathbf{x}))J_Q(\mathbf{x}) &= \det P'(Q(\mathbf{x}))\det Q'(\mathbf{x}) \\ &= \det P'(Q(\mathbf{x}))Q'(\mathbf{x}) \\ &= \det S'(\mathbf{x}) \\ &= J_S(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

για κάθε $\mathbf{x} \in E$, σύμφωνα με το θεώρημα περί πολλαπλασιασμού οριζουσών και τον κανόνα της αλυσίδας. Άρα, το θεώρημα αληθεύει επίσης για τον S.

Κάθε σημείο $\mathbf{a} \in E$ έχει μία περιοχή $U \subset E$ για την οποία ισχύει ότι

$$T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{a}) + B_1 \cdots B_{k-1}\mathbf{G}_k \circ \mathbf{G}_{k-1} \circ \cdots \circ \mathbf{G}_1(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \tag{33}$$

για κάθε $\mathbf{x} \in U$, όπου οι $\mathbf{G}_i$ $(1 \leq i \leq k)$ και B_i $(1 \leq i \leq k-1)$ είναι όπως στο Θεώρημα 10.7. Θέτοντας $V = T(U)$, έπεται ότι η (31) ισχύει εάν ο φορέας της f βρίσκεται στο V. Άρα:

Κάθε σημείο $\mathbf{y} \in T(E)$ βρίσκεται σε ένα ανοικτό σύνολο $V_\mathbf{y} \subset T(E)$ ούτως ώστε η (31) να ισχύει για όλες τις συνεχείς συναρτήσεις με φορέα που περιέχεται στο $V_\mathbf{y}$.

Ας είναι τώρα f μία συνεχής συνάρτηση με συμπαγή φορέα $K \subset T(E)$. Εφόσον η $\{V_\mathbf{y}\}$ $(\mathbf{y} \in T(E))$ καλύπτει το K, το Πόρισμα του Θεωρήματος 10.8 φανερώνει ότι $f = \sum_{i=1}^{s} \psi_i f$, όπου κάθε συνάρτηση ψ_i $(i = 1, 2 \ldots, s)$ είναι συνεχής και έχει τον φορέα της περιεχόμενο σε κάποιο $V_\mathbf{y}$ $(\mathbf{y} \in T(E))$. Άρα, η (31) ισχύει για οποιαδήποτε συνάρτηση $\psi_i f$ $(i = 1, 2 \ldots, s)$, επομένως και για το άθροισμά τους f. $\square$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

Στη συνέχεια, θα αναπτύξουμε τις απαραίτητες έννοιες για την απόδειξη της n-διάστατης εκδοχής του θεμελιώδους θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού, το οποίο συνήθως ονομάζεται *θεώρημα του Stokes.* Η αρχική μορφή του θεωρήματος εμφανίστηκε σε εφαρμογές της διανυσματικής αναλύσεως στον ηλεκτρομαγνητισμό και διατυπώθηκε με χρήση της έννοιας του στροβιλισμού διανυσματικού πεδίου. Το θεώρημα του Green[3] και το θεώρημα της αποκλίσεως αποτελούν επίσης ειδικές περιπτώσεις του γενικού θεωρήματος.

Αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό του θεωρήματος του Stokes αποτελεί το γεγονός ότι η κύρια δυσκολία του βρίσκεται στη διαμόρφωση των απαραιτήτων εννοιών για τη διατύπωσή του. Οι έννοιες αυτές είναι οι διαφορικές μορφές, οι παράγωγοί τους, τα σύνορα και ο προσανατολισμός. Εφόσον οι έννοιες αυτές κατανοηθούν, η διατύπωση του θεωρήματος είναι πλέον σύντομη και περιεκτική και η απόδειξη δεν παρουσιάζει ιδιαίτερη δυσκολία.

Έως τώρα, έχουμε θεωρήσει παραγώγους συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, μόνο για συναρτήσεις ορισμένες σε *ανοικτά* σύνολα. Με αυτόν τον τρόπο αποφεύγουμε ορισμένες δυσκολίες που μπορούν να προκύψουν στα συνοριακά σημεία. Σε αυτό το στάδιο, είναι απαραίτητη η εισαγωγή της έννοιας των διαφορίσιμων συναρτήσεων σε *συμπαγή σύνολα*:

Μία απεικόνιση $\mathbf{f}$ του συμπαγούς συνόλου $D \subset R^k$ στον R^n ονομάζεται $\mathcal{C}'$-απεικόνιση (αντιστοίχως $\mathcal{C}''$-απεικόνιση) εάν και μόνον εάν υπάρχει μία $\mathcal{C}'$-απεικόνιση (αντιστοίχως $\mathcal{C}''$-απεικόνιση) $\mathbf{g}$ ενός ανοικτού συνόλου $W \subset R^k$ στον R^n με $D \subset W$ και $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ για κάθε $\mathbf{x} \in D$.

Ορισμός 10.10. Υποθέτουμε ότι E είναι ανοικτό υποσύνολο του R^n. Μία *k-επιφάνεια* στο E είναι μία $\mathcal{C}'$-απεικόνιση Φ ενός συμπαγούς συνόλου $D \subset R^k$ στο E.

Το σύνολο D ονομάζεται *πεδίο παραμέτρων* της Φ. Τα σημεία του D θα συμβολίζονται ως $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_k)$.

Θα περιοριστούμε στην απλή κατάσταση όπου το D είναι είτε ένα k-διάστημα είτε το k-μονόπλοκο Q^k, όπως ορίζεται στο Παράδειγμα 10.4. Ο λόγος αυτού του περιορισμού είναι το γεγονός ότι θα πρέπει να εκτελέσουμε

[3] Σ. τ. Μ.: George Green (1793-1841). Άγγλος φυσικός και μαθηματικός. Εργάσθηκε κυρίως στον Ηλεκτρομαγνητισμό, στην Υδροδυναμική και στη Θεωρία Δυναμικού.

Ο Green ήταν γιος μυλωνά. Αργότερα ανέλαβε ο ίδιος τον μύλο του πατέρα του. Φοίτησε για λίγο χρόνο σε ένα σχολείο. Ο Green ήταν αυτοδίδακτος. Σε ηλικία σαράντα ετών σπούδασε στο Cambridge, όπου και διακρίθηκε. Συνέγραψε συνολικά δέκα εργασίες Μαθηματικής Φυσικής. Ο Green είναι μάλλον ο πρώτος μαθηματικός που θεώρησε χώρους πολλών διαστάσεων.

ολοκληρώσεις υπεράνω του D και δεν έχουμε αναλύσει την ολοκλήρωση σε περισσότερο πολύπλοκα υποσύνολα του R^k. Εν συνεχεία, θα καταστεί σαφές ότι αυτός ο περιορισμός (ο οποίος θα υφίσταται πλέον σιωπηρά) δεν ενέχει σημαντική απώλεια της γενικότητας στην προκύπτουσα θεωρία των διαφορικών μορφών.

Τονίζουμε ότι οι k-επιφάνειες στο E ορίζονται ως *απεικονίσεις* που το πεδίο τιμών τους περιέχεται στο E και όχι ως υποσύνολα του E. Αυτό έρχεται σε συμφωνία με τον πρότερο ορισμό των καμπυλών (Ορισμός 6.26). Στην πραγματικότητα, οι 1-επιφάνειες είναι ακριβώς οι συνεχώς παραγωγίσιμες καμπύλες.

Ορισμός 10.11. Υποθέτουμε ότι E είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του R^n. Μία *διαφορική μορφή τάξεως* $k \geq 1$ *στο* E (εν συντομία k-*μορφή στο* E) είναι μία συνάρτηση ω, η οποία συμβολικά αναπαριστάται από το άθροισμα

$$\omega = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} a_{i_1\cdots i_k}(\mathbf{x})dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \tag{34}$$

(οι δείκτες αθροίσεως είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους) και η οποία αντιστοιχίζει κάθε k-επιφάνεια Φ στο E σε έναν αριθμό $\omega(\Phi) = \int_\Phi \omega$, μέσω της σχέσεως

$$\int_\Phi \omega = \int_D \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} a_{i_1\cdots i_k}(\Phi(\mathbf{u}))\frac{\partial(x_{i_1},\dots,x_{i_k})}{\partial(u_1,\dots,u_k)}d\mathbf{u}, \tag{35}$$

όπου D είναι το πεδίο παραμέτρων της Φ.

Οι συναρτήσεις $a_{i_1\cdots i_k}$ $(1 \leq i_1,\dots,i_k \leq n)$ υποτίθεται ότι είναι πραγματικές και συνεχείς στο E. Εάν $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ είναι οι συνιστώσες της Φ, τότε η ορίζουσα Jacobi στην (35) είναι αυτή που αντιστοιχεί στην απεικόνιση

$$(u_1,\dots,u_k) \to (\varphi_{i_1}(\mathbf{u}),\dots\varphi_{i_k}(\mathbf{u})).$$

Σημειώνουμε ότι η δεξιά πλευρά της (35) είναι ένα ολοκλήρωμα υπεράνω του D, όπως έχει ορισθεί στον Ορισμό 10.1 (ή στο παράδειγμα 10.4) και ότι η (35) αποτελεί τον *ορισμό* του συμβόλου $\int_\Phi \omega$.

Μία k-μορφή ω ονομάζεται κλάσεως $\mathcal{C}'$ ή αντιστοίχως $\mathcal{C}''$ εάν και μόνον εάν οι συναρτήσεις $a_{i_1\cdots i_k}$ $(1 \le i_1, \ldots, i_k \le n)$ στην (34) είναι όλες κλάσεως $\mathcal{C}'$ ή αντιστοίχως $\mathcal{C}''$.

Μία 0-*μορφή* ορίζεται ως μία συνεχής συνάρτηση στο E.

Παράδειγμα 10.12.

(α) Θεωρούμε μία 1-επιφάνεια (δηλαδή καμπύλη κλάσεως $\mathcal{C}'$) $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ στον R^3, με πεδίο παραμέτρων το [0, 1].

Γράφουμε (x, y, z) στη θέση του (x_1, x_2, x_3) και θέτουμε

$$\omega = x\,dy + y\,dx.$$

Τότε,

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 [\gamma_1(t)\gamma_2'(t) + \gamma_2(t)\gamma_1'(t)]dt = \gamma_1(1)\gamma_2(1) - \gamma_1(0)\gamma_2(0).$$

Σημειώνουμε ότι σε αυτό το παράδειγμα το $\int_\gamma \omega$ εξαρτάται μόνον από το αρχικό και τελικό σημείο της γ. Ιδιαιτέρως, $\int_\gamma \omega = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη γ. (Όπως θα φανεί αργότερα, αυτό είναι αληθές για κάθε 1-μορφή ω η οποία είναι *ακριβής*.)

Τα ολοκληρώματα των 1-μορφών συχνά ονομάζονται *επικαμπύλια ολοκληρώματα.*

(β) Θεωρούμε $a > 0$, $b > 0$ και ορίζουμε την καμπύλη γ στο $[0, 2\pi]$ μέσω της ισότητας

$$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t) \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

Η γ είναι κλειστή καμπύλη στον R^2. (Το πεδίο τιμών της είναι έλλειψη.) Τότε,

$$\int_\gamma x\,dy = \int_0^{2\pi} ab\cos^2 t\,dt = \pi ab$$

και

$$\int_\gamma y\,dx = -\int_0^{2\pi} ab\sin^2 t\,dt = -\pi ab.$$

Σημειώνουμε ότι το $\int_\gamma x\,dy$ είναι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται στην γ. Αυτό αποτελεί ειδική περίπτωση του θεωρήματος του Green.

(γ) Ας είναι D το 3-διάστημα το οποίο ορίζεται ως εξής: $(r, \theta, \varphi) \in D$ εάν και μόνον εάν

$$0 \le r \le 1, \qquad 0 \le \theta \le \pi, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Ορίζουμε την επιφάνεια Φ στο D ως εξής: Εάν $(r, \theta, \varphi) \in D$, τότε $\Phi(r, \theta, \varphi) = (x, y, z)$, όπου

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta. \end{aligned}$$

Τότε, για κάθε $(r, \theta, \varphi) \in D$ ισχύει ότι

$$J_\Phi(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin\theta.$$

Άρα,

$$\int_\Phi dx \wedge dy \wedge dz = \int_D J_\Phi = \frac{4\pi}{3}. \tag{36}$$

Παρατηρούμε ότι η Φ απεικονίζει το D επί της κλειστής μοναδιαίας σφαιρικής περιοχής του R^3, ότι η απεικόνιση είναι 1-1 στο εσωτερικό του D (όμως ορισμένα συνοριακά σημεία δεν απεικονίζονται μέσω της Φ με 1-1 τρόπο) και ότι το ολοκλήρωμα (36) ισούται με τον όγκο του $\Phi(D)$.

10.13 Στοιχειώδεις ιδιότητες. Ας είναι ω, ω_1, ω_2 k-μορφές στο E. Γράφουμε $\omega_1 = \omega_2$ εάν και μόνον εάν $\omega_1(\Phi) = \omega_2(\Phi)$ για κάθε k-επιφάνεια Φ στο E. Εάν c ένας είναι πραγματικός αριθμός, τότε η $c\omega$ είναι η k-μορφή που ορίζεται από τη σχέση

$$\int_\Phi c\omega = c\int_\Phi \omega \tag{37}$$

και η ισότητα $\omega = \omega_1 + \omega_2$ σημαίνει ακριβώς ότι

$$\int_\Phi \omega = \int_\Phi \omega_1 + \int_\Phi \omega_2 \tag{38}$$

για κάθε k-επιφάνεια Φ στο E. Ως ειδική περίπτωση της (37), σημειώνουμε ότι η $-\omega$ ορίζεται ούτως ώστε

$$\int_{\Phi}(-\omega) = -\int_{\Phi}\omega. \tag{39}$$

Θεωρούμε μία k-μορφή

$$\omega = a(\mathbf{x})dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}. \tag{40}$$

Υποθέτουμε ότι $\overline{\omega}$ είναι η k-μορφή που προκύπτει εναλλάσσοντας στη (40) κάποιο ζεύγος δεικτών μεταξύ τους. Εάν οι (35) και (39) συνδυασθούν με το γεγονός ότι μία ορίζουσα αλλάζει πρόσημο όταν δύο από τις γραμμές της εναλλαχθούν, τότε βρίσκουμε ότι

$$\overline{\omega} = -\omega. \tag{41}$$

Ως ειδική περίπτωση αυτού, ισχύει η *αντι-μεταθετική σχέση*[4]

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \tag{42}$$

για οποιουσδήποτε δείκτες i, j. Ιδιαιτέρως,

$$dx_i \wedge dx_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{43}$$

Σε γενικότερο πλαίσιο, επιστρέφουμε στη (40) και υποθέτουμε ότι $i_r = i_s$ για κάποιους δείκτες r, s με $r \neq s$. Εάν αυτοί οι δύο δείκτες εναλλαχθούν, τότε $\overline{\omega} = \omega$ και επομένως $\omega = 0$, σύμφωνα με τη (41). Κατά συνέπεια:

εάν η ω δίδεται από τη (40), τότε $\omega = 0$ εκτός εάν οι δείκτες $i_1, \ldots, i_k$ είναι διακεκριμένοι.

Εάν η ω είναι όπως στην (34), τότε οι όροι του αθροίσματος με επαναλαμβανόμενους δείκτες μπορούν να παραλειφθούν, χωρίς να μεταβληθεί η ω.

[4] Σ. τ. Μ.: Η ορθή απόδοση του όρου *commutative* είναι «μεταθετικός» και του όρου *anticommutative* «αντιμεταθετικός». Στην ελληνική βιβλιογραφία έχει επικρατήσει η απόδοση «αντιμεταθετικός» για τον όρο *commutative*. Για την διευκόλυνση του αναγνώστη που είναι εξοικειωμένος με την επικρατούσα απόδοση, γράφω «αντι-μεταθετικός» αντί του «αντιμεταθετικός».

Επομένως, εάν $k > n$, τότε η μόνη k-μορφή σε ένα οποιοδήποτε ανοικτό υποσύνολο του R^n είναι η μηδενική.

Η αντι-μεταθετικότητα, όπως εκφράζεται στη (42), είναι ο βασικός λόγος για την ιδιαίτερη προσοχή που πρέπει να δοθεί στα πρόσημα των διαφορικών μορφών όταν εκτελούνται πράξεις με αυτές.

10.14 Οι βασικές k-μορφές. Μία διατεταγμένη k-άδα $I = (i_1, \dots, i_k)$ ακεραίων αριθμών $i_1, \dots, i_k$ με $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ ονομάζεται *αύξων k-δείκτης*. Για έναν τέτοιον αύξοντα k-δείκτη χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}. \tag{44}$$

Αυτές οι k-μορφές είναι ακριβώς οι λεγόμενες *βασικές k-μορφές του R^n*.

Εύκολα επαληθεύεται ότι υπάρχουν ακριβώς $n!/k!(n-k)!$ βασικές k-μορφές στον R^n. Όμως, το γεγονός αυτό δεν θα χρησιμοποιηθεί πουθενά.

Αρκετά πιο σημαντικό είναι το γεγονός ότι κάθε k-μορφή μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω των βασικών k-μορφών. Για να το διαπιστώσουμε αυτό, παρατηρούμε ότι κάθε k-άδα $(j_1, \dots, j_k)$ διακεκριμένων θετικών ακεραίων αριθμών μπορεί να μετατραπεί σε έναν αύξοντα k-δείκτη J, εκτελώντας πεπερασμένου πλήθους εναλλαγές ζευγών. Επομένως, όπως είδαμε στην Ενότητα 10.13,

$$dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} = \varepsilon(j_1, \dots, j_k) dx_J, \tag{45}$$

όπου το $\varepsilon(j_1, \dots, j_k)$ ισούται με 1 ή -1, αναλόγως με τον αριθμό εναλλαγών των ζευγών που είναι απαραίτητες. Στην πραγματικότητα, είναι απλό να δειχθεί ότι

$$\varepsilon(j_1, \dots, j_k) = s(j_1, \dots, j_k), \tag{46}$$

όπου το s είναι όπως στον Ορισμό 9.33.

Επί παραδείγματι,

$$dx_1 \wedge dx_5 \wedge dx_3 \wedge dx_2 = -dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_5$$

και

$$dx_4 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.$$

Εάν κάθε k-άδα στην (34) μετατραπεί σε αύξοντα k-δείκτη, τότε αποκτούμε τη λεγόμενη *συνήθη αναπαράσταση* της ω:

$$\omega = \sum_I b_I(\mathbf{x})dx_I. \tag{47}$$

Το άθροισμα λαμβάνεται υπεράνω όλων των αυξόντων k-δεικτών I. (Φυσικά, κάθε αύξων k-δείκτης προκύπτει από αρκετές (συγκεκριμένα, από $k!$) k-άδες. Επομένως, κάθε συνάρτηση b_I στη (47) είναι γενικώς κάποιο άθροισμα των συντελεστών που εμφανίζονται στην (34).)

Ως παράδειγμα, η

$$x_1 dx_2 \wedge dx_1 - x_2 dx_3 \wedge dx_2 + x_3 dx_2 \wedge dx_3 + dx_1 \wedge dx_2$$

είναι 2-μορφή στον R^3 με συνήθη αναπαράσταση την

$$(1 - x_1)dx_1 \wedge dx_2 + (x_2 + x_3)dx_2 \wedge dx_3.$$

Το ακόλουθο θεώρημα μοναδικότητας είναι ένας από τους βασικούς λόγους εισαγωγής της συνήθους αναπαραστάσεως μίας k-μορφής.

Θεώρημα 10.15. *Υποθέτουμε ότι*

$$\omega = \sum_I b_I(\mathbf{x})dx_I \tag{48}$$

είναι η συνήθης αναπαράσταση μίας k-μορφής ω σε ένα ανοικτό σύνολο $E \subset R^n$. Εάν $\omega = 0$, τότε $b_I(\mathbf{x}) = 0$ για κάθε αύξοντα k-δείκτη I και κάθε $\mathbf{x} \in E$.

Σημειώνουμε ότι η ανάλογη πρόταση για αθροίσματα όπως στην (34) είναι ψευδής, εφόσον, ως παράδειγμα,

$$dx_1 \wedge dx_2 + dx_2 \wedge dx_1 = 0.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε, για να καταλήξουμε σε αντίφαση, ότι $\omega = 0$ και ότι $b_J(\mathbf{v}) > 0$ για κάποιο $\mathbf{v} \in E$ και κάποιον αύξοντα k-δείκτη $J = (j_1, \ldots, j_k)$. Εφόσον η b_J είναι συνεχής, υπάρχει $h > 0$ ούτως ώστε $b_J(\mathbf{x}) > 0$ για κάθε

$\mathbf{x} \in R^n$ του οποίου οι συντεταγμένες ικανοποιούν τις ανισότητες $|x_i - v_i| \le h$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Θεωρούμε το k-διάστημα D που ορίζεται ως εξής: $\mathbf{u} \in D$ εάν και μόνον εάν $|u_r| \le h$ για $r = 1, \ldots, k$. Ορίζουμε την απεικόνιση Φ στο D μέσω της ισότητας

$$\Phi(\mathbf{u}) = \mathbf{v} + \sum_{r=1}^{k} u_r \mathbf{e}_{j_r} \qquad (\mathbf{u} \in D). \tag{49}$$

Τότε, η Φ είναι μία k-επιφάνεια του E με πεδίο παραμέτρων το D για την οποία ισχύει ότι $b_J(\Phi(\mathbf{u})) > 0$ για κάθε $\mathbf{u} \in D$.

Ισχυριζόμαστε ότι

$$\int_{\Phi} \omega = \int_D b_J(\Phi(\mathbf{u}))d\mathbf{u}. \tag{50}$$

Εφόσον η δεξιά πλευρά της (50) είναι θετική, έπεται ότι $\omega(\Phi) \neq 0$. Άρα, η (50) οδηγεί σε αντίφαση.

Για την απόδειξη της (50), εφαρμόζουμε την (35) στην αναπαράσταση (48). Πιο συγκεκριμένα, υπολογίζουμε τις ορίζουσες Jacobi που εμφανίζονται στην (35). Από τη (49) λαμβάνουμε ότι

$$\frac{\partial(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k})}{\partial(u_1, \ldots, u_k)} = 1.$$

Για οποιονδήποτε άλλον αύξοντα k-δείκτη I με $I \neq J$ η ορίζουσα Jacobi είναι 0, εφόσον ισούται με την ορίζουσα ενός πίνακα ο οποίος διαθέτει τουλάχιστον μία γραμμή με μηδενικά στοιχεία. □

10.16 Γινόμενα βασικών μορφών. Υποθέτουμε ότι

$$I = (i_1, \ldots, i_p), \qquad J = (j_1, \ldots, j_q), \tag{51}$$

όπου $1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$ και $1 \le j_1 < \cdots < j_q \le n$. Το *γινόμενο* των αντιστοίχων βασικών μορφών dx_I και dx_J στον R^n είναι μία $(p+q)$-μορφή στον R^n, η οποία συμβολίζεται ως $dx_I \wedge dx_J$ και ορίζεται ως

$$dx_I \wedge dx_J = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}. \tag{52}$$

Εάν οι I και J έχουν κοινό στοιχείο, τότε από την Ενότητα 10.13 έπεται ότι $dx_I \wedge dx_J = 0$.

Εάν οι I και J δεν έχουν κοινό στοιχείο, τότε συμβολίζουμε με $[I, J]$ τον αύξοντα $(p+q)$-δείκτη που προκύπτει διατάσσοντας τα στοιχεία των $I \cup J$ σε αύξουσα σειρά μεταξύ τους. Τότε, η $dx_{[I,J]}$ είναι βασική $(p+q)$-μορφή. Ισχυριζόμαστε ότι

$$dx_I \wedge dx_J = (-1)^{\alpha} dx_{[I,J]}, \tag{53}$$

όπου α είναι ο αριθμός των *αρνητικών* διαφορών $j_t - i_s$ $(1 \leq t \leq q,$ $1 \leq s \leq p)$. (Επομένως, ο αριθμός των θετικών διαφορών είναι $pq - \alpha$.)

Για την απόδειξη της (53), εκτελούμε τις ακόλουθες πράξεις στους αριθμούς

$$i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q. \tag{54}$$

Μετακινούμε το i_p δεξιά, βήμα προς βήμα, έως ότου εμφανισθεί αριστερά του στοιχείο μικρότερο από το i_p. Ο αριθμός των βημάτων που απαιτούνται είναι ο αριθμός των δεικτών t με $i_p < j_t$. (Σημειώνουμε ότι ο μηδενικός αριθμός βημάτων αποτελεί αποδεκτή περίπτωση.) Έπειτα, εργαζόμαστε ομοίως για τα $i_{p-1}, \ldots, i_1$. Ο συνολικός αριθμός των βημάτων είναι α. Η τελική τοποθέτηση των στοιχείων που λαμβάνουμε με αυτόν τον τρόπο είναι όπως του $[I, J]$. Κάθε βήμα, όταν εφαρμοσθεί στη δεξιά πλευρά της (52), πολλαπλασιάζει την $dx_I \wedge dx_J$ με -1. Έτσι, προκύπτει η (53).

Σημειώνουμε ότι η δεξιά πλευρά της (53) είναι η συνήθης αναπαράσταση της $dx_I \wedge dx_J$.

Εν συνεχεία, υποθέτουμε ότι $K = (k_1, \ldots k_r)$ είναι αύξων r-δείκτης στο $\{1, \ldots, n\}$. Θα χρησιμοποιήσουμε την (53) για να αποδείξουμε ότι

$$(dx_I \wedge dx_J) \wedge dx_K = dx_I \wedge (dx_J \wedge dx_K). \tag{55}$$

Εάν δύο από τους I, J, K έχουν κοινό στοιχείο, τότε κάθε πλευρά της (55) ισούται με 0 και επομένως είναι ίσες μεταξύ τους.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι οι I, J, K δεν έχουν ανά ζεύγη κοινά στοιχεία. Ας είναι $[I, J, K]$ ο αύξων $(p+q+r)$-δείκτης που προκύπτει από την ένωση των στοιχείων των I, J, K. Αντιστοιχίζουμε τον αριθμό β στο ζεύγος (J, K) και τον αριθμό γ στο ζεύγος (I, K), αναλόγως με τον τρόπο αντιστοιχήσεως του α στο ζεύγος (I, J) στην (53). Τότε, η αριστερή πλευρά της (55) ισούται με

$$(-1)^\alpha dx_{[I,J]} \wedge dx_K = (-1)^\alpha (-1)^{\beta+\gamma} dx_{[I,J,K]},$$

εφαρμόζοντας δύο φορές την (53). Η δεξιά πλευρά της (55) ισούται με

$$(-1)^\beta dx_I \wedge dx_{[J,K]} = (-1)^\beta (-1)^{\alpha+\gamma} dx_{[I,J,K]}.$$

Άρα, η (55) όντως ισχύει.

10.17 Πολλαπλασιασμός μορφών. Υποθέτουμε ότι ω είναι μία p-μορφή και λ είναι μία q-μορφή σε κάποιο ανοικτό σύνολο $E \subset R^n$, με συνήθεις αναπαραστάσεις τις

$$\omega = \sum_I b_I(\mathbf{x}) dx_I, \qquad \lambda = \sum_J c_J(\mathbf{x}) dx_J, \tag{56}$$

όπου τα I και J διατρέχουν τους αύξοντες p-δείκτες και τους αύξοντες q-δείκτες αντιστοίχως, λαμβανόμενους από το σύνολο $\{1, \ldots, n\}$.

Το *γινόμενο* των δύο μορφών, συμβολιζόμενο ως $\omega \wedge \lambda$, ορίζεται ως η μορφή

$$\omega \wedge \lambda = \sum_{I,J} b_I(\mathbf{x}) c_J(\mathbf{x}) dx_I \wedge dx_J. \tag{57}$$

Σε αυτό το άθροισμα, τα I και J διατρέχουν ανεξαρτήτως τα σύνολα των δυνατών τιμών τους και η $dx_I \wedge dx_J$ ορίζεται όπως στην Ενότητα 10.16. Άρα, η $\omega \wedge \lambda$ είναι $(p+q)$-μορφή στο E.

Είναι απλό να δειχθεί (οι λεπτομέρειες αφήνονται ως άσκηση) ότι ισχύουν οι επιμεριστικοί νόμοι

$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \lambda = (\omega_1 \wedge \lambda) + (\omega_2 \wedge \lambda)$$

και

$$\omega \wedge (\lambda_1 + \lambda_2) = (\omega \wedge \lambda_1) + (\omega \wedge \lambda_2)$$

ως προς την πρόσθεση που έχει ορισθεί στην Ενότητα 10.13. Εάν αυτοί οι νόμοι συνδυασθούν με την (55), τότε αποκτούμε τον προσεταιριστικό νόμο

$$(\omega \wedge \lambda) \wedge \sigma = \omega \wedge (\lambda \wedge \sigma) \tag{58}$$

για οποιεσδήποτε μορφές ω, λ, σ στο E.

Στα παραπάνω είχε υποτεθεί σιωπηρά ότι $p \geq 1$ και $q \geq 1$. Το γινόμενο μίας 0-μορφής f με την p-μορφή ω που δίδεται από την (56) ορίζεται ως η p-μορφή

$$f\omega = \omega f = \sum_I f(\mathbf{x}) b_I(\mathbf{x}) dx_I.$$

Είναι σύνηθες να γράφουμε $f\omega$ αντί του $f \wedge \omega$ όταν η f είναι 0-μορφή.

10.18 Διαφόριση μορφών. Εν συνεχεία, θα ορίσουμε έναν τελεστή διαφορίσεως d, ο οποίος αντιστοιχίζει μία $(k+1)$-μορφή $d\omega$ σε κάθε k-μορφή ω κλάσεως $\mathcal{C}'$, σε κάποιο ανοικτό σύνολο $E \subset R^n$.

Μία 0-μορφή κλάσεως $\mathcal{C}'$ στο E είναι μία συνάρτηση $f \in \mathcal{C}'(E)$ πραγματικών τιμών. Ορίζουμε

$$df = \sum_{i=1}^{n} (D_i f)(\mathbf{x}) dx_i. \tag{59}$$

Εάν $\omega = \sum_I b_I(\mathbf{x}) dx_I$ είναι η συνήθης αναπαράσταση μίας k-μορφής ω, όπου $b_I \in \mathcal{C}'(E)$, για κάθε αύξοντα k-δείκτη I, τότε ορίζουμε

$$d\omega = \sum_I (db_I) \wedge dx_I. \tag{60}$$

Παράδειγμα 10.19. Υποθέτουμε ότι E είναι ανοικτό υποσύνολο του R^n, ότι $f \in \mathcal{C}'(E)$ και ότι γ είναι μία συνεχώς παραγωγίσιμη καμπύλη του E με πεδίο παραμέτρων το $[0, 1]$. Από τις (59) και (35) λαμβάνουμε

$$\int_\gamma df = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} (D_i f)(\gamma(t)) \gamma_i'(t) dt. \tag{61}$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας, η ολοκληρωτέα συνάρτηση ισούται με την $(f \circ \gamma)'$. Άρα,

$$\int_\gamma df = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)). \tag{62}$$

Παρατηρούμε ότι το $\int_\gamma df$ είναι το ίδιο για όλες τις καμπύλες γ με το ίδιο αρχικό και το ίδιο τελικό σημείο, όπως στο (α) του Παραδείγματος 10.12.

Επομένως, η σύγκριση με το Παράδειγμα 10.12(β) φανερώνει ότι η 1-μορφή xdy δεν αποτελεί παράγωγο καμίας 0-μορφής f. Αυτό μπορεί να συναχθεί επίσης από το μέρος (β) του επομένου θεωρήματος, εφόσον

$$d(xdy) = dx \wedge dy \neq 0.$$

Θεώρημα 10.20.

(α) *Εάν ω είναι μία k-μορφή και λ είναι μία m-μορφή, κλάσεως $\mathcal{C}'$ στο E, τότε*

$$d(\omega \wedge \lambda) = (d\omega) \wedge \lambda + (-1)^k \omega \wedge d\lambda. \tag{63}$$

(β) *Εάν η ω είναι κλάσεως $\mathcal{C}''$ στο E, τότε $d^2\omega = 0$.*

Στο παραπάνω, $d^2\omega$ σημαίνει φυσικά $d(d\omega)$.

Απόδειξη. Λόγω των (57) και (60), το (α) έπεται εάν αποδειχθεί η (63) για την ειδική περίπτωση

$$\omega = f dx_I, \qquad \lambda = g dx_J, \tag{64}$$

όπου $f, g \in \mathcal{C}'(E)$, η dx_I είναι βασική k-μορφή και η dx_J είναι βασική m-μορφή. (Εάν ο k ή ο m ή και οι δύο είναι ίσοι με 0, τότε απλώς παραλείπουμε την dx_I ή την dx_J ή και τις δύο στην (64). Η απόδειξη παραμένει ανεπηρέαστη σε αυτήν την περίπτωση.) Τότε, έχουμε,

$$\omega \wedge \lambda = fg dx_I \wedge dx_J.$$

Υποθέτουμε ότι τα I και J δεν έχουν κοινό στοιχείο. (Σε διαφορετική περίπτωση, καθένας από τους τρεις όρους στην (63) είναι 0.) Τότε, με χρήση της (53),

$$d(\omega \wedge \lambda) = d(fg dx_I \wedge dx_J) = (-1)^\alpha d(fg dx_{[I,J]}).$$

Από την (59) έχουμε ότι $d(fg) = fdg + gdf$. Άρα, η (60) χορηγεί την

$$d(\omega \wedge \lambda) = (-1)^\alpha (fdg + gdf) \wedge dx_{[I,J]} = (fdg + gdf) \wedge dx_I \wedge dx_J.$$

Εφόσον η dg είναι 1-μορφή και η dx_I k-μορφή, έχουμε ότι

$$dg \wedge dx_I = (-1)^k dx_I \wedge dg,$$

σύμφωνα με τη (42). Άρα,

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \lambda) &= (df \wedge dx_I) \wedge (g dx_J) + (-1)^k (f dx_I) \wedge (dg \wedge dx_J) \\ &= (d\omega) \wedge \lambda + (-1)^k \omega \wedge d\lambda, \end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει το (α). Σημειώνουμε ότι χρησιμοποιήθηκε ο προσεταιριστικός νόμος (58).

Ας αποδείξουμε το (β) πρώτα για μία 0-μορφή $f \in \mathcal{C}''$:

$$d^2 f = d\left(\sum_{j=1}^{n} (D_j f)(\mathbf{x}) dx_j\right) = \sum_{j=1}^{n} d(D_j f) \wedge dx_j = \sum_{i,j=1}^{n} (D_{ij} f)(\mathbf{x}) dx_i \wedge dx_j.$$

Εφόσον $D_{ij} f = D_{ji} f$ (Θεώρημα 9.41) και $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ για οποιουσδήποτε δείκτες i, j, διαπιστώνουμε αμέσως ότι $d^2 f = 0$.

Εάν $\omega = f dx_I$, όπως στην (64), τότε $d\omega = (df) \wedge dx_I$. Από την (60), είναι $d(dx_I) = 0$. Άρα, η (63) φανερώνει ότι

$$d^2 \omega = (d^2 f) \wedge dx_I = 0.$$

□

10.21 Αλλαγή μεταβλητών. Υποθέτουμε ότι E είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του R^n, ότι T είναι μία $\mathcal{C}'$-απεικόνιση του E σε ένα ανοικτό υποσύνολο V του R^m και ότι ω είναι μία k-μορφή στο V με συνήθη αναπαράσταση την

$$\omega = \sum_I b_I(\mathbf{y}) dy_I. \tag{65}$$

(Χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\mathbf{y}$ για σημεία του V και το σύμβολο $\mathbf{x}$ για σημεία του E.)

Ας είναι $t_1, \dots, t_m$ οι συνιστώσες της T: Εάν

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) = T(\mathbf{x}),$$

τότε $y_i = t_i(\mathbf{x})$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Όπως στην (59), έχουμε ότι

$$dt_i = \sum_{j=1}^{n} (D_j t_i)(\mathbf{x}) dx_j \qquad (1 \leq i \leq m). \tag{66}$$

Φυσικά, για κάθε δείκτη i, η dt_i είναι μία 1-μορφή στο E.

Η απεικόνιση T μετασχηματίζει την ω σε μία k-μορφή ω_T στο E, η οποία ορίζεται ως

$$\omega_T = \sum_I b_I(T(\mathbf{x})) dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_k}. \tag{67}$$

Σε κάθε αθροιστέο στην (67), ο $I = (i_1, \ldots i_k)$ είναι αύξων k-δείκτης.

