ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σημειώσεις Παραδόσεων Πραγματικής Ανάλυσης

(Δεύτερη έκδοση)

Σπύρος Αργυρός

Ιανουάριος 2003

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Το περιεχόμενο των σημειώσεων αφορά τις παραδόσεις του μαθήματος Πραγματική Ανάλυση που διδάχτηκε το χειμερινό εξάμηνο του ακαδημαϊκού έτους 2001-2002 στο Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών (Τ.Ε.Μ.Φ.Ε.) του Ε.Μ.Π.

Η ύλη που επιλέχθηκε να διδαχθεί και συμπεριλαμβάνεται στις σημειώσεις αφορά τη θεωρία μετρικών χώρων. Ας σημειώσουμε ότι όπως έχει επικρατήσει διεθνώς, ο τίτλος Πραγματική Ανάλυση συμπεριλαμβάνει ένα ευρύ φάσμα θεμάτων σύγχρονης Μαθηματικής Ανάλυσης και σαν θεματική ενότητα δεν μπορεί να διδαχθεί σε ένα εξάμηνο. Η θεωρία μετρικών χώρων συνιστά τον κεντρικό πυρήνα των σύγχρονων μαθηματικών και η εξοικείωση του φοιτητή των Μαθηματικών με τις έννοιες και τις τεχνικές της είναι απαραίτητο εφόδιο για οποιαδήποτε κατεύθυνση θα επιλέξει να ακολουθήσει.

Οι σημειώσεις χωρίζονται σε εννιά κεφάλαια και στο τέλος κάθε κεφαλαίου παρατίθενται ορισμένες ασκήσεις. Δεδομένου ότι η φύση της θεωρίας μετρικών χώρων είναι αρκετά αφηρημένη και η εξοικείωση των φοιτητών με παρόμοιες έννοιες και τεχνικές αποδείξεων είναι μικρή απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή στη μελέτη του μαθήματος.

Ειδικότερα ο φοιτητής θα πρέπει να έχει καλή γνώση και κατανόηση των εννοιών, (υπάρχουν αρκετές νέες έννοιες). Επίσης η γνώση των ισοδύναμων μορφών (χαρακτηρισμών) των εννοιών είναι απαραίτητη για τη μελέτη των θεωρημάτων και την επίλυση ασκήσεων. Κατά τη διάρκεια των εξετάσεων ο φοιτητής θα πρέπει να διατυπώσει με σαφήνεια τους συλλογισμούς που θα απαιτούνται για την απάντηση των ερωτημάτων. Είναι χρήσιμο κατά τη διάρκεια της μελέτης να καταγράφει πλήρως τις απαντήσεις στις ασκήσεις η ακόμη και αποδείξεις θεωρημάτων (προτάσεων κ.λ.π.) τα οποία διαβάζει ώστε να εξοικειωθεί με την σαφή διατύπωση συλλογισμών.

Το περιεχόμενο του μαθήματος έχει επιλεγεί έτσι ώστε να μην υπάρχουν εκτενείς αποδείξεις και επίσης να εκτεθεί η ποικιλία των μεθόδων που εμφανίζονται. Οι ασκήσεις επίσης έχουν επιλεγεί ώστε να συμβάλλουν στην καλή κατανόηση του μαθήματος.

Με την ελπίδα ότι ο κάθε φοιτητής θα βρει κάποιο ενδιαφέρον στο περιεχόμενο του μαθήματος και των σημειώσεων, σας εύχομαι καλή μελέτη και επιτυχία στις εξετάσεις.

Η έγκαιρη προετοιμασία των σημειώσεων στηρίχθηκε στη σημαντική βοήθεια που προσφέρθηκε από τους συνεργάτες μου Α. Αρβανιτάκη, Β. Κανελλόπουλο, Α. Μανουσάκη και Α. Τόλια, τους οποίους και επιθυμώ να ευχαριστήσω.

Αθήνα 29 Ιανουαρίου 2002
Σπύρος Αργυρός
Καθηγητής Μαθηματικών Ε.Μ.Π.

Πρόλογος δεύτερης έκδοσης

Η δεύτερη έκδοση των σημειώσεων του μαθήματος Πραγματικής Ανάλυσης αποτελεί συμπλήρωση της πρώτης. Έχει προστεθεί μια παράγραφος στο κεφάλαιο των πλήρων μετρικών χώρων που αφορά τις ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις, μια παράγραφος στο κεφάλαιο των συμπαγών μετρικών χώρων που αφορά τα ολικά φραγμένα υποσύνολα μετρικών χώρων, καθώς και ένα κεφάλαιο όπου ορίζονται τα γινόμενα μετρικών χώρων και το σύνολο Cantor.

Αθήνα 15 Ιανουαρίου 2003
Σπύρος Αργυρός
Καθηγητής Μαθηματικών Ε.Μ.Π.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Μετρικοί χώροι και παραδείγματα

1. Ορισμός μετρικού χώρου

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1. ***Μετρικός χώρος*** είναι ένα ζεύγος (X, ρ) όπου X είναι ένα μη κενό σύνολο και $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ μία απεικόνιση που ικανοποιεί τις ιδιότητες:

(i) $\rho(x, y) \geq 0$ για κάθε $x, y \in X$ και $\rho(x, y) = 0$ αν και μόνο αν $x = y$.
(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ για κάθε $x, y \in X$ (συμμετρική ιδιότητα).
(iii) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ για κάθε $x, y, z \in X$ (τριγωνική ανισότητα).

Η απεικόνιση ρ ονομάζεται ***μετρική***, τα στοιχεία του συνόλου X ονομάζονται ***σημεία***, και ο αριθμός $\rho(x, y)$ ονομάζεται ***απόσταση*** του x από το y.

Όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης ως προς τη μετρική που θεωρούμε σε ένα σύνολο X χρησιμοποιούμε και την έκφραση "ο μετρικός χώρος X".

Παραθέτουμε τώρα κάποια απλά παραδείγματα μετρικών χώρων

1. Η ***συνήθης μετρική*** στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ορίζεται ως

$$\rho(x, y) = |x - y|$$

για $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Η ***ευκλείδεια μετρική*** ρ_2 στο σύνολο $\mathbb{R}^k$ των διατεταγμένων $k-$άδων πραγματικών αριθμών ορίζεται ως εξής: Για δυό στοιχεία $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ του $\mathbb{R}^k$ είναι

$$\rho_2(\vec{x}, \vec{y}) = \Big(\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

3. Η ***διακριτή μετρική*** σε οποιοδήποτε μη κενό σύνολο X ορίζεται ως εξής: Για $x, y \in X$ ορίζουμε

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \neq y \\ 0 & \text{αν } x = y. \end{cases}$$

4. Αν (X, ρ) είναι ένας μετρικός χώρος και A οποιοδήποτε μη κενό υποσύνολο του X, ο περιορισμός ρ_A της ρ στο $A \times A$ δηλαδή η απεικόνιση $\rho_A : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ με $\rho_A(x, y) = \rho(x, y)$ είναι μετρική στο σύνολο A. Η μετρική αυτή ονομάζεται ***σχετική μετρική*** που επάγεται στο A από τη ρ. Έτσι για παράδειγμα κάθε μη κενό υποσύνολο των πραγματικών αριθμών είναι μετρικός χώρος με τη σχετική μετρική που επάγεται σε αυτό από τη συνήθη μετρική.

2. Μετρικές σε διανυσματικούς χώρους που ορίζονται από νόρμες

Μια σημαντική κλάση μετρικών χώρων είναι αυτές που ορίζονται σε ένα διανυσματικό χώρο μέσω μιας νόρμας. Παρακάτω υπενθυμίζουμε τον ορισμό του πραγματικού διανυσματικού χώρου και της νόρμας σε ένα πραγματικό διανυσματικό χώρο και δίνουμε κάποια παραδείγματα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2. Πραγματικός ***διανυσματικός χώρος*** (ή ***γραμμικός χώρος***) ονομάζεται μια τριάδα $(V,+,\cdot)$ όπου V είναι ένα σύνολο, $+ : V\times V \longrightarrow V$ μια εσωτερική πράξη (***πρόσθεση***) και $\cdot : \mathbb{R}\times V \longrightarrow V$ μια εξωτερική πράξη (***βαθμωτό γινόμενο***) που ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $(x+y)+z = x+(y+z)$ για κάθε $x,y,z\in V$.
(ii) $x+y = y+x$ για κάθε $x,y\in V$.
(iii) Υπάρχει ένα στοιχείο $0\in V$(μηδενικό στοιχείο) ώστε $x+0 = 0+x = x$ για κάθε $x\in V$.
(iv) Για κάθε $x\in V$ υπάρχει $-x\in V$ ώστε $x+(-x) = (-x)+x = 0$.
(v) $\lambda(x+y) = \lambda x+\lambda y$ για κάθε $x,y\in V$ και $\lambda\in\mathbb{R}$.
(vi) $(\lambda+\mu)x = \lambda x+\mu x$ για κάθε $x\in V$ και $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. (όπου $\lambda+\mu$ στο πρώτο μέλος είναι το άθροισμα των πραγματικών αριθμών λ και μ).
(vii) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ για κάθε $x\in V$ και $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ (όπου $\lambda\mu$ στο δεύτερο μέλος είναι το γινόμενο των πραγματικών αριθμών λ και μ).
(viii) $1x = x$ για κάθε $x\in V$.

Τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου ονομάζονται ***διανύσματα***.
(Εαν στον ορισμό αντικαταστήσουμε το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών με το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών έχουμε την έννοια του μιγαδικού διανυσματικού χώρου.)

Βάση του διανυσματικού χώρου V ονομάζεται ένα σύνολο $B\subset V$ έτσι ώστε για κάθε $x\in V$ με $x\neq 0$ υπάρχουν μοναδικά $k\in\mathbb{N}$, $b_1,b_2,\dots,b_k$ διαφορετικά ανά δύο στοιχεία του B και μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$ ώστε $x = \lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\cdots+\lambda_k b_k$.

Παραδείγματα διανυσματικών χώρων
(α) Ο χώρος $\mathbb{R}^k$ με πρόσθεση και βαθμωτό γινόμενο οριζόμενο από τις σχέσεις:

$$(x_1,x_2,\dots,x_k)+(y_1,y_2,\dots,y_k) = (x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_k+y_k)$$

$$\lambda(x_1,x_2,\dots,x_k) = (\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_k).$$

Η κανονική (standard) βάση του $\mathbb{R}^k$ αποτελείται από τα διανύσματα $e_1,e_2,\dots,e_k$ όπου $e_j = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ (η μονάδα βρίσκεται στην j-θέση).

(β) Ο χώρος $c_{00}(\mathbb{N})$ των τελικά μηδενικών πραγματικών ακολουθιών αποτελείται από όλες τις ακολουθίες πραγματικών αριθμών της μορφής $\vec{x} = (x_1,x_2,\dots)$ για τις οποίες υπάρχει $i_0\in\mathbb{N}$ ώστε $x_i = 0$ για κάθε $i\geq i_0$. Η πρόσθεση και το βαθμωτό γινόμενο ορίζονται κατά σημείο δηλαδή

$$(x_1,x_2,\dots)+(y_1,y_2,\dots) = (x_1+y_1,x_2+y_2,\dots)$$

$$\lambda(x_1,x_2,\dots) = (\lambda x_1,\lambda x_2,\dots).$$

Σημειώνουμε ότι το άθροισμα δύο τελικά μηδενικών ακολουθιών καθώς και το γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού με μια τελικά μηδενική ακολουθία είναι τελικά μηδενική ακολουθία και άρα οι πράξεις όπως ορίστηκαν είναι καλά ορισμένες στο $c_{00}(\mathbb{N})$. Ο διανυσματικός χώρος $c_{00}(\mathbb{N})$ είναι ένας χώρος που επεκτείνει κατά φυσιολογικό τρόπο κάθε $\mathbb{R}^k$, $k = 1,2,\dots$ Η κανονική (standard) βάση του $c_{00}(\mathbb{N})$ είναι η $e_1,e_2,\dots$ όπου $e_j = (0,0,\dots,0,1,0,\dots)$ για $j = 1,2,\dots$ (η μονάδα βρίσκεται στην j-θέση).

(γ) Ο χώρος P όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές.

(δ) Ο χώρος P_n όλων των πολυωνύμων με βαθμό μικρότερο ή ίσο του n και πραγματικούς συντελεστές.

(ε) Αν X είναι ένα μη κενό σύνολο κάθε συνάρτηση $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ καλείται ***πραγματική συνάρτηση***. Ο χώρος $\mathcal{F}(X)$ που αποτελείται από όλες τις πραγματικές συναρτήσεις $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με πράξεις οριζόμενες κατά σημείο, δηλαδή

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

είναι διανυσματικός χώρος.

(στ) Ο χώρος $C[a,b]$ των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το κλειστό διάστημα $[a,b]$. Σημειώνουμε εδώ ότι το άθροισμα συνεχών συναρτήσεων καθώς και κάθε πραγματικό πολλαπλάσιο μιας συνεχούς συνάρτησης είναι συνεχής συνάρτηση.

Ορισμος 1.3. Έστω $(V,+,\cdot)$ ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος. Μια απεικόνιση $\|\ \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται ***νόρμα*** αν ικανοποιεί τις ιδιότητες:

(i) $\|x\| \geq 0$ για κάθε $x \in V$ και $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$.
(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ για κάθε $x \in V$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.
(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x, y \in V$ (τριγωνική ανισότητα).

Το ζεύγος $(V, \|\ \|)$ ονομάζεται ***χώρος με νόρμα***.

Για κάθε χώρο με νόρμα $(V, \|\ \|)$ η απεικόνιση $\rho = \rho_{\|\ \|} : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ με $\rho(x,y) = \|x-y\|$ είναι μετρική στο V. Πράγματι

- $\rho(x,y) = \|x-y\| \geq 0$ για κάθε $x, y \in V$, ενώ $\rho(x,y) = 0$, δηλαδή $\|x-y\| = 0$ αν και μόνο αν $x - y = 0$ δηλαδή αν και μόνο αν $x = y$.
- $\rho(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = |-1| \cdot \|y-x\| = \rho(y,x)$ για κάθε $x, y \in V$.
- Για κάθε $x, y, z \in V$ έχουμε $\rho(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

Η μετρική αυτή ονομάζεται ***μετρική που επάγει η νόρμα*** στο διανυσματικό χώρο V.

Δίνουμε τώρα κάποια παραδείγματα χώρων με νόρμα.

1. Η ***ευκλείδεια νόρμα*** $\|\ \|_2$ στον $\mathbb{R}^k$ ορίζεται ως εξής: Για $\vec{x} \in \mathbb{R}^k$ της μορφής $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ θέτουμε

$$\|\vec{x}\|_2 = \Big(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Η ευκλείδεια μετρική ρ_2 στον $\mathbb{R}^k$ είναι η μετρική που επάγεται από τη νόρμα $\|\ \|_2$.

2. Στον $\mathbb{R}^k$ θεωρούμε επίσης τις νόρμες $\|\ \|_1$ και $\|\ \|_\infty$ που για $\vec{x} \in \mathbb{R}^k$ της μορφής $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ ορίζονται ως εξής:

$$\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{k} |x_i|$$

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max\{|x_i| :\ i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Η απόδειξη ότι οι $\|\ \|_1$ και $\|\ \|_\infty$ είναι όντως νόρμες στον $\mathbb{R}^k$ αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

3. Στον $\mathbb{R}^k$ ορίζονται επίσης οι νόρμες $\|\ \|_p$ για $1 < p < \infty$ ως εξής: Για $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ ορίζουμε

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Η απόδειξη ότι η $\| \ \|_p$ είναι πράγματι νόρμα παρουσιάζει δυσκολία μόνο στην απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας. Για την απόδειξη αυτή θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Minkowski η απόδειξη της οποίας βασίζεται στην ανισότητα Hölder. Ξεκινάμε την απόδειξη με την ακόλουθη ανισότητα:

Αν $p > 1$ και $q > 1$ ικανοποιούν τη σχέση $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ τότε για κάθε $a, b \geq 0$ ισχύει

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{1}$$

Απόδειξη. Αν $a = 0$ ή $b = 0$ η ανισότητα (1) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $a > 0$ και $b > 0$. Η συνάρτηση $\log : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με $\log''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και άρα είναι κοίλη συνάρτηση. Συνεπώς για $x, y \in (0, +\infty)$ και $0 < \lambda < 1$ είναι $\lambda \log x + (1 - \lambda) \log y \leq \log(\lambda x + (1 - \lambda)y)$. Για $x = a^p$, $y = b^q$ και $\lambda = \dfrac{1}{p}$ (οπότε $1 - \lambda = \dfrac{1}{q}$) προκύπτει ότι $\dfrac{1}{p} \log a^p + \dfrac{1}{q} \log b^q \leq \log(\dfrac{1}{p} a^p + \dfrac{1}{q} b^q)$ δηλαδή $\log(ab) \leq \log(\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q})$ από την οποία προκύπτει η ανισότητα (1). □

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Δυο πραγματικοί αριθμοί $p, q > 1$ ώστε $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ λέγονται ***συζυγείς εκθέτες*** ή λέμε ότι ο q είναι ο συζυγής εκθέτης του p (και λόγω συμμετρίας ο p είναι συζυγής εκθέτης του q). Παρατηρούμε ότι για $p > 1$ ο συζυγής εκθέτης του p είναι ο $q = \dfrac{p}{p-1}$ και ότι η σχέση $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ που ορίζει τους συζυγείς εκθέτες είναι ισοδύναμη της $p + q = pq$.

Ανισότητα Hölder: Αν p, q είναι συζυγείς εκθέτες (δηλαδή $p > 1$ και $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$) και $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k$ είναι $2k$ πραγματικοί αριθμοί τότε

$$\sum_{i=1}^{k} |a_i b_i| \leq \Big(\sum_{i=1}^{k} |a_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\sum_{i=1}^{k} |b_i|^q \Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{2}$$

Στην ειδική περίπτωση που $p = q = 2$ έχουμε την ανισότητα Cauchy-Scwartz.

Απόδειξη. Κατ΄ αρχήν παρατηρούμε ότι αν $\sum\limits_{i=1}^{k} |a_i|^p = 0$ τότε $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$ και η (2) ισχύει προφανώς ως ισότητα. Το ίδιο συμπέρασμα έχουμε και στην περίπτωση που $\sum\limits_{i=1}^{k} |b_i|^q = 0$. Στα παρακάτω υποθέτουμε ότι $\sum\limits_{i=1}^{k} |a_i|^p > 0$ και $\sum\limits_{i=1}^{k} |b_i|^q > 0$.

Εξετάζουμε πρώτα την ειδική περίπτωση που $\sum\limits_{i=1}^{k} |a_i|^p = \sum\limits_{i=1}^{k} |b_i|^q = 1$. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $\sum\limits_{i=1}^{k} |a_i b_i| \leq 1$. Για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$ από την ανισότητα (1) για τους μη αρνητικούς $|a_i|$ και $|b_i|$ έχουμε

$$|a_i b_i| \leq \frac{|a_i|^p}{p} + \frac{|b_i|^q}{q}.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις k αυτές ανισότητες προκύπτει ότι

$$\sum_{i=1}^{k} |a_i b_i| \leq \sum_{i=1}^{k} (\frac{|a_i|^p}{p} + \frac{|b_i|^q}{q}) = \frac{1}{p} \Big(\sum_{i=1}^{k} |a_i|^p \Big) + \frac{1}{q} \Big(\sum_{i=1}^{k} |b_i|^q \Big) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Για τη γενική περίπτωση, θέτοντας $A_i = \dfrac{a_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}}$ και $B_i = \dfrac{b_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$ για $i = 1, 2, \ldots, k$ παρατηρούμε ότι για τους πραγματικούς αριθμούς A_1,A_2,..., A_k,B_1,B_2,...,B_k ισχύει $\sum\limits_{i=1}^{k} |A_i|^p = \sum\limits_{i=1}^{k} |B_i|^q = 1$. Άρα από την ειδική περίπτωση προκύπτει ότι $\sum\limits_{i=1}^{k} |A_i B_i| \le 1$ δηλαδή $\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{|a_i|}{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \dfrac{|b_i|}{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \le 1$. Επομένως

$$\sum_{i=1}^{k} |a_i b_i| \le \Big(\sum_{i=1}^{k} |a_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\sum_{i=1}^{k} |b_i|^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

□

Ανισότητα Minkowski: Αν $p \ge 1$ και $x_1, x_2, \ldots, x_k,\ y_1, y_2, \ldots, y_k$ είναι $2k$ πραγματικοί αριθμοί τότε

$$\Big(\sum_{i=1}^{k} |x_i + y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{3}$$

Απόδειξη. Για $p = 1$ η ανισότητα είναι προφανής οπότε υποθέτουμε ότι $p > 1$. Θέτοντας $A = (\sum\limits_{i=1}^{k} |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ έχουμε

$$\begin{aligned} A^p &= \sum_{i=1}^{k} |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^{k} |x_i + y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \\ &\le \sum_{i=1}^{k} (|x_i| + |y_i|) \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \\ &= \sum_{i=1}^{k} |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{k} |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1}. \end{aligned} \tag{4}$$

Θεωρούμε το συζυγή εκθέτη q του p δηλαδή τον αριθμό $q = \dfrac{p}{p-1}$. Από την ανισότητα Hölder για τους αριθμούς $a_i = |x_i|$, $b_i = |x_i + y_i|^{p-1}$ για $i = 1, 2, \ldots, k$ προκύπτει ότι

$$\sum_{i=1}^{k} |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \le \Big(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\sum_{i=1}^{k} \cdot |x_i + y_i|^{(p-1)q}\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Εφόσον $(p-1)q = pq - q = p$ και $A = (\sum\limits_{i=1}^{k} |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ έπεται ότι

$$\sum_{i=1}^{k} |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \le \Big(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot (A^p)^{\frac{1}{q}}. \tag{5}$$

Με όμοιο τρόπο από την ανισότητα Hölder για τους αριθμούς $a_i = |y_i|$, $b_i = |x_i + y_i|^{p-1}$ για $i = 1, 2, \ldots, k$ έπεται ότι

$$\sum_{i=1}^{k} |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \le \Big(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot (A^p)^{\frac{1}{q}}. \tag{6}$$

Από τις (4),(5),(6) συνάγουμε ότι

$$
\begin{aligned}
A^p &\le \Big(\sum_{i=1}^k |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot (A^p)^{\frac{1}{q}} + \Big(\sum_{i=1}^k |y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot (A^p)^{\frac{1}{q}} \\
&= \bigg(\Big(\sum_{i=1}^k |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^k |y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\bigg) \cdot (A^p)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

και άρα

$$(A^p)^{1-\frac{1}{q}} \le \Big(\sum_{i=1}^k |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^k |y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

δηλαδή

$$A \le \Big(\sum_{i=1}^k |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^k |y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

η οποία είναι ακριβώς η ανισότητα Minkowski (3). □

Η ανισότητα Minkowski συνεπάγεται ότι για $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^k$ ισχύει $\|\vec{x}+\vec{y}\|_p \le \|\vec{x}\|_p + \|\vec{y}\|_p$ δηλαδή την τριγωνική ανισότητα στο χώρο $(\mathbb{R}^k, \| \ \|_p)$. Έτσι ο $(\mathbb{R}^k, \| \ \|_p)$ είναι χώρος με νόρμα και η μετρική ρ_p που επάγει η νόρμα αυτή στον $\mathbb{R}^k$ περιγράφεται ως εξής: Για δυο στοιχεία $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ και $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ του $\mathbb{R}^k$

$$\rho_p(\vec{x}, \vec{y}) = \Big(\sum_{i=1}^k |x_i - y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Αξίζει να σημειώσουμε σε αυτό το σημείο ότι για $p = 2$ η $\| \ \|_p$ και η ρ_p αντίστοιχα είναι η ευκλείδεια νόρμα και η ευκλείδεια μετρική.

4. Στο διανυσματικό χώρο $c_{00}(\mathbb{N})$ των τελικά μηδενικών ακολουθιών πραγματικών ορίζονται οι νόρμες $\| \ \|_\infty$ και $\| \ \|_p$ για $1 \le p < \infty$ ως εξής: Για $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots) \in c_{00}(\mathbb{N})$ θέτουμε

$$\|\vec{x}\|_\infty = \sup\{|x_i| : \ i \in \mathbb{N}\}$$

$$\|\vec{x}\|_p = \Big(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Η επαλήθευση ότι οι $\| \ \|_\infty$ και $\| \ \|_p$ είναι πράγματι νόρμες στο $c_{00}(\mathbb{N})$ γίνεται ακριβώς όπως και για τις αντίστοιχες νόρμες στον $\mathbb{R}^k$.

5. Ο χώρος $(C[a,b], \| \ \|_\infty)$ των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ όπου $\| \ \|_\infty$ είναι η supremum νόρμα δηλαδή

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : \ x \in [a,b]\}.$$

Επαληθεύουμε ότι η $\| \ \|_\infty$ είναι πράγματι νόρμα στο χώρο $C[a,b]$. Καταρχήν παρατηρούμε ότι η $\| \ \|_\infty$ είναι καλά ορισμένη εφόσον κάθε συνεχής πραγματική συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ είναι φραγμένη.

- Προφανώς $\|f\|_\infty \ge 0$ για κάθε $f \in C[a,b]$ ενώ αν $\|f\|_\infty = 0$ δηλαδή $\sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\} = 0$ τότε $|f(x)| = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ άρα $f = 0$.
- Για $f \in C[a,b]$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup\{|\lambda f(x)| : \ x \in [a,b]\} = |\lambda| \sup\{|f(x)| : \ x \in [a,b]\} = |\lambda| \|f\|_\infty$$

- Αν $f,g \in C[a,b]$ τότε για κάθε $x \in [a,b]$ είναι

$$|(f+g)(x)| = |f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

και άρα $\sup\{|(f+g)(x)| : \ x \in [a,b]\} \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ δηλαδή $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Ο $C[a,b]$ γίνεται μετρικός χώρος με τη μετρική που επάγει η νόρμα $\| \ \|_\infty$. Η μετρική αυτή περιγράφεται από τον τύπο

$$\rho_\infty(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)| : \ x \in [a,b]\}.$$

6. Στο χώρο $C[a,b]$ ορίζονται οι νόρμες $\| \ \|_p$ για $1 \leq p < +\infty$ ως εξής. Για $f \in C[a,b]$ θέτουμε

$$\|f\|_p = \Big(\int_a^b |f(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}$$

Η απόδειξη της ιδιότητας (i) της νόρμας είναι άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι αν $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση με $g(t) \geq 0$ για κάθε $t \in [a,b]$ τότε $g = 0$. Η ιδιότητα (ii) της νόρμας προκύπτει επίσης εύκολα ενώ η απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας έπεται από την ανισότητα Minkowski για συναρτήσεις. Η ανισότητα αυτή αποδεικνύεται μέσω της ανισότητας Hölder για συναρτήσεις.

Ανισότητα Hölder για συναρτήσεις: Αν p,q είναι συζυγείς εκθέτες (δηλαδή $p>1$ και $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$) και $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι δυο συνεχείς συναρτήσεις τότε

$$\int_a^b |f(t)g(t)|dt \leq \Big(\int_a^b |f(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\int_a^b |g(t)|^q dt\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{7}$$

Στην ειδική περίπτωση που $p=q=2$ έχουμε την ανισότητα Cauchy-Scwartz για συναρτήσεις.