Το επόμενο θεώρημα φανερώνει ότι η πρόσθεση, ο πολλαπλασιασμός και η διαφόριση μορφών μετατίθενται με την αλλαγή μεταβλητών.

Θεώρημα 10.22. *Υποθέτουμε ότι τα E, T και V έχουν το ίδιο νόημα όπως στην Ενότητα 10.21. Θεωρούμε μία k-μορφή ω και μία m-μορφή λ στο V. Τότε,*

(α) $(\omega + \lambda)_T = \omega_T + \lambda_T$ *εάν* $k = m$.

(β) $(\omega \wedge \lambda)_T = \omega_T \wedge \lambda_T$.

(γ) $d(\omega_T) = (d\omega)_T$ *εάν η* ω *είναι κλάσεως* $\mathcal{C}'$ *και η* T *κλάσεως* $\mathcal{C}''$.

Απόδειξη. Το (α) προκύπτει αμέσως από τους ορισμούς. Το (β) είναι σχεδόν προφανές εάν αντιληφθούμε ότι

$$(dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_r})_T = dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_r}, \tag{68}$$

ανεξαρτήτως εάν η r-άδα $(i_1, \ldots, i_r)$ είναι αύξων δείκτης ή όχι. Η (68) ισχύει διότι απαιτείται ο ίδιος αριθμός αρνητικών πρόσημων σε κάθε πλευρά της (68) για να τοποθετήσουμε τους δείκτες σε αύξουσα σειρά.

Θα αποδείξουμε τώρα το (γ). Εάν f είναι μία 0-μορφή κλάσεως $\mathcal{C}'$ στο V, τότε

$$f_T = F \circ T, \qquad df = \sum_{i=1}^{m} (D_i f)(\mathbf{y}) dy_i.$$

Βάσει του κανόνα της αλυσίδας, έπεται ότι

$$
\begin{aligned}
d(f_T) &= \sum_{j=1}^{n}(D_j f_T)(\mathbf{x})dx_j \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(D_i f)(T(\mathbf{x}))(D_j t_i)(\mathbf{x})dx_j \\
&= \sum_{i=1}^{m}(D_i f)(T(\mathbf{x}))dt_i \\
&= (df)_T.
\end{aligned} \tag{69}
$$

Εάν $dy_I = dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$, τότε $(dy_I)_T = dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_k}$ και το Θεώρημα 10.20 φανερώνει ότι

$$d((dy_I)_T) = 0. \tag{70}$$

(Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιείται η υπόθεση $T \in \mathcal{C}''$.)

Υποθέτουμε τώρα ότι $\omega = f(\mathbf{y})dy_I$. Τότε,

$$\omega_T = f_T(\mathbf{x})(dy_I)_T$$

και οι προηγούμενες σχέσεις οδηγούν στη

$$d(\omega_T) = d(f_T) \wedge (dy_I)_T = (df)_T \wedge (dy_I)_T = ((df) \wedge dy_I)_T = (d\omega)_T.$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει λόγω των (63) και (70), η δεύτερη λόγω της (69), η τρίτη προκύπτει από το μέρος (β) και η τέταρτη είναι ο ορισμός της $d\omega$.

Η γενική περίπτωση της (γ) έπεται από την ειδική περίπτωση που μόλις αποδείχθηκε, εάν εφαρμόσουμε την (α). Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Ο επόμενος στόχος είναι η απόδειξη του Θεωρήματος 10.25. Προς αυτό, θα αποδείξουμε πρώτα δύο σημαντικές ιδιότητες περί μετασχηματισμού διαφορικών μορφών.

Θεώρημα 10.23. *Υποθέτουμε ότι T είναι μία $\mathcal{C}'$-απεικόνιση ενός ανοικτού συνόλου $E \subset R^n$ σε ένα ανοικτό σύνολο $V \subset R^m$, ότι S είναι μία $\mathcal{C}'$-απεικόνιση του V σε ένα ανοικτό σύνολο $W \subset R^p$ και ότι ω είναι* *μία k-μορφή στο W, γεγονός που σημαίνει ότι η ω_S είναι k-μορφή στο V και οι $(\omega_S)_T$, ω_{ST} είναι k-μορφές στο E (όπου $ST = S \circ T$). Τότε,*

$$(\omega_S)_T = \omega_{ST}. \tag{71}$$

Απόδειξη. Εάν ω, λ είναι μορφές στο W, τότε το Θεώρημα 10.22 φανερώνει ότι

$$((\omega \wedge \lambda)_S)_T = (\omega_S \wedge \lambda_S)_T = (\omega_S)_T \wedge (\lambda_S)_T$$

και

$$(\omega \wedge \lambda)_{ST} = \omega_{ST} \wedge \lambda_{ST}.$$

Άρα, εάν η (71) ισχύει για τις ω και λ, τότε ισχύει και για την $\omega \wedge \lambda$. Εφόσον κάθε μορφή δομείται από 0-μορφές και 1-μορφές μέσω προσθέσεως και πολλαπλασιασμού και εφόσον η (71) είναι τετριμμένη για 0-μορφές, αρκεί να αποδειχθεί η (71) στην περίπτωση όπου $\omega = dz_q$ $(q = 1, \ldots, p)$. (Συμβολίζουμε τα σημεία των E, V, W με $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ αντιστοίχως.)

Ας είναι $t_1, \ldots, t_m$ οι συνιστώσες της T, $s_1, \ldots, s_p$ οι συνιστώσες της S και $r_1, \ldots, r_p$ οι συνιστώσες της ST. Εάν $\omega = dz_q$ $(q = 1, \ldots, p)$, τότε

$$\omega_S = ds_q = \sum_{j=1}^{m} (D_j s_q)(\mathbf{y}) dy_j.$$

Επομένως, ο κανόνας της αλυσίδας συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}
(\omega_S)_T &= \sum_{j=1}^{m} (D_j s_q)(T(\mathbf{x})) dt_j \\
&= \sum_{j=1}^{m} (D_j s_q)(T(\mathbf{x})) \sum_{i=1}^{n} (D_i t_j)(\mathbf{x}) dx_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (D_i r_q)(\mathbf{x}) dx_i = dr_q = \omega_{ST}.
\end{aligned}$$

$\square$

Θεώρημα 10.24. *Υποθέτουμε ότι ω είναι μία k-μορφή σε ένα ανοικτό σύνολο $E \subset R^n$, ότι Φ είναι μία k-επιφάνεια του E με πεδίο παραμέτρων $D \subset R^k$ και ότι Δ είναι η k-επιφάνεια στον R^k με πεδίο παραμέτρων D, οριζόμενη από την ισότητα $\Delta(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ ($\mathbf{u} \in D$). Τότε,*

$$\int_\Phi \omega = \int_\Delta \omega_\Phi.$$

Απόδειξη. Είναι αρκετό να θεωρήσουμε απλώς την περίπτωση όπου

$$\omega = a(\mathbf{x})dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Εάν $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ είναι οι συνιστώσες της Φ, τότε

$$\omega_\Phi = a(\Phi(\mathbf{u}))d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k}.$$

Το θεώρημα έπεται εάν δείξουμε ότι

$$d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k} = J(\mathbf{u})du_1 \wedge \cdots \wedge du_k, \tag{72}$$

όπου

$$J(\mathbf{u}) = \frac{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{\partial(u_1, \ldots, u_k)},$$

εφόσον η (72) συνεπάγεται ότι

$$\int_\Phi \omega = \int_D a(\Phi(\mathbf{u}))J(\mathbf{u})d\mathbf{u} = \int_\Delta a(\Phi(\mathbf{u}))J(\mathbf{u})du_1 \wedge \cdots \wedge du_k = \int_\Delta \omega_\Phi.$$

Θεωρούμε τον $k \times k$ πίνακα $[A]$ με στοιχεία τα

$$\alpha(p, q) = (D_q\varphi_{i_p})(\mathbf{u}) \qquad (p, q = 1, \ldots, k).$$

Τότε, για κάθε δείκτη $p = 1, \ldots, k$ ισχύει ότι

$$d\varphi_{i_p} = \sum_{q=1}^{k} \alpha(p, q)du_q$$

και επομένως

$$d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k} = \sum_{q_1, \ldots, q_k = 1}^{k} \alpha(1, q_1) \cdots \alpha(k, q_k)du_{q_1} \wedge \cdots \wedge du_{q_k}.$$

Σε αυτό το άθροισμα, οι δείκτες $q_1, \ldots, q_k$ είναι ανεξάρτητοι. Η αντιμεταθετική σχέση (42) συνεπάγεται ότι

$$du_{q_1} \wedge \cdots \wedge du_{q_k} = s(q_1, \ldots, q_k) du_1 \wedge \cdots \wedge du_k,$$

όπου το s είναι όπως στον Ορισμό 9.33. Εφαρμόζοντας τον ορισμό αυτόν, αποκτούμε την ισότητα

$$d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k} = \det[A] du_1 \wedge \cdots \wedge du_k.$$

Εφόσον $J(\mathbf{u}) = \det[A]$, η (72) έχει αποδειχθεί. □

Το τελικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας συνδυάζει τα δύο προηγούμενα θεωρήματα.

Θεώρημα 10.25. *Υποθέτουμε ότι T είναι μία $\mathscr{C}'$-απεικόνιση ενός ανοικτού συνόλου $E \subset R^n$ σε ένα ανοικτό σύνολο $V \subset R^m$, ότι Φ είναι μία k-επιφάνεια του E και ότι ω είναι μία k-μορφή στο V.*

Τότε,

$$\int_{T\Phi} \omega = \int_{\Phi} \omega_T.$$

Απόδειξη. Ας είναι D το πεδίο παραμέτρων της Φ (επομένως και της $T\Phi$). Ορίζουμε την k-επιφάνεια Δ όπως στο Θεώρημα 10.24.

Τότε,

$$\int_{T\Phi} \omega = \int_{\Delta} \omega_{T\Phi} = \int_{\Delta} (\omega_T)_{\Phi} = \int_{\Phi} \omega_T.$$

Η πρώτη από τις ισότητες είναι το Θεώρημα 10.24, εφαρμοσμένο στην $T\Phi$. Η δεύτερη έπεται από το Θεώρημα 10.23. Η τρίτη είναι το Θεώρημα 10.24, εφαρμοσμένο στην ω_T. □

ΜΟΝΟΠΛΟΚΑ ΚΑΙ ΑΛΥΣΙΔΕΣ

10.26 Συσχετικά μονόπλοκα. Μία απεικόνιση $\mathbf{f}$ που απεικονίζει έναν διανυσματικό χώρο X σε έναν διανυσματικό χώρο Y λέγεται *συσχετική* εάν και μόνον εάν η $\mathbf{f} - \mathbf{f}(\mathbf{0})$ είναι γραμμική απεικόνιση. Με διαφορετική διατύπωση, απαιτείται να ισχύει η ισότητα

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{0}) + A\mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in X) \tag{73}$$

για κάποια γραμμική απεικόνιση $A \in L(X, Y)$.

Επομένως, μία συσχετική απεικόνιση του R^k στον R^n καθορίζεται πλήρως εάν γνωρίζουμε το $\mathbf{f}(\mathbf{0})$ και τα $\mathbf{f}(\mathbf{e}_i)$ για $1 \le i \le k$. Ως συνήθως, $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$ είναι η συνήθης βάση του R^k.

Ορίζουμε το *σύνηθες μονόπλοκο* Q^k ως το σύνολο των στοιχείων $\mathbf{u} \in R^k$ της μορφής

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{e}_i, \tag{74}$$

όπου οι $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί με $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \le 1$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k$ είναι σημεία του R^n. Ορίζουμε το *προσανατολισμένο συσχετικό k-μονόπλοκο*

$$\sigma = [\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k] \tag{75}$$

ως την k-επιφάνεια στον R^n με πεδίο παραμέτρων το Q^k, η οποία δίδεται από την συσχετική απεικόνιση

$$\sigma(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{e}_k) = \mathbf{p}_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0) \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_k \in R^1). \tag{76}$$

Σημειώνουμε ότι η σ χαρακτηρίζεται πλήρως από τις ισότητες

$$\sigma(\mathbf{0}) = \mathbf{p}_0, \quad \sigma(\mathbf{e}_i) = \mathbf{p}_i \;\; (1 \le i \le k) \tag{77}$$

και ότι

$$\sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{p}_0 + A\mathbf{u} \quad (\mathbf{u} \in Q^k), \tag{78}$$

όπου $A \in L(R^k, R^n)$ με $A\mathbf{e}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0$ για $1 \le i \le k$.

Ονομάζουμε το σ *προσανατολισμένο* για να δώσουμε έμφαση στο γεγονός ότι η σειρά των κορυφών $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_k$ κατέχει ουσιώδη ρόλο. Εάν

$$\overline{\sigma} = [\mathbf{p}_{i_0}, \ldots, \mathbf{p}_{i_k}], \tag{79}$$

όπου $\{i_0, \ldots, i_k\}$ είναι μία μετάταξη[5] του συνόλου $\{0, 1, \ldots, k\}$, τότε υιοθετούμε τον συμβολισμό

$$\overline{\sigma} = s(i_0, i_1, \ldots, i_k)\sigma, \tag{80}$$

όπου s είναι η συνάρτηση που ορίζεται στον Ορισμό 9.33. Συνεπώς, $\overline{\sigma} = \pm\sigma$, αναλόγως εάν $s = 1$ ή $s = -1$. Όμως, σε σχέση με τους ορισμούς στις (75) και (76), δεν θα γράφουμε $\overline{\sigma} = \sigma$, εκτός εάν $i_0 = 0, \ldots, i_k = k$, ακόμη και στην περίπτωση όπου $s(i_0, i_1, \ldots, i_k) = 1$. Αυτό που έχουμε εδώ είναι μία σχέση ισοδυναμίας και όχι μία ισότητα. Παρ' όλα αυτά, για την εκπλήρωση των σκοπών μας, ο συμβολισμός δικαιολογείται από το Θεώρημα 10.27.

Εάν $\overline{\sigma} = \varepsilon\sigma$ (χρησιμοποιώντας την προηγούμενη σύμβαση), τότε λέγεται ότι τα σ και $\overline{\sigma}$ έχουν τον *ίδιο προσανατολισμό* εάν και μόνον εάν $\varepsilon = 1$. Λέγεται ότι τα σ και $\overline{\sigma}$ έχουν *αντίθετο προσανατολισμό* εάν και μόνον εάν $\varepsilon = -1$. Σημειώνουμε ότι δεν έχουμε ορίσει την έννοια «προσανατολισμός μονοπλόκου». Απλώς, έχουμε ορίσει μία σχέση μεταξύ ζευγών μονοπλόκων που έχουν το ίδιο σύνολο κορυφών, τη σχέση «κοινού προσανατολισμού».

Όμως, υπάρχει μία περίπτωση στην οποία ο προσανατολισμός ενός μονοπλόκου ορίζεται κατά φυσιολογικό τρόπο. Αυτό συμβαίνει όταν $n = k$ και τα διανύσματα $\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0$ $(1 \le i \le k)$ είναι *ανεξάρτητα*. Σε αυτήν την περίπτωση, ο γραμμικός μετασχηματισμός A που εμφανίζεται στην (78) είναι αντιστρέψιμος και η ορίζουσά του (η οποία ταυτίζεται με την ορίζουσα Jacobi της σ) είναι μη μηδενική. Τότε, το σ λέγεται *θετικά* (αντιστοίχως *αρνητικά*) προσανατολισμένο εάν και μόνον εάν η $\det A$ είναι θετική (αντιστοίχως αρνητική). Ιδιαιτέρως, το μονόπλοκο $[\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k]$ στον R^k, το οποίο δίδεται από την ταυτοτική απεικόνιση, έχει θετικό προσανατολισμό.

[5] Σ. τ. Μ.: Με τη λέξη αυτή αποδίδεται ο αγγλικός όρος *permutation*. Στην ελληνική βιβλιογραφία, αυτός έχει αποδοθεί και ως «μετάθεση».

Έως εδώ, έχουμε υποθέσει ότι $k \geq 1$. Ένα *προσανατολισμένο* 0-*μονόπλοκο* ορίζεται ως ένα σημείο με ένα πρόσημο προσαρτημένο σε αυτό. Γράφουμε $\sigma = +\mathbf{p}_0$ ή $\sigma = -\mathbf{p}_0$. Εάν $\sigma = \varepsilon \mathbf{p}_0$ ($\varepsilon = \pm 1$) και εάν f είναι μία 0-μορφή (ήτοι πραγματική συνάρτηση), τότε ορίζουμε

$$\int_\sigma f = \varepsilon f(\mathbf{p}_0).$$

Θεώρημα 10.27. *Εάν σ είναι ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο k-μονόπλοκο σε ένα ανοικτό σύνολο $E \subset R^n$ και εάν $\overline{\sigma} = \varepsilon\sigma$, τότε*

$$\int_{\overline{\sigma}} \omega = \varepsilon \int_\sigma \omega \tag{81}$$

για κάθε k-μορφή ω στο E.

Απόδειξη. Για $k = 0$, η (81) έπεται από τον προηγούμενο ορισμό. Επομένως, υποθέτουμε ότι $k \geq 1$ και ότι το σ δίδεται από την (75).

Υποθέτουμε ότι $1 \leq j \leq k$ και ότι η $\overline{\sigma}$ λαμβάνεται από τη σ εναλλάσσοντας τα $\mathbf{p}_0$ και $\mathbf{p}_j$. Τότε, $\varepsilon = -1$ και

$$\overline{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{p}_j + B\mathbf{u} \qquad (\mathbf{u} \in Q^k),$$

όπου B είναι η γραμμική απεικόνιση του R^k στον R^n που ορίζεται μέσω των σχέσεων $B\mathbf{e}_j = \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_j$ και $B\mathbf{e}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j$ για κάθε δείκτη i με $i \neq j$. Εάν θέσουμε $\mathbf{x}_i = A\mathbf{e}_i$ ($1 \leq i \leq k$), όπου ο A δίδεται από την (78), τότε τα διανύσματα στήλες του B (δηλαδή τα διανύσματα $B\mathbf{e}_i$ ($1 \leq i \leq k$)) είναι τα

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_j, \ldots, \mathbf{x}_{j-1} - \mathbf{x}_j, -\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j, \ldots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j.$$

Εάν αφαιρέσουμε την j-στήλη από κάθε άλλη, τότε καμία από τις ορίζουσες στην (35) δεν επηρεάζεται και αποκτούμε τις στήλες $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{j-1}, -\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}, \ldots, \mathbf{x}_k$. Αυτές διαφέρουν από τις στήλες του A μόνον κατά το πρόσημο της j-στήλης. Συνεπώς, σε αυτήν την περίπτωση, η (81) ισχύει.

Εν συνεχεία, υποθέτουμε ότι i, j είναι ακέραιοι αριθμοί με $0 < i < j \leq k$ και ότι η $\overline{\sigma}$ λαμβάνεται από τη σ εναλλάσσοντας τα $\mathbf{p}_i$ και $\mathbf{p}_j$. Τότε, $\overline{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{p}_0 + C\mathbf{u}$ ($\mathbf{u} \in Q^k$), όπου ο γραμμικός μετασχηματισμός C προκύπτει από τον A εναλλάσσοντας την i-στήλη με την j-στήλη. Αυτό συνεπάγεται ξανά την αλήθεια της (81), εφόσον $\varepsilon = -1$.

Η γενική περίπτωση έπεται από το γεγονός ότι μία μετάταξη του $\{0, 1, \ldots, k\}$ συντίθεται από τις ειδικές περιπτώσεις εναλλαγών που περιγράψαμε. □

10.28 Συσχετικές αλυσίδες. Μία *συσχετική k-αλυσίδα* Γ σε ένα ανοικτό σύνολο $E \subset R^n$ είναι μία συλλογή πεπερασμένου πλήθους προσανατολισμένων συσχετικών k-μονοπλόκων $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ στο E. Τα μονόπλοκα αυτά δεν είναι απαραιτήτως διακεκριμένα. Δηλαδή, ένα μονόπλοκο μπορεί να εμφανισθεί στην Γ με ορισμένη πολλαπλότητα.

Εάν η Γ είναι όπως παραπάνω και εάν ω είναι μία k-μορφή στο E, τότε ορίζουμε

$$\int_\Gamma \omega = \sum_{i=1}^{r} \int_{\sigma_i} \omega. \tag{82}$$

Μία k-επιφάνεια Φ στο E μπορεί να θεωρηθεί ως μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού τη συλλογή των k-μορφών στο E, η οποία αντιστοιχίζει τον αριθμό $\int_\Phi \omega$ στην ω. Εφόσον οι πραγματικές συναρτήσεις μπορούν να προστεθούν (όπως στον Ορισμό 4.3), εισάγουμε κατά φυσιολογικό τρόπο τον συμβολισμό

$$\Gamma = \sigma_1 + \cdots + \sigma_r \tag{83}$$

ή αλλιώς, σε πιο συνεπτυγμένη μορφή,

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i, \tag{84}$$

για να δηλώσουμε ότι η (82) ισχύει για κάθε k-μορφή ω στο E.

Για την αποφυγή παρανοήσεων, τονίζουμε ότι οι συμβολισμοί που εισήχθησαν στις (80) και (83) πρέπει να χειρίζονται με προσοχή. Το λεπτό σημείο βρίσκεται στο γεγονός ότι κάθε προσανατολισμένο συσχετικό k-μονόπλοκο σ στον R^n μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση με δύο διαφορετικούς τρόπους, με διαφορετικά πεδία ορισμού και πεδία τιμών και επομένως μπορούν να ορισθούν δύο εντελώς διαφορετικές πράξεις προσθέσεως. Αρχικά, το σ

ορίστηκε ως μία συνάρτηση από το Q^k στον R^n. Επομένως, το $\sigma_1 + \sigma_2$ *θα μπορούσε* να ερμηνευθεί ως η συνάρτηση που αντιστοιχίζει το διάνυσμα $\sigma_1(\mathbf{u}) + \sigma_2(\mathbf{u})$ σε κάθε $\mathbf{u} \in Q^k$. Σημειώνουμε ότι η $\sigma_1 + \sigma_2$ είναι επίσης ένα προσανατολισμένο συσχετικό k-μονόπλοκο στον R^n! Στην (83) εννοείται κάτι *εντελώς διαφορετικό.*

Επί παραδείγματι, εάν $\sigma_2 = -\sigma_1$, υπό την έννοια της (80) (δηλαδή τα σ_1 και σ_2 έχουν το ίδιο σύνολο κορυφών αλλά με διαφορετικό προσανατολισμό) και εάν $\Gamma = \sigma_1 + \sigma_2$, τότε $\int_\Gamma \omega = 0$ για κάθε k-μορφή ω. Το γεγονός αυτό μπορούμε να το εκφράσουμε γράφοντας $\Gamma = 0$ ή $\sigma_1 + \sigma_2 = 0$. Το τελευταίο δεν σημαίνει ότι για οποιοδήποτε $\mathbf{u} \in Q^k$ το $\sigma_1(\mathbf{u}) + \sigma_2(\mathbf{u})$ είναι το μηδενικό διάνυσμα στον R^n.

10.29 Σύνορα. Για $k \geq 1$ ορίζουμε το *σύνορο* του προσανατολισμένου συσχετικού k-μονοπλόκου

$$\sigma = [\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_k]$$

ως τη συσχετική $(k-1)$-αλυσίδα

$$\partial\sigma = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j [\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{j-1}, \mathbf{p}_{j+1}, \ldots, \mathbf{p}_k]. \tag{85}$$

Επί παραδείγματι, εάν $\sigma = [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2]$, τότε

$$\partial\sigma = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2] - [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2] + [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1] = [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1] + [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2] + [\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_0],$$

το οποίο συμπίπτει με τη συνήθη έννοια του προσανατολισμένου συνόρου ενός τριγώνου.

Για $1 \leq j \leq k$ παρατηρούμε ότι το μονόπλοκο

$$\sigma_j = [\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{j-1}, \mathbf{p}_{j+1}, \ldots, \mathbf{p}_k],$$

το οποίο εμφανίζεται στην (85), έχει το Q^{k-1} ως πεδίο παραμέτρων και ορίζεται μέσω της σχέσεως

$$\sigma_j(\mathbf{u}) = \mathbf{p}_0 + B\mathbf{u} \qquad (\mathbf{u} \in Q^{k-1}), \tag{86}$$

όπου B είναι η γραμμική απεικόνιση του R^{k-1} στον R^k που ορίζεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} B\mathbf{e}_i &= \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0 \qquad && (1 \leq i \leq j-1), \\ B\mathbf{e}_i &= \mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_0 \qquad && (j \leq i \leq k-1). \end{aligned}$$

Το μονόπλοκο

$$\sigma_0 = [\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k],$$

το οποίο επίσης εμφανίζεται στην (85), δίδεται από την απεικόνιση

$$\sigma_0(\mathbf{u}) = \mathbf{p}_1 + C\mathbf{u} \quad (\mathbf{u} \in Q^{k-1}),$$

όπου C είναι η γραμμική απεικόνιση του R^{k-1} στον R^k που ορίζεται από τη σχέση $C\mathbf{e}_i = \mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_1$ για κάθε $1 \leq i \leq k-1$.

10.30 Διαφορίσιμα μονόπλοκα και αλυσίδες. Θεωρούμε μία $\mathcal{C}''$-απεικόνιση T ενός ανοικτού συνόλου $E \subset R^n$ σε ένα ανοικτό σύνολο $V \subset R^m$, όχι απαραιτήτως 1-1. Εάν σ είναι ένα προσανατολισμένο συσχετικό k-μονόπλοκο, τότε η σύνθεση $\Phi = T \circ \sigma$ (την οποία θα συμβολίζουμε με την απλούστερη μορφή $T\sigma$) είναι μία k-επιφάνεια στο V με πεδίο παραμέτρων το Q^k. Ονομάζουμε την Φ *προσανατολισμένο k-μονόπλοκο κλάσεως $\mathcal{C}''$*.

Μία πεπερασμένη συλλογή Ψ προσανατολισμένων k-μονοπλόκων $\Phi_1, \dots, \Phi_r$ κλάσεως $\mathcal{C}''$ στο V ονομάζεται *k-αλυσίδα κλάσεως $\mathcal{C}''$* στο V. Εάν ω είναι μία k-μορφή στο V, τότε ορίζουμε

$$\int_\Psi \omega = \sum_{i=1}^{r} \int_{\Phi_i} \omega \tag{87}$$

και χρησιμοποιούμε τον αντίστοιχο συμβολισμό $\Psi = \sum_{i=1}^r \Phi_i$.

Εάν $\Gamma = \sum_{i=1}^r \sigma_i$ είναι μία συσχετική k-αλυσίδα και εάν $\Phi_i = T \circ \sigma_i$ για κάθε δείκτη i, τότε γράφουμε επίσης $\Psi = T \circ \Gamma$ ή αλλιώς

$$T\Big(\sum_{i=1}^{r} \sigma_i\Big) = \sum_{i=1}^{r} T\sigma_i. \tag{88}$$

Το σύνορο $\partial\Phi$ του προσανατολισμένου k-μονοπλόκου $\Phi = T \circ \sigma$ ορίζεται ως η $(k-1)$-αλυσίδα

$$\partial\Phi = T(\partial\sigma). \tag{89}$$

Προς δικαιολόγηση της (89), παρατηρούμε ότι εάν η T είναι συσχετική, τότε η $\Phi = T \circ \sigma$ είναι ένα προσανατολισμένο συσχετικό k-μονόπλοκο. Σε αυτήν την περίπτωση, η (89) δεν αποτελεί ορισμό αλλά *συνέπεια* της (85). Επομένως, η (89) αποτελεί γενίκευση αυτής της περιπτώσεως.

Είναι σαφές ότι εάν η Φ είναι κλάσεως $\mathscr{C}''$, τότε το ίδιο ισχύει και για την $\partial\Phi$.

Εν τέλει, ορίζουμε το σύνορο $\partial\Psi$ της k-αλυσίδας $\Psi = \sum_{i=1}^{r} \Phi_i$ ως την $(k-1)$-αλυσίδα

$$\partial\Psi = \sum_{i=1}^{r} \partial\Phi_i. \tag{90}$$

10.31 Θετικά προσανατολισμένα σύνορα. Έως εδώ, έχουμε αντιστοιχίσει σύνορα σε αλυσίδες και όχι σε υποσύνολα του R^n. Η έννοια του συνόρου, όπως έχει τεθεί, είναι η καταλληλότερη για τη διατύπωση και απόδειξη του θεωρήματος του Stokes. Παρ' όλα αυτά, ιδιαιτέρως σε εφαρμογές στον R^2 ή στον R^3, είναι σύνηθες και απλούστερο να χρησιμοποιούμε «προσανατολισμένα σύνορα» συνόλων. Θα περιγράψουμε εν συντομία αυτήν την κατάσταση.

Ας είναι Q^n το σύνηθες μονόπλοκο στον R^n και σ_0 η ταυτοτική απεικόνιση με πεδίο ορισμού το Q^n. Όπως το συναντήσαμε στην Ενότητα 10.26, η σ_0 μπορεί να θεωρηθεί ως ένα θετικά προσανατολισμένο n-μονόπλοκο στον R^n. Το σύνορό του, $\partial\sigma_0$, είναι μία συσχετική $(n-1)$-αλυσίδα. Η αλυσίδα αυτή ονομάζεται το *θετικά προσανατολισμένο σύνορο του* Q^n.

Επί παραδείγματι, το θετικά προσανατολισμένο σύνορο του Q^3 είναι η αλυσίδα

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] - [0, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] + [0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] - [0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2].$$

Θεωρούμε τώρα μία 1-1 απεικόνιση T του Q^n στον R^n κλάσεως $\mathscr{C}''$ με θετική ορίζουσα Jacobi (τουλάχιστον στο εσωτερικό του Q^n). Θέτουμε $E = T(Q^n)$. Σύμφωνα με το θεώρημα αντίστροφης συναρτήσεως, το E ισούται με τη κλειστή θήκη ενός ανοικτού υποσυνόλου του R^n. Ορίζουμε το *θετικά προσανατολισμένο σύνορο* του συνόλου E ως την $(n-1)$-αλυσίδα

$$\partial T = T(\partial\sigma_0)$$

και το συμβολίζουμε ως ∂E.

Ένα εύλογο ερώτημα που προκύπτει είναι το εξής: Εάν $E = T_1(Q^n) = T_2(Q^n)$ και εάν οι T_1 και T_2 έχουν θετική ορίζουσα Jacobi, τότε αληθεύει η ισότητα $\partial T_1 = \partial T_2$; Δηλαδή, ισχύει η ισότητα

$$\int_{\partial T_1} \omega = \int_{\partial T_2} \omega$$

για κάθε $(n-1)$-μορφή ω; Η απάντηση είναι καταφατική, όμως θα παραλείψουμε την απόδειξη. (Για ένα παράδειγμα, συγκρίνετε το τέλος της ενότητας με την Άσκηση 17.)

Μπορούμε να προχωρήσουμε περισσότερο. Θεωρούμε ότι

$$\Omega = E_1 \cup \cdots \cup E_r,$$

όπου για κάθε δείκτη i είναι $E_i = T_i(Q^n)$, η T_i έχει τις ιδιότητες της T όπως παραπάνω και επίσης τα εσωτερικά των συνόλων E_i $(1 \le i \le r)$ είναι αποσυνδετά. Σε αυτήν την περίπτωση, η $(n-1)$-αλυσίδα

$$\partial\Omega = \partial T_1 + \cdots + \partial T_r$$

ονομάζεται το *θετικά προσανατολισμένο σύνορο* του Ω.

Επί παραδείγματι, το μοναδιαίο τετράγωνο I^2 του R^2 είναι η ένωση των $\sigma_1(Q^2)$ και $\sigma_2(Q^2)$, όπου

$$\sigma_1(\mathbf{u}) = \mathbf{u}, \quad \sigma_2(\mathbf{u}) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{u} \qquad (\mathbf{u} \in Q^2).$$

Τα σ_1, σ_2 έχουν ορίζουσα Jacobi ίση με 1. Εφόσον

$$\sigma_1 = [\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], \qquad \sigma_2 = [\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1],$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\partial\sigma_1 &= [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] - [\mathbf{0}, \mathbf{e}_2] + [\mathbf{0}, \mathbf{e}_1],\\
\partial\sigma_2 &= [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1] - [\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1] + [\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2].
\end{aligned}$$

Το άθροισμα των δύο αυτών συνόρων είναι το

$$\partial I^2 = [\mathbf{0}, \mathbf{e}_1] + [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2] + [\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2] + [\mathbf{e}_2, \mathbf{0}],$$

το θετικά ορισμένο προσανατολισμένο σύνορο του I^2. Σημειώνουμε ότι τα $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$, $[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1]$ αλληλοαναιρούνται.

Εάν Φ είναι μία 2-επιφάνεια στον R^m με πεδίο παραμέτρων το I^2, τότε η Φ (θεωρούμενη ως συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των 2-μορφών) ταυτίζεται με την 2-αλυσίδα

$$\Phi \circ \sigma_1 + \Phi \circ \sigma_2.$$

Άρα,

$$\partial \Phi = \partial(\Phi \circ \sigma_1) + \partial(\Phi \circ \sigma_2) = \Phi(\partial \sigma_1) + \Phi(\partial \sigma_2) = \Phi(\partial I^2).$$

Με διαφορετική διατύπωση, εάν το πεδίο παραμέτρων της Φ είναι το I^2, τότε μπορούμε να βρούμε το $\partial \Phi$ με χρήση του ∂I^2, δίχως να εμπλακεί το μονόπλοκο Q^2.

Άλλα παραδείγματα υπάρχουν στις ασκήσεις 17 έως και 19.

Παράδειγμα 10.32. Για $u \in [0, \pi]$, $v \in [0, 2\pi]$ ορίζουμε

$$\Sigma(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u).$$

Τότε, η Σ είναι μία 2-επιφάνεια στον R^3 με πεδίο παραμέτρων ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $D \subset R^2$ και με πεδίο τιμών τη μοναδιαία σφαίρα στον R^3. Το σύνορό της είναι το

$$\partial \Sigma = \Sigma(\partial D) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4,$$

όπου για $u \in [0, \pi]$, $v \in [0, 2\pi]$ είναι

$$\begin{aligned}
\gamma_1(u) &= \Sigma(u, 0) = (\sin u, 0, \cos u),\\
\gamma_2(v) &= \Sigma(\pi, v) = (0, 0, -1),\\
\gamma_3(u) &= \Sigma(\pi - u, 2\pi) = (\sin u, 0, -\cos u),\\
\gamma_4(v) &= \Sigma(0, 2\pi - v) = (0, 0, 1).
\end{aligned}$$

Εφόσον οι γ_2 και γ_4 είναι σταθερές, οι παράγωγοί τους είναι μηδενικές. Επομένως το ολοκλήρωμα κάθε 1-μορφής υπεράνω αυτών είναι ίσο με 0. (Ανατρέξτε στο Παράδειγμα 10.12(α).)

Εφόσον για κάθε $u \in [0, \pi]$ ισχύει ότι $\gamma_3(u) = \gamma_1(\pi - u)$, εφαρμόζοντας την (35) λαμβάνουμε ότι

$$\int_{\gamma_3} \omega = -\int_{\gamma_1} \omega$$

για κάθε 1-μορφή ω. Άρα, $\int_{\partial\Sigma} \omega = 0$ και κατ' αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στην ισότητα $\partial\Sigma = 0$.

(Με χρήση γεωγραφικών όρων, το $\partial\Sigma$ ξεκινά από τον Βόρειο πόλο B, διατρέχει τη σφαίρα κατά μήκος ενός μεσημβρινού, φτάνει στον Νότιο πόλο N, κάνει παύση στον N και επιστρέφει στον B κατά μήκος του ιδίου μεσημβρινού και τελικά κάνει παύση στο B. Οι δύο διαδρομές κατά μήκος του μεσημβρινού γίνονται σε αντίθετες διευθύνσεις. Επομένως, τα δύο αντίστοιχα επικαμπύλια ολοκληρώματα αλληλοαναιρούνται. Στην Άσκηση 32 υπάρχει μία καμπύλη που εμφανίζεται δύο φορές στο σύνορο, δίχως αλληλοαναίρεση.)

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ STOKES

Θεώρημα 10.33. *Εάν Ψ είναι μία k-αλυσίδα κλάσεως $\mathcal{C}''$ σε ένα ανοικτό σύνολο $V \subset R^m$ και εάν ω είναι μία $(k-1)$-μορφή κλάσεως $\mathcal{C}'$ στο V, τότε*

$$\int_{\Psi} d\omega = \int_{\partial\Psi} \omega. \tag{91}$$

Η περίπτωση $k = m = 1$ δεν είναι παρά το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού (με μία επιπρόσθετη συνθήκη παραγωγισιμότητας). Η περίπτωση $k = m = 2$ είναι το θεώρημα του Green και η $k = m = 3$ είναι το λεγόμενο «θεώρημα της αποκλίσεως» του Gauss. Η περίπτωση $k = 2$, $m = 3$ είναι η αρχική περίπτωση που ανακαλύφθηκε από τον Stokes. (Στο βιβλίο του Spivak περιγράφεται ένα τμήμα από το ιστορικό υπόβαθρο.) Με αυτές τις ειδικές περιπτώσεις θα ασχοληθούμε περαιτέρω στο τέλος του παρόντος κεφαλαίου.

Απόδειξη. Είναι αρκετό να αποδειχθεί ότι

$$\int_{\Phi} d\omega = \int_{\partial\Phi} \omega \tag{92}$$

για κάθε προσανατολισμένο k-μονόπλοκο Φ κλάσεως $\mathcal{C}''$ στο V. Διότι εάν αποδειχθεί η (92) και εάν $\Psi = \sum_{i=1}^{r} \Phi_i$, τότε οι (87) και (89) συνεπάγονται την (91).

Θεωρούμε ένα μονόπλοκο Φ όπως παραπάνω και θέτουμε

$$\sigma = [\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k]. \tag{93}$$

Δηλαδή, το σ είναι το προσανατολισμένο k-μονόπλοκο, με πεδίο παραμέτρων το Q^k, το οποίο ορίζεται από την ταυτοτική απεικόνιση. Εφόσον η Φ ορίζεται επίσης στο Q^k (ανατρέξτε στον Ορισμό 10.30) και $\Phi \in \mathcal{C}''$, υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο $E \subset R^k$ που περιέχει το Q^k και υπάρχει μία $\mathcal{C}''$-απεικόνιση T του E στο V με $\Phi = T \circ \sigma$. Από τα Θεωρήματα 10.25 και 10.22(γ), η αριστερή πλευρά της (92) ισούται με

$$\int_{T\circ\sigma} d\omega = \int_{\sigma} (d\omega)_T = \int_{\sigma} (d\omega_T).$$

Μία επιπλέον εφαρμογή του Θεωρήματος 10.25 φανερώνει, σύμφωνα με την (89), ότι η δεξιά πλευρά της (92) είναι η

$$\int_{\partial(T\circ\sigma)} \omega = \int_{T(\partial\sigma)} \omega = \int_{\partial\sigma} \omega_T.$$

Εφόσον η ω_T είναι μία $(k-1)$-μορφή στο E, διαπιστώνουμε ότι *για την απόδειξη της (92), αρκεί να δείξουμε ότι*

$$\int_{\sigma} d\lambda = \int_{\partial\sigma} \lambda \tag{94}$$

για κάθε $(k-1)$-μορφή λ κλάσεως $\mathcal{C}'$ στο E, όπου σ είναι το μονόπλοκο στην (93).

Εάν $k = 1$, τότε ο ορισμός του προσανατολισμένου 0-μονοπλόκου φανερώνει ότι η (94) μετατρέπεται στην

$$\int_0^1 f'(u) = f(1) - f(0) \tag{95}$$

για κάθε συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση f στο $[0, 1]$, η οποία φυσικά αληθεύει, βάσει του θεμελιώδους θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού.

Εν συνεχεία, θεωρούμε ότι $k > 1$, επιλέγουμε έναν ακέραιο αριθμό r με $1 \leq r \leq k$ και θεωρούμε $f \in \mathcal{C}'(E)$. Τότε, αρκεί να αποδείξουμε την (94) στην περίπτωση όπου

$$\lambda = f(\mathbf{x})dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{r-1} \wedge dx_{r+1} \wedge \cdots \wedge dx_k, \tag{96}$$

εφόσον κάθε $(k-1)$-μορφή ισούται με άθροισμα τέτοιου είδους μορφών για $r = 1, \ldots, k$.

Σύμφωνα με την (85), το σύνορο του μονοπλόκου (93) είναι το

$$\partial\sigma = [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k] + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i \tau_i,$$

όπου για $i = 1, \ldots, k$ είναι

$$\tau_i = [\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{e}_{i+1}, \ldots, \mathbf{e}_k].$$

Θέτουμε

$$\tau_0 = [\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{r-1}, \mathbf{e}_{r+1}, \ldots, \mathbf{e}_k].$$

Σημειώνουμε ότι το τ_0 προκύπτει από το $[\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k]$ με $r-1$ διαδοχικές εναλλαγές του $\mathbf{e}_r$ και των αριστερών γειτονικών του στοιχείων. Άρα,

$$\partial\sigma = (-1)^{r-1}\tau_0 + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i \tau_i. \tag{97}$$

Κάθε τ_i $(i = 0, \ldots, k)$ έχει ως πεδίο παραμέτρων το Q^{k-1}.

Εάν $\mathbf{u} \in Q^{k-1}$ και $\mathbf{x} = \tau_0(\mathbf{u})$, τότε

$$x_j = \begin{cases} u_j & \text{εάν } 1 \leq j < r, \\ 1 - (u_1 + \cdots + u_{k-1}) & \text{εάν } j = r, \\ u_{j-1} & \text{εάν } r < j \leq k. \end{cases} \tag{98}$$

Εάν i είναι ένας δείκτης με $1 \leq i \leq k$, $\mathbf{u} \in Q^{k-1}$ και $\mathbf{x} = \tau_i(\mathbf{u})$, τότε

$$x_j = \begin{cases} u_j & \text{εάν } 1 \leq j < i, \\ 0 & \text{εάν } j = i, \\ u_{j-1} & \text{εάν } i < j \leq k. \end{cases} \tag{99}$$

Για κάθε δείκτη i με $0 \leq i \leq k$ ας είναι J_i η ορίζουσα Jacobi της απεικονίσεως

$$(u_1, \ldots, u_{k-1}) \to (x_1, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_k) \tag{100}$$

που επάγεται από την τ_i, σύμφωνα με τις (98) και (99). Εάν $i = 0$ ή $i = r$, τότε οι (98) και (99) φανερώνουν ότι η (100) είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Άρα, $J_0 = 1$ και $J_r = 1$. Για τους υπόλοιπους δείκτες i, το γεγονός ότι $x_i = 0$ στην (99) συνεπάγεται ότι η J_i έχει μία γραμμή μηδενικών και επομένως $J_i = 0$. Συνεπώς,

$$\int_{\tau_i} \lambda = 0 \qquad (i \neq 0, i \neq r), \tag{101}$$

λόγω των (35) και (96). Επομένως, η (97) χορηγεί ότι

$$\begin{aligned} \int_{\partial\sigma} \lambda &= (-1)^{r-1} \int_{\tau_0} \lambda + (-1)^r \int_{\tau_r} \lambda \\ &= (-1)^{r-1} \int_{Q^{k-1}} [f(\tau_0(\mathbf{u})) - f(\tau_r(\mathbf{u}))] d\mathbf{u}. \end{aligned} \tag{102}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned} d\lambda &= (D_r f)(\mathbf{x}) dx_r \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{r-1} \wedge dx_{r+1} \wedge \cdots \wedge dx_k \\ &= (-1)^{r-1} (D_r f)(\mathbf{x}) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \end{aligned}$$

και επομένως

$$\int_\sigma d\lambda = (-1)^{r-1} \int_{Q^k} (D_r f)(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \tag{103}$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα στην (103) ολοκληρώνοντας αρχικά ως προς x_r υπεράνω του διαστήματος

$$[0, 1 - (x_1 + \cdots + x_{r-1} + x_{r+1} + \cdots + x_k)]$$

και κατόπιν θέτοντας $(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_k) = (u_1, \ldots, u_{k-1})$. Με τη βοήθεια της (98) παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα υπεράνω του Q^k στην (103) ισούται με το ολοκλήρωμα υπεράνω του Q^{k-1} στην (102). Επομένως, η (94) ισχύει και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

ΚΛΕΙΣΤΕΣ ΚΑΙ ΑΚΡΙΒΕΙΣ ΜΟΡΦΕΣ

Ορισμός 10.34. Θεωρούμε μία k-μορφή ω σε ένα ανοικτό σύνολο $E \subset R^n$. Η ω λέγεται *ακριβής* εάν και μόνον εάν υπάρχει μία $(k-1)$-μορφή λ στο E με $\omega = d\lambda$.

Εάν η ω είναι κλάσεως $\mathcal{C}'$, τότε λέγεται *κλειστή* εάν και μόνον εάν $d\omega = 0$.

Το Θεώρημα 10.20(β) φανερώνει ότι κάθε ακριβής μορφή κλάσεως $\mathcal{C}'$ είναι κλειστή.

Σε ορισμένα σύνολα E, για παράδειγμα σε κυρτά σύνολα, ισχύει και το αντίστροφο. Αυτό είναι και το περιεχόμενο του Θεωρήματος 10.39 (συνήθως γνωστό ως *λήμμα του Poincaré*[6]) και του Θεωρήματος 10.40. Παρ' όλα αυτά, στα Παραδείγματα 10.36 και 10.37 θα παρουσιασθούν κλειστές μορφές οι οποίες δεν είναι ακριβείς.

Παρατήρηση 10.35.

[6] Σ. τ. Μ.: Jules Henri Poincaré (1854-1912). Κορυφαίος Γάλλος μαθηματικός, ο οποίος διέπρεψε σε πολλές περιοχές των Μαθηματικών, Θεωρητικών και Εφαρμοσμένων. Θεωρείται ο πατέρας της Αλγεβρικής Τοπολογίας.

Ο Poincaré καταγόταν από οικογένεια που είχε έντονη ανάμειξη με την πολιτική. Ήταν εξάδελφος του ενάτου προέδρου της Γαλλικής Δημοκρατίας Raymond Poincaré. Από τα γυμνασιακά του χρόνια, ο Poincaré έδειξε το μέγεθος της ευφυΐας του. Το έτος 1873 ο Poincaré ξεκίνησε τις σπουδές του στο Πολυτεχνείο των Παρισίων, όπου και έλαβε πολλά βραβεία. Με το τέλος των σπουδών του εκεί, το έτος 1875, συνέχισε τις σπουδές του στην Σχολή Μεταλλειολογίας των Παρισίων, με σκοπό να γίνει μηχανικός ορυχείων. Εκεί εκπόνησε τη διδακτορική του διατριβή υπό τον Charles Hermite (1822-1901). Έλαβε το διδακτορικό του δίπλωμα το έτος 1879. Το ίδιο έτος ο Poincaré διορίσθηκε καθηγητής Μαθηματικής Αναλύσεως στο Πανεπιστήμιο της Caen. Τρία έτη αργότερα διορίσθηκε καθηγητής Μαθηματικής Φυσικής στο Πανεπιστήμιο της Σορβόννης. Το έτος 1887 ο Poincaré εξελέγη μέλος της Ακαδημίας των Επιστημών των Παρισίων και δύο έτη μετά εχρίσθη Ιππότης της Λεγεώνας της Τιμής για την προσφορά του στην επιστήμη. Το έτος 1906 ο Poincaré εξελέγη πρόεδρος της Ακαδημίας των Επιστημών των Παρισίων.

Ο Poincaré έχει χαρακτηρισθεί ως καθολικός μαθηματικός, λόγω του πολύ μεγάλου εύρους των επιστημονικών του ερευνών. Η αφηρημάδα του Poincaré υπήρξε παροιμιώδης και υπάρχουν πολλές αφηγήσεις που το τεκμηριώνουν αυτό. Εκτός από το ογκώδες επιστημονικό έργο, ο Poincaré συνέγραψε πάνω από εξήντα βιβλία εκλαϊκεύσεως των Μαθηματικών και άλλων επιστημών, τα οποία και μεταφράσθηκαν σε πολλές γλώσσες. Για το έργο του αυτό εξελέγη μέλος του τμήματος Λογοτεχνίας της Ακαδημίας των Επιστημών των Παρισίων.

(α) Μπορούμε να επαληθεύσουμε εάν μία k-μορφή είναι κλειστή, απλώς με διαφόριση των συντελεστών στη συνήθη αναπαράσταση της ω. Επί παραδείγματι, μία 1-μορφή

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x})dx_i, \tag{104}$$

με $f_i \in \mathcal{C}'(E)$ $(i = 1, \ldots, n)$ για κάποιο ανοικτό σύνολο $E \subset R^n$, είναι κλειστή εάν και μόνον εάν ισχύουν οι εξισώσεις

$$(D_j f_i)(\mathbf{x}) = (D_i f_j)(\mathbf{x}) \tag{105}$$

για οποιουσδήποτε δείκτες i, j με $1 \le i, j \le n$ και για κάθε $\mathbf{x} \in E$.

Σημειώνουμε ότι η (105) είναι «σημειακή» συνθήκη. Δεν εμπεριέχει ολικές ιδιότητες που εξαρτώνται από το σχήμα του E.

Από την άλλη πλευρά, για να αποδείξουμε ότι η ω είναι ακριβής στο E, πρέπει να αποδείξουμε την ύπαρξη μίας μορφής λ στο E με $d\lambda = \omega$. Αυτό ισοδυναμεί με την επίλυση ενός συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων όχι απλώς τοπικά αλλά σε ολόκληρο το E. Επί παραδείγματι, για να αποδείξουμε ότι η (104) είναι ακριβής στο E, πρέπει να βρούμε μία συνάρτηση (δηλαδή μία 0-μορφή) $g \in \mathcal{C}'(E)$ ούτως ώστε να ισχύει ότι

$$(D_i g)(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \in E, 1 \le i \le n). \tag{106}$$

Φυσικά, η (105) είναι αναγκαία συνθήκη για την επιλυσιμότητα της (106).

(β) Ας είναι ω μία *ακριβής* k-μορφή στο E. Τότε, υπάρχει μία $(k-1)$-μορφή λ με $d\lambda = \omega$. Από το θεώρημα του Stokes έπεται ότι

$$\int_\Psi \omega = \int_\Psi d\lambda = \int_{\partial\Psi} \lambda \tag{107}$$

για κάθε k-αλυσίδα Ψ κλάσεως $\mathcal{C}''$ στο E.

Εάν Ψ_1 και Ψ_2 είναι τέτοιες αλυσίδες και εάν έχουν κοινό σύνορο, τότε

$$\int_{\Psi_1} \omega = \int_{\Psi_2} \omega.$$

Ιδιαιτέρως, *το ολοκλήρωμα μίας ακριβούς k-μορφής στο E υπεράνω κάθε k-αλυσίδας στο E με μηδενικό σύνορο είναι ίσο με 0.*

Μία ειδική περίπτωση που είναι σημαντική είναι το γεγονός ότι το ολοκλήρωμα μίας ακριβούς 1-μορφής στο E υπεράνω κλειστής (διαφορίσιμης) καμπύλης στο E είναι μηδενικό.

(γ) Ας είναι ω μία *κλειστή* k-μορφή στο E. Τότε, $d\omega = 0$. Από το θεώρημα του Stokes έπεται ότι

$$\int_{\partial\Psi} \omega = \int_{\Psi} d\omega = 0 \tag{108}$$

για κάθε $(k+1)$-αλυσίδα Ψ κλάσεως $\mathcal{C}''$ στο E.

Με διαφορετική διατύπωση, *το ολοκλήρωμα μίας κλειστής k-μορφής στο E υπεράνω οποιασδήποτε k-αλυσίδας που ισούται με το σύνορο μίας $(k+1)$-αλυσίδας στο E είναι ίσο με 0.*

(δ) Ας είναι Ψ μία $(k+1)$-αλυσίδα στο E και λ μία $(k-1)$-μορφή στο E, και οι δύο κλάσεως $\mathcal{C}''$. Εφόσον $d^2\lambda = 0$, εφαρμόζοντας δύο φορές το θεώρημα του Stokes, λαμβάνουμε ότι

$$\int_{\partial\partial\Psi} \lambda = \int_{\partial\Psi} d\lambda = \int_{\Psi} d^2\lambda = 0. \tag{109}$$

Συνεπώς, καταλήγουμε ότι $\partial^2\Psi = 0$. Με διαφορετική διατύπωση, *το σύνορο ενός συνόρου είναι η μηδενική αλυσίδα.*

Ανατρέξτε στην Άσκηση 16 για μία διαφορετική απόδειξη αυτού του γεγονότος.

Παράδειγμα 10.36. Ας είναι $E = R^2 - \{\mathbf{0}\}$, δηλαδή το επίπεδο χωρίς την αρχή των συντεταγμένων. Η 1-μορφή

$$\eta = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} \tag{110}$$

είναι *κλειστή* στο $R^2 - \{\mathbf{0}\}$. Αυτό επαληθεύεται εύκολα με διαφόριση. Θεωρούμε έναν πραγματικό αριθμό r με $r > 0$ και ορίζουμε την απεικόνιση γ στο $[0, 2\pi]$ μέσω της ισότητας

$$\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t) \qquad (t \in [0, 2\pi]). \tag{111}$$

Τότε, η γ είναι μία καμπύλη (ένα «προσανατολισμένο 1-μονόπλοκο») στο $R^2 - \{\mathbf{0}\}$. Εφόσον $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, έχουμε ότι

$$\partial\gamma = 0. \tag{112}$$

Με έναν άμεσο υπολογισμό βρίσκουμε ότι

$$\int_\gamma \eta = 2\pi \neq 0. \tag{113}$$

Από τα (β) και (γ) της Παρατηρήσεως 10.35 και την (113) συνάγουμε τα εξής:

Κατά πρώτον, *η μορφή* η *δεν είναι ακριβής στο* $R^2 - \{\mathbf{0}\}$, αλλιώς θα προέκυπτε από την (112) ότι το ολοκλήρωμα στην (113) είναι ίσο με 0.

Κατά δεύτερον, *η καμπύλη* γ *δεν είναι το σύνορο καμίας 2-αλυσίδας στο* $R^2 - \{\mathbf{0}\}$ (κλάσεως $\mathcal{C}''$), αλλιώς από το γεγονός ότι η μορφή η είναι κλειστή θα προέκυπτε ότι το ολοκλήρωμα στην (113) είναι ίσο με 0.

Παράδειγμα 10.37. Ας είναι $E = R^3 - \{\mathbf{0}\}$, ο χώρος τριών διαστάσεων χωρίς την αρχή των συντεταγμένων. Ορίζουμε

$$\zeta = \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \tag{114}$$

όπου γράφουμε (x, y, z) στη θέση του (x_1, x_2, x_3). Διαφορίζοντας προκύπτει ότι $d\zeta = 0$, επομένως η ζ είναι κλειστή 2-μορφή στο $R^3 - \{\mathbf{0}\}$.

Θεωρούμε την 2-αλυσίδα Σ στο $R^3 - \{\mathbf{0}\}$ που έχει κατασκευασθεί στο Παράδειγμα 10.32. Υπενθυμίζουμε ότι η Σ αποτελεί μία παραμετροποίηση της μοναδιαίας σφαίρας του R^3. Χρησιμοποιώντας το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο D του Παραδείγματος 10.32 ως πεδίο παραμέτρων βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\int_\Sigma \zeta = \int_D \sin u \, du dv = 4\pi \neq 0. \tag{115}$$

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, συνάγουμε ότι η ζ *δεν* είναι ακριβής στο $R^3 - \{\mathbf{0}\}$ (εφόσον $\partial\Sigma = 0$, κατά το Παράδειγμα 10.32) και ότι η σφαίρα Σ δεν αποτελεί σύνορο καμίας 3-αλυσίδας (κλάσεως $\mathcal{C}''$) στο $R^3 - \{\mathbf{0}\}$ μολονότι $\partial\Sigma = 0$.

Το επόμενο αποτέλεσμα θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη του Θεωρήματος 10.39.

Θεώρημα 10.38. *Υποθέτουμε ότι E είναι ένα κυρτό ανοικτό σύνολο στον R^n, ότι $f \in \mathcal{C}'(E)$, ότι p είναι ακέραιος αριθμός με $1 \leq p \leq n$ και ότι*

$$(D_j f)(\mathbf{x}) = 0 \qquad (p < j \leq n, \ \ \mathbf{x} \in E). \tag{116}$$

Τότε, υπάρχει $F \in \mathcal{C}'(E)$ ούτως ώστε

$$(D_p F)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad (D_j F)(\mathbf{x}) = 0 \qquad (p < j \leq n, \mathbf{x} \in E). \tag{117}$$

***Απόδειξη*.** Γράφουμε $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_p, \mathbf{x}'')$, όπου

$$\mathbf{x}' = (x_1, \ldots, x_{p-1}), \quad \mathbf{x}'' = (x_{p+1}, \ldots, x_n).$$

(Όταν $p = 1$, τότε το $\mathbf{x}'$ δεν υφίσταται. Όταν $p = n$, τότε το $\mathbf{x}''$ δεν υφίσταται.) Ας είναι V το σύνολο των $(\mathbf{x}', x_p) \in R^p$ με $(\mathbf{x}', x_p, \mathbf{x}'') \in E$ για κάποιο $\mathbf{x}''$. Όντας προβολή του E, το V είναι κυρτό σύνολο στον R^p. Εφόσον το E είναι κυρτό και ισχύει η (116), η $f(\mathbf{x})$ δεν εξαρτάται από το $\mathbf{x}''$. Επομένως, υπάρχει συνάρτηση ϕ με πεδίο ορισμού το V ούτως ώστε

$$f(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}', x_p)$$

για κάθε $\mathbf{x} \in E$.

Εάν $p = 1$, τότε το V είναι ένα ανοικτό διάστημα στον R^1 (πιθανώς μη φραγμένο). Επιλέγουμε $c \in V$ και ορίζουμε

$$F(\mathbf{x}) = \int_c^{x_1} \phi(t)dt \qquad (\mathbf{x} \in E).$$

Εάν $p > 1$, τότε θεωρούμε το σύνολο U των $\mathbf{x}' \in R^{p-1}$ με $(\mathbf{x}', x_p) \in V$ για κάποιο x_p. Το U είναι κυρτό ανοικτό σύνολο στον R^{p-1} και υπάρχει μία συνάρτηση $\alpha \in \mathcal{C}'(U)$ με $(\mathbf{x}', \alpha(\mathbf{x}')) \in V$ για κάθε $\mathbf{x}' \in U$. Δηλαδή, το γράφημα της α βρίσκεται στο V (Άσκηση 29). Ορίζουμε

$$F(\mathbf{x}) = \int_{\alpha(\mathbf{x}')}^{x_p} \phi(\mathbf{x}', t)dt \qquad (\mathbf{x} \in E).$$

Σε κάθε περίπτωση, η F ικανοποιεί την (117).

(*Σημείωση:* Υπενθυμίζουμε τη συνήθη σύμβαση ότι το $\int_a^b$ ισούται με $-\int_b^a$ εάν $b < a$.) $\square$

Θεώρημα 10.39. *Εάν $E \subset R^n$ είναι ένα κυρτό και ανοικτό σύνολο, εάν $k \geq 1$ και εάν ω είναι μία k-μορφή κλάσεως $\mathcal{C}'$ στο E με $d\omega = 0$, τότε υπάρχει μία $(k-1)$-μορφή λ στο E με $\omega = d\lambda$.*

Εν συντομία, οι κλειστές μορφές σε κυρτά σύνολα είναι ακριβείς.

Απόδειξη. Για $p = 1, \ldots, n$ συμβολίζουμε με Y_p το σύνολο των k-μορφών ω κλάσεως $\mathcal{C}'$ στο E με συνήθη αναπαράσταση την

$$\omega = \sum_I f_I(\mathbf{x})dx_I, \tag{118}$$

στην οποία δεν εμπλέκονται οι $dx_{p+1}, \ldots, dx_n$. Με διαφορετική διατύπωση, για έναν αύξοντα k-δείκτη ισχύει ότι έχει όλα τα στοιχεία από το $\{1, \ldots, p\}$, εάν $f_I(\mathbf{x}) \neq 0$ για κάποιο $\mathbf{x} \in E$.

Θα προχωρήσουμε με επαγωγή ως προς p.

Υποθέτουμε ότι $\omega \in Y_1$. Τότε, $\omega = f(\mathbf{x})dx_1$. Εφόσον $d\omega = 0$, ισχύει ότι $(D_j f)(\mathbf{x}) = 0$ για κάθε δείκτη j με $1 < j \leq n$ και κάθε $\mathbf{x} \in E$. Λόγω του Θεωρήματος 10.38, υπάρχει $F \in \mathcal{C}'(E)$ με $D_1 F = f$ και $D_j F = 0$ για κάθε δείκτη j με $1 < j \leq n$. Άρα,

$$dF = (D_1 F)(\mathbf{x})dx_1 = f(\mathbf{x})dx_1 = \omega.$$

Τώρα, θεωρούμε $p > 1$ και κάνουμε την ακόλουθη επαγωγική υπόθεση: *Κάθε κλειστή k-μορφή που ανήκει στο Y_{p-1} είναι ακριβής στο E.*

Επιλέγουμε $\omega \in Y_p$ ούτως ώστε $d\omega = 0$. Από την (118) έχουμε ότι

$$\sum_I \sum_{j=1}^n (D_j f_I)(\mathbf{x})dx_j \wedge dx_I = d\omega = 0. \tag{119}$$

Θεωρούμε έναν δείκτη j με $p < j \leq n$. Κάθε αύξων k-δείκτης I που εμφανίζεται στην (118) έχει όλα τα στοιχεία από το $\{1, \ldots, p\}$. Εάν I_1, I_2

είναι δύο από αυτούς τους k-δείκτες με $I_1 \neq I_2$, τότε οι $(k+1)$-δείκτες (I_1, j), (I_2, j) είναι διακεκριμένοι. Επομένως, δεν υφίσταται αλληλοαναίρεση. Από την (119) συνάγουμε ότι κάθε συντελεστής στην (118) ικανοποιεί την

$$(D_j f_I)(\mathbf{x}) = 0 \qquad (\mathbf{x} \in E,\, p < j \leq n). \tag{120}$$

Τώρα, συγκεντρώνουμε τους όρους της (118) που περιέχουν την dx_p και γράφουμε την ω στη μορφή

$$\omega = \alpha + \sum_{I_0} f_I(\mathbf{x}) dx_{I_0} \wedge dx_p, \tag{121}$$

όπου $\alpha \in Y_{p-1}$, κάθε I_0 είναι αύξων $(k-1)$-δείκτης στο $\{1, \ldots, p-1\}$ και $I = (I_0, p)$. Λόγω της (120), το Θεώρημα 10.38 χορηγεί συναρτήσεις $F_I \in \mathcal{C}'(E)$ με

$$D_p F_I = f_I, \quad D_j F_I = 0 \quad (p < j \leq n). \tag{122}$$

Θέτουμε

$$\beta = \sum_{I_0} F_I(\mathbf{x}) dx_{I_0} \tag{123}$$

και ορίζουμε $\gamma = \omega - (-1)^{k-1} d\beta$. Εφόσον η β είναι $(k-1)$-μορφή, έπεται ότι

$$\gamma = \omega - \sum_{I_0} \sum_{j=1}^{p} (D_j F_I)(\mathbf{x}) dx_{I_0} \wedge dx_j = \alpha - \sum_{I_0} \sum_{j=1}^{p-1} (D_j F_I)(\mathbf{x}) dx_{I_0} \wedge dx_j,$$

η οποία βρίσκεται προφανώς στο Y_{p-1}. Εφόσον $d\omega = 0$ και $d^2\beta = 0$, προκύπτει ότι $d\gamma = 0$. Επομένως, από την επαγωγική υπόθεση λαμβάνουμε ότι $\gamma = d\mu$, για κάποια $(k-1)$-μορφή μ στο E. Εάν $\lambda = \mu + (-1)^{k-1}\beta$, τότε καταλήγουμε στην ισότητα $\omega = d\lambda$.

Η απόδειξη ολοκληρώνεται με χρήση επαγωγής. □

Θεώρημα 10.40. *Θεωρούμε έναν ακέραιο αριθμό k με $1 \leq k \leq n$. Ας είναι $E \subset R^n$ ένα ανοικτό σύνολο στο οποίο κάθε κλειστή k-μορφή* *είναι ακριβής. Ας είναι επίσης* T *μία 1-1* $\mathcal{C}''$*-απεικόνιση του* E *επί ενός ανοικτού συνόλου* $U \subset R^n$*, η οποία έχει αντίστροφη απεικόνιση* S *κλάσεως* $\mathcal{C}''$.

Τότε, κάθε κλειστή k*-μορφή στο* U *είναι ακριβής στο* U.

Σημειώνουμε ότι κάθε κυρτό ανοικτό σύνολο E ικανοποιεί την παρούσα υπόθεση, σύμφωνα με το Θεώρημα 10.39. Η σχέση μεταξύ των E και U εκφράζεται λέγοντας ότι τα σύνολα αυτά είναι $\mathcal{C}''$*-ισοδύναμα.*

Συνεπώς, *κάθε κλειστή μορφή σε ένα σύνολο το οποίο είναι* $\mathcal{C}''$*-ισοδύναμο με κυρτό ανοικτό σύνολο, είναι ακριβής.*

Απόδειξη. Ας είναι ω μία k-μορφή στο U με $d\omega = 0$. Από το Θεώρημα 10.22(γ) προκύπτει ότι η ω_T είναι k-μορφή στο E με $d(\omega_T) = 0$. Κατά συνέπεια, ισχύει ότι $\omega_T = d\lambda$ για κάποια $(k-1)$-μορφή λ στο E. Με χρήση του Θεωρήματος 10.23 και με μία ακόμη εφαρμογή του Θεωρήματος 10.22(γ) λαμβάνουμε ότι

$$\omega = (\omega_T)_S = (d\lambda)_S = d(\lambda_S).$$

Εφόσον η λ_S είναι $(k-1)$-μορφή στο E, η ω είναι ακριβής στο U. □

Παρατήρηση 10.41. Για τις εφαρμογές, τα διαστήματα είναι συχνά καταλληλότερα ως πεδία παραμέτρων από τα μονόπλοκα. Εάν η έως τώρα ανάπτυξη είχε βασισθεί σε διαστήματα και όχι σε μονόπλοκα, τότε οι υπολογισμοί στην απόδειξη του θεωρήματος του Stokes θα ήταν ακόμη απλούστεροι. (Αυτό γίνεται στο βιβλίο του Spivak). Ο λόγος προτιμήσεως των μονοπλόκων έγκειται στο γεγονός ότι ο ορισμός του συνόρου ενός προσανατολισμένου μονοπλόκου φαίνεται ευκολότερος και πιο φυσιολογικός από ότι ο αντίστοιχος ορισμός του συνόρου ενός διαστήματος. (Ανατρέξτε στην Άσκηση 19). Επιπροσθέτως, ο διαμερισμός των συνόλων σε μονόπλοκα (διαδικασία που ονομάζεται «τριγωνοποιήση») κατέχει σημαντικό ρόλο στην Τοπολογία και υπάρχουν ισχυρές διασυνδέσεις μεταξύ ορισμένων πλευρών της Τοπολογίας με τη θεωρία των διαφορικών μορφών. Ορισμένες από αυτές υποδεικνύονται στην Ενότητα 10.35. Το βιβλίο των Singer και Thorpe περιέχει μία καλή εισαγωγή στα θέματα αυτά.

Εφόσον κάθε διάστημα μπορεί να τριγωνοποιηθεί, μπορούμε να το θεωρήσουμε ως αλυσίδα. Για τη διάσταση 2, αυτό ήδη έχει γίνει στο Παράδειγμα 10.32. Για τη διάσταση 3, ανατρέξτε στην Άσκηση 18.

Το λήμμα του Poincaré (Θεώρημα 10.39) μπορεί να αποδειχθεί με αρκετούς τρόπους. Για του λόγου το αληθές, ανατρέξτε στη σελίδα 94 του βιβλίου του Spivak ή στη σελίδα 280 του βιβλίου του Flemming. Στις Ασκήσεις 24 και 27 υποδεικνύονται δύο απλές αποδείξεις που εφαρμόζονται σε ειδικές περιπτώσεις.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Θα κλείσουμε αυτό το κεφάλαιο με ορισμένες εφαρμογές των όσων παρουσιάσαμε έως τώρα σε θεωρήματα που αφορούν στη διανυσματική ανάλυση του R^3. Αυτά είναι ειδικές περιπτώσεις θεωρημάτων περί διαφορικών μορφών, αλλά συνήθως διατυπώνονται με χρήση διαφορετικής ορολογίας. Επομένως, αντιμετωπίζουμε αρχικά την μεταφορά των προηγουμένων εννοιών σε καινούριο ορολογικό πλαίσιο.

10.42 Διανυσματικά πεδία. Ας είναι $\mathbf{F} = F_1\mathbf{e}_1 + F_2\mathbf{e}_2 + F_3\mathbf{e}_3$ μία συνεχής απεικόνιση ενός ανοικτού συνόλου $E \subset R^3$ στον R^3. Εφόσον η $\mathbf{F}$ αντιστοιχίζει ένα διάνυσμα σε κάθε σημείο του E, η $\mathbf{F}$ ονομάζεται συνήθως *διανυσματικό πεδίο*, κυρίως σε θέματα που σχετίζονται με τη Φυσική. Σε κάθε τέτοια απεικόνιση $\mathbf{F}$ αντιστοιχίζεται η 1-μορφή

$$\lambda_{\mathbf{F}} = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \tag{124}$$

και η 2-μορφή

$$\omega_{\mathbf{F}} = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy. \tag{125}$$

Σε αυτό το σημείο καθώς και στο υπόλοιπο του κεφαλαίου χρησιμοποιούμε το συνήθη συμβολισμό (x, y, z) αντί του (x_1, x_2, x_3).

Αντιστρόφως, είναι σαφές ότι κάθε 1-μορφή στο E είναι του τύπου $\lambda_{\mathbf{F}}$ για κάποιο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ στο E. Επίσης κάθε 2-μορφή στο E είναι του τύπου $\omega_{\mathbf{F}}$ για κάποιο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ στο E. Στον R^3, η μελέτη των 1-μορφών και 2-μορφών γίνεται συγχρόνως με τη μελέτη των διανυσματικών πεδίων.

Εάν $u \in \mathcal{C}'(E)$ είναι πραγματική συνάρτηση, τότε η *κλίση* της u

$$\nabla u = (D_1 u)\mathbf{e}_1 + (D_2 u)\mathbf{e}_2 + (D_3 u)\mathbf{e}_3$$

αποτελεί παράδειγμα διανυσματικού πεδίου στο E.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\mathbf{F}$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο στο E, κλάσεως $\mathcal{C}'$. Ο *στροβιλισμός* $\nabla \times \mathbf{F}$ του $\mathbf{F}$ είναι το διανυσματικό πεδίο στο E που ορίζεται ως

$$\nabla \times \mathbf{F} = (D_2 F_3 - D_3 F_2)\mathbf{e}_1 + (D_3 F_1 - D_1 F_3)\mathbf{e}_2 + (D_1 F_2 - D_2 F_1)\mathbf{e}_3$$

και η *απόκλιση* του $\mathbf{F}$ είναι η πραγματική συνάρτηση $\nabla \cdot \mathbf{F}$ στο E που ορίζεται ως

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = D_1 F_1 + D_2 F_2 + D_3 F_3.$$

Οι ποσότητες αυτές έχουν ποικίλες φυσικές ερμηνείες. Για περισσότερες λεπτομέρειες, παραπέμπουμε στο βιβλίο του Kellogg.

Παρακάτω παραθέτουμε ορισμένες σχέσεις μεταξύ των παραπάνω εννοιών.