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται στην ανισότητα (1) και είναι όμοια με την απόδειξη της ανισότητας Hölder για $k-$άδες πραγματικών αριθμών με τη μόνη διαφοροποίηση ότι χρησιμοποιούμε ολοκληρώματα στη θέση των αθροισμάτων. □

Ανισότητα Minkowski για συναρτήσεις: Αν $p \geq 1$ και $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ δυο συνεχείς συναρτήσεις τότε

$$\Big(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\int_a^b |f(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_a^b |g(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} \tag{8}$$

Απόδειξη. Για $p=1$ η ανισότητα προκύπτει εύκολα ενώ για $p>1$ αποδεικνύεται με τη χρήση της ανισότητας Hölder για συναρτήσεις και με τον ίδιο τρόπο που αποδείχθηκε η ανισότητα Minkowski για $k-$άδες πραγματικών αριθμών. □

Η ανισότητα Minkowski για συναρτήσεις συνεπάγεται ότι για $f,g \in C[a,b]$ ισχύει $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ δηλαδή την τριγωνική ανισότητα της τριγωνική ανισότητα της νόρμας στο χώρο $(C[a,b], \| \ \|_p)$. Η μετρική ρ_p που επάγει η νόρμα $\| \ \|_p$ στο χώρο $C[a,b]$ περιγράφεται από τον τύπο

$$\rho_p(f,g) = \Big(\int_a^b |f(t) - g(t)|^p dt \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι για κάθε $x,y,z,w \in X$ ισχύει:

(i) $|\rho(x,y) - \rho(x,z)| \leq \rho(y,z)$.

(ii) $|\rho(x,y) - \rho(z,w)| \leq \rho(x,z) + \rho(y,w)$.

2. Έστω X μη κενό σύνολο και $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ μια 1-1 συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ με $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)|$ είναι μετρική στο X.

3. Αν $X \neq \emptyset$ και ρ_1, ρ_2 δυο μετρικές στο X τότε η $\rho_1 + \rho_2$ είναι επίσης μετρική στο X.

4. Έστω (X,ρ), (Y,d) δύο μετρικοί χώροι και $p > 1$. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $\rho : (X \times Y) \times (X \times Y) \longrightarrow \mathbb{R}$ με $\rho_p\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = |\rho(x_1,x_2)^p + d(y_1,y_2)^p|^{\frac{1}{p}}$ είναι μετρική στο $X \times Y$
(Υπόδειξη: Για την απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας χρησιμοποιήστε την ανισότητα Minkowski.)

Γενικεύστε, διατυπώνοντας και αποδεικνύοντας αντίστοιχο αποτέλεσμα για το γινόμενο k μετρικών χώρων.

5. Εξετάστε αν για κάθε μετρικό χώρο (X,ρ) οι $\rho_1 = \sqrt{\rho}$, $\rho_2 = \rho^2$ είναι μετρικές.
(Υπόδειξη: Μια από τις ρ_i, $i = 1,2$ είναι πάντα μετρική (βρείτε ποια). Για την άλλη βρείτε κατάλληλο παράδειγμα μετρικού χώρου (X,ρ) και καταλλήλων $x,y,z \in X$ ώστε να αποτυγχάνει η τριγωνική ανισότητα για την αντίστοιχη ρ_i.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ακολουθίες και συναρτήσεις

1. Ακολουθίες

1.1. Γενικοί ορισμοί. Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Με τον όρο ***ακολουθία*** στο X εννοούμε μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$. Αν $f(n) = x_n$, $n \in \mathbb{N}$, τότε συμβολίζουμε την ακολουθία f με το σύμβολο (x_n) ή και $x_1, x_2, x_3, \dots$ Οι τιμές της f, δηλαδή τα στοιχεία x_n του συνόλου X καλούνται ***όροι*** της ακολουθίας.

Δεν είναι απαραίτητο οι όροι μιας ακολουθίας στο X να είναι διαφορετικοί μεταξύ τους (π.χ. οι σταθερές ακολουθίες $x_n = x_0$ για κάθε $n \in N$, όπου x_0 είναι τυχόν στοιχείο του X).

Αν (x_n) είναι μια ακολουθία και $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_n < \cdots$ φυσικοί αριθμοί τότε η ακολουθία (x_{k_n}) δηλαδή η $x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \dots$ καλείται ***υπακολουθία*** της (x_n). Οι δείκτες των όρων μιας υπακολουθίας αποτελούν μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Π.χ αν (x_n) είναι μια ακολουθία τότε οι (x_{2n}) και (x_{2n-1}) αποτελούν δυο υπακολουθίες της (x_n). Η (x_{2n}) ή $x_2, x_4, x_6, \dots$ καλείται και υπακολουθία των αρτίων όρων της (x_n) και η (x_{2n-1}) δηλαδή η $x_1, x_3, x_5, \dots$ λέγεται και υπακολουθία των περιττών όρων της (x_n). Σημειώστε επίσης ότι αν (x_{k_n}) είναι μια υπακολουθία της (x_n) τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $k_n \geq n$. Πράγματι $k_1 \geq 1$ αφού $k_1 \in \mathbb{N}$. Επιπλέον αν για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, $k_n \geq n$ τότε αφού $k_{n+1} > k_n$ έχουμε ότι $k_{n+1} > n$ και επειδή $k_{n+1} \in \mathbb{N}$ έπεται $k_{n+1} \geq n + 1$. Άρα με επαγωγή συμπεραίνουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $k_n \geq n$.

Σκοπός μας στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου αυτού, είναι να δώσουμε τον ορισμό του ορίου μιας ακολουθίας σε ένα μετρικό χώρο (X, ρ), δηλαδή τον ορισμό της συγκλίνουσας ακολουθίας σε ένα μετρικό χώρο καθώς και να μελετήσουμε ακολουθίες στον $\mathbb{R}^k$ με την ευκλείδεια μετρική ρ_2. Ξεκινούμε με μια σύντομη επανάληψη γνωστών εννοιών από ακολουθίες στο $\mathbb{R}$.

1.2. Ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Έστω (x_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι το x_0 είναι ***όριο*** της (x_n) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ φυσικός αριθμός ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $|x_n - x_0| < \varepsilon$. Αν η (x_n) έχει όριο το x_0 τότε λέμε ότι η (x_n) ***συγκλίνει*** στο x_0 και γράφουμε $x_n \to x_0$. Κάθε ακολουθία στο $\mathbb{R}$ που συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό καλείται ***συγκλίνουσα*** ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Υπενθυμίζουμε ακόμη ότι:

(α) Το όριο μιας ακολουθίας (αν αυτό υπάρχει) είναι μοναδικό. Αυτό μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $\lim_n x_n$ για το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας. Έτσι ο συμβολισμός $x_n \to x_0$ είναι ισοδύναμος του $\lim_n x_n = x_0$.

(β) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία (x_n) στο $\mathbb{R}$ είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε $|x_n| < M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ) Κάθε υπακολουθία μιας συγκλίνουσας ακολουθίας συγκλίνει στο ίδιο όριο με αυτή.

Επίσης ένα από τα πλέον θεμελιώδη Θεωρήματα που αφορούν ακολουθίες στο $\mathbb{R}$ είναι το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass: ''Κάθε φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία''.

1.3. Ακολουθίες σε ένα μετρικό χώρο (X, ρ).

Ορισμος 2.1. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, (x_n) ακολουθία στον (X, ρ) και $x_0 \in X$. Τότε το x_0 καλείται ***όριο*** της (x_n) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$.

Αν η (x_n) έχει όριο το $x_0 \in X$ λέμε ότι η (x_n) ***συγκλίνει*** στο x_0 και συμβολίζουμε αυτό με $x_n \to x_0$. Επίσης μια ακολουθία (x_n) στο μετρικό χώρο (X, ρ) καλείται ***συγκλίνουσα*** αν υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $x_n \to x_0$.

Παρατηρείστε ότι η έννοια του ορίου μιας ακολουθίας σε ένα μετρικό χώρο είναι απλή γενίκευση της αντίστοιχης έννοιας για ακολουθίες στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική ($\rho(x, y) = |x - y|$).

Μια γεωμετρική ερμηνεία για την έννοια της σύγκλισης μιας ακολουθίας (x_n) στο x_0 είναι η εξής: $x_n \to x_0$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in S_\rho(x_0, \varepsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$, όπου $S_\rho(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : \ \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$ είναι η ανοιχτή σφαίρα με κέντρο x_0 και ακτίνα ε.

Επίσης εύκολα αποδεινύεται και η εξής πρόταση:

Προταση 2.2. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, (x_n) ακολουθία στο X και $x_0 \in X$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) $x_n \to x_0$.
(ii) *Η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\rho(x_n, x_0))$ συγκλίνει στο μηδέν.*

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι το όριο μιας ακολουθίας είναι μοναδικό.

Προταση 2.3 (Μοναδικότητα του ορίου). *Έστω (x_n) ακολουθία σε ένα μετρικό χώρο (X, ρ). Αν υπάρχει το όριο της (x_n) τότε αυτό είναι μοναδικό.*

Αποδειξη. Ας υποθέσουμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι υπάρχουν δυο στοιχεία $x_0, x_0' \in X$ με $x_0 \neq x_0'$ ώστε $x_n \to x_0$ και $x_n \to x_0'$. Αφού $x_0 \neq x_0'$ έχουμε ότι $\rho(x_0, x_0') = \delta > 0$. Επειδή $x_n \to x_0$ για $\varepsilon = \dfrac{\delta}{2}$ έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $\rho(x_n, x_0) < \dfrac{\delta}{2}$. Ομοίως, αφού $x_n \to x_0'$ υπάρχει $n_0' \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0'$, $\rho(x_n, x_0') < \dfrac{\delta}{2}$. Αλλά τότε, αν $n_0'' = \max\{n_0, n_0'\}$ έχουμε ότι

$$\delta = \rho(x_0, x_0') \leq \rho(x_0, x_{n_0''}) + \rho(x_{n_0''}, x_0') = \rho(x_{n_0''}, x_0) + \rho(x_{n_0''}, x_0') < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

δηλαδή $\delta < \delta$ άτοπο. □

Η πρόταση αυτή μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $\lim\limits_n x_n$ για το μοναδικό όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας (x_n). Έτσι η έκφραση $x_n \to x_0$ γράφεται ισοδύναμα $\lim\limits_n x_n = x_0$.

Προταση 2.4. *Κάθε υπακολουθία μιας συγκλίνουσας ακολουθίας σε ένα μετρικό χώρο συγκλίνει στο ίδιο όριο που συγκλίνει και ολόκληρη η ακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, (x_n) ακολουθία στο X, $x_0 \in X$ και ας υποθέσουμε ότι $x_n \to x_0$. Έστω (x_{k_n}) υπακολουθία της (x_n). Θα δείξουμε ότι $x_{k_n} \to x_0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x_0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπώς αν $n \geq n_0$ τότε αφού $k_n \geq n$ έχουμε ότι και $k_n \geq n_0$. Άρα για κάθε $n \geq n_0$, $\rho(x_{k_n}, x_0) < \varepsilon$. Αφού λοιπόν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_{k_n}, x_0) < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$, έχουμε ότι $x_{k_n} \to x_0$. □

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Οι αποδείξεις των Προτάσεων 2.3 και 2.4 δεν είναι τίποτα άλλο παρά οι γνωστές αποδείξεις για τις αντίστοιχες προτάσεις στο $\mathbb{R}$ με τη μόνη διαφορά ότι αντί για την απόλυτη τιμή έχουμε γενικά τη μετρική ρ. Επίσης, όταν θα ορισθεί και η έννοια του φραγμένου υποσυνόλου ενός μετρικού χώρου, θα δούμε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία σε ένα μετρικό χώρο (X, ρ) είναι φραγμένη. Συνεπώς οι ιδιότητες (α),(β),(γ) των ακολουθιών στο $\mathbb{R}$ που αναφέραμε προηγουμένως ισχύουν γενικά για μετρικούς χώρους. Το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass δεν ισχύει γενικά σε μετρικούς χώρους. Όμως στην περίπτωση του $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$ ισχύει, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

1.4. Ακολουθίες στον ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$. Μια ακολουθία στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^k$, $k \geq 2$ είναι μια ακολουθία διανυσμάτων του $\mathbb{R}^k$ και για το λόγο αυτό θα συμβολίζεται γενικά με $(\vec{x}_n)$. Παρατηρείστε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\vec{x}_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k)$ όπου $x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k$ είναι οι συντεταγμένες του $\vec{x}_n$. Έτσι σε κάθε ακολουθία $(\vec{x}_n)$ στον $\mathbb{R}^k$ αντιστοιχούν k ακολουθίες (x_n^1), $(x_n^2), \ldots, (x_n^k)$ στον $\mathbb{R}$. Η επόμενη πρόταση είναι πολύ χρήσιμη για τη μελέτη ακολουθιών στον $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$.

Πρόταση 2.5. *Έστω $(\vec{x}_n)$ ακολουθία στον $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$ και $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^k$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) $\vec{x}_n \to \vec{x}_0$.

(ii) $x_n^i \to x_0^i$ *στο $\mathbb{R}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$ όπου $\vec{x}_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k)$, $n \in \mathbb{N}$ και $\vec{x}_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^k)$.*

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Έστω ότι $\vec{x}_n \to \vec{x}_0$ και $i_0 \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Θα δείξουμε ότι $x_n^{i_0} \to x_0^{i_0}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho_2(\vec{x}_n, \vec{x}_0) < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Επειδή $|x_n^{i_0} - x_0^{i_0}| \leq \Big(\sum\limits_{i=1}^{k} |x_n^i - x_0^i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \rho_2(\vec{x}_n, \vec{x}_0)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$, $|x_n^{i_0} - x_0^{i_0}| < \varepsilon$. Άρα $x_n^{i_0} \to x_0^{i_0}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Έστω ότι $x_n^i \to x_0^i$ για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, k$. Θα δείξουμε ότι $\vec{x}_n \to \vec{x}_0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n^i \to x_0^i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ υπάρχει $n_i \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_i$, $|x_n^i - x_0^i| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_i : i = 1, 2, \ldots, k\}$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε ότι

$$\rho_2(\vec{x}_n, \vec{x}_0) = \Big(\sum_{i=1}^{k} |x_n^i - x_0^i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \Big(\sum_{i=1}^{k} (\frac{\varepsilon}{\sqrt{k}})^2\Big)^{\frac{1}{2}} = (k \cdot \frac{\varepsilon^2}{k})^{\frac{1}{2}} = \varepsilon.$$

Άρα $\vec{x}_n \to \vec{x}_0$. □

Θεώρημα 2.6 (Θεώρημα Bolzano-Weierstrass στον $\mathbb{R}^k$). *Κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^k$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. (Μια ακολουθία $(\vec{x}_n)$ στον $\mathbb{R}^k$ καλείται* ***φραγμένη*** *αν υπάρχει $M > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\|\vec{x}_n\|_2 \leq M$).*

Απόδειξη. Για $k = 1$ το θεώρημα είναι γνωστό. Για λόγους απλότητας το δείχνουμε πρώτα για $k = 2$. Έστω λοιπόν $(\vec{x}_n)$ φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^2$, $\vec{x}_n = (x_n^1, x_n^2)$ για $n = 1, 2, \ldots$. Αφού $|x_n^1| \leq \|\vec{x}_n\|_2$ έχουμε ότι η (x_n^1) είναι φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}$

και συνεπώς η (x_n^1) έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{k_n}^1)$. Επειδή $|x_{k_n}^2| \leq \|\vec{x}_{k_n}\|_2$ για κάθε n, η $(x_{k_n}^2)$ είναι μια φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$ και συνεπώς έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{k_{l_n}}^2)$. Η $(x_{k_{l_n}}^1)$ είναι υπακολουθία της συγκλίνουσας ακολουθίας $(x_{k_n}^1)$ άρα είναι και αυτή συγκλίνουσα. Έτσι οι υπακολουθίες $(x_{k_{l_n}}^1)$, $(x_{k_{l_n}}^2)$ των $(x_{k_n}^1)$ και $(x_{k_n}^2)$ αντίστοιχα είναι συγκλίνουσες στον $\mathbb{R}$. Από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι η $(\vec{x}_{k_{l_n}})$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία του $\mathbb{R}^2$. Η $(\vec{x}_{k_{l_n}})$ είναι προφανώς υπακολουθία της $(\vec{x}_n)$.

Για την απόδειξη στη γενική περίπτωση είναι βολικό να υιοθετήσουμε ένα διαφορετικό συμβολισμό για τις ακολουθίες και τις υπακολουθίες. Έτσι αν (y_n) είναι μια ακολουθία σε ένα σύνολο Y αυτή θα συμβολίζεται και με $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και μια υπακολουθία (y_{k_n}) της $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θα συμβολίζεται και με $(y_n)_{n\in M}$ όπου $M = \{k_1, k_2, k_3, \ldots\}$.

Έστω λοιπόν $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^k$, $\vec{x}_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k)$, $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$ έχουμε $|x_n^i| \leq \|\vec{x}_n\|_2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς η $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Αφού $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$ υπάρχει $M_1 \subset \mathbb{N}$ άπειρο ώστε $(x_n^1)_{n\in M_1}$ συγκλίνουσα. Όμοια η $(x_n^2)_{n\in M_1}$ είναι φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$ και συνεπώς υπάρχει $M_2 \subset M_1 \subset \mathbb{N}$ άπειρο ώστε $(x_n^2)_{n\in M_2}$ να είναι συγκλίνουσα. Πάλι η $(x_n^3)_{n\in M_2}$ είναι φραγμένη και συνεπώς υπάρχει $M_3 \subset M_2 \subset M_1 \subset \mathbb{N}$ άπειρο ώστε $(x_n^3)_{n\in M_3}$ συγκλίνουσα. Συνεχίζοντας κατά αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε μια πεπερασμένη (μήκους k) ακολουθία απείρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$, $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \cdots \supset M_k$ ώστε για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$ η $(x_n^i)_{n\in M_i}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία στο $\mathbb{R}$.

Θέτουμε $M = M_k$. Τότε για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, k$ η $(x_n^i)_{n\in M}$ είναι υπακολουθία της συγκλίνουσας ακολουθίας $(x_n^i)_{n\in M_i}$, οπότε είναι και αυτή συγκλίνουσα. Καταλήξαμε σε ένα άπειρο σύνολο $M \subset \mathbb{N}$ ώστε η $(x_n^i)_{n\in M}$ είναι συγκλίνουσα υπακολουθία της $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$. Από Πρόταση 2.5 έχουμε ότι η $(\vec{x}_n)_{n\in M}$ είναι συγκλίνουσα υπακολουθία της $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Πρόταση 2.7. *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$ είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω $(\vec{x}_n)$ φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^k$ και $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^k$ ώστε $\vec{x}_n \to \vec{x}_0$. Τότε για $\varepsilon = 1$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για όλα τα $n \geq n_0$, $\rho_2(\vec{x}_n, \vec{x}_0) < 1$. Έχουμε $\rho_2(\vec{x}_n, \vec{x}_0) = \|\vec{x}_n - \vec{x}_0\|_2$ οπότε από την τριγωνική ανισότητα για τη $\| \ \|_2$ παίρνουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$

$$\|\vec{x}_n\|_2 = \|(\vec{x}_n - \vec{x}_0) + \vec{x}_0\|_2 \leq \|\vec{x}_n - \vec{x}_0\|_2 + \|\vec{x}_0\|_2 < 1 + \|\vec{x}_0\|_2.$$

Αν λοιπόν θέσουμε $M = \max\{\|\vec{x}_1\|_2, \ldots, \|\vec{x}_{n_0-1}\|_2, 1 + \|\vec{x}_0\|_2\}$ έχουμε ότι $\|\vec{x}_n\| \leq M$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Επομένως η ακολουθία $(\vec{x}_n)$ είναι φραγμένη. □

2. Συνεχείς συναρτήσεις

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την έννοια της συνέχειας για συναρτήσεις $f : (X, \rho) \longrightarrow (Y, d)$ όπου $(X, \rho), (Y, d)$ μετρικοί χώροι. Πριν διατυπώσουμε το σχετικό ορισμό είναι χρήσιμο να υπενθυμίσουμε κάποιες γνωστές έννοιες για συναρτήσεις $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ όπου $X \subset \mathbb{R}$. Όπως είναι γνωστό αν $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ είναι μια πραγματική συνάρτηση και $x_0 \in X$ τότε η f λέγεται ***συνεχής στο*** $x_0 \in X$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Αν η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in X$ τότε η f λέγεται ***συνεχής στο*** X. Γενικά το δ εξαρτάται και από το ε αλλά και από το x_0. Η συνέχεια μιας συνάρτησης $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ στο $x_0 \in X$ χαρακτηρίζεται με ακολουθίες. Η ***αρχή μεταφοράς σύγκλισης ακολουθιών*** αναφέρει ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν μεταφέρει συγκλίνουσες ακολουθίες στο x_0 σε συγκλίνουσες ακολουθίες στο $f(x_0)$, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \to x_0$ έχουμε ότι $f(x_n) \to f(x_0)$.

Θα δείξουμε ότι τα παραπάνω επεκτείνονται γενικά για μετρικούς χώρους. Παρατηρείστε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν το $f(x)$ είναι όσο κοντά θέλουμε στο $f(x_0)$ αρκεί το x να είναι αρκετά κοντά στο x_0. Έτσι ο ορισμός της συνέχειας πραγματικών συναρτήσεων στηρίζεται ουσιαστικά στην έννοια της απόστασης και είναι φυσικό να περιμένει κανείς ότι θα μπορεί να γενικευθεί και για συναρτήσεις που δεν ορίζονται ή που δεν παίρνουν τιμές μόνο στο $\mathbb{R}$.

2.1. Συνεχείς συναρτήσεις σε μετρικούς χώρους.

Ορισμος 2.8. Έστω $(X,\rho),(Y,d)$ μετρικοί χώροι, $f:(X,\rho)\longrightarrow(Y,d)$ συνάρτηση και $x_0\in X$. Η f λέγεται ***συνεχής στο*** x_0 αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε $x\in X$ με $\rho(x,x_0)<\delta$ να ισχύει ότι $d(f(x),f(x_0))<\varepsilon$.

Αν η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0\in X$ τότε η f θα λέγεται ***συνεχής***.

Παρατηρείστε ότι ο παραπάνω ορισμός είναι μια φυσιολογική επέκταση του γνωστού ορισμού της συνέχειας για συναρτήσεις $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$. Το δ γενικά εξαρτάται από το ε αλλά και από το x_0. Τα πιο προφανή παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων $f:(X,\rho)\longrightarrow(Y,d)$ είναι οι σταθερές συναρτήσεις δηλαδή $f(x)=y_0$ για κάθε $x\in X$, όπου $y_0\in Y$. Επίσης σε κάθε μετρικό χώρο (X,ρ) η ταυτοτική συνάρτηση, δηλαδή η $I:(X,\rho)\longrightarrow(X,\rho)$ με $I(x)=x$ για κάθε $x\in X$, είναι ένα ακόμα προφανές παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης.

Άμεση από τον ορισμό είναι και η επόμενη πρόταση που χαρακτηρίζει γεωμετρικά με ανοιχτές σφαίρες τη συνέχεια.

Προταση 2.9. *Έστω $(X,\rho),(Y,d)$ μετρικοί χώροι, $f:(X,\rho)\longrightarrow(Y,d)$ συνάρτηση και $x_0\in X$. Τότε η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε*

$$f\big(S_\rho(x_0,\delta)\big)\subset S_d(f(x_0),\varepsilon).$$

Μια σημαντική κλάση συναρτήσεων είναι οι συναρτήσεις που ικανοποιούν τη ***συνθήκη Lipschitz***. Μια συνάρτηση $f:(X,\rho)\longrightarrow(Y,d)$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz αν υπάρχει σταθερά $C>0$ ώστε για κάθε $x,y\in X$ να ισχύει

$$d(f(x),f(y))\le C\rho(x,y).$$

Προταση 2.10. *Αν η $f:(X,\rho)\longrightarrow(Y,d)$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz τότε είναι συνεχής.*

Αποδειξη. Έστω ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz με σταθερά C. Θεωρούμε $x_0\in X$ και $\varepsilon>0$. Θέτοντας $\delta=\dfrac{\varepsilon}{C}$, για κάθε $x\in X$ με $\rho(x,x_0)<\delta=\dfrac{\varepsilon}{C}$ έχουμε

$$d(f(x),f(x_0))\le C\rho(x,y)<\varepsilon.$$

Επομένως η f είναι συνεχής. $\square$

Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο την **εμπηάρνηση** του ορισμού της συνέχειας:

Αν $f:(X,\rho)\longrightarrow(Y,d)$ και $x_0\in X$ τότε η f δεν είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε για κάθε $\delta>0$ να υπάρχει $x_\delta\in X$ με $\rho(x_\delta,x_0)<\delta$ και $d(f(x_\delta),f(x_0))\ge\varepsilon$.

2.2. Αρχή μεταφοράς συγκλινουσών ακολουθιών.

Θεωρημα 2.11. *Έστω $(X,\rho),(Y,d)$ μετρικοί χώροι, $f:(X,\rho)\longrightarrow(Y,d)$ συνάρτηση και $x_0\in X$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Η f είναι συνεχής στο x_0.*
(2) *Για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n\to x_0$ ισχύει ότι $f(x_n)\to f(x_0)$.*

Δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν μεταφέρει από τον (X,ρ) συγκλίνουσες ακολουθίες στο x_0 σε συγκλίνουσες του (Y,d) στο $f(x_0)$.

Αποδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Έστω ακόμη (x_n) ακολουθία στον (X,ρ) με $x_n\to x_0$. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $(f(x_n))$ του (Y,d) συγκλίνει στο $f(x_0)$. Πράγματι έστω $\varepsilon>0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε $x\in X$ με $\rho(x,x_0)<\delta$ να έχουμε ότι $d(f(x),f(x_0))<\varepsilon$. Αφού $x_n\to x_0$ έχουμε ότι υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n\geq n_0$, $\rho(x_n,x_0)<\delta$. Άρα για κάθε $n\geq n_0$, $d(f(x_n),f(x_0))<\varepsilon$. Επομένως αφού για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $d(f(x_n),f(x_0))<\varepsilon$ για κάθε $n\geq n_0$, η ακολουθία $(f(x_n))$ του (Y,d) συγκλίνει στο $f(x_0)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Έστω ότι για κάθε ακολουθία (x_n) στον (X,ρ) με $x_n\to x_0$ έχουμε ότι $f(x_n)\to f(x_0)$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Έστω, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0. Τότε από την άρνηση του ορισμού της συνέχειας (δείτε την προηγούμενη παράγραφο) έχουμε ότι υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε για κάθε $\delta>0$ υπάρχει $x_\delta\in X$ με $\rho(x_\delta,x_0)<\delta$ και $d(f(x_\delta),f(x_0))\geq\varepsilon$. Άρα για κάθε $n\in\mathbb{N}$ αν $\delta=\dfrac{1}{n}$ υπάρχει $x_n\in X$ με $\rho(x_n,x_0)<\dfrac{1}{n}$ και $d(f(x_n),f(x_0))\geq\varepsilon$. Έτσι αφού $0\leq\rho(x_n,x_0)<\dfrac{1}{n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε $\rho(x_n,x_0)\to 0$ και άρα $x_n\to x_0$ (δείτε και πρόταση (2.2». Όμως αφού $d(f(x_n),f(x_0))\geq\varepsilon$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ η $(f(x_n))$ δεν συγκλίνει στο $f(x_0)$ (πράγματι, αν $f(x_n)\to f(x_0)$ θα έπρεπε να υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n\geq n_0$, $d(f(x_n),f(x_0))<\varepsilon$). Αυτό όμως είναι αδύνατο να συμβαίνει από την αρχική μας υπόθεση. Επομένως η f είναι συνεχής στο x_0. □

Με την αρχή της μεταφοράς μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής. Υπενθυμίζουμε ότι αν $f:X\longrightarrow Y$, $g:Y\longrightarrow Z$ τότε η ***σύνθεση της f με τη g*** είναι η συνάρτηση $g\circ f:X\longrightarrow Z$ με $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ για κάθε $x\in X$.