Θεώρημα 10.43. *Υποθέτουμε ότι E είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του R^3, ότι $u \in \mathcal{C}''(E)$ και ότι $\mathbf{G}$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο στο E, κλάσεως $\mathcal{C}''$.*

(α) *Εάν $\mathbf{F} = \nabla u$, τότε $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.*

(β) *Εάν $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$, τότε $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$.*

Επιπλέον, εάν το E είναι $\mathcal{C}''$-ισοδύναμο με ένα κυρτό σύνολο, τότε τα (α) *και* (β) *έχουν αντίστροφα, στα οποία υποθέτουμε ότι $\mathbf{F}$ είναι διανυσματικό πεδίο στο E, κλάσεως $\mathcal{C}'$:*

(α') *Εάν $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, τότε $\mathbf{F} = \nabla u$ για κάποια συνάρτηση $u \in \mathcal{C}''(E)$.*

(β') *Εάν $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, τότε $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$ για κάποιο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{G}$ στο E, κλάσεως $\mathcal{C}''$.*

Απόδειξη. Εάν συγκρίνουμε τους ορισμούς των ∇u, $\nabla \times \mathbf{F}$ και $\nabla \cdot \mathbf{F}$ με τις διαφορικές μορφές που δίδονται στις (124) και (125), τότε λαμβάνουμε τα εξής:

$$
\begin{array}{lll}
\mathbf{F} = \nabla u & \text{εάν και μόνον εάν} & \lambda_{\mathbf{F}} = du. \\
\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0} & \text{εάν και μόνον εάν} & d\lambda_{\mathbf{F}} = 0. \\
\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G} & \text{εάν και μόνον εάν} & \omega_{\mathbf{F}} = d\lambda_{\mathbf{G}}. \\
\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 & \text{εάν και μόνον εάν} & d\omega_{\mathbf{F}} = 0.
\end{array}
$$

Εάν $\mathbf{F} = \nabla u$, τότε $\lambda_{\mathbf{F}} = du$ και επομένως $d\lambda_{\mathbf{F}} = d^2u = 0$ (Θεώρημα 10.20), το οποίο σημαίνει ότι $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Άρα, το (α) έχει αποδειχθεί.

Σχετικά με το (α'), η υπόθεση ισοδυναμεί με την ισότητα $d\lambda_{\mathbf{F}} = 0$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 10.40, $\lambda_{\mathbf{F}} = du$ για κάποια 0-μορφή u. Συνεπώς, $\mathbf{F} = \nabla u$.

Οι αποδείξεις των (β) και (β') είναι παρόμοιες. □

10.44 Στοιχεία όγκου. Η k-μορφή

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$$

ονομάζεται το *στοιχείο όγκου* στον R^k. Συχνά συμβολίζεται με dV (ή με dV_k εάν επιθυμούμε να δώσουμε έμφαση στη διάσταση). Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$\int_\Phi f\,dV = \int_\Phi f(\mathbf{x})\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k, \tag{126}$$

όπου Φ είναι μία θετικά προσανατολισμένη k-επιφάνεια του R^k και f είναι συνεχής συνάρτηση στο πεδίο τιμών της Φ.

Ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιούμε αυτήν την ορολογία είναι πολύ απλός: Εάν D είναι πεδίο παραμέτρων στον R^k και εάν Φ είναι μία 1-1 $\mathscr{C}'$-απεικόνιση του D στον R^k με θετική ορίζουσα Jacobi J_Φ, τότε η δεξιά πλευρά της (126) είναι η

$$\int_D f(\Phi(\mathbf{u}))J_\Phi(\mathbf{u})\,d\mathbf{u} = \int_{\Phi(D)} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x},$$

σύμφωνα με την (35) και το Θεώρημα 10.9.

Ιδιαιτέρως, όταν $f = 1$, η (126) ορίζει τον *όγκο* της Φ. Έχουμε ήδη συναντήσει μία ειδική περίπτωση αυτού στην (36).

Ο συνήθης συμβολισμός για το dV_2[7] είναι dA.

10.45 Το Θεώρημα του Green. *Υποθέτουμε ότι E είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του R^2, ότι $\alpha, \beta \in \mathcal{C}'(E)$ και ότι Ω είναι ένα κλειστό υποσύνολο του E με θετικά προσανατολισμένο σύνορο $\partial\Omega$, όπως έχει ορισθεί στην Ενότητα 10.31. Τότε,*

$$\int_{\partial\Omega} (\alpha dx + \beta dy) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) dA. \tag{127}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\lambda = \alpha dx + \beta dy$. Τότε,

$$d\lambda = (D_2\alpha) dy \wedge dx + (D_1\beta) dx \wedge dy = (D_1\beta - D_2\alpha) dA$$

και επομένως η (127) ισοδυναμεί με την

$$\int_{\partial\Omega} \lambda = \int_{\Omega} d\lambda,$$

η οποία και ισχύει, σύμφωνα με το Θεώρημα 10.33. □

Θεωρώντας στο προηγούμενο θεώρημα ότι $\alpha(x, y) = -y$ και $\beta(x, y) = x$ $((x, y) \in E)$, η (127) μετατρέπεται στην

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (x dy - y dx) = A(\Omega), \tag{128}$$

όπου $A(\Omega)$ είναι το εμβαδό του Ω.

Με $\alpha(x, y) = 0$ και $\beta(x, y) = x$ $((x, y) \in E)$ προκύπτει μία παρόμοια σχέση. Στο Παράδειγμα 10.12(β) περιέχεται μία ειδική περίπτωση αυτού.

10.46 Στοιχεία εμβαδού στον R^3. Ας είναι Φ μία 2-επιφάνεια στον R^3, κλάσεως $\mathcal{C}'$, με πεδίο παραμέτρων $D \subset R^2$. Σε κάθε σημείο $(u, v) \in D$ αντιστοιχίζουμε το διάνυσμα

$$\mathbf{N}(u, v) = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \mathbf{e}_3. \tag{129}$$

[7] Σ. τ. Μ.: Αυτή η διαφορική μορφή ονομάζεται συνήθως *στοιχείο εμβαδού*.

Οι ορίζουσες Jacobi στην (129) αντιστοιχούν στην ισότητα

$$(x, y, z) = \Phi(u, v). \tag{130}$$

Εάν f είναι μία συνεχής συνάρτηση στο $\Phi(D)$, τότε ορίζουμε το *επιφανειακό ολοκλήρωμα* της f υπεράνω της Φ ως

$$\int_{\Phi} f dA = \int_{D} f(\Phi(u, v))|\mathbf{N}(u, v)| du dv. \tag{131}$$

Ιδιαιτέρως, όταν $f = 1$, λαμβάνουμε το *εμβαδό* της Φ από την ισότητα

$$A(\Phi) = \int_{D} |\mathbf{N}(u, v)| du dv. \tag{132}$$

Στα επόμενα θα διαπιστώσουμε ότι η (131) και η ειδική περίπτωσή της (132) αποτελούν εύλογους ορισμούς. Επίσης, θα περιγράψουμε τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του διανύσματος $\mathbf{N}$.

Θέτουμε $\Phi = \varphi_1\mathbf{e}_1 + \varphi_2\mathbf{e}_2 + \varphi_3\mathbf{e}_3$. Θεωρούμε ένα σημείο $\mathbf{p}_0 = (u_0, v_0) \in D$. Θέτουμε $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{p}_0)$ και

$$\alpha_i = (D_1\varphi_i)(\mathbf{p}_0), \quad \beta_i = (D_2\varphi_i)(\mathbf{p}_0) \quad (i = 1, 2, 3). \tag{133}$$

Ας είναι $T \in L(R^2, R^3)$ ο γραμμικός μετασχηματισμός που ορίζεται από τη σχέση

$$T(u, v) = \sum_{i=1}^{3}(\alpha_i u + \beta_i v)\mathbf{e}_i \quad ((u, v) \in R^2). \tag{134}$$

Σημειώνουμε ότι $T = \Phi'(\mathbf{p}_0)$, σε εναρμόνιση με τον Ορισμό 9.11.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η βαθμίδα του T ισούται με 2. (Εάν ισούται με 0 ή με 1, τότε $\mathbf{N} = \mathbf{0}$ και το εφαπτόμενο επίπεδο που αναφέρεται παρακάτω εκφυλίζεται σε ευθεία ή σε σημείο.) Το πεδίο τιμών της συσχετικής απεικονίσεως

$$(u, v) \to \Phi(\mathbf{p}_0) + T(u, v)$$

είναι τότε ένα επίπεδο Π, το οποίο ονομάζεται *εφαπτόμενο επίπεδο* της Φ στο $\mathbf{p}_0$. (Θα ήταν αρεστό να αναφερόμαστε σε εφαπτόμενο επίπεδο στο

$\Phi(\mathbf{p}_0)$, παρά στο $\mathbf{p}_0$. Εάν όμως η Φ δεν είναι 1-1, τότε συναντώνται δυσκολίες σε αυτό.)

Εάν χρησιμοποιήσουμε την (133) στην (129), τότε λαμβάνουμε ότι

$$\mathbf{N} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\mathbf{e}_1 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\mathbf{e}_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\mathbf{e}_3 \tag{135}$$

και η (134) φανερώνει ότι

$$T\mathbf{e}_1 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \mathbf{e}_i, \qquad T\mathbf{e}_2 = \sum_{i=1}^{3} \beta_i \mathbf{e}_i. \tag{136}$$

Με έναν άμεσο υπολογισμό διαπιστώνουμε ότι

$$\mathbf{N} \cdot (T\mathbf{e}_1) = 0 = \mathbf{N} \cdot (T\mathbf{e}_2). \tag{137}$$

Άρα, το διάνυσμα $\mathbf{N}$ είναι κάθετο στο επίπεδο Π. Ονομάζεται το *ορθόθετο διάνυσμα* της Φ στο $\mathbf{p}_0$.

Η δεύτερη ιδιότητα του $\mathbf{N}$, η οποία επαληθεύεται επίσης με έναν άμεσο υπολογισμό από τις (135) και (136), είναι η εξής: Η ορίζουσα του γραμμικού μετασχηματισμού του R^3 που απεικονίζει το $\mathbf{e}_1$ στο $T\mathbf{e}_1$, το $\mathbf{e}_2$ στο $T\mathbf{e}_2$ και το $\mathbf{e}_3$ στο $\mathbf{N}$ είναι η $|\mathbf{N}|^2$, η οποία είναι θετική (Άσκηση 30). Επομένως, το 3-μονόπλοκο

$$[\mathbf{0}, T\mathbf{e}_1, T\mathbf{e}_2, \mathbf{N}] \tag{138}$$

είναι *θετικά προσανατολισμένο.*

Η τρίτη ιδιότητα του $\mathbf{N}$ που θα χρησιμοποιήσουμε αποτελεί συνέπεια των δύο προηγουμένων: Η προαναφερθείσα ορίζουσα, η οποία έχει τιμή $|\mathbf{N}|^2$, ισούται με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με ακμές $[\mathbf{0}, T\mathbf{e}_1]$, $[\mathbf{0}, T\mathbf{e}_2]$, $[\mathbf{0}, \mathbf{N}]$. Σύμφωνα με την (137), η $[\mathbf{0}, \mathbf{N}]$ είναι κάθετη στις άλλες δύο ακμές. Επομένως, *το εμβαδό του παραλληλογράμμου με κορυφές τις*

$$\mathbf{0}, \quad T\mathbf{e}_1, \quad T\mathbf{e}_2, \quad T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \tag{139}$$

ισούται με $|\mathbf{N}|$.

Το παραλληλόγραμμο αυτό είναι ακριβώς η εικόνα του μοναδιαίου τετραγώνου του R^2 μέσω της T. Εάν E είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στον R^2, τότε (λόγω της γραμμικότητας της f) έπεται ότι το εμβαδό του παραλληλόγραμμου $T(E)$ ισούται με

$$A(T(E)) = |\mathbf{N}|A(E) = \int_E |\mathbf{N}(u_0, v_0)| du dv. \tag{140}$$

Τώρα, συνάγουμε ότι η (132) αληθεύει στην περίπτωση όπου η Φ είναι συσχετική. Για τη δικαιολόγηση της (132) στη γενικότητά της, διαμερίζουμε το D σε μικρά ορθογώνια παραλληλόγραμμα, επιλέγουμε ένα σημείο (u_0, v_0) σε καθένα από αυτά και αντικαθιστούμε την Φ σε κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με το αντίστοιχο εφαπτόμενο επίπεδο. Το άθροισμα των εμβαδών των αντιστοίχων παραλληλογράμμων, το οποίο προκύπτει μέσω της (140), αποτελεί μία προσέγγιση του $A(\Phi)$. Εν τέλει, μπορούμε να δικαιολογήσουμε την (131) από την (132), προσεγγίζοντας την f με κλιμακωτές συναρτήσεις.

Παράδειγμα 10.47. Θεωρούμε δύο πραγματικούς αριθμούς a, b με $0 < a < b$. Ας είναι K το 3-διάστημα που ορίζεται ως εξής: $(t, u, v) \in K$ εάν και μόνον εάν

$$0 \leq t \leq a, \qquad 0 \leq u \leq 2\pi, \qquad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} x &= t \cos u, \\ y &= (b + t \sin u) \cos v, \\ z &= (b + t \sin u) \sin v \end{aligned} \tag{141}$$

περιγράφουν μία απεικόνιση Ψ του R^3 στον R^3, η οποία είναι 1-1 στο εσωτερικό του K. Το $\Psi(K)$ είναι ένας στερεός τόρος. Η ορίζουσα Jacobi της Ψ είναι η

$$J_\Psi(t, u, v) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(t, u, v)} = t(b + t \sin u)$$

για κάθε $(t, u, v) \in K$. Η ορίζουσα αυτή είναι θετική στο K, εκτός από την έδρα με $t = 0$. Εάν ολοκληρώσουμε την J_Ψ υπεράνω του K, λαμβάνουμε τον αριθμό

$$2\pi^2 a^2 b$$

ως τον όγκο του στερεού τόρου $\Psi(K)$.

Θεωρούμε τώρα την 2-αλυσίδα $\Phi = \partial\Psi$. (Ανατρέξτε στην Άσκηση 19.) Η Ψ απεικονίζει τις έδρες με $u = 0$ και $u = 2\pi$ του K επί της ιδίας κυλινδρικής λωρίδας, με διαφορετικό προσανατολισμό. Η Ψ απεικονίζει τις έδρες με $v = 0$ και $v = 2\pi$ του K επί του ιδίου κυκλικού δίσκου, με διαφορετικό προσανατολισμό. Η Ψ απεικονίζει την έδρα με $t = 0$ επί ενός κύκλου, ο οποίος συνεισφέρει μηδενικά στη 2-αλυσίδα $\partial\Psi$. (Οι σχετικές ορίζουσες Jacobi είναι μηδενικές). Άρα, η Φ είναι απλώς η 2-επιφάνεια που προκύπτει θέτοντας $t = a$ στην (141), με πεδίο παραμέτρων D το τετράγωνο που ορίζεται ως εξής: $(u, v) \in D$ εάν και μόνον εάν $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le 2\pi$.

Σύμφωνα με τις (129) και (141), το ορθόθετο διάνυσμα της Φ στο $(u, v) \in D$ είναι το

$$\mathbf{N}(u, v) = a(b + a \sin u)\mathbf{n}(u, v),$$

όπου

$$\mathbf{n}(u, v) = (\cos u)\mathbf{e}_1 + (\sin u \cos v)\mathbf{e}_2 + (\sin u \sin v)\mathbf{e}_3.$$

Εφόσον $|\mathbf{n}(u, v)| = 1$, έχουμε ότι $|\mathbf{N}(u, v)| = a(b+a \sin u)$ για κάθε $(u, v) \in D$. Εάν ολοκληρώσουμε αυτήν την ισότητα υπεράνω του D, λαμβάνουμε από την (131) το εμβαδό

$$A(\Phi) = 4\pi^2 ab$$

της επιφάνειας του τόρου.

Εάν για $(u, v) \in D$ θεωρήσουμε το $\mathbf{N} = \mathbf{N}(u, v)$ ως το κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το $\Phi(u, v)$ και τέλος το $\Phi(u, v) + \mathbf{N}(u, v)$, τότε το $\mathbf{N}$ έχει *εξωτερική* κατεύθυνση, δηλαδή εκτός του $\Psi(K)$. Αυτό συμβαίνει διότι $J_\Psi > 0$ όταν $t = a$.

Επί παραδείγματι, ας λάβουμε $u = v = \pi/2$, $t = a$. Η επιλογή αυτή δίδει τη μέγιστη τιμή του z στο $\Psi(K)$ και το $\mathbf{N} = a(b + a)\mathbf{e}_3$ έχει «κατακόρυφη εξωτερική» κατεύθυνση.

10.48 Ολοκληρώματα 1-μορφών στον R^3. Θεωρούμε μία $\mathcal{C}'$-καμπύλη γ σε ένα ανοικτό σύνολο $E \subset R^3$, με πεδίο παραμέτρων το $[0, 1]$. Θεωρούμε επίσης ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ στο E και την μορφή $\lambda_{\mathbf{F}}$ όπως στην (124).

Το ολοκλήρωμα της $\lambda_{\mathbf{F}}$ υπεράνω της γ μπορεί να διαμορφωθεί εκ νέου με τον τρόπο που περιγράφουμε παρακάτω.

Για $u \in [0, 1]$ το διάνυσμα

$$\gamma'(u) = \gamma_1'(u)\mathbf{e}_1 + \gamma_2'(u)\mathbf{e}_2 + \gamma_3'(u)\mathbf{e}_3$$

ονομάζεται το *εφαπτόμενο διάνυσμα* της γ στο u. Ορίζουμε ως $\mathbf{t} = \mathbf{t}(u)$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την κατεύθυνση του $\gamma'(u)$. Άρα,

$$\gamma'(u) = |\gamma'(u)|\mathbf{t}(u).$$

(Εάν $\gamma'(u) = \mathbf{0}$ για κάποιο $u \in [0, 1]$, τότε θέτουμε $\mathbf{t}(u) = \mathbf{e}_1$. Οποιαδήποτε άλλη επιλογή θα εξυπηρετούσε εξίσου τον σκοπό μας.) Από την (35) λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_\gamma \lambda_{\mathbf{F}} &= \sum_{i=1}^{3} \int_0^1 F_i(\gamma(u))\gamma_i'(u)du \\ &= \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma(u)) \cdot \gamma'(u)du \qquad (142) \\ &= \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma(u)) \cdot \mathbf{t}(u)|\gamma'(u)|du. \end{aligned}$$

Χάρη στο Θεώρημα 6.27 είναι εύλογο να ονομαστεί η $|\gamma'(u)|du$ *στοιχείο μήκους τόξου κατά μήκος της* γ. Ο συνήθης συμβολισμός για αυτό είναι ds. Η (142) αναδιατυπώνεται στη μορφή

$$\int_\gamma \lambda_{\mathbf{F}} = \int_\gamma (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t})ds. \qquad (143)$$

Εφόσον το $\mathbf{t}$ είναι μοναδιαίο και εφαπτόμενο στη γ, το $\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}$ ονομάζεται η *εφαπτομενική συνιστώσα* της $\mathbf{F}$ κατά μήκος της γ.

Η δεξιά πλευρά της (143) πρέπει να θεωρηθεί ως συντομογραφία του τελευταίου ολοκληρώματος στην (142). Όμως, το $\mathbf{F}$ ορίζεται στο πεδίο τιμών της γ, ενώ το $\mathbf{t}$ ορίζεται στο $[0, 1]$. Επομένως, το $\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}$ πρέπει να ερμηνευθεί καταλλήλως. Φυσικά, όταν η γ είναι 1-1, τότε το $\mathbf{t}(u)$ μπορεί να αντικατασταθεί από το $\mathbf{t}(\gamma(u))$ και η προηγούμενη δυσκολία μπορεί να αρθεί.

10.49 Ολοκληρώματα 2-μορφών στον R^3. Ας είναι Φ μία 2-επιφάνεια σε ένα ανοικτό σύνολο $E \subset R^3$, κλάσεως $\mathcal{C}'$, με πεδίο παραμέτρων το $D \subset R^2$. Ας είναι επίσης $\mathbf{F}$ ένα διανυσματικό πεδίο στο E και $\omega_{\mathbf{F}}$ όπως στην (125). Όπως και στην προηγούμενη ενότητα, θα αποκτήσουμε μία διαφορετική αναπαράσταση για το ολοκλήρωμα της $\omega_{\mathbf{F}}$ υπεράνω της Φ.

Σύμφωνα με τις (35) και (129), ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\int_{\Phi} \omega_{\mathbf{F}} &= \int_{\Phi} (F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy) \\ &= \int_D \left\{ (F_1 \circ \Phi) \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + (F_2 \circ \Phi) \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + (F_3 \circ \Phi) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right\} du dv \\ &= \int_D \mathbf{F}(\Phi(u,v)) \cdot \mathbf{N}(u,v) du dv.\end{aligned}$$

Τώρα, ας είναι $\mathbf{n} = \mathbf{n}(u, v)$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\mathbf{N}(u, v)$. (Εάν $\mathbf{N}(u, v) = \mathbf{0}$ για κάποιο $(u, v) \in D$, τότε θέτουμε $\mathbf{n}(u, v) = \mathbf{e}_1$.) Τότε, $\mathbf{N} = |\mathbf{N}|\mathbf{n}$ και επομένως το τελευταίο ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο

$$\int_D \mathbf{F}(\Phi(u,v)) \cdot \mathbf{n}(u,v) |\mathbf{N}(u,v)| du dv.$$

Σύμφωνα με την (131), μπορούμε να το γράψουμε αυτό στη μορφή

$$\int_{\Phi} \omega_{\mathbf{F}} = \int_{\Phi} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dA. \tag{144}$$

Σε σχέση με τη σημασία του $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ ισχύουν παρόμοιες παρατηρήσεις όπως στο σχόλιο που βρίσκεται στο τέλος της Ενότητας 10.48.

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε την αρχική μορφή του θεωρήματος του Stokes.

10.50 Ο τύπος του Stokes. *Εάν $\mathbf{F}$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο κλάσεως $\mathcal{C}'$ σε ένα ανοικτό υποσύνολο $E \subset R^3$ και εάν Φ είναι μία 2-επιφάνεια κλάσεως $\mathcal{C}''$ στο E, τότε*

$$\int_{\Phi} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dA = \int_{\partial\Phi} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t})\, ds. \tag{145}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{F}$. Τότε, όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 10.43, ισχύει ότι

$$\omega_{\mathbf{H}} = d\lambda_{\mathbf{F}}. \tag{146}$$

Άρα,

$$\int_{\Phi} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dA = \int_{\Phi} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n})\, dA = \int_{\Phi} \omega_{\mathbf{H}} = \int_{\Phi} d\lambda_{\mathbf{F}} = \int_{\partial\Phi} \lambda_{\mathbf{F}} = \int_{\partial\Phi} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t})\, ds.$$

Στα παραπάνω χρησιμοποιήθηκε ο ορισμός του $\mathbf{H}$, έπειτα η (144) με το $\mathbf{H}$ στη θέση του $\mathbf{F}$ και έπειτα η (146). Ύστερα, στο κύριο βήμα, χρησιμοποιήθηκε το Θεώρημα 10.33 και τελικά η (143), η οποία επεκτείνεται κατά φυσιολογικό τρόπο από καμπύλες σε 1-αλυσίδες. □

10.51 Το θεώρημα της αποκλίσεως. *Εάν* $\mathbf{F}$ *είναι ένα διανυσματικό πεδίο κλάσεως* $\mathcal{C}'$ *σε ένα ανοικτό υποσύνολο* $E \subset R^3$ *και εάν* Ω *είναι ένα κλειστό υποσύνολο του* E *με θετικά προσανατολισμένο σύνορο* $\partial\Omega$ *(όπως έχει ορισθεί στην Ενότητα 10.31), τότε*

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{F})\, dV = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dA. \tag{147}$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με την (125),

$$d\omega_{\mathbf{F}} = (\nabla \cdot \mathbf{F})\, dx \wedge dy \wedge dz = (\nabla \cdot \mathbf{F})\, dV.$$

Άρα,

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{F})\, dV = \int_{\Omega} d\omega_{\mathbf{F}} = \int_{\partial\Omega} \omega_{\mathbf{F}} = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dA,$$

σύμφωνα με το Θεώρημα 10.33, εφαρμοζόμενο στη 2-μορφή $\omega_{\mathbf{F}}$, και την (144). □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Ας είναι H ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο του R^k με μη κενό εσωτερικό. Θεωρούμε $f \in \mathcal{C}(H)$, θέτουμε $f(\mathbf{x}) = 0$ για κάθε σημείο $\mathbf{x}$ που ανήκει στο συμπλήρωμα του H και ορίζουμε το $\int_H f$ όπως στον Ορισμό 10.3.

Αποδείξτε ότι το $\int_H f$ είναι ανεξάρτητο από την σειρά εκτελέσεων των k ολοκληρώσεων.

Υπόδειξη: Προσεγγίστε την f με συνεχείς συναρτήσεις στον R^k, οι οποίες έχουν τον φορέα τους στο H, όπως έγινε και στο Παράδειγμα 10.4.

Άσκηση 2. Για $i = 1, 2, 3, \ldots$ θεωρούμε $\varphi_i \in \mathcal{C}(R^1)$ με φορέα εντός του $(2^{-i}, 2^{1-i})$ ούτως ώστε $\int_{R^1} \varphi_i = 1$. Για $(x, y) \in R^2$ θέτουμε

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} [\varphi_i(x) - \varphi_{i+1}(x)]\phi_i(y).$$

Τότε, αποδείξτε ότι η f έχει συμπαγή φορέα στον R^2, ότι η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του R^2 εκτός του $(0, 0)$ και ότι

$$\int_{R^1} \left(\int_{R^1} f(x, y)\, dx \right) dy = 0,$$

όμως

$$\int_{R^1} \left(\int_{R^1} f(x, y)\, dy \right) dx = 1.$$

Σημειώνουμε ότι η f είναι μη φραγμένη σε κάθε περιοχή του $(0, 0)$.

Άσκηση 3.

(α) Υποθέτουμε ότι η $\mathbf{F}$ είναι όπως στο Θεώρημα 10.7. Θέτουμε $A = \mathbf{F}'(\mathbf{0})$ και $\mathbf{F}_1 = A^{-1} \circ \mathbf{F}$. Τότε, $\mathbf{F}_1'(\mathbf{0}) = I$ (ο ταυτοτικός τελεστής). Δείξτε ότι

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_n \circ \mathbf{G}_{n-1} \circ \cdots \circ \mathbf{G}_1(\mathbf{x})$$

για κάθε σημείο $\mathbf{x}$ που ανήκει σε κάποια περιοχή του $\mathbf{0}$, όπου οι $\mathbf{G}_1, \ldots, \mathbf{G}_n$ είναι πρωταρχικές απεικονίσεις. Αυτό χορηγεί μία διαφορετική εκδοχή του Θεωρήματος 10.7:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}'(\mathbf{0}) \circ \mathbf{G}_n \circ \mathbf{G}_{n-1} \circ \cdots \circ \mathbf{G}_1(\mathbf{x})$$

για κάθε σημείο $\mathbf{x}$ που ανήκει σε κάποια περιοχή του $\mathbf{0}$.

(β) Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $(x, y) \to (y, x)$ του R^2 επί του R^2 δεν μπορεί να γραφεί ως σύνθεση δύο πρωταρχικών απεικονίσεων σε καμία περιοχή του $(0, 0)$. (Αυτό φανερώνει ότι οι απεικονίσεις εναλλαγής δεν μπορούν να παραλειφθούν από τη διατύπωση του Θεωρήματος 10.7.)

Άσκηση 4. Για $(x, y) \in R^2$ ορίζουμε

$$\mathbf{F}(x, y) = (e^x \cos y - 1, e^x \sin y).$$

Αποδείξτε ότι $\mathbf{F} = \mathbf{G}_2 \circ \mathbf{G}_1$, όπου για $(x, y) \in R^2$ είναι

$$\mathbf{G}_1(x, y) = (e^x \cos y - 1, y)$$
$$\mathbf{G}_2(x, y) = (x, (1 + x) \tan y)$$

και οι $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ είναι πρωταρχικές απεικονίσεις σε κάποια περιοχή του $(0, 0)$.

Υπολογίστε τις ορίζουσες Jacobi των $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{F}$ στο $(0, 0)$. Θεωρήστε την απεικόνιση $\mathbf{H}_2$, όπου για $(x, y) \in R^2$ είναι

$$\mathbf{H}_2(x, y) = (x, e^x \sin y).$$

Βρείτε κατάλληλη απεικόνιση $\mathbf{H}_1$, για την οποία ισχύει ότι

$$\mathbf{H}_1(u, v) = (h(u, v), v) \quad ((u, v) \in R^2),$$

όπου h είναι κατάλληλη πραγματική συνάρτηση, ούτως ώστε $\mathbf{F} = \mathbf{H}_1 \circ \mathbf{H}_2$ σε κάποια περιοχή του $(0, 0)$.

Άσκηση 5. Διατυπώστε και αποδείξτε ένα θεώρημα ανάλογο του Θεωρήματος 10.8, στο οποίο το K να είναι συμπαγές υποσύνολο τυχόντος μετρικού χώρου. (Αντικαταστήστε τις συναρτήσεις φ_i που προκύπτουν στην απόδειξη του Θεωρήματος 10.8 με συναρτήσεις αντίστοιχες με αυτές που κατασκευάσθηκαν στην Άσκηση 22 του Κεφαλαίου 4.)

Άσκηση 6. Ενισχύστε το συμπέρασμα του Θεωρήματος 10.8 δείχνοντας ότι οι συναρτήσεις ψ_i μπορούν θεωρηθούν διαφορίσιμες, ακόμη και απείρως διαφορίσιμες. (Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 1 του Κεφαλαίου 8 για την κατασκευή των βοηθητικών συναρτήσεων φ_i.)

Άσκηση 7.

(α) Δείξτε ότι το μονόπλοκο Q^k είναι το μικρότερο κυρτό υποσύνολο του R^k που περιέχει τα $\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$.

(β) Δείξτε ότι μία συσχετική απεικόνιση απεικονίζει κυρτά σύνολα σε κυρτά σύνολα.

Άσκηση 8. Ας είναι H το παραλληλόγραμμο στον R^2 με κορυφές τα σημεία $(1,1), (3,2), (4,5), (2,4)$. Βρείτε τη συσχετική απεικόνιση T που απεικονίζει το $(0,0)$ στο $(1,1)$, το $(1,0)$ στο $(3,2)$ και το $(0,1)$ στο $(2,4)$. Δείξτε ότι $J_T = 5$. Χρησιμοποιήστε την T για να μετατρέψετε το ολοκλήρωμα

$$\alpha = \int_H e^{x-y} dxdy$$

σε ολοκλήρωμα υπεράνω του I^2 και ακολούθως να το υπολογίσετε με τον τρόπο αυτό.

Άσκηση 9. Θεωρούμε έναν θετικό αριθμό a και το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο R που ορίζεται ως εξής: $(r,\theta) \in R$ εάν και μόνον εάν

$$0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Ορίζουμε την απεικόνιση T στο R μέσω της ισότητας

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \quad ((r,\theta) \in R).$$

Δείξτε ότι η T απεικονίζει το R επί του κλειστού δίσκου D με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα a, ότι η T είναι 1-1 στο εσωτερικό του R και ότι $J_T(r,\theta) = r$ για κάθε $(r,\theta) \in R$. Εάν $f \in \mathcal{C}(D)$, τότε αποδείξτε τον τύπο ολοκληρώσεως σε πολικές συντεταγμένες:

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_0^a \int_0^{2\pi} f(T(r,\theta))rdrd\theta.$$

Υπόδειξη: Ας είναι D_0 το εσωτερικό του D πλην του ευθυγράμμου τμήματος από το $(0,0)$ έως το $(a,0)$. Το Θεώρημα 10.9 εφαρμόζεται σε συνεχείς συναρτήσεις με φορέα που περιέχεται στο D_0. Εργασθείτε όπως στο Παράδειγμα 10.4 για να άρετε αυτόν τον περιορισμό.

Άσκηση 10. Θεωρήστε ότι $a \to \infty$ στην Άσκηση 9 και αποδείξτε ότι

$$\int_{R^2} f(x,y)dxdy = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(T(r,\theta))rdrd\theta$$

για συνεχείς συναρτήσεις f που φθίνουν με επαρκή ταχύτητα καθώς $|x| + |y| \to \infty$. (Βρείτε μία ακριβέστερη διατύπωση). Εφαρμόστε αυτό στη συνάρτηση f με

$$f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2) \quad ((x, y) \in R^1)$$

για να αποκτήσετε την ισότητα (101) του Κεφαλαίου 8.

Άσκηση 11. Θεωρούμε τη λωρίδα S που ορίζεται ως εξής: $(s, t) \in S$ εάν και μόνον εάν

$$0 < s < +\infty, \quad 0 < t < 1.$$

Ορίζουμε την απεικόνιση T στο S μέσω της ισότητας

$$T(s, t) = (s - st, st) \quad ((s, t) \in S).$$

Δείξτε ότι η T είναι 1-1 απεικόνιση της λωρίδας επί του θετικού τεταρτημορίου Q του R^2. Δείξτε ότι $J_T(s, t) = s$ για κάθε $(s, t) \in S$.

Για $x > 0$, $y > 0$ ολοκληρώστε την παράσταση

$$u^{x-1}e^{-u}v^{y-1}e^{-v},$$

όπου $u = s - st$, $v = st$ $((s, t) \in S)$, υπεράνω του Q, χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 10.9 για να μετατρέψετε το ολοκλήρωμα αυτό σε ολοκλήρωμα υπεράνω της λωρίδας S και αποκτήστε την ισότητα (96) του Κεφαλαίου 8.

(Για την εφαρμογή αυτή, το Θεώρημα 10.9 πρέπει να επεκταθεί ούτως ώστε να καλύπτει ορισμένα γενικευμένα ολοκληρώματα. Διατυπώστε αυτήν την επέκταση.)

Άσκηση 12. Ας είναι I^k το σύνολο των σημείων $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_k) \in R^k$ με $0 \leq u_i \leq 1$, για κάθε δείκτη $i = 1, \ldots, k$. Ας είναι επίσης Q^k το σύνολο των σημείων $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in R^k$ με $x_i \geq 0$ για κάθε δείκτη $i = 1, \ldots, k$ και $\sum_{i=1}^k x_i \leq 1$. (Το I^k είναι ο μοναδιαίος κύβος του R^k. Το Q^k είναι το σύνηθες μονόπλοκο του R^k.) Ορίζουμε την απεικόνιση T στο I^k ως εξής: Εάν για $\mathbf{u} \in I^k$ είναι $\mathbf{x} = T(\mathbf{u})$, τότε

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 \\ x_2 &= (1-u_1)u_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_k &= (1-u_1)\cdots(1-u_{k-1})u_k. \end{aligned}$$

Δείξτε ότι

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = 1 - \prod_{i=1}^{k}(1-u_i).$$

Δείξτε ότι η T απεικονίζει το I^k επί του Q^k, ότι η T είναι 1-1 στο εσωτερικό του I^k και ότι η αντίστροφή της, S, ορίζεται στο εσωτερικό του Q^k μέσω των σχέσεων $u_1 = x_1$ και

$$u_i = \frac{x_i}{1 - x_1 - \cdots - x_{i-1}}$$

για $i = 2, \ldots, k$. Δείξτε ότι

$$J_T(\mathbf{u}) = (1-u_1)^{k-1}(1-u_2)^{k-2}\cdots(1-u_{k-1})$$

για κάθε $\mathbf{u} \in I^k$ και ότι

$$J_S(\mathbf{x}) = [(1-x_1)(1-x_1-x_2)\cdots(1-x_1-\cdots-x_{k-1})]^{-1}$$

για κάθε $\mathbf{x} \in Q^k$.

Άσκηση 13. Ας είναι $r_1, \ldots r_k$ μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί. Αποδείξτε ότι

$$\int_{Q^k} x_1^{r_1}\cdots x_k^{r_k}\,dx_1\cdots dx_k = \frac{r_1!\cdots r_k!}{(k+r_1+\cdots+r_k)!}.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 12 και τα Θεωρήματα 10.9 και 8.20.

Σημειώνουμε ότι στην ειδική περίπτωση όπου $r_1 = \cdots = r_k = 0$ προκύπτει ότι ο όγκος του Q^k ισούται με $1/k!$.

Άσκηση 14. Αποδείξτε τον τύπο (46).

Άσκηση 15. Εάν ω είναι μία k-μορφή και λ είναι μία m-μορφή, τότε αποδείξτε ότι

$$\omega \wedge \lambda = (-1)^{km} \lambda \wedge \omega.$$

Άσκηση 16. Εάν k είναι ένας ακέραιος αριθμός με $k \geq 2$ και εάν $\sigma = [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k]$ είναι ένα προσανατολισμένο συσχετικό k-μονόπλοκο, τότε αποδείξτε ότι $\partial^2 \sigma = 0$, ευθέως από τον ορισμό του συνοριακού τελεστή ∂. Από αυτό συνάγετε ότι $\partial^2 \Psi = 0$ για κάθε k-αλυσίδα Ψ.