Προταση 2.12. *Έστω (X,ρ), (Y,d), (Z,σ) μετρικοί χώροι, $f:(X,\rho)\longrightarrow(Y,d)$, $g:(Y,d)\longrightarrow(Z,\sigma)$ συναρτήσεις και $x_0\in X$ ώστε η f είναι συνεχής στο x_0 και η g συνεχής στο $f(x_0)$. Τότε η σύνθεση $g\circ f:(X,\rho)\longrightarrow(Z,\sigma)$ είναι συνεχής στο x_0.*

Αποδειξη. Θα εφαρμόσουμε την αρχή της μεταφοράς. Έστω (x_n) ακολουθία στο X ώστε $x_n\to x_0$. Αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία $((f\circ g)(x_n))$ του (Z,σ) συγκλίνει στο $(f\circ g)(x_0)\in Z$. Πράγματι, αφού η f είναι συνεχής στο x_0 και $x_n\to x_0$ από την αρχή της μεταφοράς για την $f:(X,\rho)\longrightarrow(Y,d)$ έχουμε ότι $f(x_n)\to f(x_0)$. Εφαρμόζοντας πάλι την ίδια αρχή για τη συνάρτηση $g:(Y,d)\longrightarrow(Z,\sigma)$, αφού η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, έχουμε ότι $g(f(x_n))\to g(f(x_0))$ δηλαδή $(g\circ f)(x_n)\to(g\circ f)(x_0)$. □

2.3. Πραγματικές συναρτήσεις. Ας θυμηθούμε σε αυτό το σημείο ότι κάθε συνάρτηση $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$, όπου X είναι ένα μη κενό σύνολο, ονομάζεται πραγματική συνάρτηση. Το άθροισμα δυο πραγματικών συναρτήσεων $f,g:X\longrightarrow\mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $f+g:X\longrightarrow\mathbb{R}$ με $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ για κάθε $x\in X$ ενώ το γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού

$\lambda \in \mathbb{R}$ με μια πραγματική συνάρτηση $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $\lambda f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ για κάθε $x \in X$. Επίσης το ***γινόμενο*** δυο συναρτήσεων $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται να είναι η συνάρτηση $f \cdot g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ για κάθε $x \in X$. Ομοίως αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in X$ το ***πηλίκο*** των f και g είναι η συνάρτηση $\frac{f}{g} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ για κάθε $x \in X$.

Αν το σύνολο X εφοδιασθεί με μια μετρική και οι πραγματικές συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς τότε αποδεικνύεται ότι και οι συναρτήσεις $f+g$, $f \cdot g$, λf (όπου $\lambda \in \mathbb{R}$) είναι συνεχείς. Πράγματι ισχύει η εξής πρόταση:

Πρόταση 2.13. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $f, g : (X, \rho) \longrightarrow \mathbb{R}$ πραγματικές συναρτήσεις, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x_0 \in X$. Αν οι f και g είναι συνεχείς στο x_0 τότε*

(i) *Το άθροισμα $f + g$ των f και g είναι συνεχής στο x_0.*
(ii) *Το γινόμενο $f \cdot g$ των f και g είναι συνεχής στο x_0.*
(iii) *Η συνάρτηση λf είναι συνεχής στο x_0.*
(iv) *Αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in X$ τότε η $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της μεταφοράς και τις γνωστές ιδιότητες που αναφέρονται στις πράξεις και τα όρια των πραγματικών ακολουθιών.
(i) Έστω (x_n) ακολουθία στο X με $x_n \to x_0$. Αρκεί να δειχθεί ότι $(f+g)(x_n) \to (f+g)(x_0)$. Πράγματι αφού οι f, g είναι συνεχείς στο x_0 έχουμε ότι $f(x_n) \to f(x_0)$ και $g(x_n) \to g(x_0)$. Άρα $f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0)$ δηλαδή $(f + g)(x_n) \to (f + g)(x_0)$.
(ii) Ομοίως αν $x_n \to x_0$ τότε $f(x_n) \to f(x_0)$ και $g(x_n) \to g(x_0)$ και άρα $f(x_n)g(x_n) \to f(x_0)g(x_0)$ δηλαδή $(f \cdot g)(x_n) \to (f \cdot g)(x_0)$.
Οι (iii),(iv) αποδεικνύονται ανάλογα. □

Πρόταση 2.14. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $x_0 \in X$. Τότε η πραγματική συνάρτηση $f : (X, \rho) \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \rho(x, x_0)$ είναι συνεχής και ειδικότερα ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz με σταθερά $C = 1$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δειχθεί ότι $|f(x) - f(y)| \leq \rho(x, y)$ για όλα τα $x, y \in X$. Πράγματι, έστω $x, y \in X$. Τότε $\rho(x, x_0) \leq \rho(x, y) + \rho(y, x_0)$ δηλαδή $f(x) \leq \rho(x, y) + f(y)$ και άρα

$$f(x) - f(y) \leq \rho(x, y) \tag{1}$$

Επίσης $\rho(y, x_0) \leq \rho(y, x) + \rho(x, x_0)$ δηλαδή $f(y) \leq \rho(x, y) + f(x)$ και άρα

$$f(y) - f(x) \leq \rho(x, y) \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι $|f(x) - f(y)| \leq \rho(x, y)$. □

Η παραπάνω πρόταση γενικεύεται ως εξής. Αν (X, ρ) μετρικός χώρος, $A \subset X$ μη κενό και $x \in X$ ορίζουμε την ***απόσταση του*** x ***από το*** A να είναι $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, z) : z \in A\}$. Παρατηρείστε ότι για κάθε $x \in X$ και A μη κενό υποσύνολο του X ο $\rho(x, A)$ είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός και ότι για κάθε $x \in A$, $\rho(x, A) = 0$.

Πρόταση 2.15. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $\emptyset \neq A \subset X$. Τότε η συνάρτηση $f : (X, \rho) \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \rho(x, A)$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz με σταθερά $C = 1$ και συνεπώς είναι συνεχής.*

Αποδειξη. Όπως και στην προηγούμενη πρόταση πρέπει να δείξουμε ότι $|f(x) - f(y)| \leq \rho(x,y)$ για όλα τα $x, y \in X$. Έστω λοιπόν $x, y \in X$.

Για κάθε $z \in A$ έχουμε ότι $f(x) = \rho(x, A) \leq \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$. Άρα $f(x) - \rho(x,y) \leq \rho(y,z)$ για κάθε $z \in A$, συνεπώς, αφού $\rho(y, A) = \inf\{\rho(y,z) : \ z \in A\}$, έπεται ότι $f(x) - \rho(x,y) \leq \rho(y, A)$ δηλαδή $f(x) - \rho(x,y) \leq f(y)$. Συνεπώς

$$f(x) - f(y) \leq \rho(x,y). \tag{3}$$

Ομοίως, αντιμεταθέτοντας το x με το y στην παραπάνω απόδειξη, συμπεραίνουμε ότι

$$f(y) - f(x) \leq \rho(x,y) \tag{4}$$

Από τις (3) και (4) έχουμε ότι $|f(x) - f(y)| \leq \rho(x,y)$. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος (x_n), (y_n) ακολουθίες στο X και $x, y \in X$ με $x_n \to x$ και $y_n \to y$. Αποδείξτε ότι $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x,y)$.

2. Δείξτε ότι αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι δυο ακολουθίες σε ένα μετρικό χώρο (X,ρ) και $x \in X$ ώστε $x_n \to x$ και $\rho(x_n, y_n) \to 0$ τότε $y_n \to x$.

3. Έστω (X, ρ_δ) μετρικός χώρος όπου ρ_δ η διακριτή μετρική στο X. Αποδείξτε ότι:

(i) Μια ακολουθία (x_n) στο X είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι τελικά σταθερή.

(ii) Αν (Y, d) είναι τυχόν μετρικός χώρος, κάθε συναρτηση $f : X \longrightarrow Y$ είναι συνεχής.

4. Μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σε ένα μετρικό χώρο (X,ρ) συγκλίνει στο $x \in X$ αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει περαιτέρω υπακολουθία που συγκλίνει στο x.

5. Έστω X μη κενό σύνολο, $n \in \mathbb{N}$, και $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ώστε για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχει $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ώστε $f_i(x) \neq f_i(y)$. Δείξτε ότι:

(i) Η $\rho(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |f_i(x) - f_i(y)|$ είναι μετρική στο X.

(ii) Για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ η $f_i : (X,\rho) \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

6. Έστω $f : (X,\rho) \longrightarrow (Y,d)$ και $x \in X$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X με $x_n \to x$ η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία στον (Y,d).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ανοικτά και κλειστά υποσύνολα μετρικών χώρων.

Ορισμος 3.1. Έστω $A \subset X$ όπου (X, ρ) είναι μετρικός χώρος. Ένα σημείο $x \in X$ λέγεται ***οριακό σημείο*** του συνόλου A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$S(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Παρατηρηση. Είναι προφανές ότι κάθε $x \in A$ είναι οριακό σημείο του A. Το γεγονός που καθιστά ενδιαφέρον τον παραπάνω ορισμό είναι η ύπαρξη συνόλων A και σημείων $x \in X$ που ενώ $x \notin A$ εντούτοις το x είναι οριακό σημείο του A. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το ανοικτό διάστημα $(0, 1)$ σαν υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και οι αριθμοί $0, 1$ που είναι οριακά σημεία του $(0, 1)$.

Ορισμος 3.2. Η ***κλειστότητα*** ενός συνόλου A, υποσυνόλου ενός μετρικού χώρου (X, ρ) συμβολίζεται με $\overline{A}$ και ορίζεται ως εξής:

$$\overline{A} = \{x \in X : x \text{ είναι οριακό σημείο του } A\}.$$

Παρατηρησεις. (1) Όπως προείπαμε στην προηγούμενη παρατήρηση κάθε $x \in A$ είναι οριακό σημείο του A κατά συνέπεια $A \subset \overline{A}$.
(2) Η αντιστοίχιση $A \mapsto \overline{A}$ ορίζει μια συνάρτηση από το σύνολο των υποσυνόλων $\mathcal{P}(X)$ στον εαυτό του.
(3) Υπάρχουν δύο υποσύνολα οποιουδήποτε μετρικού χώρου (X, ρ) τα οποία έχουν τελείως προσδιορισμένη κλειστότητα. Αυτά είναι το κενό σύνολο $\emptyset$ και ο χώρος X. Πράγματι είναι άμεσο ότι $\overline{X} = X$, δεδομένου ότι περιέχει όλα τα σημεία. Επιπλέον $\overline{\emptyset} = \emptyset$ διότι για κάθε $x \in X$ και κάθε $\varepsilon > 0$ $S(x, \varepsilon) \cap \emptyset = \emptyset$ άρα $x \notin \overline{\emptyset}$.
(4) Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η κλειστότητα του A αφορά αφ' ενός μεν το σύνολο A αφ' ετέρου τον μετρικό χώρο που αυτό περιέχεται. Παρατηρείστε για παράδειγμα, ότι αν $A = (0, 1)$ και $(X, \rho) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ τότε $\overline{A} = [0, 1]$ ενώ αν $(X, \rho) = ((0, \infty), |\cdot|)$ τότε $\overline{A} = (0, 1]$ και ακόμα αν $(X, \rho) = ((0, 1), |\cdot|)$ τότε $\overline{A} = (0, 1)$.

Ασκηση 3.1. (1) Δείξτε ότι αν (X, ρ) όπου ρ είναι η διακριτή μετρική σ' ένα σύνολο X, τότε για κάθε $A \subset X$ ισχύει $\overline{A} = A$.
(2) Υπολογίστε το $\overline{A}$ όπου A συμβολίζει τα επόμενα σύνολα
   (α) $A = (a, b)$ σαν υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με τη συνήθη καθώς και με τη διακριτή μετρική.
   (β) $A = \mathbb{Q}$, το σύνολο των ρητών στο $\mathbb{R}$.
   (γ) $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ σαν υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένου με την ευκλείδεια μετρική.
(3) Δείξτε ότι αν A είναι πεπερασμένο υποσύνολο του X τότε $\overline{A} = A$.

Θεωρημα 3.3. *Η κλειστότητα συνόλων ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:*
(1) *Αν* $A \subset B$ *τότε* $\overline{A} \subset \overline{B}$.

(2) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ *(δηλαδή η κλειστότητα της κλειστότητας ενός συνόλου A δεν συνεισφέρει επιπλέον στοιχεία πέραν αυτών του $\overline{A}$).*

Αποδειξη. Έστω ότι $A \subset B$ και $x \in \overline{A}$. Για δείξουμε ότι $x \in \overline{B}$ αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, $S(x,\varepsilon) \cap B \neq \emptyset$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x \in \overline{A}$ έπεται ότι $S(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ και άρα, αφού $A \subset B$ $S(x,\varepsilon) \cap B \neq \emptyset$. Επομένως $x \in \overline{B}$.

Εφόσον $A \subset \overline{A}$ από το (1) έπεται ότι $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$. Για να δείξουμε ότι $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$ αρκεί να θεωρήσουμε x_0 ένα οριακό σημείο του $\overline{A}$ (δηλ. $x_0 \in \overline{\overline{A}}$) και να δείξουμε ότι το x_0 είναι οριακό σημείο του A (δηλ. $x_0 \in \overline{A}$).