Υπόδειξη: Για να κατατοπισθείτε, αποδείξτε το πρώτα για $k = 2$ και $k = 3$. Στη γενικότητά του, εάν είναι $i, j = 0, \ldots, k$ με $i < j$, τότε θεωρούμε το $(k-2)$-μονόπλοκο σ_{ij} που προκύπτει διαγράφοντας τα $\mathbf{p}_i$ και $\mathbf{p}_j$ από το σ. Δείξτε ότι κάθε σ_{ij} εμφανίζεται δύο φορές στο $\partial^2 \sigma$ με αντίθετο πρόσημο.

Άσκηση 17. Θέτουμε $J^2 = \tau_1 + \tau_2$, όπου

$$\tau_1 = [\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2], \quad \tau_2 = -[\mathbf{0}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1].$$

Εξηγήστε γιατί είναι εύλογη η ονομασία του J^2 ως το θετικά προσανατολισμένο μοναδιαίο τετράγωνο στον R^2. Δείξτε ότι το ∂J^2 ισούται με το άθροισμα τεσσάρων συσχετικών 1-μονοπλόκων. Βρείτε τα. Ποιο είναι το $\partial(\tau_1 - \tau_2)$;

Άσκηση 18. Θεωρούμε το προσανατολισμένο συσχετικό 3-μονόπλοκο

$$\sigma_1 = [\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3]$$

στον R^3. Δείξτε ότι το σ_1 (θεωρούμενο ως γραμμικός μετασχηματισμός) έχει ορίζουσα ίση με 1. Άρα, είναι θετικά προσανατολισμένο.

Ας είναι $\sigma_2, \ldots, \sigma_6$ τα άλλα πέντε προσανατολισμένα 3-μονόπλοκα που προκύπτουν ως εξής: Υπάρχουν πέντε μετατάξεις (i_1, i_2, i_3) της τριάδας $(1, 2, 3)$, διαφορετικές από την $(1, 2, 3)$. Σε κάθε τέτοια μετάταξη αντιστοιχίζουμε το μονόπλοκο

$$s(i_1, i_2, i_3)[\mathbf{0}, \mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_1} + \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{e}_{i_1} + \mathbf{e}_{i_2} + \mathbf{e}_{i_3}],$$

όπου s είναι το πρόσημο που εμφανίζεται στον ορισμό της ορίζουσας. (Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει το τ_2 από το τ_1 στην Άσκηση 17.)

Δείξτε ότι τα $\sigma_2, \ldots, \sigma_6$ είναι θετικά προσανατολισμένα.

Θέτουμε $J^3 = \sigma_1 + \cdots + \sigma_6$. Τότε, το J^3 μπορεί να θεωρηθεί ως ο θετικά προσανατολισμένος κύβος του R^3.

Δείξτε ότι το ∂J^3 ισούται με το άθροισμα δώδεκα προσανατολισμένων συσχετικών 2-μονοπλόκων. (Τα δώδεκα αυτά τρίγωνα καλύπτουν την επιφάνεια του μοναδιαίου κύβου J^3.)

Δείξτε ότι το $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ βρίσκεται στο πεδίο τιμών του σ_1 εάν και μόνον εάν $0 \leq x_3 \leq x_2 \leq x_1 \leq 1$.

Δείξτε ότι τα πεδία τιμών των $\sigma_1, \ldots, \sigma_6$ έχουν αποσυνδετά εσωτερικά και ότι η ένωσή τους καλύπτει το I^3. (Συγκρίνετε το γεγονός αυτό με την Άσκηση 13. Σημειώστε ότι $3! = 6$.)

Άσκηση 19. Ας είναι τα J^2, J^3 όπως στις Ασκήσεις 17 και 18. Ορίζουμε τις απεικονίσεις B_{ri} ($r = 0, 1,\ i = 1, 2, 3$) στον R^2 μέσω των ισοτήτων

$$\begin{aligned} B_{01}(u, v) &= (0, u, v), & B_{11}(u, v) &= (1, u, v), \\ B_{02}(u, v) &= (u, 0, v), & B_{12}(u, v) &= (u, 1, v), \\ B_{03}(u, v) &= (u, v, 0), & B_{13}(u, v) &= (u, v, 1) \end{aligned}$$

για κάθε $(u, v) \in R^2$. Οι απεικονίσεις αυτές απεικονίζουν τον R^2 στον R^3 και είναι συσχετικές.

Θέτουμε $\beta_{ri} = B_{ri}(J^2)$ για $r = 0, 1$ και $i = 1, 2, 3$. Κάθε ένα από τα β_{ri} ($r = 0, 1,\ i = 1, 2, 3$) είναι μία προσανατολισμένη συσχετική 2-αλυσίδα. (Ανατρέξτε στην Ενότητα 10.30.) Επαληθεύστε ότι

$$\partial J^3 = \sum_{i=1}^{3} (-1)^i (\beta_{0i} - \beta_{1i}),$$

σε εναρμόνιση με την Άσκηση 18.

Άσκηση 20. Διατυπώστε συνθήκες υπό τις οποίες να ισχύει η ισότητα

$$\int_\Phi f\, d\omega = \int_{\partial\Phi} f\omega - \int_\Phi (df) \wedge \omega$$

και αποδείξτε ότι αυτή γενικεύει τον τύπο ολοκληρώσεως κατά μέρη.

Υπόδειξη: $d(f\omega) = (df) \wedge \omega + f d\omega$.

Άσκηση 21. Θεωρήστε, όπως στο Παράδειγμα 10.36, την 1-μορφή

$$\eta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

στο $R^2 - \{\mathbf{0}\}$.

(α) Εκτελέστε τους υπολογισμούς που οδηγούν στην ισότητα (113) και αποδείξτε ότι $d\eta = 0$.

(β) Ας είναι $r > 0$. Θεωρούμε την καμπύλη γ, με πεδίο παραμέτρων το $[0, 2\pi]$, όπου για κάθε $t \in [0, 2\pi]$ είναι $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$. Ας είναι επίσης Γ μία $\mathcal{C}''$-καμπύλη στο $R^2 - \{\mathbf{0}\}$ με πεδίο παραμέτρων το $[0, 2\pi]$ και $\Gamma(0) = \Gamma(2\pi)$ ούτως ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα $[\gamma(t), \Gamma(t)]$ να μην περιέχουν το $\mathbf{0}$ για οποιοδήποτε $t \in [0, 2\pi]$. Αποδείξτε ότι

$$\int_\Gamma \eta = 2\pi.$$

Υπόδειξη: Θεωρούμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο D που ορίζεται ως εξής: $(t, u) \in D$ εάν και μόνον εάν $0 \le t \le 2\pi$ και $0 \le u \le 1$. Ορίζουμε την απεικόνιση Φ στο D μέσω της ισότητας

$$\Phi(t, u) = (1 - u)\Gamma(t) + u\gamma(t)$$

για κάθε $(t, u) \in D$. Τότε, η Φ είναι μία 2-επιφάνεια στο $R^2 - \{\mathbf{0}\}$ με πεδίο παραμέτρων το D. Λόγω των απλοποιήσεων (όπως στο Παράδειγμα 10.32), έχουμε ότι

$$\partial\Phi = \Gamma - \gamma.$$

Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Stokes για να αποδείξετε ότι

$$\int_\Gamma \eta = \int_\gamma \eta,$$

βάσει της σχέσεως $d\eta = 0$.

(γ) Ας είναι $a, b > 0$. Θεωρούμε την καμπύλη Γ, με πεδίο παραμέτρων το $[0, 2\pi]$, όπου για κάθε $t \in [0, 2\pi]$ είναι $\Gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$. Χρησιμοποιήστε το μέρος (β) για να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{2\pi} \frac{ab}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dt = 2\pi.$$

(δ) Δείξτε ότι

$$\eta = d\left(\arctan \frac{y}{x}\right)$$

σε κάθε κυρτό ανοικτό σύνολο στο οποίο ισχύει ότι $x \neq 0$ για κάθε σημείο (x, y) που ανήκει σε αυτό. Επίσης, δείξτε ότι

$$\eta = d\left(-\arctan \frac{x}{y}\right)$$

σε κάθε κυρτό ανοικτό σύνολο στο οποίο ισχύει ότι $y \neq 0$ για κάθε σημείο (x, y) που ανήκει σε αυτό.

Εξηγήστε τον λόγο που δικαιολογεί το συμβολισμό $\eta = d\theta$, παρά το γεγονός ότι η μορφή η δεν είναι ακριβής στο $R^2 - \{\mathbf{0}\}$.

(ε) Δείξτε ότι το (β) μπορεί να συναχθεί από το (δ).

(στ) Εάν Γ είναι οποιαδήποτε κλειστή $\mathcal{C}'$-καμπύλη στο $R^2 - \{\mathbf{0}\}$, τότε αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \eta = \operatorname{Ind}(\Gamma).$$

(Για τον ορισμό του δείκτη καμπύλης ανατρέξτε στην Άσκηση 23 του Κεφαλαίου 8.)

Άσκηση 22. Όπως στο Παράδειγμα 10.37, ορίζουμε τη μορφή ζ στο $R^3 - \{\mathbf{0}\}$ ως

$$\zeta = \frac{x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy}{r^3},$$

όπου $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Ας είναι D το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που ορίζεται ως εξής: $(u, v) \in D$ εάν και μόνον εάν $0 \le u \le \pi$ και $0 \le v \le 2\pi$. Θεωρούμε την 2-επιφάνεια Σ του R^3 με πεδίο παραμέτρων το D, η οποία ορίζεται ως εξής: Εάν $(u, v) \in D$ και $\Sigma(u, v) = (x, y, z)$, τότε

$$x = \sin u \cos v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos u.$$

(α) Αποδείξτε ότι $d\zeta = 0$ στο $R^3 - \{\mathbf{0}\}$.

(β) Ας είναι S ο περιορισμός της Σ σε ένα πεδίο παραμέτρων $E \subset D$. Αποδείξτε ότι

$$\int_S \zeta = \int_E \sin u \, du dv = A(S),$$

όπου το A συμβολίζει το εμβαδό, όπως στην Ενότητα 10.43. Σημειώστε ότι αυτή η ισότητα εμπεριέχει την (115) ως ειδική περίπτωση.

(γ) Υποθέτουμε ότι g, h_1, h_2, h_3 είναι $\mathcal{C}''$-συναρτήσεις στο $[0, 1]$ με $g > 0$. Θεωρούμε την 2-επιφάνεια Φ με πεδίο παραμέτρων το I^2, η οποία ορίζεται ως εξής: εάν $(s, t) \in I^2$ και $\Phi(s, t) = (x, y, z)$, τότε

$$x = g(t)h_1(s), \qquad y = g(t)h_2(s), \qquad z = g(t)h_3(s).$$

Αποδείξτε ότι

$$\int_\Phi \zeta = 0,$$

ευθέως από την (35).

Παρατηρήστε το σχήμα του πεδίου τιμών της Φ: Για σταθερό $s \in [0, 1]$, η $\Phi(s, t)$ διατρέχει ένα διάστημα επί μίας ευθείας που περνά από το $\mathbf{0}$ καθώς $t \in [0, 1]$. Άρα, το πεδίο τιμών της Φ βρίσκεται επί ενός *κώνου* με κορυφή στην αρχή των συντεταγμένων.

(δ) Θεωρούμε ένα κλειστό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο E στο D με πλευρές παράλληλες προς αυτές του D. Υποθέτουμε ότι $f \in \mathcal{C}''(D)$ με $f > 0$. Ας είναι Ω η 2-επιφάνεια με πεδίο παραμέτρων το E, η οποία ορίζεται από την ισότητα

$$\Omega(u, v) = f(u, v)\Sigma(u, v)$$

για κάθε $(u, v) \in E$. Ορίζουμε την S όπως στο (β). Αποδείξτε ότι

$$\int_\Omega \zeta = \int_S \zeta = A(S).$$

(Εφόσον το S είναι η «ακτινική προβολή» της Ω στη μοναδιαία σφαίρα, είναι εύλογο να αποκαλούμε το $\int_\Omega \zeta$ ως την αντικείμενη «στερεά γωνία» του πεδίου τιμών της Ω ως προς την αρχή των συντεταγμένων.)

Υπόδειξη: Θεωρήστε την 3-επιφάνεια Ψ, οριζόμενη μέσω της ισότητας

$$\Psi(t, u, v) = [1 - t + tf(u, v)]\Sigma(u, v)$$

για κάθε $(u, v) \in E$, $t \in [0, 1]$. Για σταθερό v, η απεικόνιση $(t, u) \to \Psi(t, u, v)$ είναι μία 2-επιφάνεια Φ στην οποία μπορεί να εφαρμοσθεί το (γ) για να δειχθεί ότι $\int_\Phi \zeta = 0$. Το ίδιο ισχύει και όταν το u κρατηθεί σταθερό. Σύμφωνα με το (α) και το θεώρημα του Stokes,

$$\int_{\partial\Psi} \zeta = \int_{\Psi} d\zeta = 0.$$

(ε) Θέτουμε $\lambda = -(\zeta/r)\eta$, όπου

$$\eta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

όπως στην Άσκηση 21. Τότε, η λ είναι μία 1-μορφή στο ανοικτό σύνολο $V \subset R^3$, το οποίο ορίζεται ως εξής: $(x, y, z) \in V$ εάν και μόνον εάν $x^2 + y^2 > 0$. Δείξτε ότι η ζ είναι *ακριβής στο* V, αποδεικνύοντας ότι

$$\zeta = d\lambda.$$

(στ) Αποδείξτε το (δ) από το (ε), δίχως χρήση του (γ).

Υπόδειξη: Υποθέστε ότι $0 < u < \pi$ στο E. Από το (ε) έχουμε ότι

$$\int_\Omega \zeta = \int_{\partial\Omega} \lambda \quad \text{και} \quad \int_S \zeta = \int_{\partial S} \lambda.$$

Δείξτε ότι τα δύο ολοκληρώματα της λ είναι ίσα, χρησιμοποιώντας το μέρος (δ) της Ασκήσεως 21 και παρατηρώντας ότι η ζ/r είναι η ίδια στις Σ και Ω.

(ζ) Είναι η ζ ακριβής στο συμπλήρωμα οποιασδήποτε ευθείας που περνά από την αρχή των συντεταγμένων;

Άσκηση 23. Θεωρούμε έναν θετικό ακέραιο αριθμό n. Για κάθε ακέραιο αριθμό k με $1 \leq k \leq n$ ορίζουμε $r_k = (x_1^2 + \cdots + x_k^2)^{1/2}$. Ας είναι E_k το σύνολο των $\mathbf{x} \in R^n$ με $r_k > 0$. Ας είναι επίσης ω_k η $(k-1)$-μορφή στο E_k που ορίζεται ως εξής:

$$\omega_k = (r_k)^{-k} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+i} \wedge \cdots \wedge dx_k.$$

Σημειώνουμε ότι $\omega_2 = \eta$, $\omega_3 = \zeta$, με τους συμβολισμούς των Ασκήσεων 21 και 22. Σημειώνουμε επίσης ότι

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n = R^n - \{\mathbf{0}\}.$$

(α) Αποδείξτε ότι $d\omega_k = 0$ στο E_k.

(β) Για $k = 2, \ldots, n$, αποδείξτε ότι η ω_k είναι ακριβής στο E_{k-1}, δείχνοντας ότι

$$\omega_k = d(f_k \omega_{k-1}) = (df_k) \wedge \omega_{k-1},$$

όπου f_k είναι η συνάρτηση που ορίζεται στο E_{k-1} μέσω της ισότητας $f_k(\mathbf{x}) = (-1)^k g_k(x_k/r_k)$ για κάθε $\mathbf{x} \in E_{k-1}$ και g_k είναι η συνάρτηση στο $(-1, 1)$ που ορίζεται μέσω της ισότητας

$$g_k(t) = \int_{-1}^{t} (1 - s^2)^{(k-3)/2} ds \qquad (-1 < t < 1).$$

Υπόδειξη: Η f_k ικανοποιεί τις διαφορικές εξισώσεις

$$\mathbf{x} \cdot (\nabla f_k)(\mathbf{x}) = 0$$

και

$$(D_k f_k)(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^k (r_{k-1})^{k-1}}{(r_k)^k}$$

για κάθε $\mathbf{x} \in E_{k-1}$.

(γ) Είναι η ω_n ακριβής στο E_n;

(δ) Παρατηρούμε ότι το (β) είναι γενίκευση του μέρους (ε) της Ασκήσεως 22. Προσπαθήστε να γενικεύσετε και άλλους ισχυρισμούς των Ασκήσεων 21 και 22 για την ω_n, για οποιοδήποτε n.

Άσκηση 24. Θεωρούμε μία 1-μορφή $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}) dx_i$ κλάσεως $\mathcal{C}''$ σε ένα κυρτό ανοικτό σύνολο $E \subset R^n$. Υποθέστε ότι $d\omega = 0$ και αποδείξτε ότι η ω είναι ακριβής στο E, συμπληρώνοντας το ακόλουθο αποδεικτικό σχεδιάγραμμα:

Θεωρούμε $\mathbf{p} \in E$. Ορίζουμε τη συνάρτηση f στο E μέσω της ισότητας

$$f(\mathbf{x}) = \int_{[\mathbf{p}, \mathbf{x}]} \omega \qquad (\mathbf{x} \in E).$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Stokes στα προσανατολισμένα συσχετικά 2-μονόπλοκα $[\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{y}]$ στο E. Λαμβάνουμε ότι

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) \int_0^1 a_i((1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y})\, dt$$

για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$. Άρα, $D_i f = a_i$ για κάθε δείκτη i.

Άσκηση 25. Υποθέτουμε ότι η ω είναι μία 1-μορφή σε ένα ανοικτό σύνολο $E \subset R^n$ ούτως ώστε

$$\int_\gamma \omega = 0$$

για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο E, κλάσεως $\mathcal{C}'$. Αποδείξτε ότι η ω είναι ακριβής στο E, εργαζόμενοι με παρόμοιο τρόπο όπως στην Άσκηση 24.

Άσκηση 26. Υποθέτουμε ότι ω είναι μία 1-μορφή στο $R^3 - \{\mathbf{0}\}$, κλάσεως $\mathcal{C}'$, με $d\omega = 0$. Αποδείξτε ότι η ω είναι ακριβής στο $R^3 - \{\mathbf{0}\}$.

Υπόδειξη: Κάθε κλειστή συνεχώς παραγωγίσιμη καμπύλη στο $R^3 - \{\mathbf{0}\}$ είναι το σύνορο μίας 2-επιφάνειας στο $R^3 - \{\mathbf{0}\}$. Εφαρμόστε το θεώρημα του Stokes και την Άσκηση 25.

Άσκηση 27. Θεωρούμε ένα ανοικτό 3-διάστημα E στον R^3 με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες συντεταγμένων. Υποθέτουμε ότι $(a, b, c) \in E$, ότι $f_i \in \mathcal{C}'(E)$ για $i = 1, 2, 3$, ότι

$$\omega = f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy$$

και ότι $d\omega = 0$ στο E. Ορίζουμε

$$\lambda = g_1 dx + g_2 dy,$$

όπου g_1, g_2 είναι οι συναρτήσεις στο E οι οποίες ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} g_1(x, y, z) &= \int_c^z f_2(x, y, s)ds - \int_b^y f_3(x, t, c)dt, \\ g_2(x, y, z) &= -\int_c^z f_1(x, y, s)ds, \end{aligned}$$

για κάθε $(x, y, z) \in E$. Αποδείξτε ότι $d\lambda = \omega$ στο E.

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα αυτά όταν $\omega = \zeta$ και βρείτε τη μορφή λ που προκύπτει στο μέρος (ε) της Ασκήσεως 22.

Άσκηση 28. Θεωρούμε δύο πραγματικούς αριθμούς a, b με $0 < a < b$ και ορίζουμε την απεικόνιση Φ μέσω της ισότητας

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$$

για κάθε $r \in [a, b]$, $\theta \in [0, 2\pi]$. (Το πεδίο τιμών της Φ είναι ένας δακτύλιος του R^2.) Θέτουμε $\omega = x^3 dy$. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_{\Phi} d\omega \quad \text{και} \quad \int_{\partial\Phi} \omega$$

και επαληθεύστε ότι είναι ίσα.

Άσκηση 29. Αποδείξτε την ύπαρξη συναρτήσεως α με τις ιδιότητες που απαιτούνται στην απόδειξη του Θεωρήματος 10.38 και αποδείξτε ότι η προκύπτουσα συνάρτηση F είναι κλάσεως $\mathcal{C}'$. (Οι δύο ισχυρισμοί είναι τετριμμένοι όταν το E είναι ανοικτό διάστημα ή ανοικτή σφαιρική περιοχή, εφόσον η α μπορεί να ληφθεί ως σταθερή. Ανατρέξτε στο Θεώρημα 9.42.)

Άσκηση 30. Εάν $\mathbf{N}$ είναι το διάνυσμα που δίδεται στην (135), τότε αποδείξτε ότι

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \end{bmatrix} = |\mathbf{N}|^2.$$

Επίσης, επαληθεύστε την ισότητα (137).

Άσκηση 31. Θεωρούμε ένα ανοικτό σύνολο $E \subset R^3$. Υποθέτουμε ότι $g, h \in \mathcal{C}''(E)$ και θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = g\nabla h.$$

(α) Αποδείξτε ότι

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = g\nabla^2 h + (\nabla g) \cdot (\nabla h),$$

όπου $\nabla^2 h = \nabla \cdot (\nabla h) = \sum_{i=1}^{3} \partial^2 h / \partial x_i^2$ είναι ο λεγόμενος *τελεστής του Laplace*[8] της h.

(β) Εάν Ω είναι ένα κλειστό υποσύνολο του E με θετικά προσανατολι-

[8] Σ. τ. Μ.: Pierre Simon Laplace (1749-1827). Μεγάλος Γάλλος μαθηματικός και φυσικός. Απέδειξε πρώτος την ευστάθεια του ηλιακού συστήματος με βάση το πρότυπο του Isaac Newton (1642-1727). Επίσης, θεωρείται ο θεμελιωτής της σύγχρονης φάσεως της Θεωρίας Πιθανοτήτων και ήταν αυτός που εισήγαγε στη Μαθηματική Φυσική την έννοια του δυναμικού.

Ο Laplace ήταν υιός αγρότη. Ύστερα από τις γυμνασιακές του σπουδές στη γενέτειρά του, ο Laplace εισήχθη στο Πανεπιστήμιο της Caen, το έτος 1765, με σκοπό να σπουδάσει Θεολογία. Σύντομα όμως εστράφη προς τα Μαθηματικά. Στην ηλικία των δεκαεννέα ετών ο Laplace διορίσθηκε καθηγητής Μαθηματικών, στη Στρατιωτική Σχολή των Παρισίων, ύστερα από πρόταση του Jean le Rond d' Alembert (1717-1783). Το έτος 1773 ο Laplace εξελέγη συνεργαζόμενο μέλος της Ακαδημίας των Επιστημών των Παρισίων και το 1785 εξελέγη τακτικό μέλος της Ακαδημίας. Το ίδιο έτος ο Laplace εξέτασε τον νεαρό Ναπολέοντα στις εξετάσεις του τελευταίου.

Στη διάρκεια της Γαλλικής Επαναστάσεως, ο Laplace βοήθησε για την εγκαθίδρυση του νέου μετρικού συστήματος, δίδασκε στην École Normale και, το έτος 1795, έγινε μέλος του Γαλλικού Ινστιτούτου. Αργότερα, γλύτωσε από καρατόμηση λόγω της προσφοράς του στην επιστήμη (και φυσικά στον στρατό).

Ύστερα από τη Γαλλική Επανάσταση, ο Laplace ασχολήθηκε με την πολιτική. Υπό τον Ναπολέοντα, έλαβε τον Σταυρό της Λεγεώνας της Τιμής, έγινε κόμης της Αυτοκρατορίας και για λίγο καιρό είχε αναλάβει το Υπουργείο Εσωτερικών. Ύστερα από την πτώση του Ναπολέοντα και την παλινόρθωση της μοναρχίας, ο Laplace άλλαξε πολιτική τοποθέτηση, υπέγραψε το διάταγμα εκτοπίσεως του Ναπολέοντα, δήλωσε αφοσίωση στον Λουδοβίκο XVIII και ονομάσθηκε μαρκήσιος.

Ο Laplace συνέγραψε μεταξύ άλλων ένα μνημειώδες έργο περί Ουράνιας Μηχανικής και δύο βιβλία Θεωρίας Πιθανοτήτων, τα οποία επηρέασαν σημαντικά τις κατοπινές επιστημονικές εξελίξεις. Κατηγορήθηκε έντονα για πολιτικό και επιστημονικό τυχοδιωκτισμό. Ακολουθούσε την πορεία του εκάστοτε πολιτικού ρεύματος και στα συγγράμματά του εξυμνούσε την εκάστοτε πολιτική κυβέρνηση. Χαρακτηριστικό είναι το γεγονός ότι σε κάθε νεώτερη έκδοση οποιασδήποτε εργασίας του, εξυμνούσε το εκάστοτε πολιτικό καθεστώς. Απεχθανόταν την ταπεινή καταγωγή του και για τον λόγο αυτό δεν υπάρχουν παρά ελάχιστα στοιχεία για τις πρώτες δεκαετίες της ζωής του, εφόσον έκανε τα πάντα για να τα κρύψει.

σμένο σύνορο $\partial\Omega$ (όπως στο Θεώρημα 10.51), τότε αποδείξτε ότι

$$\int_{\Omega} [g\nabla^2 h + (\nabla g)\cdot(\nabla h)]\, dV = \int_{\partial\Omega} g\frac{\partial h}{\partial n}\, dA,$$

όπου (κατά τα καθιερωμένα) γράφουμε $\partial h/\partial n$ στη θέση του $(\nabla h)\cdot \mathbf{n}$. (Επομένως, το $\partial h/\partial n$ είναι η διευθυντική παράγωγος της h κατά την κατεύθυνση του εξωτερικού ορθόθετου διανύσματος στο $\partial\Omega$, η λεγόμενη *ορθόθετη παράγωγος* της h.) Εναλλάξτε τις g και h, αφαιρέστε την προκύπτουσα ισότητα από την πρώτη για να αποκτήσετε την ισότητα

$$\int_{\Omega} (g\nabla^2 h - h\nabla^2 g)\, dV = \int_{\partial\Omega} \left(g\frac{\partial h}{\partial n} - h\frac{\partial g}{\partial n}\right) dA.$$

Οι ισότητες αυτές ονομάζονται *ταυτότητες του Green.*

(γ) Υποθέτουμε ότι η h είναι *αρμονική* στο E, δηλαδή ότι $\nabla^2 h = 0$. Λάβετε $g = 1$ και συνάγετε ότι

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial h}{\partial n}\, dA = 0.$$

Λάβετε $g = h$ και συνάγετε ότι $h = 0$ στο Ω εάν $h = 0$ στο $\partial\Omega$.

(δ) Δείξτε ότι οι ταυτότητες του Green ισχύουν και στο R^2.

Άσκηση 32. Θεωρούμε πραγματικό αριθμό δ με $0 < \delta < 1$. Ας είναι D το σύνολο των $(\theta, t) \in R^2$ με $0 \le \theta \le \pi$ και $-\delta \le t \le \delta$. Θεωρούμε την 2-επιφάνεια Φ στον R^3 με πεδίο παραμέτρων το D, η οποία ορίζεται μέσω των

$$\begin{aligned} x &= (1 - t\sin\theta)\cos 2\theta, \\ y &= (1 - t\sin\theta)\sin 2\theta, \\ z &= t\cos\theta, \end{aligned}$$

όπου $(x, y, z) = \Phi(\theta, t)$ $((\theta, t) \in D)$. Σημειώνουμε ότι $\Phi(\pi, t) = \Phi(0, -t)$ για κάθε $t \in [-\delta, \delta]$ και ότι η Φ είναι 1-1 στο υπόλοιπο του D.

Το πεδίο τιμών $M = \Phi(D)$ είναι γνωστό ως *λωρίδα του Möbius*[9]. Είναι το απλούστερο παράδειγμα μη προσανατολίσιμης επιφάνειας.

[9] Σ. τ. Μ.: August Ferdinand Möbius (1790-1868). Γερμανός μαθηματικός. Εργάσθηκε στη Γεωμετρία και στην Αστρονομία.

Αποδείξτε τους διαφόρους ισχυρισμούς που εμφανίζονται στην παρακάτω περιγραφή:

Θέτουμε $\mathbf{p}_1 = (0, -\delta)$, $\mathbf{p}_2 = (\pi, -\delta)$, $\mathbf{p}_3 = (\pi, \delta)$, $\mathbf{p}_4 = (0, \delta)$, $\mathbf{p}_5 = \mathbf{p}_1$. Επίσης, θέτουμε $\gamma_i = [\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}]$ και $\Gamma_i = \Phi \circ \gamma_i$ για $i = 1, \ldots, 4$. Τότε,

$$\partial\Phi = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4.$$

Θέτουμε $\mathbf{a} = (1, 0, -\delta)$ και $\mathbf{b} = (1, 0, \delta)$. Τότε,

$$\Phi(\mathbf{p}_1) = \Phi(\mathbf{p}_3) = \mathbf{a}, \quad \Phi(\mathbf{p}_2) = \Phi(\mathbf{p}_4) = \mathbf{b}$$

και το $\partial\Phi$ μπορεί να περιγραφεί ως ακολούθως:

Η Γ_1 περιελίσσεται από το $\mathbf{a}$ στο $\mathbf{b}$. Η προβολή της στο (x, y)-επίπεδο έχει αριθμό περιστροφής ίσο με $+1$ γύρω από την αρχή. (Ανατρέξτε στην Άσκηση 23 του Κεφαλαίου 8.)

$\Gamma_2 = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$.

Η Γ_3 περιελίσσεται από το $\mathbf{a}$ στο $\mathbf{b}$. Η προβολή της στο (x, y)-επίπεδο έχει αριθμό περιστροφής ίσο με -1 γύρω από την αρχή.

$\Gamma_4 = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$.

Άρα, $\partial\Phi = \Gamma_1 + \Gamma_3 + 2\Gamma_2$.

Εάν κινηθούμε από το $\mathbf{a}$ στο $\mathbf{b}$ κατά μήκος της Γ_1 και συνεχίσουμε κατά μήκος της «πλευράς» του M έως ότου να επιστρέψουμε στο $\mathbf{a}$, τότε η καμπύλη

Ο Möbius εισήχθη στο Πανεπιστήμιο της Λειψίας, στο τμήμα της Νομικής, το έτος 1809. Γρήγορα έστρεψε τον ενδιαφέρον του προς τα Μαθηματικά και την Αστρονομία και, το έτος 1813, πήγε στο Πανεπιστήμιο του Göttingen, όπου και φοίτησε υπό τον Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Αργότερα, πήγε στη Halle, όπου φοίτησε στο τοπικό πανεπιστήμιο υπό τον Johann Friedrich Pfaff (1765-1825), τον καθηγητή του Gauss. Έλαβε το διδακτορικό του δίπλωμα το έτος 1814 από το Πανεπιστήμιο της Λειψίας. Στη διάρκεια της συγγραφής της διδακτορικής διατριβής του, υπήρξε εκ μέρους των αρχών μία προσπάθεια στρατολόγησής του στον Πρωσικό στρατό, την οποία και απέφυγε.

Το έτος 1815, ο Möbius διορίσθηκε υφηγητής και ένα έτος αργότερα διορίσθηκε στην έδρα της Αστρονομίας και Ανώτερης Μηχανικής του Πανεπιστημίου της Λειψίας, ως έκτακτος καθηγητής. Λόγω κωλυμάτων διοικητικής φύσεως, δεν έγινε τακτικός καθηγητής, παρά μόνο το έτος 1844. Υπό την επίβλεψη του Möbius κατασκευάσθηκε το αστεροσκοπείο της Λειψίας μεταξύ των ετών 1818 και 1821. Το έτος 1848 ο Möbius έγινε διευθυντής του αστεροσκοπείου. Του άξιζε σαφώς καλύτερη θέση, αλλά ο ίδιος ο Möbius δεν το πίστεψε ποτέ αυτό διότι του έλειπε η αυτοπεποίθηση.

που έχει διαγραφεί είναι η

$$\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_3,$$

η οποία μπορεί επίσης να αναπαρασταθεί από το πεδίο παραμέτρων $[0, 2\pi]$ μέσω των εξισώσεων

$$\begin{aligned} x &= (1 + \delta \sin\theta)\cos 2\theta, \\ y &= (1 + \delta \sin\theta)\sin 2\theta, \qquad (\theta \in [0, 2\pi]) \\ z &= -\delta \cos\theta. \end{aligned}$$

Πρέπει να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι $\Gamma \neq \partial\Phi$: Θεωρούμε την 1-μορφή η των Ασκήσεων 21 και 22. Εφόσον $d\eta = 0$, το θεώρημα του Stokes φανερώνει ότι

$$\int_{\partial\Phi} \eta = 0.$$

Όμως, παρά το γεγονός ότι η Γ είναι το «γεωμετρικό» σύνορο του M, έχουμε ότι

$$\int_{\Gamma} \eta = 4\pi.$$

Τέτοιου είδους ασάφειες αποφεύγονται όταν ο τύπος του Stokes (Θεώρημα 10.50) διατυπωθεί μόνον για προσανατολίσιμες επιφάνειες Φ.

Κεφάλαιο 11

Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ LEBESGUE

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να παρουσιασθούν οι θεμελιώδεις έννοιες της Θεωρίας Μέτρου και Ολοκληρώσεως του Lebesgue[1] και να

[1] Σ. τ. Μ.: Henri Léon Lebesgue (1875-1941). Σπουδαίος Γάλλος μαθηματικός. Είναι ο θεμελιωτής της σύγχρονης Θεωρίας Ολοκληρώσεως. Επίσης, συνεισέφερε στην Τοπολογία, στη Θεωρία Δυναμικού και στην Ανάλυση Fourier.

Ο Lebesgue σπούδασε στην École Normale. Δίδαξε στο Lycée του Nancy κατά τα έτη 1899 έως και 1901. Το έτος 1902 έγινε δεκτή η διδακτορική του διατριβή στο Πανεπιστήμιο του Nancy. Έγινε βοηθός στο Πανεπιστήμιο του Rennes και περί το έτος 1906 έγινε καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Poitiers. Ο Lebesgue διορίσθηκε, το έτος 1910, καθηγητής στο Πανεπιστήμιο της Σορβόννης. Δύο έτη αργότερα έγινε καθηγητής στο Γαλλικό Κολέγιο. Το έτος 1922 ο Lebesgue εξελέγη μέλος της Ακαδημίας των Επιστημών των Παρισίων. Δύο έτη αργότερα ο Lebesgue ανεκηρύχθη επίτιμο μέλος της Βασιλικής Εταιρίας του Λονδίνου και αποδειχθούν ορισμένα από τα βασικά θεωρήματα εντός γενικότερης τοποθετήσεως, δίχως να επισκιασθούν οι κύριες γραμμές αναπτύξεως από την παράθεση πλήθους τετριμμένων λεπτομερειών. Επομένως, σε ορισμένες περιπτώσεις οι αποδείξεις απλώς σκιαγραφούνται και ορισμένες από τις προτάσεις διατυπώνονται δίχως απόδειξη. Όμως, ο αναγνώστης που έχει εξοικειωθεί με τις τεχνικές του προηγουμένου κεφαλαίου δεν θα δυσκολευθεί να συμπληρώσει τα βήματα που λείπουν.

Η θεωρία του κατά Lebesgue ολοκληρώματος μπορεί να αναπτυχθεί με αρκετούς διαφορετικούς τρόπους. Επιλέγουμε να παρουσιάσουμε μόνον έναν τρόπο. Για εναλλακτικές προσεγγίσεις στο θέμα συνιστώνται οι περισσότερο εξειδικευμένες πραγματείες που αναφέρονται στη Βιβλιογραφία.

ΣΥΝΟΛΟΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Εάν A και B είναι δύο σύνολα, τότε γράφουμε $A - B$ για να συμβολίσουμε το σύνολο των στοιχείων $x \in A$ με $x \notin B$. Ο συμβολισμός αυτός δεν υπονοεί απαραιτήτως ότι $B \subset A$. Συμβολίζουμε το κενό σύνολο με 0 και ονομάζουμε τα A και B αποσυνδετά εάν και μόνον εάν $A \cap B = 0$.

Ορισμός 11.1. Μία οικογένεια $\mathcal{R}$ αποτελούμενη από σύνολα ονομάζεται

το έτος 1940 εξελέγη πλήρες μέλος της.

Ο Lebesgue θεωρείται από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς της εποχής του. Η εργασία του Lebesgue απείχε κατά πολύ από τις επικρατούσες μαθηματικές θεωρίες, και για τον λόγο αυτόν δέχθηκε οξεία κριτική, φτάνοντας στο σημείο να αμφισβητήσει ο ίδιος τον εαυτό του. Φοβούμενος ότι η θεωρία του είναι απλώς μία γενίκευση, ο Lebesgue δήλωνε ότι «συρρικνώνοντας τα Μαθηματικά σε γενικές θεωρίες, θα καταλήγαμε σε μία ωραία μορφή, χωρίς ουσιώδες περιεχόμενο. Σύντομα θα έσβηναν». Οι μεταγενέστερες εξελίξεις απέδειξαν ότι οι φόβοι του ήταν αβάσιμοι. Όμως, τον επηρέασαν αρνητικά στην έρευνά του. Η αξία της εργασίας του Lebesgue βρήκε την πρέπουσα αναγνώριση και σήμερα η Θεωρία της κατά Lebesgue Ολοκληρώσεως θεωρείται ως ένα από τα σπουδαιότερα επιτεύγματα της Αναλύσεως.

Ο Lebesgue συνέγραψε περίπου πενήντα εργασίες και δύο σημαντικά βιβλία Αναλύσεως.

δακτύλιος εάν και μόνον εάν οι $A \in \mathcal{R}$ και $B \in \mathcal{R}$ συνεπάγονται τις

$$A \cup B \in \mathcal{R}, \quad A - B \in \mathcal{R}. \tag{1}$$

Εφόσον $A \cap B = A - (A - B)$, έχουμε επίσης ότι $A \cap B \in \mathcal{R}$ εάν ο $\mathcal{R}$ είναι δακτύλιος.

Ένας δακτύλιος $\mathcal{R}$ ονομάζεται *σ-δακτύλιος* εάν και μόνον εάν

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R} \tag{2}$$

για οποιαδήποτε σύνολα $A_1, A_2, A_3, \ldots$ που ανήκουν στον $\mathcal{R}$. Εφόσον

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 - \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1 - A_n),$$

έχουμε επίσης ότι

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$$

εάν ο $\mathcal{R}$ είναι σ-δακτύλιος.

Ορισμός 11.2. Θα ονομάζουμε *συνολοσυνάρτηση* ορισμένη στον δακτύλιο $\mathcal{R}$ μία συνάρτηση ϕ που αντιστοιχεί σε κάθε σύνολο $A \in \mathcal{R}$ έναν αριθμό στο εκτεταμένο αριθμητικό σύστημα των πραγματικών αριθμών. Η ϕ ονομάζεται *προσθετική* εάν και μόνον εάν για οποιαδήποτε $A, B \in \mathcal{R}$ με $A \cap B = 0$ ισχύει ότι

$$\phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B) \tag{3}$$

και η ϕ ονομάζεται *αριθμησίμως προσθετική* εάν και μόνον εάν για οποιαδήποτε σύνολα $A_1, A_2, A_3, \ldots$ που ανήκουν στον $\mathcal{R}$, με $A_i \cap A_j = 0$ για οποιουσδήποτε δείκτες i, j με $i \neq j$, και $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$ ισχύει ότι

$$\phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n). \tag{4}$$

Θα υποθέτουμε πάντοτε ότι το πεδίο τιμών της ϕ δεν περιέχει συγχρόνως τα $+\infty$ και $-\infty$. Στην αντίθετη περίπτωση, η δεξιά πλευρά της (3) μπορεί να μην έχει νόημα. Επίσης, εξαιρούμε συνολοσυναρτήσεις με μοναδική τιμή το $+\infty$ ή το $-\infty$.

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι η αριστερή πλευρά της (4) είναι ανεξάρτητη της σειράς με την οποία διατάσσονται τα σύνολα $A_1, A_2, A_3, \ldots$. Επομένως, το Θεώρημα 3.54. φανερώνει ότι η δεξιά πλευρά της (4) συγκλίνει απολύτως, εάν συγκλίνει. Γενικά, εάν δεν συγκλίνει, τότε τα μερικά αθροίσματά της τείνουν προς το $+\infty$ ή το $-\infty$.

Εάν η ϕ είναι προσθετική, τότε επαληθεύονται εύκολα οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$\phi(0) = 0 \tag{5}$$

και

$$\phi(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \phi(A_1) + \cdots + \phi(A_n) \tag{6}$$

εάν $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R}$ με $A_i \cap A_j = 0$ για οποιουσδήποτε δείκτες i, j με $i \neq j$. Επίσης,

$$\phi(A_1 \cup A_2) + \phi(A_1 \cap A_2) = \phi(A_1) + \phi(A_2) \tag{7}$$

εάν $A_1, A_2 \in \mathcal{R}$.

Υποθέτουμε ότι $\phi(A) \geq 0$ για κάθε $A \in \mathcal{R}$. Εάν $A_1, A_2 \in \mathcal{R}$ με $A_1 \subset A_2$, τότε

$$\phi(A_1) \leq \phi(A_2). \tag{8}$$

Λόγω της (8), οι μη αρνητικές προσθετικές συνολοσυναρτήσεις ονομάζονται *μονότονες*.

Εάν $A, B \in \mathcal{R}$ με $B \subset A$ και $|\phi(B)| < +\infty$, τότε

$$\phi(A - B) = \phi(A) - \phi(B). \tag{9}$$

Θεώρημα 11.3. *Υποθέτουμε ότι ϕ είναι μία αριθμησίμως προσθετική συνολοσυνάρτηση σε έναν δακτύλιο $\mathcal{R}$. Θεωρούμε $A_n \in \mathcal{R}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) με $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$. Θεωρούμε επίσης ότι $A \in \mathcal{R}$, όπου*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Τότε, καθώς $n \to \infty$,

$$\phi(A_n) \to \phi(A).$$

Απόδειξη. Θέτουμε $B_1 = A_1$ και

$$B_n = A_n - A_{n-1} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Τότε, $B_i \cap B_j = 0$ για οποιουσδήποτε δείκτες i, j με $i \neq j$, $A_n = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ ($n = 1, 2, \dots$) και $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Άρα,

$$\phi(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \phi(B_i) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

και

$$\phi(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi(B_i).$$

□

Η ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ LEBESGUE

Ορισμός 11.4. Θεωρούμε τον p-διάστατο Ευκλείδειο χώρο R^p. Με τον όρο *διάστημα* στον R^p εννοούμε το σύνολο των σημείων $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)$ με

$$a_i \leq x_i \leq b_i \quad (i = 1, \dots, p) \tag{10}$$

(όπου οι a_i, b_i ($i = 1, \dots, p$) είναι πραγματικοί αριθμοί) ή το σύνολο των σημείων το οποίο χαρακτηρίζεται από την (10) όταν οποιοδήποτε από τα σύμβολα $\leq$ αντικατασταθεί με το $<$. Η περίπτωση όπου $a_i = b_i$ για κάποιον δείκτη i δεν εξαιρείται. Ιδιαιτέρως, το κενό σύνολο είναι διάστημα.

Ένα σύνολο A ονομάζεται *στοιχειώδες* εάν και μόνον εάν ισούται με την ένωση πεπερασμένου πλήθους διαστημάτων.

Εάν I είναι ένα διάστημα που περιγράφεται από την (10), τότε ορίζουμε

$$m(I) = \prod_{i=1}^{p}(b_i - a_i),$$

ασχέτως εάν στις (10) περιλαμβάνουμε ή εξαιρούμε ορισμένες ισότητες.

Εάν $A = I_1 \cup \cdots \cup I_n$, όπου τα $I_1, \ldots, I_n$ είναι αποσυνδετά διαστήματα, τότε θέτουμε

$$m(A) = m(I_1) + \cdots + m(I_n). \tag{11}$$

Συμβολίζουμε με $\mathcal{E}$ την οικογένεια των στοιχειωδών υποσυνόλων του R^p.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να επαληθευθούν οι παρακάτω ιδιότητες:

Η οικογένεια $\mathcal{E}$ είναι δακτύλιος αλλά όχι σ-δακτύλιος. (12)

Εάν $A \in \mathcal{E}$, τότε το A ισούται με την ένωση πεπερασμένου πλήθους *αποσυνδετών διαστημάτων.* (13)

Εάν $A \in \mathcal{E}$,τότε η τιμή $m(A)$ είναι καλά ορισμένη από την (11): Δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις του A από ενώσεις πεπερασμένου πλήθους αποσυνδετών διαστημάτων δίδουν την ίδια τιμή για το $m(A)$. (14)

Η συνολοσυνάρτηση m είναι προσθετική στην $\mathcal{E}$. (15)

Σημειώνουμε ότι εάν $p = 1, 2, 3$, τότε η m παριστάνει αντιστοίχως το μήκος, το εμβαδό και τον όγκο.

Ορισμός 11.5. Μία μη αρνητική προσθετική συνολοσυνάρτηση ϕ, ορισμένη στον $\mathcal{E}$, ονομάζεται *ομαλή* εάν και μόνον εάν αληθεύει το επόμενο: Για κάθε $A \in \mathcal{E}$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχουν σύνολα $F, G \in \mathcal{E}$ ούτως ώστε το F να είναι κλειστό, το G να είναι ανοικτό, $F \subset A \subset G$ και

$$\phi(G) - \varepsilon \leq \phi(A) \leq \phi(F) + \varepsilon. \tag{16}$$

Παράδειγμα 11.6.

(α) *Η συνολοσυνάρτηση m είναι ομαλή.*

Εάν A είναι ένα διάστημα, τότε παρατηρούμε αμέσως ότι ικανοποιούνται για αυτό οι απαιτήσεις του Ορισμού 11.5. Η γενική περίπτωση προκύπτει τώρα από την (13).

(β) Θεωρούμε ότι $R^p = R^1$. Ας είναι α μία αύξουσα συνάρτηση, ορισμένη στον R^1. Θέτουμε

$$\begin{aligned}
\mu([a,b)) &= \alpha(b-) - \alpha(a-),\\
\mu([a,b]) &= \alpha(b+) - \alpha(a-),\\
\mu((a,b]) &= \alpha(b+) - \alpha(a+),\\
\mu((a,b)) &= \alpha(b-) - \alpha(a+),
\end{aligned}$$

όπου $[a,b)$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $a \le x < b$ και ομοίως για τα υπόλοιπα. Λόγω της πιθανής υπάρξεως ασυνεχειών της α, οι παραπάνω περιπτώσεις πρέπει όντως να διακριθούν. Εάν η μ ορισθεί για στοιχειώδη σύνολα όπως έχει ορισθεί η m στην (11), τότε η μ είναι ομαλή συνολοσυνάρτηση στον $\mathcal{E}$. Η απόδειξη είναι παρεμφερής με εκείνη του (α).

Ο επόμενος στόχος είναι να δειχθεί ότι κάθε ομαλή συνολοσυνάρτηση στον $\mathcal{E}$ μπορεί να επεκταθεί σε μία αριθμησίμως προσθετική συνολοσυνάρτηση, ορισμένη σε έναν σ-δακτύλιο που περιέχει τον $\mathcal{E}$.

Ορισμός 11.7. Ας είναι μ μία ομαλή και πεπερασμένη συνολοσυνάρτηση, ορισμένη στον $\mathcal{E}$. Θεωρούμε τις αριθμήσιμες καλύψεις ενός συνόλου $E \subset R^p$ από ανοικτά στοιχειώδη σύνολα A_n ($n = 1, 2, 3, \dots$):

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Ορίζουμε

$$\mu^\star(E) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), \tag{17}$$

όπου το μέγιστο κάτω φράγμα λαμβάνεται υπεράνω όλων των αριθμησίμων καλύψεων του E από ανοικτά στοιχειώδη σύνολα. Το $\mu^\star(E)$ ονομάζεται *το αντίστοιχο στο μ εξωτερικό μέτρο του E.*

Είναι σαφές ότι $\mu^\star(E) \geq 0$ για οποιοδήποτε σύνολο $E \subset R^p$ και ότι

$$\mu^\star(E_1) \leq \mu^\star(E_2) \tag{18}$$

για οποιαδήποτε υποσύνολα E_1, E_2 του R^p με $E_1 \subset E_2$.

Θεώρημα 11.8.

(α) *Για κάθε $A \in \mathcal{E}$ ισχύει ότι $\mu^\star(A) = \mu(A)$.*

(β) *Εάν $E_1, E_2, E_3, \ldots$ είναι υποσύνολα του R^p και $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, τότε*

$$\mu^\star(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^\star(E_n). \tag{19}$$

Σημειώνουμε ότι ο ισχυρισμός στο (α) είναι ακριβώς ότι το $\mu^\star$ είναι επέκταση του μ από τον $\mathcal{E}$ στην οικογένεια των υποσυνόλων του R^p. Επίσης, η ιδιότητα (19) ονομάζεται *υποπροσθετικότητα.*

Απόδειξη. Θεωρούμε $A \in \mathcal{E}$ και $\varepsilon > 0$.

Η ομαλότητα του μ φανερώνει ότι το A περιέχεται σε ένα ανοικτό στοιχειώδες σύνολο G ούτως ώστε $\mu(G) \leq \mu(A) + \varepsilon$. Εφόσον $\mu^\star(A) \leq \mu(G)$, και ο ε είναι τυχών θετικός αριθμός, έπεται ότι

$$\mu^\star(A) \leq \mu(A). \tag{20}$$

Ο ορισμός του $\mu^\star$ φανερώνει ότι υπάρχει μία ακολουθία $\{A_n\}$ ($n = 1, 2, \ldots$) ανοικτών στοιχειωδών συνόλων με την ένωση τους να περιέχει το A ούτως ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^\star(A) + \varepsilon.$$

Η ομαλότητα του μ φανερώνει ότι το A περιέχει ένα κλειστό στοιχειώδες σύνολο F ούτως ώστε $\mu(F) \geq \mu(A) - \varepsilon$. Εφόσον το F είναι συμπαγές, λαμβάνουμε ότι

$$F \subset A_1 \cup \cdots \cup A_N$$

για κάποιον θετικό ακέραιο αριθμό N. Επομένως,

$$\mu(A) \leq \mu(F) + \varepsilon \leq \mu(A_1 \cup \cdots \cup A_N) + \varepsilon \leq \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) + \varepsilon \leq \mu^\star(A) + 2\varepsilon.$$

Το παραπάνω σε συνδυασμό με την (20) χορηγεί το (α).

Εν συνεχεία, υποθέτουμε ότι $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ όπως στη διατύπωση του (β) και θεωρούμε ότι $\mu^\star(E_n) < +\infty$ για κάθε δείκτη n. Δεδομένου $\varepsilon > 0$, υπάρχουν καλύψεις $\{A_{nk}\}$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ του E_n από ανοικτά στοιχειώδη σύνολα ούτως ώστε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{nk}) \leq \mu^\star(E_n) + 2^{-n}\varepsilon \tag{21}$$

για οποιονδήποτε δείκτη n. Τότε,

$$\mu^\star(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{nk}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^\star(E_n) + \varepsilon$$

και από αυτό έπεται η (19). Στην περίπτωση που εξαιρέσαμε, δηλαδή εάν $\mu^\star(E_n) = +\infty$ για κάποιον δείκτη n, η (19) είναι προφανώς τετριμμένη. $\square$

Ορισμός 11.9. Για οποιαδήποτε σύνολα $A, B \subset R^p$ ορίζουμε

$$S(A, B) = (A - B) \cup (B - A), \tag{22}$$

$$d(A, B) = \mu^\star(S(A, B)). \tag{23}$$

Γράφουμε $A_n \to A$ καθώς $n \to \infty$, εάν και μόνον εάν

$$\lim_{n\to\infty} d(A, A_n) = 0.$$

Το A ονομάζεται *πεπερασμένα μ-μετρήσιμο* εάν και μόνον εάν υπάρχει μία ακολουθία στοιχειωδών συνόλων $\{A_n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ με $A_n \to A$ καθώς $n \to \infty$. Δηλώνουμε το γεγονός αυτό γράφοντας $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$.

Το A ονομάζεται *μ-μετρήσιμο* εάν και μόνον εάν ισούται με την ένωση μίας αριθμήσιμης συλλογής πεπερασμένα μ-μετρήσιμων συνόλων. Δηλώνουμε το γεγονός αυτό γράφοντας $A \in \mathcal{M}(\mu)$.

Το $S(A, B)$ ονομάζεται *συμμετρική διαφορά* των A, B. Θα διαπιστώσουμε αργότερα ότι η d είναι ουσιαστικά συνάρτηση αποστάσεως.

Από το επόμενο θεώρημα θα προκύψει η επιθυμητή επέκταση του μ.

Θεώρημα 11.10. *Η οικογένεια $\mathcal{M}(\mu)$ είναι σ-δακτύλιος και η $\mu^\star$ είναι αριθμησίμως προσθετική συνολοσυνάρτηση στον $\mathcal{M}(\mu)$.*

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος, θα αναπτύξουμε ορισμένες από τις ιδιότητες των S και d.
Για τυχόντα υποσύνολα A, B, C, A_1, A_2, B_1, B_2 του R^p έχουμε ότι

$$S(A, B) = S(B, A), \qquad S(A, A) = 0, \tag{24}$$

$$S(A, B) \subset S(A, C) \cup S(C, B), \tag{25}$$

$$\left.\begin{array}{l} S(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \\ S(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \\ S(A_1 - A_2, B_1 - B_2) \end{array}\right\} \subset S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2). \tag{26}$$

Η (24) είναι σαφής και η (25) έπεται από τις σχέσεις

$$(A - B) \subset (A - C) \cup (C - B), \qquad (B - A) \subset (C - A) \cup (B - C).$$

Η πρώτη έγκλειση της (26) προκύπτει από τη σχέση

$$(A_1 \cup A_2) - (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 - B_1) \cup (A_2 - B_2).$$

Εν συνεχεία, συμβολίζοντας με E^c το συμπλήρωμα ενός συνόλου E, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} S(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) &= S(A_1^c \cup A_2^c, B_1^c \cup B_2^c) \\ &\subset S(A_1^c, B_1^c) \cup S(A_2^c, B_2^c) \\ &= S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2). \end{aligned}$$

Η τελευταία έγκλειση της (26) προκύπτει εάν παρατηρήσουμε ότι

$$A_1 - A_2 = A_1 \cap A_2^c.$$

Από τις (23), (18) και (19) και τα παραπάνω έπεται ότι

$$d(A, B) = d(B, A), \qquad d(A, A) = 0, \tag{27}$$

$$d(A, B) \le d(A, C) + d(C, B), \tag{28}$$

$$\left.\begin{array}{l} d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \\ d(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \\ d(A_1 - A_2, B_1 - B_2) \end{array}\right\} \le d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2). \tag{29}$$

Οι σχέσεις (27) και (28) φανερώνουν ότι η d ικανοποιεί τις απαιτήσεις του Ορισμού 2.15, εκτός από το γεγονός ότι η ισότητα $d(A, B) = 0$ δεν συνεπάγεται πάντοτε την $A = B$. Επί παραδείγματι, εάν $\mu = m$, το A είναι αριθμήσιμο και το B είναι κενό, τότε

$$d(A, B) = m^\star(A) = 0.$$

Για να το αποδείξουμε αυτό θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και καλύπτουμε το n τάξεως σημείο του A με ένα διάστημα I_n ούτως ώστε

$$m(I_n) < 2^{-n}\varepsilon.$$

Όμως, εάν ορίσουμε δύο σύνολα A, B να είναι ισοδύναμα ως προς την d εάν και μόνον εάν

$$d(A, B) = 0,$$

τότε διαμερίζουμε το σύνολο των υποσυνόλων του R^p σε κλάσεις ισοδυναμίας και η d καθιστά το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας μετρικό χώρο. Τότε, ο $\mathcal{M}_F(\mu)$ είναι η κλειστή θήκη του $\mathcal{E}$. Η ερμηνεία αυτή δεν κατέχει ουσιώδη ρόλο στην απόδειξη, όμως επεξηγεί την υποκείμενη ιδέα.

Χρειαζόμαστε μία ακόμη ιδιότητα της d:

$$|\mu^\star(A) - \mu^\star(B)| \le d(A, B) \tag{30}$$

εάν $A, B \subset R^p$ με τουλάχιστον ένα από τα $\mu^\star(A)$, $\mu^\star(B)$ πεπερασμένο. Προς αυτό, υποθέτουμε ότι $0 \le \mu^\star(B) \le \mu^\star(A)$. Τότε, η (28) φανερώνει ότι

$$d(A, 0) \le d(A, B) + d(B, 0),$$

δηλαδή

$$\mu^\star(A) \le d(A, B) + \mu^\star(B).$$

Εφόσον το $\mu^\star(B)$ είναι πεπερασμένο, έπεται ότι

$$\mu^\star(A) - \mu^\star(B) \le d(A, B).$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 11.10. Υποθέτουμε ότι $A, B \in \mathcal{M}_F(\mu)$. Επιλέγουμε ακολουθίες $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ ούτως ώστε $A_n \to A$, $B_n \to B$ καθώς $n \to \infty$. Τότε, οι (29) και (30) φανερώνουν ότι

$$A_n \cup B_n \to A \cup B, \tag{31}$$

$$A_n \cap B_n \to A \cap B, \tag{32}$$

$$A_n - B_n \to A - B, \tag{33}$$

$$\mu^\star(A_n) \to \mu^\star(A) \tag{34}$$

καθώς $n \to \infty$ και ότι $\mu^\star(A) \le +\infty$ εφόσον $d(A_n, A) \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Από τις (31) και (33) έπεται ότι η οικογένεια $\mathcal{M}_F(\mu)$ είναι δακτύλιος. Από την (7) έπεται ότι

$$\mu(A_n) + \mu(B_n) = \mu(A_n \cup B_n) + \mu(A_n \cap B_n)$$

για κάθε δείκτη n. Εάν θεωρήσουμε $n \to \infty$, τότε, λόγω της (34) και του Θεωρήματος 11.8(α), λαμβάνουμε ότι

$$\mu^\star(A) + \mu^\star(B) = \mu^\star(A \cup B) + \mu^\star(A \cap B).$$

Εάν $A \cap B = 0$, τότε $\mu^\star(A \cap B) = 0$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι η $\mu^\star$ είναι προσθετική στον $\mathcal{M}_F(\mu)$.

Θεωρούμε $A \in \mathcal{M}(\mu)$. Τότε, το A αναπαριστάται ως ένωση μίας αριθμήσιμης συλλογής *αποσυνδετών* συνόλων του $\mathcal{M}_F(\mu)$. Διότι εάν έχουμε ότι $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n$ με $A'_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, τότε θέτουμε $A_1 = A'_1$ και

$$A_n = (A'_1 \cup \cdots \cup A'_n) - (A'_1 \cup \cdots \cup A'_{n-1}) \qquad (n = 2, 3, 4 \dots).$$

Η ισότητα

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \tag{35}$$

αποτελεί την ζητούμενη αναπαράσταση. Από την (19) λαμβάνουμε ότι

$$\mu^\star(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^\star(A_n). \tag{36}$$

Από την άλλη πλευρά, ισχύει ότι $A_1 \cup \cdots \cup A_n \subset A$ για κάθε δείκτη n. Επομένως, από την προσθετικότητα της $\mu^\star$ στον $\mathcal{M}_F(\mu)$ λαμβάνουμε ότι

$$\mu^\star(A) \geq \mu^\star(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mu^\star(A_1) + \cdots + \mu^\star(A_n). \tag{37}$$

Οι ισότητες (36) και (37) συνεπάγονται ότι

$$\mu^\star(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^\star(A_n). \tag{38}$$

Υποθέτουμε ότι το $\mu^\star(A)$ είναι πεπερασμένο. Για $n = 1, 2, 3, \dots$ θέτουμε $B_n = A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Τότε, η (38) φανερώνει ότι

$$d(A, B_n) = \mu^\star\Big(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^\star(A_i) \to 0$$

καθώς $n \to \infty$. Επομένως, $B_n \to A$ καθώς $n \to \infty$. Εφόσον $B_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, διαπιστώνουμε απλά ότι $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$.

Επομένως, έχουμε αποδείξει ότι $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$ εάν $A \in \mathcal{M}(\mu)$ και $\mu^\star(A) < +\infty$.

Είναι σαφές τώρα ότι η $\mu^\star$ είναι αριθμησίμως προσθετική στον $\mathcal{M}(\mu)$. Διότι εάν

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

όπου $\{A_n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ είναι ακολουθία αποσυνδετών συνόλων του $\mathcal{M}(\mu)$, τότε έχουμε αποδείξει ότι ισχύει η (38) όταν $\mu^\star(A_n) < +\infty$ για κάθε δείκτη n. Στην άλλη περίπτωση, η (38) αποδεικνύεται τετριμμένα.

Εν τέλει, μένει να αποδείξουμε ότι ο $\mathcal{M}(\mu)$ είναι σ-δακτύλιος. Εάν έχουμε $A_n \in \mathcal{M}(\mu)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, τότε είναι σαφές ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}(\mu)$ (Θεώρημα 2.12). Υποθέτουμε ότι $A, B \in \mathcal{M}(\mu)$ και ότι

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

όπου $A_n, B_n \in \mathcal{M}(\mu)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$. Τότε, η ισότητα

$$A_n \cap B = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_n \cap B_i)$$

φανερώνει ότι $A_n \cap B \in \mathcal{M}(\mu)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$. Εφόσον

$$\mu^\star(A_n \cap B) \leq \mu^\star(A_n) < +\infty,$$

έπεται ότι $A_n \cap B \in \mathcal{M}_F(\mu)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$. Άρα, $A_n - B \in \mathcal{M}_F(\mu)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ και επομένως $A - B \in \mathcal{M}_F(\mu)$, εφόσον $A - B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - B)$.

Εάν $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$, τότε αντικαθιστούμε το $\mu^\star(A)$ με $\mu(A)$. Άρα, η μ, η οποία αρχικά ορίσθηκε στο $\mathcal{E}$, έχει επεκταθεί τώρα σε μία αριθμησίμως προσθετική συνολοσυνάρτηση στον σ-δακτύλιο $\mathcal{M}(\mu)$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται *μέτρο*. Στην ειδική περίπτωση όπου $\mu = m$, η μ ονομάζεται το *μέτρο Lebesgue* του R^p.

Παρατήρηση 11.11.

(α) Εάν A είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του R^p, τότε $A \in \mathcal{M}(\mu)$. Διότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του R^p ισούται με την ένωση μίας αριθμήσιμης συλλογής ανοικτών διαστημάτων. Προς αυτό, είναι επαρκές να κατασκευασθεί μία αριθμήσιμη βάση της οποίας τα μέλη είναι ανοικτά διαστήματα.

Λαμβάνοντας συμπληρώματα, συνάγουμε ότι κάθε κλειστό υποσύνολο του R^p ανήκει στον $\mathcal{M}(\mu)$.

(β) Εάν $A \in \mathcal{M}(\mu)$ και $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει κλειστό σύνολο F και ανοικτό σύνολο G ούτως ώστε

$$F \subset A \subset G$$

και

$$\mu(G - A) < \varepsilon, \qquad \mu(A - F) < \varepsilon. \tag{39}$$

Η πρώτη ανισότητα ισχύει διότι το $\mu^\star$ έχει ορισθεί μέσω καλύψεων *ανοικτών* στοιχειωδών διαστημάτων. Η δεύτερη ανισότητα προκύπτει χρησιμοποιώντας την πρώτη και λαμβάνοντας συμπληρώματα.

(γ) Ένα σύνολο E ονομάζεται *σύνολο Borel* εάν και μόνον εάν μπορεί να προκύψει από ανοικτά σύνολα μέσω αριθμησίμου πλήθους ενώσεων, τομών και συμπληρωμάτων. Η συλλογή $\mathcal{B}$ των συνόλων Borel του R^p είναι σ-δακτύλιος. Ιδιαιτέρως, είναι ο μικρότερος σ-δακτύλιος που περιέχει όλα τα ανοικτά σύνολα. Σύμφωνα με το (α), εάν $E \in \mathcal{B}$, τότε $E \in \mathcal{M}(\mu)$.

(δ) Εάν $A \in \mathcal{M}(\mu)$, τότε υπάρχουν σύνολα Borel F και G ούτως ώστε $F \subset A \subset G$ και

$$\mu(G - A) = \mu(A - F) = 0. \tag{40}$$

Αυτό προκύπτει από το (β), εάν λάβουμε $\varepsilon = 1/n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ και θεωρήσουμε $n \to \infty$.

Εφόσον $A = F \cup (A - F)$, έπεται ότι κάθε $A \in \mathcal{M}(\mu)$ ισούται με την ένωση ενός συνόλου Borel και ενός συνόλου μέτρου 0.

Τα σύνολα Borel είναι μ-μετρήσιμα για κάθε ομαλό μέτρο μ στον R^p. Όμως, τα σύνολα μέτρου 0 (δηλαδή τα σύνολα E με $\mu^\star(E) = 0$) μπορεί να διαφέρουν για τα διάφορα μέτρα μ.

(ε) Για κάθε μέτρο μ η συλλογή των συνόλων μέτρου 0 αποτελεί σ-δακτύλιο.

(στ) Στην περίπτωση του μέτρου Lebesgue, κάθε αριθμήσιμο σύνολο έχει μέτρο 0. Όμως, υπάρχουν υπεραριθμήσιμα (ιδιαιτέρως τέλεια) σύνολα μέτρου 0. Το σύνολο του Cantor αποτελεί τέτοιου είδους παράδειγμα: Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς της Ενότητας 2.44, βρίσκουμε δίχως δυσκολία ότι

$$m(E_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Εφόσον $P = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, έχουμε ότι $P \subset E_n$ για κάθε δείκτη n και επομένως $m(P) = 0$.

ΧΩΡΟΙ ΜΕΤΡΟΥ

Ορισμός 11.12. Υποθέτουμε ότι X είναι ένα σύνολο, όχι απαραιτήτως υποσύνολο Ευκλείδειου χώρου ή μετρικού χώρου εν γένει. Το X λέγεται *χώρος μέτρου* εάν και μόνον εάν υπάρχει ένας σ-δακτύλιος $\mathcal{M}$ υποσυνόλων του X (τα οποία θα ονομάζονται *μετρήσιμα σύνολα*) και μία μη αρνητική, αριθμησίμως προσθετική συνολοσυνάρτηση (η οποία ονομάζεται *μέτρο*), ορισμένη στον $\mathcal{M}$.

Ο X ονομάζεται *μετρήσιμος χώρος* εάν και μόνον εάν ισχύει επιπροσθέτως ότι $X \in \mathcal{M}$.

Επί παραδείγματι, μπορούμε να θεωρήσουμε ως X τον R^p, ως $\mathcal{M}$ τη συλλογή των κατά Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του X και ως μ το μέτρο Lebesgue.

Επίσης, μπορούμε να θεωρήσουμε ως X το σύνολο όλων των θετικών ακεραίων αριθμών, ως $\mathcal{M}$ τη συλλογή των υποσυνόλων του X και για $E \in \mathcal{M}$ ως $\mu(E)$ το πλήθος των στοιχείων του E.

Ένα επιπλέον παράδειγμα παρέχεται από τη θεωρία πιθανοτήτων, όπου τα γεγονότα μπορούν να θεωρηθούν ως σύνολα, και η πιθανότητα να συμβούν αυτά ως προσθετική (ή αριθμησίμως προσθετική) συνολοσυνάρτηση.

Στις επόμενες ενότητες θα ασχοληθούμε μόνο με μετρήσιμους χώρους. Τονίζουμε ότι η θεωρία ολοκληρώσεως που πρόκειται να αναπτυχθεί δεν απλουστεύεται εάν περιοριστούμε απλώς στο μέτρο Lebesgue και δεν αναπτύξουμε τη θεωρία στη γενικότητά της. Στην πραγματικότητα, τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της θεωρίας είναι περισσότερο διαυγή στη γενικότερη περίπτωση, όπου καθίσταται σαφές ότι όλα εξαρτώνται από την προσθετικότητα του μέτρου.

Θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο

$$\{x \mid P\} \tag{41}$$

για να δηλώνουμε το σύνολο των στοιχείων x με την ιδιότητα P.

ΜΕΤΡΗΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμός 11.13. Θεωρούμε μία συνάρτηση f, ορισμένη σε έναν μετρήσιμο χώρο X και με τιμές στο εκτεταμένο σύστημα των πραγματικών αριθμών. Η συνάρτηση f ονομάζεται *μετρήσιμη* εάν και μόνον εάν το σύνολο

$$\{x|f(x) > a\} \tag{42}$$

είναι μετρήσιμο για κάθε πραγματικό αριθμό a.

Παράδειγμα 11.14. Εάν $X = R^p$ και $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mu)$, όπως στον Ορισμό 11.9, τότε κάθε συνεχής συνάρτηση είναι μετρήσιμη, εφόσον σε αυτήν την περίπτωση το σύνολο (42) είναι ανοικτό για κάθε πραγματικό αριθμό a.

Θεώρημα 11.15. *Θεωρούμε μία συνάρτηση f σε έναν μετρήσιμο χώρο X με τιμές στο εκτεταμένο σύστημα των πραγματικών αριθμών. Κάθε μία από τις παρακάτω συνθήκες συνεπάγεται τις υπόλοιπες τρεις:*

$$\textit{Το } \{x|f(x) > a\} \textit{ είναι μετρήσιμο για κάθε πραγματικό αριθμό } a. \tag{43}$$

$$\textit{Το } \{x|f(x) \geq a\} \textit{ είναι μετρήσιμο για κάθε πραγματικό αριθμό } a. \tag{44}$$

$$\textit{Το } \{x|f(x) < a\} \textit{ είναι μετρήσιμο για κάθε πραγματικό αριθμό } a. \tag{45}$$

$$\textit{Το } \{x|f(x) \leq a\} \textit{ είναι μετρήσιμο για κάθε πραγματικό αριθμό } a. \tag{46}$$

Απόδειξη. Για κάθε πραγματικό αριθμό a, οι ισότητες

$$\begin{aligned}
&\{x|f(x) \geq a\} = \textstyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x|f(x) > a - \frac{1}{n}\right\},\\
&\{x|f(x) < a\} = X - \{x|f(x) \geq a\},\\
&\{x|f(x) \leq a\} = \textstyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x|f(x) < a + \frac{1}{n}\right\},\\
&\{x|f(x) > a\} = X - \{x|f(x) \leq a\}
\end{aligned}$$

φανερώνουν διαδοχικά ότι η (43) συνεπάγεται την (44), η (44) συνεπάγεται την (45), η (45) συνεπάγεται την (46) και η (46) συνεπάγεται την (43). □

Συνεπώς, κάθε μία από τις παραπάνω συνθήκες μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντί της (42) για τον ορισμό της μετρησιμότητας συναρτήσεως.

Θεώρημα 11.16. *Υποθέτουμε ότι f είναι μία συνάρτηση σε έναν μετρήσιμο χώρο X με τιμές στο εκτεταμένο σύστημα των πραγματικών αριθμών. Εάν η f είναι μετρήσιμη, τότε και η $|f|$ είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Ισχύει ότι

$$\{x \mid |f(x)| < a\} = \{x \mid f(x) < a\} \cap \{x \mid f(x) > -a\}$$

για κάθε πραγματικό αριθμό a. □

Θεώρημα 11.17. *Υποθέτουμε ότι $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι μία ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων σε έναν μετρήσιμο χώρο X. Θεωρούμε τις συναρτήσεις g, h στον X όπου για $x \in X$ είναι*

$$\begin{aligned} g(x) &= \sup f_n(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \dots), \\ h(x) &= \limsup_{n\to\infty} f_n(x). \end{aligned}$$

Τότε, οι g και h είναι μετρήσιμες.

Φυσικά, το ίδιο ισχύει και για τα inf και lim inf.

Απόδειξη. Ισχύει ότι

$$\{x \mid g(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid f_n(x) > a\}$$

και για $x \in X$

$$h(x) = \inf g_m(x), \qquad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

όπου $g_m(x) = \sup f_n(x)$ $(n \geq m, m = 1, 2, 3, \dots)$. □

Πόρισμα.

(α) *Εάν οι συναρτήσεις f, g σε έναν μετρήσιμο χώρο είναι μετρήσιμες, τότε οι $\max(f, g)$ και $\min(f, g)$ είναι μετρήσιμες. Εάν*

$$f^+ = \max(f, 0), \qquad f^- = \min(f, 0), \tag{47}$$

τότε προκύπτει ιδιαιτέρως ότι οι f^+ και f^- είναι μετρήσιμες.