Έστω $\varepsilon > 0$. Δεδομένου ότι το x_0 είναι οριακό σημείο του $\overline{A}$, $S(x_0,\varepsilon) \cap \overline{A} \neq \emptyset$, δηλαδή υπάρχει $y_0 \in S(x_0,\varepsilon) \cap \overline{A}$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει y_0 οριακό σημείο του A και $\rho(x_0,y_0) < \varepsilon$. Θέτουμε

$$\varepsilon_1 = \varepsilon - \rho(x_0,y_0) > 0$$

και με απλή εφαρμογή της τριγωνικής ιδιότητας της μετρικής ρ δείχνουμε ότι

$$S(y_0,\varepsilon_1) \subset S(x_0,\varepsilon). \tag{5}$$

Δεδομένου ότι το y_0 είναι οριακό σημείο του A έπεται εξ' ορισμού ότι

$$S(y_0,\varepsilon_1) \cap A \neq \emptyset. \tag{6}$$

Από τις (5) και (6) προκύπτει ότι

$$\emptyset \neq S(y_0,\varepsilon_1) \cap A \subset S(x_0,\varepsilon) \cap A.$$

Έχουμε δείξει ότι για δοθέν x_0 οριακό σημείο του $\overline{A}$ (δηλ. $x_0 \in \overline{\overline{A}}$) και για κάθε $\varepsilon > 0$

$$S(x_0,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

και άρα $x_0 \in \overline{A}$. Επομένως $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$ και άρα $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ □

1. Σημεία συσσώρευσης ενός συνόλου A

Ορισμος 3.4. Ένα σημείο $x \in X$ λέγεται ***σημείο συσσώρευσης*** ενός υποσυνόλου A του X αν για κάθε $\varepsilon > 0$,

$$A \cap (S(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

Παρατηρηση. Το σύμβολο $S(x,\varepsilon) \setminus \{x\}$ δηλώνει την ανοικτή σφαίρα $S(x,\varepsilon)$ χωρίς το κέντρο της x. Η διαφορά μεταξύ ενός οριακού σημείου x_0 και ενός σημείου συσσώρευσης y_0 είναι ότι στη δεύτερη περίπτωση υπάρχει η απαίτηση ότι για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ να υπάρχει $x \in A \cap S(y_0,\varepsilon)$ ώστε $x \neq y_0$ κάτι που δεν απαιτείται για τα οριακά σημεία.

Το επόμενο Θεώρημα αφορά μια σειρά από ισοδύναμες ιδιότητες των σημείων συσσώρευσης ενός συνόλου.

Θεωρημα 3.5. *Έστω A ένα υποσύνολο του μετρικού χώρου (X,ρ) και $x_0 \in X$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A.*
(2) *Για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $A \cap S(x_0,\varepsilon)$ έχει άπειρα στοιχεία.*
(3) *Υπάρχει ακολουθία $(x_n)_n \subset A$ ώστε $x_n \neq x_0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και $x_n \to x_0$.*

Παρατηρηση. Παρατηρείστε ότι με βάση την προηγούμενη παρατήρηση, ο ορισμός του σημείου συσσώρευσης έχει την ισοδύναμη μορφή ότι το σύνολο $S(x_0,\varepsilon)\cap A$ περιέχει ένα τουλάχιστον $x\neq x_0$. Το (2) του Θεωρήματος μας βεβαιώνει ότι το $S(x_0,\varepsilon)\cap A$ θα περιέχει άπειρα στοιχεία του A. Στο ερώτημα που τίθεται φυσιολογικά πώς από την γνώση ότι υπάρχει ένα $x\in S(x_0,\varepsilon)\cap A$ με $x\neq x_0$ προκύπτει ότι υπάρχουν άπειρα τέτοια, η απάντηση βρίσκεται στην παρατήρηση ότι το τυπικά ασθενέστερο ισχύει για κάθε $\varepsilon>0$ και αυτό επιβάλλει το ισχυρότερο.

Αποδειξη του Θεωρηματος. (1)$\Rightarrow$(2). Θα χρησιμοποιήσουμε εις άτοπον επαγωγή. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε το σύνολο $A\cap S(x_0,\varepsilon)$ είναι πεπερασμένο. Έστω ότι

$$A\cap(S(x_0,\varepsilon)\setminus\{x_0\})=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$$

όπου n είναι φυσικός αριθμός. Θέτουμε

$$\varepsilon_0=\min\{\rho(x_0,x_1),\rho(x_0,x_2),\dots,\rho(x_0,x_n)\}.$$

Δεδομένου ότι κάθε $x_i\neq x_0$ και το σύνολο $\{x_i:\ i=1,\dots,n\}$ είναι πεπερασμένο προκύπτει ότι $\varepsilon_0>0$. Αλλά τότε

$$A\cap(S(x_0,\varepsilon_0)\setminus\{x_0\})=\emptyset$$

και αυτό αντιφάσκει με τον ορισμό του σημείου συσσώρευσης. Άρα η αρχική υπόθεση ότι το σύνολο $A\cap S(x_0,\varepsilon)$ είναι πεπερασμένο απορρίπτεται και το (2) έχει αποδειχτεί.

(2)$\Rightarrow$(3). Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ επιλέγουμε $x_n\in A\cap S(x_0,\frac{1}{n})$ με $x_n\neq x_0$. Αυτό είναι δυνατό επειδή το $A\cap S(x_0,\frac{1}{n})$ είναι άπειρο. Άμεσα προκύπτει ότι $x_n\to x_0$ και λόγω της επιλογής τους $x_n\neq x_0$.

(3)$\Rightarrow$(1). Έστω $\varepsilon>0$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $A\cap(S(x_o,\varepsilon)\setminus\{x_o\})$ είναι μη κενό. Από το (3) επιλέγουμε $(x_n)_n\subset A$, $x_n\to x_0$, $x_n\neq x_0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Λόγω της σύγκλισης της $(x_n)_n$ στο x_0, για το δοθέν $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon)$ ώστε για κάθε $n>n_0(\varepsilon)$, $\rho(x_n,x_0)<\varepsilon$ ή ισοδύναμα $x_n\in S(x_0,\varepsilon)$, άρα $x_n\in A\cap S(x_0,\varepsilon)$ και επειδή $x_n\neq x_0$, ισχύει ότι $x_n\in A\cap(S(x_0,\varepsilon)\setminus\{x_0\})$, άρα

$$A\cap(S(x_0,\varepsilon)\setminus\{x_0\})\neq\emptyset.$$

□

Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή της έννοιας του σημείου συσσώρευσης αφορά τα σημεία $x\in\overline{A}\setminus A$ και περιγράφεται από το επόμενο

Πορισμα 3.6. *Έστω A υποσύνολο του X. Τότε κάθε $x\in\overline{A}\setminus A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A.*

Αποδειξη. Άμεση συνέπεια του ορισμού του οριακού σημείου και του ότι $x\notin A$. □

Ασκηση 3.2. Δείξτε ότι $x\in\overline{A}$ αν και μόνο αν $\rho(x,A)=0$.

2. Ανοικτά και κλειστά υποσύνολα

Ορισμος 3.7. Ένα υποσύνολο U ενός μετρικού χώρου (X,ρ) λέγεται ανοικτό αν ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε $x\in U$ υπάρχει $\varepsilon>0$ ωστε $S(x,\varepsilon)\subset U$.

Η έννοια του ανοικτού συνόλου κατέχει κεντρική θέση στη θεωρία μετρικών χώρων και στη συνέχεια θα δούμε ορισμένες ιδιότητες των ανοικτών συνόλων.

Αρχίζουμε με την επόμενη.

Πρόταση 3.8. *Κάθε ανοικτή σφαίρα είναι ανοικτό σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω $S(x_0,\varepsilon)$ ανοιχτή σφαίρα του (X,ρ) και $x \in S(x_0,\varepsilon)$. Θέτουμε $\varepsilon_1 = \varepsilon - \rho(x_0,x)$ που είναι γνήσια μεγαλύτερο του μηδενός. Θα δείξουμε ότι

$$S(x,\varepsilon_1) \subset S(x_0,\varepsilon)$$

το οποίο συνεπάγεται ότι πράγματι η $S(x_0,\varepsilon)$ είναι ανοικτό σύνολο.

Έστω $y \in S(x,\varepsilon_1)$. Τότε $\rho(x,y) < \varepsilon_1 = \varepsilon - \rho(x_0,x)$ και

$$\rho(x_0,y) \le \rho(x_0,x) + \rho(x,y) < \varepsilon$$

συνεπώς $y \in S(x_0,\varepsilon)$. □

Θεώρημα 3.9 (Θεμελιώδεις ιδιότητες ανοικτών συνόλων). *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τότε*

1. *Τα σύνολα $\emptyset$, X είναι ανοικτά.*
2. *Αν $\{U_i\}_{i=1}^n$ είναι πεπερασμένη οικογένεια από ανοικτά υποσύνολα του X τότε το $\cap_{i=1}^n U_i$ είναι επίσης ανοικτό.*
3. *Αν $\{U_i\}_{i\in I}$ είναι οποιαδήποτε οικογένεια ανοικτών συνόλων, τότε $\cup_{i\in I} U_i$ είναι επίσης ανοικτό.*

Απόδειξη. (1). Το ότι το X είναι ανοικτό είναι άμεσο διότι για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ προφανώς $S(x,\varepsilon) \subset X$. Όσον αφορά το κενό, αυτό επίσης ικανοποιεί τις απαιτήσεις του ορισμού του ανοικτού συνόλου. Πράγματι, αν κάποιο σύνολο A δεν είναι ανοικτό τότε θα υπάρχει κάποιο $x_0 \in A$ ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ να ισχύει $S(x_0,\varepsilon) \not\subset A$. Αλλά βεβαίως δεν υπάρχει δυνατότητα να βρούμε ένα τέτοιο $x_0 \in \emptyset$.

(2). Έστω $U_1, U_2, \ldots, U_n$ ανοικτά υποσύνολα του X. Αν $\cap_{i=1}^n U_i = \emptyset$ τότε από το (1) είναι ανοικτό. Έστω τώρα $x_0 \in \cap_{i=1}^n U_i$. Θα βρούμε $\varepsilon_0 > 0$ ώστε $S(x_0,\varepsilon_0) \subset \cap_{i=1}^n U_i$ ή ισοδύναμα $S(x_0,\varepsilon_0) \subset U_i$ για κάθε $i = 1,2,\ldots,n$.

Πράγματι, επειδή $x_0 \in \cap_{i=1}^n U_i$ έπεται $x_0 \in U$ για κάθε $i = 1,2,\ldots,n$. Άρα για κάθε $i = 1,2,\ldots,n$ υπάρχει $\varepsilon_i > 0$ ώστε $S(x_0,\varepsilon_i) \subset U_i$. Θέτουμε $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n > 0$. Παρατηρούμε ότι

$$S(x_0,\varepsilon_0) \subset S(x_0,\varepsilon_i) \subset U_i$$

για κάθε $i = 1,2,\ldots,n$ και άρα $S(x_0,\varepsilon_0) \subset \cap_{i=1}^n U_i$ που δείχνει ότι $\cap_{i=1}^n U_i$ είναι ανοικτό σύνολο.

(3). Θεωρούμε $\{U_i\}_{i\in I}$ οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X, και έστω $x_0 \in \cup_{i\in I} U_i$. Έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $i_0 \in I$ ώστε $x_0 \in U_{i_0}$. Επειδή το U_{i_0} είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ ώστε $S(x_0,\varepsilon_0) \subset U_{i_0}$. Αλλά $U_{i_0} \subset \cup_{i\in I} U_i$ άρα $S(x_0,\varepsilon_0) \subset \cup_{i\in I} U_i$ που δείχνει ότι πράγματι το $\cup_{i\in I} U_i$ είναι ανοικτό σύνολο. □

Πριν προχωρήσουμε στις θεμελιώδεις ιδιότητες των κλειστών συνόλων παραθέτουμε κάποιες ιδιότητες των συμπληρωμάτων συνόλων που θα τις χρησιμοποιήσουμε στις αποδείξεις. Οι ιδιότητες αυτές που ονομάζονται και κανόνες του De Morgan αφορούν τα ακόλουθα ερωτήματα:

Έστω $\{A_i\}_{i\in I}$ μια οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλυ X. Θεωρούμε τα σύνολα

$$\cup_{i\in I}(X \setminus A_i) \text{ ή } \cup_{i\in I} A_i^c$$
$$\text{και } \cap_{i\in I}(X \setminus A_i) \text{ ή } \cap_{i\in I} A_i^c$$

και ζητάμε να βρούμε ποιών συνόλων αυτά είναι συμπληρώματα.

Πρόταση 3.10. *Έστω $\{A_i\}_{i\in I}$ οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλου X. Τότε τα επόμενα ισχύουν:*

(1) $\cup_{i\in I}(X \setminus A_i) = X \setminus (\cap_{i\in I} A_i)$
(2) $\cap_{i\in I}(X \setminus A_I) = X \setminus (\cup_{i\in I} A_i)$

Απόδειξη. Όταν ζητείται να δείξουμε ότι δυο σύνολα A, B είναι ίσα ο πλέον ασφαλής τρόπος είναι να δείξουμε ότι $A \subset B$ και $B \subset A$ απ΄ όπου βεβαίως προκύπτει η ισότητα. Τώρα $A \subset B$ αν για κάθε $x \in A$ μπορούμε να δείξουμε ότι $x \in B$. Αυτή είναι η μέθοδος που ακολουθείται για την απόδειξη των (1) και (2). Δείχνουμε κατ΄ αρχάς την (1).

Βήμα 1ο $\cup_{i\in I}(X \setminus A_i) \subset X \setminus (\cap_{i\in I} A_i)$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned} x \in \cup_{i\in I}(X \setminus A_i) &\Rightarrow \exists i_0 \in I : x \in X \setminus A_{i_0} \\ &\Rightarrow x \notin A_{i_0} \\ &\Rightarrow x \notin \cap_{i\in I} A_i \\ &\Rightarrow x \in X \setminus \cap_{i\in I} A_i. \end{aligned}$$

Βήμα 2ο $X \setminus (\cap_{i\in I} A_i) \subset \cup_{i\in I}(X \setminus A_i)$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned} x \in X \setminus \cap_{i\in I} A_i &\Rightarrow x \notin \cap_{i\in I} A_i \\ &\Rightarrow \exists i_0 \in I : x \notin A_{i_0} \\ &\Rightarrow x \in X \setminus A_{i_0} \\ &\Rightarrow x \in \cup_{i\in I}(X \setminus A_i) \end{aligned}$$

Άρα η (1) αποδείχτηκε.