(β) *Το όριο μίας συγκλίνουσας ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων σε έναν μετρήσιμο χώρο είναι μετρήσιμη συνάρτηση.*

Θεώρημα 11.18. *Ας είναι f, g μετρήσιμες πραγματικές συναρτήσεις, ορισμένες στον μετρήσιμο χώρο X. Ας είναι επίσης F μία πραγματική συνεχής συνάρτηση, ορισμένη στο R^2. Θεωρούμε τη συνάρτηση h στον X με*

$$h(x) = F(f(x), g(x)) \qquad (x \in X).$$

Τότε, η h είναι μετρήσιμη.

Ιδιαιτέρως, οι $f + g$ και fg είναι μετρήσιμες.

Απόδειξη. Θεωρούμε πραγματικό αριθμό a. Θέτουμε

$$G = \{(u, v) | F(u, v) > a\}.$$

Τότε, το σύνολο αυτό είναι ανοικτό υποσύνολο του R^2. Μπορούμε να γράψουμε

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,$$

όπου $\{I_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι μία ακολουθία ανοικτών διαστημάτων με

$$I_n = \{(u, v) | \, a_n < u < b_n, \; c_n < v < d_n\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$(a_n, b_n, c_n, d_n \in R^1$ για κάθε δείκτη $n)$. Εφόσον το σύνολο

$$\{x | \, a_n < f(x) < b_n\} = \{x | f(x) > a_n\} \cap \{x | f(x) < b_n\}$$

είναι μετρήσιμο για κάθε δείκτη n, έπεται ότι το σύνολο

$$\{x | \, (f(x), g(x)) \in I_n\} = \{x | \, a_n < f(x) < b_n\} \cap \{x | \, c_n < g(x) < d_n\}$$

είναι μετρήσιμο για κάθε δείκτη n. Συνεπώς, το ίδιο ισχύει και για το σύνολο

$$\begin{aligned} \{x | \, h(x) > a\} &= \{x | \, (f(x), g(x)) \in G\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x | \, (f(x), g(x)) \in I_n\}. \end{aligned}$$

□

Ανακεφαλαιώνοντας, μπορούμε να πούμε ότι όλες οι συνήθεις πράξεις της Αναλύσεως, περιλαμβανόμενες σε αυτές και οι λήψεις ορίων, όταν εφαρμοσθούν σε μετρήσιμες συναρτήσεις οδηγούν σε μετρήσιμες συναρτήσεις. Με διαφορετική διατύπωση, όλες οι συναρτήσεις που συνήθως συναντούμε είναι μετρήσιμες.

Όμως, υπάρχει και ένα αντιπαράδειγμα (βασισμένο στο μέτρο Lebesgue στην πραγματική ευθεία): Εάν h είναι μία συνάρτηση με $h = f \circ g$, όπου η f είναι μετρήσιμη και η g συνεχής, τότε η h δεν είναι απαραιτήτως μετρήσιμη. (Για τις λεπτομέρειες, ανατρέξτε στο βιβλίο του McShane, στη σελίδα 241.)

Ο αναγνώστης πιθανώς να έχει παρατηρήσει ότι στα σχετικά με τις μετρήσιμες συναρτήσεις δεν έχει γίνει καμία αναφορά στο μέτρο. Στην πραγματικότητα, οι μετρήσιμες συναρτήσεις εξαρτώνται μόνον από τον σ-δακτύλιο $\mathcal{M}$ (χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του Ορισμού 11.12). Επί παραδείγματι, μπορούμε να αναφερόμαστε απλώς σε *Borel-μετρήσιμες συναρτήσεις* στον R^p, δηλαδή σε συναρτήσεις f με την ιδιότητα ότι το σύνολο

$$\{x | f(x) > a\}$$

είναι σύνολο Borel για κάθε πραγματικό αριθμό a, δίχως να αναφερόμαστε σε κάποιο μέτρο.

ΑΠΛΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμός 11.19. Θεωρούμε μία πραγματική συνάρτηση s, ορισμένη στο σύνολο X. Η s ονομάζεται *απλή συνάρτηση* εάν και μόνον εάν το πεδίο τιμών της είναι πεπερασμένο.

Εάν $E \subset X$, τότε θεωρούμε τη συνάρτηση K_E στον X με

$$K_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{εάν } x \in E, \\ 0 & \text{εάν } x \notin E. \end{cases} \tag{48}$$

Η K_E ονομάζεται *χαρακτηριστική συνάρτηση* του E.

Υποθέτουμε ότι το πεδίο τιμών της s αποτελείται από τους διακεκριμένους αριθμούς $c_1, \dots, c_n$. Θέτουμε

$$E_i = \{x | s(x) = c_i\} \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Τότε,

$$s = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{E_i}, \tag{49}$$

δηλαδή κάθε απλή συνάρτηση είναι γραμμικός συνδυασμός πεπερασμένου πλήθους χαρακτηριστικών συναρτήσεων. Είναι σαφές ότι εάν ο X είναι μετρήσιμος χώρος, τότε η s είναι μετρήσιμη εάν και μόνον εάν τα σύνολα $E_1, \ldots, E_n$ είναι μετρήσιμα.

Έχει αξιοσημείωτο ενδιαφέρον το γεγονός ότι κάθε συνάρτηση μπορεί να προσεγγισθεί από απλές συναρτήσεις:

Θεώρημα 11.20. *Υποθέτουμε ότι f είναι μία πραγματική συνάρτηση, ορισμένη στο σύνολο X. Τότε, υπάρχει μία ακολουθία $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ απλών συναρτήσεων ούτως ώστε για κάθε $x \in X$ να ισχύει ότι $s_n(x) \to f(x)$ καθώς $n \to \infty$. Εάν ο X είναι μετρήσιμος χώρος και η f είναι μετρήσιμη, τότε οι συναρτήσεις s_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ μπορούν να επιλεγούν ούτως ώστε να είναι μετρήσιμες. Εάν $f \geq 0$, τότε η ακολουθία $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ μπορεί να επιλεγεί ούτως ώστε να είναι αύξουσα.*

Απόδειξη. Εάν $f \geq 0$, τότε θέτουμε

$$E_{ni} = \left\{ x \middle| \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\}, \qquad F_n = \{x | f(x) \geq n\}$$

για $n = 1, 2, 3, \ldots$ και $i = 1, 2, \ldots, n2^n$. Επίσης, θέτουμε

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} K_{E_{ni}} + n K_{F_n} \tag{50}$$

για $n = 1, 2, 3, \ldots$. Αυτή είναι η επιθυμητή ακολουθία. Στη γενική περίπτωση, θεωρούμε την αναπαράσταση $f = f^+ - f^-$ και εφαρμόζουμε την προηγούμενη κατασκευή στις f^+ και f^-.

Πρέπει να σημειωθεί ότι εάν η f είναι φραγμένη, τότε η ακολουθία $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ στην (50) συγκλίνει ομοιομόρφως προς την f. □

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Εν συνεχεία, θα ορίσουμε την έννοια της ολοκληρώσεως σε έναν μετρήσιμο χώρο X, όπου $\mathcal{M}$ είναι ο σ-δακτύλιος των μετρήσιμων συνόλων και μ είναι το μέτρο. Ο αναγνώστης ο οποίος επιθυμεί να αποκτήσει διαυγέστερη εικόνα της καταστάσεως, μπορεί να θεωρήσει ως X την πραγματική ευθεία ή ένα διάστημα και ως μ το μέτρο Lebesgue m.

Ορισμός 11.21. Υποθέτουμε ότι η s είναι μία απλή μετρήσιμη συνάρτηση στον X με

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{E_i}(x) \qquad (x \in X), \tag{51}$$

όπου $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{M}$ και $c_1, \ldots, c_n > 0$. Θεωρούμε $E \in \mathcal{M}$ και ορίζουμε

$$I_E(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E \cap E_i). \tag{52}$$

Εάν f είναι μία μετρήσιμη και μη αρνητική συνάρτηση, τότε ορίζουμε

$$\int_E f d\mu = \sup I_E(s), \tag{53}$$

όπου το ελάχιστο άνω φράγμα λαμβάνεται υπεράνω όλων των απλών μετρήσιμων συναρτήσεων s με $0 \leq s \leq f$.

Το αριστερό μέλος της (53) ονομάζεται *το κατά Lebesgue ολοκλήρωμα της* f, ως προς μ, υπεράνω του E. Πρέπει να σημειωθεί ότι το ολοκλήρωμα μπορεί να λάβει και ως τιμή το $+\infty$.

Μπορούμε να επαληθεύσουμε εύκολα ότι

$$\int_E s d\mu = I_E(s) \tag{54}$$

για κάθε μη αρνητική απλή μετρήσιμη συνάρτηση s.

Ορισμός 11.22. Υποθέτουμε ότι f είναι μία μετρήσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε τα ολοκληρώματα

$$\int_E f^+ d\mu, \qquad \int_E f^- d\mu, \tag{55}$$

όπου οι f^+, f^- ορίζονται όπως στη (47).

Εάν τουλάχιστον ένα από τα ολοκληρώματα στην (55) είναι πεπερασμένο, τότε ορίζουμε

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu. \tag{56}$$

Εάν και τα δύο ολοκληρώματα στην (55) είναι πεπερασμένα, τότε το ολοκλήρωμα στην (56) είναι πεπερασμένο. Σε αυτήν ακριβώς την περίπτωση, η f ονομάζεται *κατά Lebesgue ολοκληρώσιμη* (ή *αθροίσιμη*) στο E, ως προς το μέτρο μ. Για να το δηλώσουμε αυτό, γράφουμε $f \in \mathcal{L}(\mu)$ στο E. Εάν $\mu = m$, τότε ο συνήθης συμβολισμός είναι: $f \in \mathcal{L}$ στο E.

Η ορολογία αυτή μπορεί να δημιουργήσει μία μικρή σύγχυση: Εάν η (56) είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε το ολοκλήρωμα της f υπεράνω του E ορίζεται, παρά το γεγονός ότι η f δεν είναι ολοκληρώσιμη στο E, σύμφωνα με την παραπάνω έννοια της λέξεως. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο E εάν και μόνον εάν το ολοκλήρωμά της υπεράνω του E είναι πεπερασμένος αριθμός.

Θα ασχοληθούμε κυρίως με ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, αν και σε ορισμένες περιπτώσεις είναι απαραίτητη η θεώρηση της γενικότερης περιπτώσεως.

Παρατήρηση 11.23. Οι παρακάτω ιδιότητες των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων θεωρούνται προφανείς:

(α) Εάν f είναι μία μετρήσιμη συνάρτηση, φραγμένη στο E, και εάν $\mu(E) < +\infty$, τότε $f \in \mathcal{L}(\mu)$ στο E.

(β) Εάν f είναι μία μετρήσιμη συνάρτηση με $a \leq f(x) \leq b$ για κάθε $x \in E$ και εάν $\mu(E) < +\infty$, τότε

$$a\mu(E) \leq \int_E f d\mu \leq b\mu(E).$$

(γ) Εάν $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$ στο E και εάν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in E$, τότε

$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu.$$

(δ) Εάν $f \in \mathcal{L}(\mu)$ στο E, τότε $cf \in \mathcal{L}(\mu)$ για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό c και

$$\int_E cf d\mu = c\int_E f d\mu.$$

(ε) Εάν η συνάρτηση f είναι μετρήσιμη και εάν $\mu(E) = 0$, τότε

$$\int_E f d\mu = 0.$$

(στ) Εάν $f \in \mathcal{L}(\mu)$ στο E και εάν $A \in \mathcal{M}$ με $A \subset E$, τότε $f \in \mathcal{L}(\mu)$ στο A.

Θεώρημα 11.24.

(α) *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι μετρήσιμη και μη αρνητική στον X. Ορίζουμε τη συνολοσυνάρτηση ϕ στον $\mathcal{M}$ μέσω της ισότητας*

$$\phi(A) = \int_A f d\mu \tag{57}$$

για κάθε $A \in \mathcal{M}$. Τότε, η ϕ είναι αριθμησίμως προσθετική στον $\mathcal{M}$.

(β) *Το ίδιο συμπέρασμα ισχύει και εάν $f \in \mathcal{L}(\mu)$ στον X.*

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι το (β) έπεται από το (α), εάν γράψουμε $f = f^+ - f^-$ και εφαρμόσουμε το (α) στις f^+, f^-.

Για την απόδειξη του (α) πρέπει να δειχθεί ότι

$$\phi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n), \tag{58}$$

όπου $A_n \in \mathcal{M}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $A_i \cap A_j = 0$ για οποιουσδήποτε δείκτες i, j με $i \neq j$ και $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Εάν η f είναι χαρακτηριστική συνάρτηση, τότε η αριθμήσιμη προσθετικότητα της ϕ προκύπτει ευθέως από την αριθμήσιμη προσθετικότητα του μ, εφόσον

$$\int_A K_E d\mu = \mu(A \cap E).$$

Εάν η f είναι απλή, τότε η f είναι της μορφής (51) και επομένως το συμπέρασμα ισχύει και πάλι.

Στη γενική περίπτωση, για οποιαδήποτε μετρήσιμη απλή συνάρτηση s με $0 \leq s \leq f$ έχουμε ότι

$$\int_A s d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} s d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n).$$

Επομένως, από την (53) προκύπτει ότι

$$\phi(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n). \tag{59}$$

Εάν $\phi(A_n) = +\infty$ για κάποιον δείκτη n, τότε η (58) ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο, εφόσον $\phi(A_n) \leq \phi(A)$ για κάθε δείκτη n. Συνεπώς, υποθέτουμε ότι $\phi(A_n) < +\infty$ για κάθε δείκτη n.

Θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να επιλέξουμε απλή μετρήσιμη συνάρτηση s ούτως ώστε $0 \leq s \leq f$ και

$$\int_{A_1} s d\mu \geq \int_{A_1} f d\mu - \varepsilon, \quad \int_{A_2} s d\mu \geq \int_{A_2} f d\mu - \varepsilon. \tag{60}$$

Επομένως,

$$\phi(A_1 \cup A_2) \geq \int_{A_1 \cup A_2} s d\mu = \int_{A_1} s d\mu + \int_{A_2} s d\mu \geq \phi(A_1) + \phi(A_2) - 2\varepsilon.$$

Εφόσον το παραπάνω ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, έπεται ότι

$$\phi(A_1 \cup A_2) \geq \phi(A_1) + \phi(A_2).$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\phi(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \geq \phi(A_1) + \cdots + \phi(A_n) \tag{61}$$

για κάθε δείκτη n. Εφόσον $A_1 \cup \cdots \cup A_n \subset A$ για κάθε δείκτη n, η (61) συνεπάγεται ότι

$$\phi(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n). \tag{62}$$

Η (58) έπεται από τις (59) και (62). □

Πόρισμα. *Εάν* $A, B \in \mathcal{M}$ *με* $B \subset A$ *και* $\mu(A - B) = 0$, *τότε*

$$\int_A f d\mu = \int_B f d\mu.$$

Εφόσον $A = B \cup (A - B)$, αυτό έπεται από την Παρατήρηση 11.23(ε).

Παρατήρηση 11.25. Το προηγούμενο πόρισμα φανερώνει ότι τα σύνολα μηδενικού μέτρου δεν συνεισφέρουν στην ολοκλήρωση.

Για δύο μετρήσιμες συναρτήσεις θα γράφουμε $f \sim g$ στο E εάν και μόνον εάν το σύνολο

$$\{x | f(x) \neq g(x)\} \cap E$$

έχει μηδενικό μέτρο.

Εάν οι f, g, h είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(α) $f \sim f$.

(β) Εάν $f \sim g$, τότε $g \sim f$.

(γ) Εάν $f \sim g$ και $g \sim h$ τότε $f \sim h$.

Δηλαδή, η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Εάν $f \sim g$ στο E, τότε ισχύει ότι

$$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$$

για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο A του E, δεδομένης της υπάρξεως των ολοκληρωμάτων.

Για μία ιδιότητα P που αφορά στοιχεία του E είναι σύνηθες να λέγεται ότι ισχύει για *σχεδόν όλα τα* $x \in E$ ή ότι ισχύει *σχεδόν παντού στο* E εάν και μόνον εάν η P ισχύει για κάθε $x \in E - A$, όπου A είναι ένα μετρήσιμο υποσύνολο του E με $\mu(A) = 0$. (Η έννοια αυτή εξαρτάται φυσικά από το θεωρούμενο μέτρο. Εάν δεν αναφέρεται κάτι σχετικό με το μέτρο, τότε εννοείται το μέτρο Lebesgue.)

Εάν $f \in \mathcal{L}(\mu)$ στο E, τότε είναι σαφές ότι η f πρέπει να είναι πεπερασμένη σχεδόν παντού στο E. Επομένως, στις περισσότερες περιπτώσεις δεν υφίσταται απώλεια της γενικότητας εάν υποθέτουμε εξ αρχής ότι οι δεδομένες συναρτήσεις είναι πεπερασμένες.

Θεώρημα 11.26. *Εάν $f \in \mathcal{L}(\mu)$ στο E, τότε $|f| \in \mathcal{L}(\mu)$ στο E και*

$$\left|\int_E f d\mu\right| \leq \int_E |f| d\mu. \tag{63}$$

Απόδειξη. Γράφουμε $E = A \cup B$, όπου τα σύνολα A, B ορίζονται ως εξής: $x \in A$ εάν και μόνον εάν $x \in E$ και $f(x) \geq 0$ και $x \in B$ εάν και μόνον εάν $x \in E$ και $f(x) < 0$. Από το Θεώρημα 11.24 έχουμε ότι

$$\int_E |f| d\mu = \int_A |f| d\mu + \int_B |f| d\mu = \int_A f^+ d\mu + \int_B f^- d\mu < +\infty$$

και επομένως $|f| \in \mathcal{L}(\mu)$ στο E. Εφόσον $f \leq |f|$ και $-f \leq |f|$, συνάγουμε ότι

$$\int_E f d\mu \leq \int_E |f| d\mu, \qquad -\int_E f d\mu \leq \int_E |f| d\mu.$$

Από αυτό έπεται η (63). □

Εφόσον η ολοκληρωσιμότητα μίας συναρτήσεως f συνεπάγεται την ολοκληρωσιμότητα της $|f|$, το κατά Lebesgue ολοκλήρωμα συχνά ονομάζεται απολύτως συγκλίνον ολοκλήρωμα. Φυσικά, είναι δυνατό να ορισθούν ολοκληρώματα που δεν συγκλίνουν απολύτως και για την αντιμετώπιση ορισμένων προβλημάτων είναι απαραίτητο να γίνει αυτό. Όμως, τα ολοκληρώματα αυτά δεν διαθέτουν ορισμένες από τις χρησιμότερες ιδιότητες του κατά Lebesgue ολοκληρώματος και για τον λόγο αυτόν κατέχουν λιγότερο σημαντικό ρόλο στην Ανάλυση.

Θεώρημα 11.27. *Υποθέτουμε ότι f είναι μία μετρήσιμη συνάρτηση στο E, ότι $g \in \mathcal{L}(\mu)$ στο E και ότι $|f| \leq g$. Τότε, $f \in \mathcal{L}(\mu)$ στο E.*

Απόδειξη. Ισχύει ότι $f^+ \leq g$ και $f^- \leq g$. □

11.28 Θεώρημα μονότονης συγκλίσεως του Lebesgue. *Υποθέτουμε ότι $E \in \mathcal{M}$. Ας είναι $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ μία ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων ούτως ώστε*

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots . \tag{64}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση f, η οποία ορίζεται μέσω της σχέσεως

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \qquad (x \in E). \tag{65}$$

Τότε,

$$\int_E f_n d\mu \to \int_E f d\mu \quad \text{καθώς} \quad n \to \infty. \tag{66}$$

Απόδειξη. Από την (64) καθίσταται σαφές ότι

$$\int_E f_n d\mu \to \alpha \tag{67}$$

καθώς $n \to \infty$, για κάποιον αριθμό α. Εφόσον $\int_E f_n d\mu \le \int_E f d\mu$ για κάθε δείκτη n, έπεται ότι

$$\alpha \le \int_E f d\mu. \tag{68}$$

Θεωρούμε πραγματικό αριθμό c με $0 < c < 1$. Ας είναι s μία απλή μετρήσιμη συνάρτηση με $0 \le s \le f$. Θέτουμε

$$E_n = \{x | f_n(x) \ge cs(x)\} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Από την (64) προκύπτει ότι $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$. Από την (65) προκύπτει ότι

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n. \tag{69}$$

Για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n έχουμε ότι

$$\int_E f_n d\mu \ge \int_{E_n} f_n d\mu \ge c \int_{E_n} s d\mu. \tag{70}$$

Θεωρούμε $n \to \infty$ στην (70). Εφόσον το ολοκλήρωμα είναι αριθμησίμως προσθετική συνολοσυνάρτηση (Θεώρημα 11.24), η (69) φανερώνει ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 11.3 στο τελευταίο ολοκλήρωμα της (70) και να λάβουμε την ανισότητα

$$\alpha \ge c \int_E s d\mu. \tag{71}$$

Λαμβάνοντας $c \to 1$ διαπιστώνουμε ότι

$$\alpha \geq \int_E s d\mu$$

και η (53) συνεπάγεται ότι

$$\alpha \geq \int_E f d\mu. \tag{72}$$

Το θεώρημα έπεται από τις (67), (68) και (72). □

Θεώρημα 11.29. *Υποθέτουμε ότι* $f = f_1 + f_2$, *όπου* $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(\mu)$ *στο* E. *Τότε,* $f \in \mathcal{L}(\mu)$ *στο* E *και*

$$\int_E f d\mu = \int_E f_1 d\mu + \int_E f_2 d\mu. \tag{73}$$

Απόδειξη. Αρχικά υποθέτουμε ότι $f_1, f_2 \geq 0$. Εάν οι f_1, f_2 είναι απλές, τότε η (73) προκύπτει απλά από τις (52) και (54). Στη γενική περίπτωση, θεωρούμε αύξουσες ακολουθίες $\{s'_n\}$, $\{s''_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ μη αρνητικών μετρήσιμων απλών συναρτήσεων, οι οποίες συγκλίνουν αντιστοίχως προς τις f_1, f_2. Το Θεώρημα 11.20 φανερώνει ότι αυτό είναι δυνατό. Θέτουμε $s_n = s'_n + s''_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Τότε,

$$\int_E s_n d\mu = \int_E s'_n d\mu + \int_E s''_n d\mu$$

και η (73) έπεται εάν λάβουμε $n \to \infty$ και εφαρμόσουμε το Θεώρημα 11.28.

Εν συνεχεία, υποθέτουμε ότι $f_1 \geq 0$, $f_2 \leq 0$. Θέτουμε

$$A = \{x | f(x) \geq 0\}, \qquad B = \{x | f(x) < 0\}.$$

Τότε, οι f, f_1, $-f_2$ είναι μη αρνητικές στο A. Επομένως,

$$\int_A f_1 d\mu = \int_A f d\mu + \int_A (-f_2) d\mu = \int_A f d\mu - \int_A f_2 d\mu. \tag{74}$$

Παρομοίως, οι $-f$, f_1, $-f_2$ είναι μη αρνητικές στο B και επομένως

$$\int_B (-f_2) d\mu = \int_B f_1 d\mu + \int_B (-f) d\mu$$

ή αλλιώς

$$\int_B f_1 d\mu = \int_B f d\mu - \int_B f_2 d\mu. \tag{75}$$

Η (73) έπεται προσθέτοντας τις (74) και (75).

Στη γενική περίπτωση, το E αναλύεται σε τέσσερα σύνολα E_1, E_2, E_3, E_4, σε καθένα από τα οποία οι f_1 και f_2 έχουν σταθερό πρόσημο. Οι δύο περιπτώσεις που έχουμε αποδείξει φανερώνουν ότι

$$\int_{E_i} f d\mu = \int_{E_i} f_1 d\mu + \int_{E_i} f_2 d\mu \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

και η (73) προκύπτει προσθέτοντας τις τέσσερις αυτές ανισότητες. □

Είμαστε τώρα σε θέση να αναδιατυπώσουμε το Θεώρημα 11.28 για σειρές συναρτήσεων.

Θεώρημα 11.30. *Υποθέτουμε ότι* $E \in \mathcal{M}$. *Εάν* $\{f_n\}$ *(*$n = 1, 2, 3, \dots$*) είναι ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων και* f *είναι η συνάρτηση με*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in E), \tag{76}$$

τότε

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu.$$

Απόδειξη. Τα μερικά αθροίσματα της (76) απαρτίζουν μία αύξουσα ακολουθία. □

11.31 Το θεώρημα του Fatou[2]**.** *Υποθέτουμε ότι* $E \in \mathcal{M}$. *Θεωρούμε μία ακολουθία* $\{f_n\}$ *(*$n = 1, 2, 3, \dots$*) μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Εάν* f *είναι η συνάρτηση που ορίζεται από την ισότητα*

$$f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in E),$$

[2] Σ. τ. Μ.: Pierre Joseph Louis Fatou (1878-1929). Γάλλος μαθηματικός. Εργάσθηκε κυρίως στην Ανάλυση και επίσης έκανε μελέτες στην πλανητική κίνηση. Είναι περισσότερο γνωστός από το φερώνυμο θεώρημα, γνωστό και ως λήμμα του Fatou.

τότε

$$\int_E f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu. \tag{77}$$

Στην (77) μπορεί να ισχύει και η γνήσια ανισότητα. Τέτοιου είδους παράδειγμα δίδεται στην Άσκηση 5.

Απόδειξη. Για $n = 1, 2, 3, \ldots$ και $x \in E$ θέτουμε

$$g_n(x) = \inf f_i(x) \qquad (i \geq n).$$

Τότε, για κάθε δείκτη n η g_n είναι μετρήσιμη στο E και

$$0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \cdots, \tag{78}$$

$$g_n \leq f_n. \tag{79}$$

Επίσης, για κάθε $x \in E$ ισχύει ότι

$$g_n(x) \to f(x) \quad \text{καθώς} \quad n \to \infty. \tag{80}$$

Σύμφωνα με τις (78), (80) και το Θεώρημα 11.28 έχουμε

$$\int_E g_n d\mu \to \int_E f d\mu \quad \text{καθώς} \quad n \to \infty, \tag{81}$$

επομένως η (77) έπεται από τις (79) και (81). □

11.32 Το θεώρημα κυριαρχούμενης συγκλίσεως του Lebesgue. *Υποθέτουμε ότι $E \in \mathcal{M}$. Ας είναι $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ μία ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και f μία μετρήσιμη συνάρτηση ούτως ώστε*

$$f_n(x) \to f(x) \qquad (x \in E) \tag{82}$$

καθώς $n \to \infty$. Εάν υπάρχει συνάρτηση $g \in \mathcal{L}(\mu)$ στο E με

$$|f_n| \leq g \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{83}$$

τότε

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu. \tag{84}$$

Λόγω της (83), λέγεται ότι η $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *κυριαρχείται* από τη g και αναφερόμαστε στην *κυριαρχούμενη σύγκλιση*. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 11.25, το συμπέρασμα ισχύει επίσης εάν η (82) ισχύει σχεδόν παντού στο E.

Απόδειξη. Αρχικά, η (83) και το Θεώρημα 11.27 συνεπάγονται ότι $f_n \in \mathcal{L}(\mu)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ και ότι $f \in \mathcal{L}(\mu)$ στο E.

Εφόσον $f_n + g \geq 0$ για κάθε δείκτη n, το θεώρημα του Fatou φανερώνει ότι

$$\int_E (f+g) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E (f_n + g) d\mu$$

ή αλλιώς

$$\int_E f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu. \tag{85}$$

Εφόσον $g - f_n \geq 0$ για κάθε δείκτη n, διαπιστώνουμε παρομοίως ότι

$$\int_E (g-f) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E (g - f_n) d\mu$$

και συνεπώς

$$-\int_E f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \left[-\int_E f_n d\mu \right],$$

η οποία ισοδυναμεί με την

$$\int_E f d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu. \tag{86}$$

Η ύπαρξη του ορίου στην (84) και η ισότητα στην (84) προκύπτουν τώρα από τις (85) και (86). □

Πόρισμα. *Εάν $\mu(E) < +\infty$, η $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ είναι ομοιομόρφως φραγμένη στο E και $f_n(x) \to f(x)$ καθώς $n \to \infty$, για κάθε $x \in E$,* *τότε ισχύει η (84).*

Μία ομοιομόρφως φραγμένη συγκλίνουσα ακολουθία ονομάζεται συχνά φραγμένα συγκλίνουσα.

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΤΟ ΚΑΤΑ RIEMANN ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Το επόμενο θεώρημα φανερώνει ότι κάθε κατά Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση σε ένα κλειστό διάστημα είναι κατά Lebesgue ολοκληρώσιμη και ότι οι κατά Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις υπόκεινται σε αρκετά αυστηρές συνθήκες συνέχειας. Εκτός του γεγονότος ότι η θεωρία του Lebesgue καθιστά δυνατή την ολοκλήρωση σε ευρύτερη κλάση συναρτήσεων, το σπουδαιότερο πλεονέκτημά της έγκειται στην ευκολία με την οποία χειριζόμαστε τα όρια. Υπό το πρίσμα αυτό, τα θεωρήματα συγκλίσεως του Lebesgue αποτελούν τον πυρήνα της θεωρίας του Lebesgue.

Μία από τις δυσκολίες που συναντώνται στη θεωρία του Riemann είναι το γεγονός ότι τα όρια ακολουθιών κατά Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων (ακόμη και συνεχών συναρτήσεων) δεν είναι απαραιτήτως κατά Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Στο πλαίσιο της θεωρίας του Lebesgue αυτό το πρόβλημα εξαλείφεται, εφόσον όρια μετρήσιμων συναρτήσεων είναι μετρήσιμες συναρτήσεις.

Υποθέτουμε ότι ο χώρος μέτρου X είναι το διάστημα $[a, b]$ της πραγματικής ευθείας με $\mu = m$ (το μέτρο Lebesgue) και ότι $\mathcal{M}$ είναι η οικογένεια των κατά Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $[a, b]$. Αντί του συμβολισμού

$$\int_X f\,dm$$

είναι συνηθέστερη η χρήση του συμβολισμού

$$\int_a^b f\,dx$$

για το ολοκλήρωμα της συναρτήσεως f υπεράνω του $[a, b]$. Για να διακρίνουμε το κατά Riemann ολοκλήρωμα από το κατά Lebesgue ολοκλήρωμα, συμβολίζουμε το πρώτο με

$$\mathcal{R}\int_a^b f\,dx.$$

Θεώρημα 11.33.

(α) *Εάν* $f \in \mathcal{R}$ *στο* $[a, b]$, *τότε* $f \in \mathcal{L}$ *στο* $[a, b]$ *και*

$$\int_a^b f\,dx = \mathcal{R}\int_a^b f\,dx. \tag{87}$$

(β) *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση* f *είναι φραγμένη στο* $[a, b]$. *Τότε,* $f \in \mathcal{R}$ *στο* $[a, b]$ *εάν και μόνον εάν η* f *είναι συνεχής σχεδόν παντού στο* $[a, b]$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι φραγμένη. Σύμφωνα με τον Ορισμό 6.1 και το Θεώρημα 6.4, υπάρχει ακολουθία $\{P_k\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ διαμερίσεων του $[a, b]$ ούτως ώστε για κάθε δείκτη k η P_{k+1} να είναι εκλέπτυνση της P_k, η απόσταση μεταξύ δύο παρακείμενων σημείων της P_k να είναι μικρότερη του $1/k$ και να ισχύει ότι

$$\lim_{k\to\infty} L(P_k, f) = \mathcal{R}\underline{\int_a^b} f\,dx, \quad \lim_{k\to\infty} U(P_k, f) = \mathcal{R}\overline{\int_a^b} f\,dx. \tag{88}$$

Θεωρούμε έναν δείκτη k. Εάν είναι $P_k = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ με $x_0 = a$ και $x_n = b$, τότε ορίζουμε

$$U_k(a) = L_k(a) = f(a)$$

και $U_k(x) = M_i$, $L_k(x) = m_i$ για κάθε $x_{i-1} < x \le x_i$ $(1 \le i \le n)$, όπου χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς του Ορισμού 6.1. Τότε,

$$L(P_k, f) = \int_a^b L_k dx, \qquad U(P_k, f) = \int_a^b U_k dx \tag{89}$$

και

$$L_1 \le L_2 \le \cdots \le f \le \cdots \le U_2 \le U_1, \tag{90}$$

εφόσον για κάθε δείκτη k η P_{k+1} εκλεπτύνει την P_k. Σύμφωνα με την (90), για κάθε $x \in [a, b]$ υπάρχουν τα όρια

$$L(x) = \lim_{k\to\infty} L_k(x), \qquad U(x) = \lim_{k\to\infty} U_k(x). \tag{91}$$

Παρατηρούμε ότι οι L και U είναι φραγμένες μετρήσιμες συναρτήσεις στο $[a, b]$ με

$$L \le f \le U \tag{92}$$

και

$$\int_a^b L dx = \mathcal{R}\underline{\int_a^b} f dx, \qquad \int_a^b U dx = \mathcal{R}\overline{\int_a^b} f dx, \tag{93}$$

σύμφωνα με τις (88), (90) και το θεώρημα μονότονης συγκλίσεως.

Έως εδώ, δεν έχει υποτεθεί τίποτε για την f εκτός από το γεγονός ότι η f είναι φραγμένη πραγματική συνάρτηση στο $[a, b]$.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, σημειώνουμε ότι $f \in \mathcal{R}$ εάν και μόνον εάν το ανώτερο και το κατώτερο ολοκλήρωμά της ταυτίζονται, επομένως εάν και μόνον εάν

$$\int_a^b L dx = \int_a^b U dx. \tag{94}$$

Εφόσον $L \le U$, η (94) αληθεύει εάν και μόνον εάν $L(x) = U(x)$ για σχεδόν όλα τα $x \in [a, b]$ (Άσκηση 1).

Σε αυτήν την περίπτωση, η (92) συνεπάγεται ότι

$$L(x) = f(x) = U(x) \tag{95}$$

για σχεδόν όλα τα $x \in [a, b]$, και επομένως η f είναι μετρήσιμη. Η (87) έπεται από τις (93) και (95).

Επιπροσθέτως, εάν ένα σημείο x δεν ανήκει σε καμία από τις διαμερίσεις P_k ($k = 1, 2, \dots$), τότε βρίσκουμε εύκολα ότι $U(x) = L(x)$ εάν και μόνον εάν η f είναι συνεχής στο x. Εφόσον η ένωση των συνόλων P_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) είναι αριθμήσιμο σύνολο, έχει μηδενικό μέτρο. Από αυτό συνάγουμε ότι η f

είναι συνεχής σχεδόν παντού στο $[a, b]$ εάν και μόνον εάν $L(x) = U(x)$ για σχεδόν όλα τα $x \in [a, b]$ και επομένως εάν και μόνον εάν $f \in \mathcal{R}$.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Η οικεία σύνδεση μεταξύ ολοκληρώσεως και παραγωγίσεως μεταφέρεται, σε μεγάλο βαθμό, στη θεωρία του Lebesgue. Εάν $f \in \mathcal{L}$ στο $[a, b]$ και

$$F(x) = \int_a^x f\,dt \qquad (a \le x \le b), \tag{96}$$

τότε $F'(x) = f(x)$ για σχεδόν όλα τα $x \in [a, b]$.

Αντιστρόφως, εάν η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ (η συνθήκη «σχεδόν παντού παραγωγίσιμη» δεν αρκεί) και εάν $F' \in \mathcal{L}$ στο $[a, b]$, τότε

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'\,dt \qquad (a \le x \le b).$$

Για την απόδειξη των δύο αυτών θεωρημάτων παραπέμπουμε στα σχετικά με την ολοκλήρωση βιβλία που αναφέρονται στη Βιβλιογραφία.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Υποθέτουμε ότι f είναι μία μιγαδική συνάρτηση, ορισμένη σε έναν μετρήσιμο χώρο X, με $f = u + iv$, όπου οι u, v είναι πραγματικές συναρτήσεις. Η f θα ονομάζεται *μετρήσιμη* εάν και μόνον εάν οι u και v είναι μετρήσιμες.

Μπορούμε να επαληθεύσουμε εύκολα ότι το άθροισμα και το γινόμενο μιγαδικών μετρήσιμων συναρτήσεων είναι επίσης μιγαδική συνάρτηση. Εφόσον

$$|f| = (u^2 + v^2)^{1/2},$$

το Θεώρημα 11.18 φανερώνει ότι η $|f|$ είναι μετρήσιμη για κάθε μιγαδική μετρήσιμη συνάρτηση f.

Υποθέτουμε ότι μ είναι ένα μέτρο στον X, ότι E είναι ένα μετρήσιμο υποσύνολο του X και ότι f είναι μία μιγαδική συνάρτηση στον X. Γράφουμε

$f \in \mathcal{L}(\mu)$ στο E εάν και μόνον εάν η f είναι μετρήσιμη και

$$\int_E |f| d\mu < +\infty \tag{97}$$

και ορίζουμε

$$\int_E f d\mu = \int_E u d\mu + i \int_E v d\mu,$$

στην περίπτωση που αληθεύει η (97). Εφόσον $|u| \leq |f|$, $|v| \leq |f|$ και $|f| \leq |u| + |v|$, είναι σαφές ότι η (97) ισχύει εάν και μόνον εάν $u, v \in \mathcal{L}(\mu)$ στο E.

Τα Θεωρήματα 11.23(α), (δ), (ε), (στ), 11.24(β), 11.26, 11.27, 11.29 και 11.32 μπορούν να επεκταθούν ούτως ώστε να συμπεριλάβουν και τα κατά Lebesgue ολοκληρώματα μιγαδικών συναρτήσεων. Οι αποδείξεις δεν παρουσιάζουν δυσκολία. Η μόνη απόδειξη που παρουσιάζει κάποιο ενδιαφέρον είναι αυτή του Θεωρήματος 11.26:

Εάν $f \in \mathcal{L}(\mu)$ στο E, τότε υπάρχει μιγαδικός αριθμός c με $|c| = 1$ ούτως ώστε

$$c \int_E f d\mu \geq 0.$$

Θέτουμε $g = cf = u + iv$, όπου οι u, v είναι πραγματικές συναρτήσεις. Τότε,

$$\left| \int_E f d\mu \right| = c \int_E f d\mu = \int_E g d\mu = \int_E u d\mu \leq \int_E |f| d\mu.$$

Η τρίτη από τις παραπάνω ισότητες ισχύει διότι οι προηγούμενες φανερώνουν ότι το ολοκλήρωμα $\int_E g d\mu$ είναι πραγματικός αριθμός.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΛΑΣΕΩΣ $\mathcal{L}^2$

Ως εφαρμογή της θεωρίας του Lebesgue, θα επεκτείνουμε το θεώρημα του Parseval (το οποίο έχει αποδειχθεί μόνον για κατά Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο Κεφάλαιο 8) και θα αποδείξουμε το θεώρημα των Riesz[3] και Fischer[4] για ορθοκανονικά σύνολα συναρτήσεων.

Ορισμός 11.34. Ας είναι X ένας μετρήσιμος χώρος. Για μία μιγαδική συνάρτηση ορισμένη στον X γράφουμε[5] $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ στον X εάν και μόνον εάν η f είναι μετρήσιμη και

$$\int_X |f|^2 d\mu < +\infty.$$

Εάν μ είναι το μέτρο Lebesgue, τότε γράφουμε απλώς $f \in \mathcal{L}^2$. Για $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ (εφεξής θα παραλείπουμε τη φράση «στον X») ορίζουμε

$$\|f\| = \left\{ \int_X |f|^2 d\mu \right\}^{1/2}$$

και ονομάζουμε αυτόν τον αριθμό $\|f\|$ $\mathcal{L}^2(\mu)$-*στάθμη* της f.

---

[3] Σ. τ. Μ.: Frigyes Riesz (1880-1956). Σπουδαίος Ούγγρος μαθηματικός. Θεωρείται ως ο πατέρας της Συναρτησιακής Αναλύσεως.

Ο Riesz σπούδασε στο Πανεπιστήμιο της Βουδαπέστης. Έλαβε το διδακτορικό του δίπλωμα το έτος 1902. Διορίσθηκε σε μία θέση στο Πανεπιστήμιο του Kolozvár της Ουγγαρίας (τώρα Cluj της Ρουμανίας), το έτος 1911. Το έτος 1922 ο Riesz έγινε ο εκδότης του τότε νεοϊδρυθέντος μαθηματικού περιοδικού Acta Scientiarum Mathematicarum, το οποίο σύντομα έγινε σημαντικός φορέας διακινήσεως των μαθηματικών ιδεών. Το έτος 1945 ο Riesz διορίσθηκε στην έδρα των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Βουδαπέστης.

Το βιβλίο του Riesz «Leçons d' Analyse Fonctionnelle» θεωρείται ως ένα από τα πιο πολυδιαβασμένα βιβλία Συναρτησιακής Αναλύσεως.

[4] Σ. τ. Μ.: Ernst Sigismund Fischer (1875-1954). Αυστριακός μαθηματικός. Ασχολήθηκε κυρίως με την Ανάλυση.

Ο Fischer σπούδασε στην Βιέννη υπό τον Franz Mertens (1840-1927), περί το 1894. Το έτος 1899 σπούδασε στη Ζυρίχη και στο Göttingen υπό τον Hermann Minkowski (1864-1909). Τρία έτη αργότερα έγινε βοηθός στο Πανεπιστήμιο του Brünn και έπειτα από λίγα έτη καθηγητής. Κατά τα έτη 1911 έως 1920 ο Fischer ήταν καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Erlangen και από το έτος 1920 και μετά στο Πανεπιστήμιο της Κολονίας. Το έτος 1907 ο Fischer μελέτησε τις ορθοκανονικές ακολουθίες και απέδειξε ανεξάρτητα από τον Frigyes Riesz το φερώνυμο θεώρημα, το οποίο θεωρείται ως ένα από τα σπουδαία πρώτα επιτεύγματα της Θεωρίας Μέτρου.

[5] Σ. τ. Μ.: Οι συναρτήσεις αυτού του είδους ονομάζονται και *τετραγωνικά ολοκληρώσιμες* (ως προς το αντίστοιχο μέτρο).

Θεώρημα 11.35. *Υποθέτουμε ότι* $f, g \in \mathcal{L}^2(\mu)$. *Τότε,* $fg \in \mathcal{L}(\mu)$ *και*

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\| \|g\|. \tag{98}$$

Αυτή είναι η ανισότητα του Schwarz, την οποία έχουμε ήδη συναντήσει για σειρές και για κατά Riemann ολοκληρώματα και η οποία προκύπτει από την ανισότητα

$$0 \leq \int_X (|f| + \lambda |g|)^2 d\mu = \|f\|^2 + 2\lambda \int_X |fg| d\mu + \lambda^2 \|g\|^2,$$

η οποία ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό λ.

Θεώρημα 11.36. *Εάν* $f, g \in \mathcal{L}^2(\mu)$, *τότε* $f + g \in \mathcal{L}^2(\mu)$ *και*

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Απόδειξη. Η ανισότητα του Schwarz φανερώνει ότι

$$\begin{aligned}
\|f + g\|^2 &= \int_X |f|^2 d\mu + \int_X f\bar{g} d\mu + \int_X \bar{f} g d\mu + \int_X |g|^2 d\mu \\
&\leq \|f\|^2 + 2\|f\| \|g\| + \|g\|^2 \\
&= (\|f\| + \|g\|)^2.
\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 11.37. Εάν ορίσουμε ως απόσταση μεταξύ δύο συναρτήσεων f και g στον $\mathcal{L}^2(\mu)$ τον αριθμό $\|f - g\|$, τότε παρατηρούμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες του Ορισμού 2.15, εκτός του γεγονότος ότι η ισότητα $\|f - g\| = 0$ δεν συνεπάγεται απαραιτήτως ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in X$. Όμως, συνεπάγεται ότι $f(x) = g(x)$ για σχεδόν όλα τα $x \in X$. Επομένως, εάν ταυτίζουμε τις συναρτήσεις που διαφέρουν μόνον σε ένα σύνολο μηδενικού μέτρου, τότε ο $\mathcal{L}^2(\mu)$ δομείται σε μετρικό χώρο.

Θεωρούμε τώρα τον $\mathcal{L}^2$ σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ της πραγματικής ευθείας, ως προς το μέτρο Lebesgue.

Θεώρημα 11.38. *Το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων είναι πυκνό στον $\mathcal{L}^2$ στο $[a, b]$.*

Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $f \in \mathcal{L}^2$ στο $[a, b]$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ ούτως ώστε

$$\|f - g\| = \left\{ \int_a^b |f - g|^2 d\mu \right\}^{1/2} < \varepsilon.$$

Απόδειξη. Θα λέγεται ότι η f προσεγγίζεται στον $\mathcal{L}^2$ από μία ακολουθία $\{g_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ του $\mathcal{L}^2$ εάν και μόνον εάν $\|f - g_n\| \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Ας είναι A ένα κλειστό υποσύνολο του $[a, b]$ και K_A η χαρακτηριστική συνάρτησή του. Για $x \in [a, b]$ θέτουμε

$$t(x) = \inf_{y \in A} |x - y|$$

και

$$g_n(x) = \frac{1}{1 + nt(x)} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Τότε, για κάθε δείκτη n η g_n είναι συνεχής στο $[a, b]$ και ισχύει ότι $g_n(x) = 1$ για κάθε $x \in A$ και κάθε δείκτη n. Επίσης $g_n(x) \to 0$ καθώς $n \to \infty$, για κάθε $x \in B$, όπου $B = [a, b] - A$. Άρα,

$$\|g_n - K_A\| = \left\{ \int_B g_n^2 dx \right\}^{1/2} \to 0$$

καθώς $n \to \infty$, σύμφωνα με το Θεώρημα 11.32. Συνεπώς, οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις κλειστών συνόλων προσεγγίζονται στον $\mathcal{L}^2$ από συνεχείς συναρτήσεις.

Σύμφωνα με την (39), το ίδιο αληθεύει και για χαρακτηριστικές συναρτήσεις οποιωνδήποτε μετρήσιμων συνόλων, συνεπώς το ίδιο ισχύει και για απλές μετρήσιμες συναρτήσεις.

Εάν $f \geq 0$ και $f \in \mathcal{L}^2$, τότε θεωρούμε μία αύξουσα ακολουθία $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ απλών μετρήσιμων και μη αρνητικών συναρτήσεων ούτως ώστε $s_n(x) \to f(x)$ καθώς $n \to \infty$, για κάθε $x \in [a, b]$. Εφόσον $|f - s_n|^2 \leq f^2$ για κάθε δείκτη n, το Θεώρημα 11.32 φανερώνει ότι $\|f - s_n\| \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Η γενική περίπτωση έπεται από τα παραπάνω. $\square$

Ορισμός 11.39. Μία ακολουθία $\{\phi_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ μιγαδικών συναρτήσεων σε ένα μετρήσιμο χώρο X ονομάζεται *ορθοκανονικό* σύνολο συναρτήσεων εάν και μόνον εάν για οποιουσδήποτε δείκτες n, m ισχύει ότι

$$\int_X \phi_n \overline{\phi_m} d\mu = \begin{cases} 0 & \text{εάν} \quad n \neq m, \\ 1 & \text{εάν} \quad n = m. \end{cases}$$

Ιδιαιτέρως, είναι απαραίτητο να ισχύει ότι $\phi_n \in \mathcal{L}^2(\mu)$ για κάθε δείκτη n. Εάν $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ και εάν

$$c_n = \int_X f \overline{\phi_n} d\mu \qquad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

τότε γράφουμε

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n,$$

όπως στον Ορισμό 8.10.

Ο ορισμός μίας τριγωνομετρικής σειράς Fourier επεκτείνεται με τον ίδιο τρόπο στον $\mathcal{L}^2$ (ή ακόμη και στον $\mathcal{L}$) στο $[-\pi, \pi]$. Τα Θεωρήματα 8.11 και 8.12 (η ανισότητα του Bessel) ισχύουν για κάθε $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$. Οι αποδείξεις είναι παρόμοιες.

Μπορούμε να αποδείξουμε τώρα το θεώρημα του Parseval.

Θεώρημα 11.40. *Υποθέτουμε ότι*

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{99}$$

όπου $f \in \mathcal{L}^2$ στο $[-\pi, \pi]$. Για $n = 1, 2, 3, \dots$ ας είναι s_n το n τάξεως μερικό άθροισμα της σειράς (99). Τότε,

$$\lim_{n \to \infty} \|f - s_n\| = 0 \tag{100}$$

και

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx. \tag{101}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 11.38, υπάρχει συνεχής συνάρτηση g με

$$\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επιπλέον, διαπιστώνουμε εύκολα ότι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $g(\pi) = g(-\pi)$. Τότε, η g επεκτείνεται σε μία περιοδική συνεχή συνάρτηση. Σύμφωνα με το Θεώρημα 8.16, υπάρχει ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο T, βαθμού N, με

$$\|g - T\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Άρα, από το Θεώρημα 8.11 (το οποίο επεκτείνεται στον $\mathcal{L}^2$), για $n \geq N$ συνεπάγεται ότι

$$\|s_n - f\| \leq \|T - f\| < \varepsilon.$$

Από αυτό έπεται η (100). Η (101) προκύπτει από την (100) όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 8.16. □

Πόρισμα. *Εάν* $f \in \mathcal{L}^2$ *στο* $[-\pi, \pi]$ *και εάν*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = 0 \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

τότε $\|f\| = 0$.

Κατά συνέπεια, εάν δύο συναρτήσεις του $\mathcal{L}^2$ έχουν την ίδια σειρά Fourier, τότε διαφέρουν μόνον σε ένα σύνολο μηδενικού μέτρου.

Ορισμός 11.41. Ας είναι $f, f_n \in \mathcal{L}^2(\mu)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Λέγεται ότι η $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ συγκλίνει προς την f στον $\mathcal{L}^2(\mu)$ εάν και μόνον εάν $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$. Η $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ λέγεται ακολουθία Cauchy στον $\mathcal{L}^2(\mu)$ εάν και μόνον εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακέραιος αριθμός N ούτως ώστε εάν $n, m \geq N$, τότε $\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon$.

Θεώρημα 11.42. *Εάν* $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *είναι μία ακολουθία Cauchy στον* $\mathcal{L}^2(\mu)$, *τότε υπάρχει συνάρτηση* $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ *ούτως ώστε η* $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *να συγκλίνει προς την* f *στον* $\mathcal{L}^2(\mu)$.

Με διαφορετική διατύπωση, ο $\mathcal{L}^2(\mu)$ είναι *πλήρης* μετρικός χώρος.

Απόδειξη. Εφόσον η $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι ακολουθία Cauchy, βρίσκουμε μία γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων $\{n_k\}$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ ούτως ώστε

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| < \frac{1}{2^k} \qquad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Θεωρούμε $g \in \mathcal{L}^2(\mu)$. Σύμφωνα με την ανισότητα του Schwarz ισχύει ότι

$$\int_X |g(f_{n_k} - f_{n_{k+1}})| d\mu \leq \frac{\|g\|}{2^k}.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_X |g(f_{n_k} - f_{n_{k+1}})| d\mu \leq \|g\|. \tag{102}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 11.30, μπορούμε να εναλλάξουμε την άθροιση με την ολοκλήρωση στην (102). Επομένως,

$$|g(x)| \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| < +\infty \tag{103}$$

για σχεδόν όλα τα $x \in X$. Κατά συνέπεια,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| < +\infty \tag{104}$$

για σχεδόν όλα τα $x \in X$. Διότι εάν η σειρά στην (104) απέκλινε σε ένα σύνολο E θετικού μέτρου, θα μπορούσαμε να λάβουμε την g μη μηδενική στο E και να καταλήξουμε σε ένα συμπέρασμα που αντιφάσκει στην (103).

Εφόσον για έναν δείκτη k το k τάξεως μερικό άθροισμα της σειράς

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)),$$

η οποία συγκλίνει σχεδόν για όλα τα $x \in X$, είναι το

$$f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_1}(x),$$

παρατηρούμε ότι η ισότητα

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_{n_k}(x)$$

ορίζει τη συνάρτηση f σχεδόν παντού στον X και δεν έχει σημασία πως θα ορισθεί η f στα υπόλοιπα σημεία του X.

Θα δείξουμε τώρα ότι η f έχει τις επιθυμητές ιδιότητες. Ας είναι $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε N όπως στον Ορισμό 11.41. Εάν k είναι ένας δείκτης με $n_k > N$, τότε το θεώρημα του Fatou φανερώνει ότι

$$\|f - f_{n_k}\| \le \liminf_{i\to\infty} \|f_{n_i} - f_{n_k}\| \le \varepsilon.$$

Άρα, $f - f_{n_k} \in \mathcal{L}^2(\mu)$ και εφόσον $f = (f - f_{n_k}) + f_{n_k}$, βρίσκουμε ότι $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$. Επίσης, εφόσον ο ε είναι τυχόν θετικός αριθμός, έπεται ότι

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_{n_k}\| = 0$$

.

Εν τέλει, η ανισότητα

$$\|f - f_n\| \le \|f - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f_n\| \tag{105}$$

φανερώνει ότι η $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ συγκλίνει προς την f στον $\mathcal{L}^2(\mu)$. Διότι εάν λάβουμε τα n, n_k επαρκώς μεγάλα, τότε κάθε ένας από τους όρους της δεξιάς πλευράς της (105) μπορεί να γίνει όσο μικρός επιθυμούμε. $\square$

11.43 Το θεώρημα των Riesz και Fischer. *Ας είναι $\{\phi_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ ορθοκανονικό σύνολο συναρτήσεων στον X. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ συγκλίνει και θέτουμε $s_n = c_1\phi_1 + \cdots + c_n\phi_n$ για $n = 1, 2, 3, \dots$. Τότε, υπάρχει συνάρτηση $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ ούτως ώστε η $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ να συγκλίνει προς την f στον $\mathcal{L}^2(\mu)$ και επιπλέον*

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n.$$

Απόδειξη. Για οποιουσδήποτε δείκτες n, m με $n > m$ ισχύει ότι

$$\|s_n - s_m\|^2 = |c_{m+1}|^2 + \cdots + |c_n|^2,$$

επομένως η $\{s_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ είναι ακολουθία Cauchy στον $\mathcal{L}^2(\mu)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 11.42, υπάρχει συνάρτηση $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ ούτως ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\| = 0.$$

Τώρα, για οποιουσδήποτε δείκτες n, k με $n > k$ έχουμε ότι

$$\int_X f\overline{\phi_k}d\mu - c_k = \int_X f\overline{\phi_k}d\mu - \int_X s_n\overline{\phi_k}d\mu,$$

επομένως

$$\left|\int_X f\overline{\phi_k}d\mu - c_k\right| \le \|f - s_n\|\|\phi_k\|.$$

Λαμβάνοντας $n \to \infty$ βρίσκουμε ότι

$$c_k = \int_X f\overline{\phi_k}d\mu \qquad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Ορισμός 11.44. Ένα ορθοκανονικό σύνολο συναρτήσεων $\{\phi_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ στον X ονομάζεται *πλήρες* εάν και μόνον εάν για κάθε $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ οι ισότητες

$$\int_X f\overline{\phi_n}d\mu = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

συνεπάγονται ότι $\|f\| = 0$.

Στο Πόρισμα του Θεωρήματος 11.40 έχουμε την πληρότητα του τριγωνομετρικού συστήματος από την ισότητα του Parseval (101). Αντιστρόφως, η ισότητα του Parseval ισχύει για κάθε πλήρες ορθοκανονικό σύνολο:

Θεώρημα 11.45. *Υποθέτουμε ότι* $\{\phi_n\}$ *(*$n = 1, 2, 3, \dots$*) είναι ένα πλήρες ορθοκανονικό σύνολο συναρτήσεων στον* X. *Εάν* $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ *και εάν*

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n, \tag{106}$$

τότε

$$\int_X |f|^2 d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2. \tag{107}$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με την ανισότητα του Bessel, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ συγκλίνει. Θέτοντας για κάθε δείκτη n

$$s_n = c_1\phi_1 + \cdots + c_n\phi_n,$$

το θεώρημα των Riesz και Fischer φανερώνει την ύπαρξη συναρτήσεως $g \in \mathcal{L}^2(\mu)$ ούτως ώστε

$$g \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n \tag{108}$$

και $\lim_{n\to\infty} \|g - s_n\| = 0$. Άρα, $\lim_{n\to\infty} \|s_n\| = \|g\|$. Εφόσον για κάθε δείκτη n ισχύει ότι

$$\|s_n\|^2 = |c_1|^2 + \cdots + |c_n|^2,$$

έχουμε ότι

$$\int_X |g|^2 d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2. \tag{109}$$

Τώρα, οι (106), (108) και η πληρότητα του $\{\phi_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) φανερώνει ότι $\|f - g\| = 0$. Επομένως, η (109) συνεπάγεται την (107). □

Συνδυάζοντας τα Θεωρήματα 11.43 και 11.45, καταλήγουμε στο εξής πολύ ενδιαφέρον συμπέρασμα: Κάθε πλήρες ορθοκανονικό σύνολο επάγει μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των συναρτήσεων $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ (ταυτίζοντας τις συναρτήσεις οι οποίες είναι σχεδόν παντού ίσες) και των ακολουθιών $\{c_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ με την $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ συγκλίνουσα. Η αναπαράσταση

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n$$

μαζί με την ισότητα του Parseval φανερώνει ότι ο $\mathcal{L}^2(\mu)$ μπορεί να θεωρηθεί ως απειροδιάστατος Ευκλείδειος χώρος (ο λεγόμενος «χώρος Hilbert[6]»), στον οποίο το σημείο f έχει συντεταγμένες $c_1, c_2, \ldots$ και οι συναρτήσεις

[6] Σ. τ. Μ.: David Hilbert (1862-1943). Κορυφαίος Γερμανός μαθηματικός που άφησε μεγάλο έργο και στους τρεις βασικούς τομείς των Μαθηματικών, δηλαδή στην Ανάλυση, στην Άλγεβρα και στη Γεωμετρία, καθώς επίσης και στη Θεωρητική Φυσική.

Ο Hilbert σπούδασε στο Πανεπιστήμιο του Königsberg, της γενέτειράς του. Μαθήτευσε υπό τον Heinrich Weber (1842-1913) και τον Carl Louis Ferdinand Lindemann (1852-1939), από τον οποίο έλαβε το διδακτορικό δίπλωμα, το έτος 1885. Για ένα εξάμηνο πήγε στο Πανεπιστήμιο του Heidelberg, όπου σπούδασε υπό τον Immanuel Lazarus Fuchs (1833-1902). Στη διάρκεια των σπουδών του ανέπτυξε φιλική σχέση με τον Hermann Minkowski (1864-1909) και οι δύο τους αλληλοεπηρεάστηκαν σημαντικά στις μαθηματικές τους έρευνες. Το ίδιο συνέβη και με τον Adolf Hurwitz (1859-1919). Κατά τα έτη 1886 έως 1892 ο Hilbert ήταν υφηγητής στο ίδιο πανεπιστήμιο, από το έτος 1892 έως το 1893 έκτακτος καθηγητής και από το έτος 1893 έως το 1895 τακτικός καθηγητής. Το έτος 1895, με την υποστήριξη του Felix Klein (1849-1925), ο Hilbert διορίσθηκε καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Göttingen, όπου και παρέμεινε έως το τέλος της ζωής του.

Η εργασία του Hilbert στη Γεωμετρία είχε την μεγαλύτερη επίδραση σε αυτήν την περιοχή μετά τον Ευκλείδη. Διατύπωσε εικοσιένα αξιώματα, τα οποία δημοσίευσε στο φημισμένο βιβλίο του «Grundlagen der Geometrie», το έτος 1899. Ο Hilbert διατύπωσε στο Δεύτερο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών στο Παρίσι, το έτος 1900, τα διάσημα είκοσι τρία προβλήματά του, τα οποία περικλείουν την υπόθεση του συνεχούς, την καλή διάταξη των πραγματικών αριθμών, την υπερβατικότητα των δυνάμεων αλγεβρικών αριθμών, την υπόθεση του Riemman, την αποφασισιμότητα της Αριθμητικής και πολλά άλλα. Αρκετά από αυτά τα προβλήματα έχουν λυθεί, δίδοντας κάθε φορά επιπλέον ώθηση στον αντίστοιχο ερευνητικό τομέα. Επίσης, ο Hilbert είχε πλησιάσει στη διαμόρφωση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας, αλλά τον πρόλαβε με πολύ μικρή χρονική διαφορά ο Albert Einstein (1879-1955). Ο Hilbert υπήρξε ο ιδρυτής του συγχρόνου φιλοσοφικού ρεύματος της Μαθηματικής Τυποκρατίας. Όμως, το φιλοσοφικό αυτό ρεύμα υπέστη ανεπανόρθωτο πλήγμα ύστερα από την εμφάνιση του θεωρήματος του κορυφαίου Αυστριακού λογικολόγου Kurt Friedrich Gödel (1906-1978).

Το έτος 1930, το έτος συνταξιοδοτήσεώς του, ο Hilbert ανεκηρύχθη επίτιμος δημότης του Königsberg. Στην ομιλία που έδωσε εν όψει αυτής της τιμής, ο Hilbert είπε την περίφημη ρήση αναφερόμενος στα Μαθηματικά: «Πρέπει να γνωρίζουμε· θα μάθουμε».

$\phi_1, \phi_2 \ldots$ είναι τα διανύσματα συντεταγμένων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1. Εάν η συνάρτηση f είναι μετρήσιμη σε ένα σύνολο E, με $f \geq 0$ και $\int_E f d\mu = 0$, τότε αποδείξτε ότι $f(x) = 0$ για σχεδόν όλα τα $x \in E$.

Υπόδειξη: Για $n = 1, 2, 3 \ldots$ ας είναι E_n το σύνολο των $x \in E$ με $f(x) > 1/n$. Θέτουμε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Τότε $\mu(A) = 0$ εάν και μόνον εάν $\mu(E_n) = 0$ για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n.

Άσκηση 2. Εάν η συνάρτηση f είναι μετρήσιμη σε ένα σύνολο E και εάν $\int_A f d\mu = 0$ για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο A ενός μετρήσιμου συνόλου E, τότε αποδείξτε ότι $f(x) = 0$ για σχεδόν όλα τα $x \in E$.

Άσκηση 3. Εάν $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ είναι μία ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων, τότε αποδείξτε ότι το σύνολο των σημείων x στα οποία η $\{f_n(x)\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ συγκλίνει είναι μετρήσιμο.

Άσκηση 4. Εάν $f \in \mathcal{L}(\mu)$ σε ένα μετρήσιμο σύνολο E και g είναι μία φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση στο E, τότε αποδείξτε ότι $fg \in \mathcal{L}(\mu)$ στο E.

Άσκηση 5. Θεωρούμε τη συνάρτηση g στο $[0, 1]$, όπου

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{εάν} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{εάν} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Στη διάρκεια της μαθηματικής του σταδιοδρομίας, ο Hilbert επέβλεψε ως υποψήφιους διδάκτορες περίπου εβδομήντα μαθηματικούς. Μεταξύ αυτών βρίσκονται οι σπουδαίοι μαθηματικοί Wilhelm Ackermann (1896-1962), Felix Bernstein (1878-1956), Richard Courant (1888-1972), Alfréd Haar (1885-1933), Georg Hamel (1877-1954), Erich Hecke (1887-1947) και Ernst Hellinger (1883-1950). Επίσης, μαθητής του Hilbert υπήρξε ο διάσημος συνολοθεωρητικός Ernst Zermelo (1871-1951). Προς τιμή του Hilbert έχει δοθεί το όνομά του σε έναν κρατήρα στη σελήνη.

Επίσης, θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ στο $[0, 1]$ όπου για $k = 1, 2, 3, \ldots$ και $x \in [0, 1]$ είναι

$$f_{2k}(x) = g(x),$$
$$f_{2k+1}(x) = g(1 - x).$$

Αποδείξτε ότι

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad (0 \le x \le 1)$$

και

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2}.$$

(Συγκρίνετε με την (77).)

Άσκηση 6. θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ στον R^1 όπου για $n = 1, 2, 3, \ldots$ είναι

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{εάν} \quad |x| \le n, \\ 0 & \text{εάν} \quad |x| > n. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι $f_n \to 0$ ομοιομόρφως στο R^1 καθώς $n \to \infty$. Όμως,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n dx = 2 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

(Γράφουμε $\int_{-\infty}^{\infty}$ αντί του $\int_{R^1}$.) Επομένως, η ομοιόμορφη σύγκλιση δεν συνεπάγεται την κυριαρχούμενη σύγκλιση, υπό την έννοια του Θεωρήματος 11.32. Όμως, σε σύνολα πεπερασμένου μέτρου, ομοιομόρφως συγκλίνουσες ακολουθίες φραγμένων συναρτήσεων ικανοποιούν το Θεώρημα 11.32.

Άσκηση 7. Διατυπώστε μία ικανή και αναγκαία συνθήκη ούτως ώστε $f \in \mathcal{R}(\alpha)$, όπου α είναι μία αύξουσα συνάρτηση στο $[a, b]$.

Υπόδειξη: Συμβουλευθείτε το Παράδειγμα 11.6(β) και το Θεώρημα 11.33.

Άσκηση 8. Εάν $f \in \mathcal{R}$ στο $[a, b]$ και εάν F είναι η συνάρτηση στο $[a, b]$ όπου $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ $(x \in [a, b])$, τότε αποδείξτε ότι $F'(x) = f(x)$ για σχεδόν όλα τα $x \in [a, b]$.

Άσκηση 9. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση F της (96) είναι συνεχής στο $[a, b]$.

Άσκηση 10. Εάν X είναι ένας μετρήσιμος χώρος με $\mu(X) < +\infty$ και $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ στον X, τότε αποδείξτε ότι $f \in \mathcal{L}(\mu)$ στον X. Εάν

$$\mu(X) = +\infty,$$

τότε το προηγούμενο δεν ισχύει απαραιτήτως. Επί παραδείγματι, εάν f είναι η συνάρτηση στον R^1 όπου

$$f(x) = \frac{1}{1 + |x|} \qquad (x \in R^1),$$

τότε $f \in \mathcal{L}^2$ στον R^1, ενώ $f \notin \mathcal{L}$ στον R^1.

Άσκηση 11. Εάν $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$ στον X, τότε ορίζουμε την απόσταση μεταξύ των f και g ως τον αριθμό

$$\int_X |f - g| d\mu.$$

Αποδείξτε ότι ο $\mathcal{L}(\mu)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Άσκηση 12. Υποθέτουμε ότι f είναι μία συνάρτηση, ορισμένη στο μοναδιαίο τετράγωνο, για την οποία ισχύουν τα εξής:

(α) $|f(x, y)| \leq 1$ για κάθε $x, y \in [0, 1]$.

(β) Για σταθερό $x \in [0, 1]$ η $f(x, y)$ είναι συνεχής συνάρτηση του y.

(γ) Για σταθερό $y \in [0, 1]$ η $f(x, y)$ είναι συνεχής συνάρτηση του x.

Θεωρούμε τη συνάρτηση g στο $[0, 1]$ όπου

$$g(x) = \int_0^1 f(x, y) dy \qquad (x \in [0, 1]).$$

Είναι η g συνεχής;

Άσκηση 13. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ στο $[-\pi, \pi]$, όπου

$$f_n(x) = \sin nx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots, x \in [-\pi, \pi]),$$

ως ακολουθία του $\mathcal{L}^2$. Αποδείξτε ότι το σύνολο τιμών της ακολουθίας αυτής είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο, αλλά δεν είναι συμπαγές.

Άσκηση 14. Αποδείξτε ότι μία μιγαδική συνάρτηση f σε έναν μετρήσιμο χώρο είναι μετρήσιμη εάν και μόνον εάν το $f^{-1}(V)$ είναι μετρήσιμο για κάθε ανοικτό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου.

Άσκηση 15. Ας είναι $\mathcal{R}$ ο δακτύλιος όλων των στοιχειωδών υποσυνόλων του (0, 1]. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς a, b με $0 < a \leq b \leq 1$ ορίζουμε

$$\phi([a, b]) = \phi([a, b)) = \phi((a, b]) = \phi((a, b)) = b - a.$$

Επίσης, για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό b με $0 < b \leq 1$ ορίζουμε

$$\phi((0, b)) = \phi((0, b]) = 1 + b.$$

Δείξτε ότι οι ορισμοί αυτοί χορηγούν μία προσθετική συνολοσυνάρτηση ϕ στον $\mathcal{R}$ η οποία δεν είναι ομαλή και δεν μπορεί να επεκταθεί σε μία αριθμησίμως προσθετική συνολοσυνάρτηση σε έναν σ-δακτύλιο.

Άσκηση 16. Υποθέτουμε ότι $\{n_k\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ είναι μία γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων αριθμών και ότι E είναι το σύνολο των σημείων $x \in (-\pi, \pi)$ στα οποία συγκλίνει η $\{\sin n_k x\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Αποδείξτε ότι $m(E) = 0$.

Υπόδειξη: Για κάθε υποσύνολο A του E ισχύει ότι

$$\int_A \sin n_k x dx \to 0$$

και

$$2\int_A (\sin n_k x)^2 dx = \int_A (1 - cos2n_k x)dx \to m(A)$$

καθώς $k \to \infty$.

Άσκηση 17. Υποθέτουμε ότι $E \subset (-\pi, \pi)$ με $m(E) > 0$ και θεωρούμε $\delta > 0$. Χρησιμοποιήστε την ανισότητα του Bessel για να αποδείξετε ότι υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους ακέραιοι αριθμοί n με $\sin nx \geq \delta$ για κάθε $x \in E$.

Άσκηση 18. Υποθέτουμε ότι $f, g \in \mathcal{L}^2(\mu)$ στον X. Αποδείξτε ότι

$$\left| \int_X f\overline{g} d\mu \right|^2 = \int_X |f|^2 d\mu \int_X |g|^2 d\mu$$

εάν και μόνον εάν υπάρχει ένας μιγαδικός αριθμός c ούτως ώστε $g(x) = cf(x)$ για σχεδόν όλα τα $x \in X$. (Συγκρίνετε με το Θεώρημα 11.35.)

Βιβλιογραφία

[1] ARTIN, E.: *The Gamma Function*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1964.

[2] BOAS, R. P.: *A primer of Real Functions*, Carus Mathematical Monograph No. 13, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1960.

[3] BUCK, R. C. (ed.): *Studies in Modern Analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1962.

[4] BUCK, R. C. (ed.): *Advanced Calculus*, 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.

[5] BURKILL, J. C.: *The Lebesgue Integral*, Cambridge University Press, New York, 1951.

[6] DIEUDONNÉ, J.: *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, Inc., New York, 1960.

[7] FLEMING, W.H.: *Functions of Several Variables*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1965.

[8] GRAVES, L.M.: *The Theory of Functions of Real Variables*, 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1956.

[9] HALMOS, P. R.: *Measure Theory*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1950.

[10] HALMOS, P.R.: *Finite-Dimensional Vector Spaces*, 2d ed., D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1958.

[11] HARDY, G. H.: *Pure Mathematics*, 9th. ed, Cambridge University Press, New York, 1947.

[12] HARDY, G. H. and ROGOSINSKI, W.: *Fourier Series*, 2d ed., Cambridge University Press, New York, 1950.

[13] HERSTEIN, I. N.: *Topics in Algebra*, Blaisdell Publishing Company, New York, 1964.

[14] HEWITT, E. and STROMBERG, K.: *Real and Abstract Analysis*, Springer Publishing Co., Inc., New York, 1965.

[15] KELLOG, O. D.: *Foundations of Potential Theory*, Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1940.

[16] KNOPP, K.: *Theory and Application of Infinite Series*, Blackie & Son, Ltd., Glasgow, 1928.

[17] LANDAU, E. G. H.: *Foundations of Analysis*, Chelsea Publishing Company, New York, 1951.

[18] MCSHANE, E. J.: *Integration*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1944.

[19] NIVEN, I. M.: *Irrational Numbers*, Carus Mathematical Monograph No. 11, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1956.

[20] ROYDEN, H. L: *Real Analysis*, The Macmillan Company, New York, 1963.

[21] RUDIN, W.: *Real and Complex Analysis*, 2ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1974.

[22] SIMMONS, G. F.: *Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.

[23] SINGER, I. M. and THORPE, J. A.: *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*, Scott, Foresman and Company, Glenview, Ill., 1967.

[24] SMITH, K. T.: *Primer of Modern Analysis*, Bogden and Quigley, Tarrytown-on-Hudson, N.Y., 1971.

[25] SPIVAK, M.: *Calculus on Manifolds*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1965.

[26] THURSTON, H. A.: *The Number System*, Blackie & Son, Ltd., London-Glasgow, 1956.

Ευρετήριο