Η (2) χρησιμοποιεί παρόμοια βήματα και η απόδειξή της αφήνεται στον αναγνώστη. □

Ορισμός 3.11. Ένα υποσύνολο F τού μετρικού χώρου (X, ρ) λέγεται κλειστό, αν το συμπλήρωμά του $X \setminus F$ (ή F^c) είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

Παραδείγματα. (1). Κάθε μονοσύνολο $\{x\}$ με $x \in X$ είναι κλειστό. Πράγματι, το $X \setminus \{x\}$ είναι ανοικτό, διότι αν $y \in X \setminus \{x\}$ δηλαδή $y \neq x$ και $\varepsilon = \rho(x, y) > 0$ η ανοικτή σφαίρα $S(y, \varepsilon)$ δεν περιέχει το x άρα περιέχεται στο $X \setminus \{x\}$.

(2). Η κλειστή σφαίρα

$$S[x, \varepsilon] = \{y : \rho(x, y) \leq \varepsilon\}$$

είναι κλειστό σύνολο. Έστω $z \in X \setminus S[x, \varepsilon]$. Τότε $\rho(x, z) > \varepsilon$ άρα $\varepsilon_1 = \rho(x, z) - \varepsilon > 0$. Απλή εφαρμογή της τριγωνικής ιδιότητας συνεπάγεται ότι

$$\begin{gathered} S(z, \varepsilon_1) \cap S[x, \varepsilon] = \emptyset \\ \text{άρα } S(z, \varepsilon_1) \subset X \setminus S[s, \varepsilon]. \end{gathered}$$

Συνεπώς το $X \setminus S[x, \varepsilon]$ είναι ανοικτό και εξ΄ ορισμού $S[x, \varepsilon]$ είναι κλειστό.

Θεώρημα 3.12 (Θεμελιώδεις ιδιότητες κλειστών συνόλων). *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Τα επόμενα ισχύουν:*

(1) *Τα σύνολα $\emptyset$ και X είναι κλειστά.*
(2) *Αν $\{F_i\}_{i=1}^n$ είναι πεπερασμένη οικογένεια κλειστών τότε $\cup_{i=1}^n F_i$ είναι επίσης κλειστό.*

(3) *Αν* $\{F_i\}_{i\in I}$ *είναι οποιαδήποτε οικογένεια κλειστών, τότε* $\cap_{i\in I}F_i$ *είναι επισης κλειστό.*

Αποδειξη. (1). Από το αντίστοιχο θεώρημα για ανοικτά σύνολα έχουμε ότι τα σύνολα $\emptyset$, X είναι ανοικτά και επίσης $X \setminus \emptyset = X$, $X \setminus X = \emptyset$, άρα τα $\emptyset$, X είναι κλειστά σαν συμπληρώματα κλειστών.

(2) Επειδή $\{F_i\}_{i=1}^n$ είναι κλειστά, έπεται ότι $\{X\setminus F_i\}_{i=1}^n$ είναι ανοικτά άρα $\cap_{i=1}^n(X\setminus F_i)$ είναι επίσης ανοικτό. Από την προηγούμενη πρόταση $\cap_{i=1}^n(X \setminus F_i) = X \setminus \cup_{i=1}^n F_i$ και άρα $\cup_{i=1}^n F_i$ είναι συμπλήρωμα ανοικτού και εξ ορισμού κλειστό.

(3). Με παρόμοια επιχειρήματα. Η $\{X\setminus F_i\}_{i\in I}$ δηλαδή είναι οικογένεια ανοικτών συνόλων, άρα το $\cup_{i\in I}(X\setminus F_i)$ είναι ανοικτό, συνεπώς το $X\setminus\cup_{i\in I}(X\setminus F_i) = \cap_{i\in I}F_i$ είναι κλειστό σαν συμπλήρωμα ανοικτού. □

Παρατηρησεις. (1). Είναι χρήσιμο να συγκρίνει ο αναγνώστης τα θεωρήματα που αφορούν τις θεμελιώδεις ιδιότητες των ανοικτών και κλειστών συνόλων και να παρατηρήσει την συμπληρωματικότητα που παρουσιάζουν ως προς τις πράξεις ένωσης και τομής.

(2). Έχοντας ορίσει τα ανοικτά και κλειστά μπορούμε να επιχειρήσουμε μια ποιοτική περιγραφή αυτών. Κατ΄ αρχάς τα ανοικτά μπορούν να προσδιοριστούν σαν ''μεγάλα'' υποσύνολα του μετρικού χώρου. Βεβαίως το $\emptyset$ είναι ανύπαρκτο και ταυτόχρονα ανοικτό. Αλλά αυτό αποτελεί εξαίρεση. Κάθε άλλο ανοικτό σύνολο περιέχει ανοικτές σφαίρες οι οποίες είναι ''μεγάλα'' σύνολα. Για παράδειγμα οι ανοικτές σφαίρες στο $\mathbb{R}$ είναι ανοικτά διαστήματα, ενώ στον $\mathbb{R}^2$ με την ευκλείδεια μετρική είναι ανοικτοί κύκλοι. Τα κλειστά σαν συμπληρώματα ανοικτών, καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα συνόλων. Έτσι υπάρχουν κλειστά σύνολα που είναι ''μεγάλα'', για παράδειγμα το $\mathbb{R} \setminus (0, 1)$ είναι κλειστό και μεγάλο ενώ τα $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι αναμφίβολα ''μικρά'' υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αυτό που χαρακτηρίζει τα κλειστά είναι η πληρότητα τους υπό την έννοια ότι περιέχουν τα οριακά τους σημεία όπως θα δείξουμε στη συνέχεια.

(3). Μια ενδιαφέρουσα υποκλάση των ανοικτών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου (X, ρ) είναι αυτά που είναι ταυτόχρονα και ανοικτά και κλειστά. Από τις θεμελειώδεις ιδιότητες προκύπτει ότι σε οποιονδήποτε μετρικό χώρο τα σύνολα $\emptyset$ και X είναι ταυτόχρονα ανοικτά και κλειστά. Σε μετρικούς χώρους όπως το $\mathbb{R}$ ή ο $\mathbb{R}^n$ με την Ευκλείδεια μετρική, ο X και το $\emptyset$ είναι τα μοναδικά σύνολα με αυτή την ιδιότητα. Αυτό δεν είναι προφανές και η απόδειξή του στηρίζεται στην ιδιότητα της συνεκτικότητας αυτών των χώρων, την οποία δεν θα την ορίσουμε. Στο αντίθετο άκρο βρίσκεται η διακριτή μετρική σ΄ ένα σύνολο X όπου κάθε $A \subset X$ είναι ανοικτό και κλειστό (η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη). Τέλος από την συμπληρωματικότητα ανοικτών και κλειστών προκύπτει ότι αν $A \subset X$ είναι ανοικτό και κλειστό, την ίδια ιδιότητα έχει και το συμπλήρωμά του.

Προταση 3.13. *Έστω* F *υποσύνολο του μετρικού χώρου* (X, ρ). *Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Το σύνολο* F *είναι κλειστό.*
(2) $F = \overline{F}$.

Αποδειξη. (1)⇒(2). Έστω F κλειστό υποσύνολο του X. Από τον ορισμό του κλειστού συνόλου έπεται ότι $X \setminus F$ είναι ανοικτό, άρα αν $x \notin F$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $S(x, \varepsilon) \subset X \setminus F$ ισοδύναμα $S(x, \varepsilon) \cap F = \emptyset$ άρα το x δεν είναι οριακό σημείο του F. Άρα $X \setminus F \subset X \setminus \overline{F}$ συνεπώς $\overline{F} \subset F$. Αφού πάντα ισχύει $F \subset \overline{F}$ έπεται ότι $F = \overline{F}$.

(2)⇒(1). Αρκεί να δείξουμε ότι $X \setminus F$ είναι ανοικτό. Πράγματι, αν $x \in X \setminus F$, τότε $x \notin F$ άρα εξ' υποθέσεως $x \notin \overline{F}$ δηλαδή το x δεν είναι οριακό σημείο του F. Έτσι θα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $S(x,\varepsilon) \cap F = \emptyset$ που είναι ισοδύναμο με το ότι $S(x,\varepsilon) \subset X \setminus F$ άρα $X \setminus F$ ανοικτό συνεπώς το F είναι κλειστό. □

Πορισμα 3.14. *Έστω A υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X,ρ). Τότε*

$$\overline{A} = \cap\{F : A \subset F,\ F \text{ κλειστό}\}.$$

Δηλαδή η κλειστότητα του A είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το σύνολο A.

Αποδειξη. Από την προηγούμενη πρόταση $\overline{A}$ είναι κλειστό σύνολο και $A \subset \overline{A}$. Άρα

$$\cap\{F : A \subset F,\ F \text{ κλειστό}\} \subset \overline{A}.$$

Αντίστροφα αν F είναι κλειστό και $A \subset F$ από τις ιδιότητες της κλειστότητας προκύπτει ότι $\overline{A} \subset \overline{F} = F$ άρα $\overline{A} \subset F$. Συνεπώς

$$\overline{A} \subset \cap\{F : A \subset F,\ F \text{ κλειστό}\}$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατηρηση. Υπάρχει η δυνατότητα να ορίσουμε την κλειστότητα ενός συνόλου A σαν το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το A, όπως αυτό περιγράφεται στο προηγούμενο πόρισμα. Εν συνεχεία αποδεικνύεται ως ιδιότητα ο ορισμός που δώσαμε για την κλειστότητα. Αυτή η προσέγγιση είναι ισοδύναμη με αυτή που παρουσιάζεται εδώ και ακολουθείται σε ορισμένα βιβλία.

Παρατηρηση. Έστω U ανοικτό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X,ρ). Εξ' ορισμού, για κάθε $x \in U$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $S(x,\varepsilon_x) \subset U$. Είναι σχεδόν άμεσο ότι $U = \cup_{x\in U} S(x,\varepsilon_x)$. Δηλαδή το ανοικτό σύνολο U είναι η ένωση μιας οικογένειας ανοικτών σφαιρών. Με άλλα λόγια τα ανοικτά υποσύνολα του X περιγράφονται σαν ενώσεις ανοικτών σφαιρών. Είναι επίσης εύκολο να δούμε ότι η αναπαράσταση ενός ανοικτού σαν ένωση ανοικτών σφαιρών δεν είναι εν γένει μοναδική. Στο επόμενο Θεώρημα, που παραθέτουμε δίδεται μια ενδιαφέρουσα περιγραφή των ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.

Θεωρημα 3.15. *Έστω U ανοικτό μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τότε υπάρχει μοναδική πεπερασμένη ή άπειρη αριθμήσιμη οικογένεια $\{(a_i,b_i)\}_{i\in I}$ από ανοικτά διαστήματα ξένα ανά δύο ώστε $U = \cup_{i\in I}(a_i,b_i)$.*

Περιγραφη της αποδειξης. Για $x \in U$ θέτουμε

$$I_x = \{(a,b) : x \in (a,b) \subset U\}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\cup\{(a,b) : (a,b) \in I_x\} = (a_x,b_x)$$

(όπου $a_x = \inf\{z < x :\ (z,x] \subset U\}$ και $b_x = \sup\{y > x :\ [x,y) \subset U\}$) δηλαδή υπάρχει ένα μέγιστο διάστημα (a_x,b_x) ώστε $x \in (a_x,b_x) \subset U$.

Περαιτέρω παρατηρούμε ότι για $x,y \in U$ είτε $(a_x,b_x) = (a_y,b_y)$ ή $(a_x,b_x)\cap(a_y,b_y) = \emptyset$. Άρα η οικογένεια $\{(a_x,b_x) : x \in U\}$ είναι η ζητούμενη. Το ότι η οικογένεια αυτή είναι αριθμήσιμη προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι κάθε διάστημα (a_x,b_x) περιέχει ένα ρητό και όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο το σύνολο των ρητών είναι αριθμήσιμο.

□

3. Χαρακτηρισμοί της συνέχειας συναρτήσεων με χρήση ανοικτών ή κλειστών συνόλων.

Έστω X, Y σύνολα και $f : X \to Y$ συνάρτηση. Για $A \subset Y$ η αντίστροφη εικόνα του A μέσω της f συμβολίζεται με $f^{-1}(A)$ και ισούται με

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}.$$

Ας παρατηρήσουμε ότι η f^{-1} δεν είναι εν γένει συνάρτηση, και βεβαίως δεν συνδέεται με την $1/f$ η οποία ορίζεται για πραγματικές συναρτήσεις. Στο επόμενο θεώρημα δίνουμε ορισμένες ιδιότητες της f^{-1}.

Θεωρημα 3.16. *Έστω $f : X \to Y$, και A, B υποσύνολα του Y. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \tag{1}$$

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \tag{2}$$

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A). \tag{3}$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος είναι εύκολη και αφήνεται στον αναγνώστη.

Παρατηρηση. Το περιεχόμενο του προηγούμενου Θεωρήματος είναι ότι η f^{-1} διατηρεί τις πράξεις της ένωσης, τομής και συμπληρώματος. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η f δεν έχει αυτή την ιδιότητα. Ειδικότερα για την τομή ισχύει

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

και δεν είναι δύσκολο ο αναγνώστης να βρεί παραδείγματα συναρτήσεων όπου η προηγούμενη σχέση ισχύει χωρίς ισότητα.

Περνάμε τώρα στη διατύπωση ενός ενδιαφέροντος χαρακτηρισμού της συνέχειας συναρτήσεων μεταξύ μετρικών χώρων.

Θεωρημα 3.17. *Έστω (X, ρ), (Y, d) μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια συνάρτηση. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Η συνάρτηση f είναι συνεχής.*
(2) *Για κάθε ανοικτό $U \subset Y$ το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.*
(3) *Για κάθε κλειστό $F \subset Y$ το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.*

Αποδειξη. (1)$\Rightarrow$(2). Ας θυμηθούμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 \in X$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ ώστε

$$f[S_\rho(x_0, \delta)] \subset S_d(f(x_0), \varepsilon).$$

Έστω $U \subset Y$ ανοικτό. Αν $U = \emptyset$ τότε $f^{-1}(U) = \emptyset$ που είναι ανοικτό. Αν $U \neq \emptyset$ και $x \in f^{-1}(U)$ θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε $S_\rho(x, \delta) \subset f^{-1}(U)$. Πράγματι, επειδή U είναι ανοικτό και $f(x) \in U$ έπεται ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $S_d(f(x), \varepsilon) \subset U$. Από τη συνέχεια της f στο σημείο x έπεται ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$f[S_\rho(x, \delta)] \subset S_d(x, \varepsilon) \subset U$$

άρα $S_\rho(x, \delta) \subset f^{-1}(U)$ το οποίο εξ' ορισμού σημαίνει ότι $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

(2)$\Rightarrow$(1). Έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$. Από την υπόθεση το $f^{-1}(S_d(f(x_0), \varepsilon))$ είναι ανοικτό ενώ το x_0 ανήκει σε αυτό και άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $S_\rho(x_0, \delta) \subset f^{-1}(S_d(f(x_0), \varepsilon))$ ή ισοδύναμα

$$f[S_\rho(x_0, \delta)] \subset S_d(f(x_0), \varepsilon)$$

δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

(2)$\Rightarrow$(3). Η απόδειξη εδώ είναι συνέπεια του ότι η f^{-1} διατηρεί τα συμπληρώματα. Πράγματι, έστω $F \subset Y$ κλειστό. Θα δείξουμε ότι $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό ή ισοδύναμα ότι $X \setminus f^{-1}(F)$ είναι ανοικτό. Αλλά $X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \setminus F)$ με $Y \setminus F$ ανοικτό, και λόγω της (2), $f^{-1}(Y \setminus F)$ επίσης ανοικτό, άρα $f^{-1}(F)$ κλειστό.

(3)$\Rightarrow$(2). Χρησιμοποιεί παρόμοια επιχειρήματα και η πλήρης απόδειξη αφήνεται στον αναγνώστη. □

Το επόμενο θεώρημα χαρακτηρίζει την σύγκλιση ακολουθιών με χρήση ανοικτών συνόλων.

Θεωρημα 3.18. *Έστω $(x_n)_n$, x στοιχεία του μετρικού χώρου (X, ρ). Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Η ακολουθία $(x_n)_n$ συγκλίνει στο x.*
(2) *Για κάθε U ανοικτό υποσύνολο του X ώστε $x \in U$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n > n_0$ $x_n \in U$.*

Αποδειξη. (1)$\Rightarrow$(2). Έστω U ανοικτό σύνολο και $x \in U$. Από τον ορισμό του ανοικτού συνόλου υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $S(x, \varepsilon) \subset U$. Από την παρατήρηση μετά τον ορισμό της σύγκλισης ακολουθίας θα υπάρχει $n_0(\varepsilon)$ ώστε για κάθε $n > n_0$, $x_n \in S(x, \varepsilon)$. Άρα υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n > n_0$, $x_n \in U$.

(2)$\Rightarrow$(1). Έστω $\varepsilon > 0$. Η σφαίρα $U = S(x, \varepsilon)$ είναι ανοικτό σύνολο, άρα υπάρχει n_0 ώστε για $n > n_0$ $x_n \in S(x, \varepsilon)$ το οποίο είναι ισοδύναμο με το ότι $x_n \to x$. □

Σχόλιο: Τα δύο προηγούμενα θεωρήματα αποτελούν καλή αφορμή για να εξηγήσουμε πώς τα μαθηματικά υιοθετούν πιο αφηρημένες δομές και τις επεξεργάζονται. Το θεώρημα που αφορά τους χαρακτηρισμούς της συνέχειας με χρήση ανοικτών ή κλειστών συνόλων έχει ουσιαστική διαφορά από τον ορισμό της συνέχειας αλλά και την αρχή της μεταφοράς. Αυτή περικλείεται στο ότι οι ποσότητες ε και δ που εμπλέκονται στον ορισμό της συνέχειας έχουν αντικατασταθεί από την απλή διατύπωση ότι η f αντιστρέφει ανοικτά υποσύνολα του Y σε ανοικτά του X και αντίστοιχα για τα κλειστά. Αυτό σημαίνει ότι αν υπάρχει η έννοια του ανοικτού ή κλειστού συνόλου, τότε μπορούμε να έχουμε και έννοια συνέχειας κατά τρόπο ώστε να επεκτείνεται η συνέχεια συναρτήσεων μεταξύ μετρικών χώρων.

Για να γίνουμε πιό συγκεκριμμένοι, παραθέτουμε τον ορισμό της τοπολογίας και του τοπολογικού χώρου.

Ορισμος 3.19. Έστω X σύνολο και $\mathcal{T}$ υποσύνολο του συνόλου $\mathcal{P}(X)$ των υποσυνόλων του X. Η οικογένεια $\mathcal{T}$ λέγεται τοπολογία, αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες:

(1) Τα σύνολα $\emptyset$ και X ανήκουν στην $\mathcal{T}$.
(2) Αν $\{U_i\}_{i=1}^n$ πεπερασμένη επιλογή στοιχείων της $\mathcal{T}$ τότε το $\cap_{i=1}^n U_i$ ανήκει στήν $\mathcal{T}$.
(3) Αν $\{U_i\}_{i \in I}$ είναι οικογένεια στοιχείων της $\mathcal{T}$ τότε το σύνολο $\cup_{i \in I} U_i$ ανήκει στην $\mathcal{T}$.

Ορισμος 3.20. Τα στοιχεία μιας τοπολογίας $\mathcal{T}$ λέγονται ανοικτά σύνολα της $\mathcal{T}$ ενώ το ζεύγος $(X, \mathcal{T})$ λέγεται τοπολογικός χώρος.

Ορισμος 3.21. Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Ένα F υποσύνολο του X λέγεται κλειστό αν $X \setminus F \in \mathcal{T}$ (δηλαδη αν το $X \setminus F$ είναι ανοικτό).

Θεωρημα 3.22. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Τα κλειστά υποσύνολά του ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(1) *Τα σύνολα $\emptyset$ και X είναι κλειστά.*
(2) *Αν $\{F_i\}_{=1}^{n}$ είναι πεπερασμένη οικογένεια κλειστών τότε $\cup_{i=1}^{n} F_i$ είναι επέσης κλειστό.*
(3) *Αν $\{F_i\}_{i \in I}$ είναι οικογένεια κλειστών τότε $\cap_{i \in I} F_i$ είναι επίσης κλειστό.*

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος είναι ακριβώς η ίδια με αυτή του θεωρήματος των θεμελιωδών ιδιοτήτων κλειστών υποσυνόλων σε μετρικούς χώρους.

Παρατηρησεις. (1). Παρατηρώντας τον ορισμό των ανοικτών συνόλων της τοπολογίας $\mathcal{T}$ βλέπουμε ότι αυτός ταυτίζεται με τις θεμελιώδεις ιδιότητες των ανοικτών συνόλων ενός μετρικού χώρου. Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο $\mathcal{T}$ των ανοικτών συνόλων ενός μετρικού χώρου, τα οποία βεβαίως έχουν οριστεί με άλλο τρόπο, αποτελεί μια τοπολογία. Άρα η έννοια του τοπολογικού χώρου επεκτείνει αυτή του μετρικού χώρου κατά τρόπο ουσιαστικό δεδομένου ότι δεν έχει την οποιαδήποτε αναφορά σε αποστάσεις μεταξύ στοιχείων ή οποιαδήποτε αριθμητική σχέση αυτών.

(2). Η μικρότερη τοπολογία που ορίζεται σε οποιοδήποτε σύνολο είναι η $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$. Αν το σύνολο X έχει δύο τουλάχιστον στοιχεία τότε είναι εύκολο (άσκηση) να δούμε ότι δεν υπάρχει μετρική ρ στον X ώστε να έχει τα ίδια ανοικτά με αυτά της τοπολογίας $\mathcal{T}$. Άρα η έννοια του τοπολογικού χώρου είναι γνήσια ευρύτερη από αυτή του μετρικού χώρου.

(3). Για να θεωρηθεί η έννοια του τοπολογικού χώρου μέρος της αφηρημένης ανάλυσης θα πρέπει να μας δίνει την δυνατότητα να ορίσουμε συνέχεια συναρτήσεων και σύγκλιση ακολουθιών. Αυτό περιέχεται στούς ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμος 3.23. Έστω $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ τοπολογικοί χώροι. Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται συνεχής αν για κάθε $U \subset Y$ ανοικτό (δηλ. $U \in \mathcal{S}$) το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο X (δηλ. $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$.

Παρατηρείστε ότι οι συνεχείς συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων ικανοποιούν τον ορισμό της συνέχειας μεταξύ τοπολογικών χώρων και κατά συνέπεια ο ορισμός της συνέχειας συναρτήσεων μεταξύ τοπολογικών χώρων επεκτείνει τον αντίστοιχο μεταξύ μετρικών χώρων. Αντίστοιχα ισχύουν και για τον ορισμό της σύγκλισης ακολουθιών που είναι ο επόμενος.

Ορισμος 3.24. Έστω $(x_n)_n$, x στοιχεία του $(X, \mathcal{T})$. Η ακολουθία $(x_n)_n$ συγκλίνει στο x αν για κάθε U ανοικτό με $x \in U$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $x_n \in U$.

Παρατηρηση. Η θεωρία τοπολογικών χώρων, αποτελεί σημαντικό μέρος της σύγχρονης ανάλυσης και συνδέεται ισχυρά με την γραμμική και μη γραμμική ανάλυση.

4. Ισοδύναμες μετρικές

Όπως φαίνεται και από τα παραδείγματα που έχουμε δώσει μετά τον ορισμό των μετρικών χώρων, σ' ένα σύνολο X μπορούν να οριστούν περισσότερες από μία μετρικές. Για παράδειγμα θυμηθείτε τις μετρικές που ορίζονται στον $\mathbb{R}^k$ από τις p-νόρμες, για $1 \leq p \leq \infty$. Στη συνέχεια θα συζητήσουμε με συντομία την έννοια των ισοδύναμων μετρικών που ορίζονται σ' ένα σύνολο.

Στα επόμενα με $I : X \to X$ θα συμβολίζουμε την ταυτοτική συνάρτηση του συνόλου X δηλαδή, $I(x) = x$ για κάθε $x \in X$.

Ορισμος 3.25. Έστω X σύνολο εφοδιασμένο με δύο μετρικές ρ_1 και ρ_2. Οι μετρικές ρ_1, ρ_2 λέγονται ισοδύναμες, αν η ταυτοτική συνάρτηση

$$I : (X, \rho_1) \to (X, \rho_2)$$

είναι αμφισυνεχής (δηλαδή $I : (X, \rho_1) \to (X, \rho_2)$ είναι συνεχής και $I : (X, \rho_2) \to (X, \rho_1)$ είναι επίσης συνεχής).

Πρίν προχωρήσουμε σε χαρακτηρισμούς των ισοδύναμων μετρικών, ας δούμε ένα παράδειγμα δύο μετρικών στο $\mathbb{R}$ που δεν είναι ισοδύναμες.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την συνήθη μετρική $\rho_{|\cdot|}$ στο $\mathbb{R}$ και επίσης την διακριτή μετρική d στο ίδιο σύνολο. Ας θυμηθούμε ότι τα μονοσύνολα $\{t\}$, $t \in \mathbb{R}$ είναι ανοικτές σφαίρες ως προς την μετρική d και κατά συνέπεια, κάθε $A \subset \mathbb{R}$ είναι d-ανοικτό. Έστω τώρα

$$I : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, \rho_{|\cdot|}).$$

Η I είναι συνεχής, διότι αν $U \subset \mathbb{R}$ είναι $\rho_{|\cdot|}$-ανοικτό, το $U = I^{-1}(U)$ είναι d-ανοικτό. Αντίθετα, η

$$I : (\mathbb{R}, \rho_{|\cdot|}) \to (\mathbb{R}, d)$$

δεν είναι συνεχής. Για παράδειγμα το $\{t\}$ είναι d-ανοικτό, ενώ δεν είναι $\rho_{|\cdot|}$-ανοικτό. Άρα οι δύο μετρικές δεν είναι ισοδύναμες.

Θεωρημα 3.26 (1ος χαρακτηρισμός ισοδυνάμων μετρικών). *Έστω (X, ρ_1), (X, ρ_2) δύο μετρικές, σ' ένα σύνολο X. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Οι ρ_1, ρ_2 είναι ισοδύναμες.*
(2) *Αν $\mathcal{T}_{\rho_1}$, $\mathcal{T}_{\rho_2}$ συμβολίζουν τα ανοικτά ως προς τις δύο μετρικές, τότε $\mathcal{T}_{\rho_1} = \mathcal{T}_{\rho_2}$. (Δηλαδή, ένα $U \subset X$ είναι ρ_1-ανοικτό αν και μόνο αν είναι ρ_2-ανοικτό).*
(3) *Ένα $F \subset X$ είναι ρ_1-κλειστό, αν και μόνο αν είναι ρ_2-κλειστό.*

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι άμεση από τον ορισμό των ισοδυνάμων μετρικών (δηλαδή η $I : (X, \rho_1) \to (X, \rho_2)$ είναι αμφισυνεχής) και του χαρακτηρισμού της συνέχειας με χρήση των ανοικτών ή των κλειστών συνόλων.

Παρατηρηση. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι όταν λέμε ότι κάθε U ρ_1-ανοικτό είναι και ρ_2-ανοικτό και αντίστροφα δεν εννοούμε ότι κάθε ρ_1-ανοικτή σφαίρα είναι και ρ_2-ανοικτή σφαίρα ή αντίστροφα.

Ο επόμενος χαρακτηρισμός των ισοδυνάμων μετρικών είναι επίσης συνέπεια αντίστοιχων χαρακτηρισμών συνέχειας.

Θεωρημα 3.27 (2ος χαρακτηρισμός ισοδυνάμων μετρικών). *Έστω (X, ρ_1), (X, ρ_2) δύο μετρικές σ' ένα σύνολο X. Τα επόμενα είναι εσοδύναμα*

(1) *Οι μετρικές ρ_1 και ρ_2 είναι ισοδύναμες.*
(2) *Για κάθε $x \in X$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ ώστε $S_{\rho_1}(x, \delta_1) \subset S_{\rho_2}(x, \varepsilon)$ και $S_{\rho_2}(x, \delta_2) \subset S_{\rho_1}(x, \varepsilon)$.*
(3) *Για κάθε $(x_n)_n$, x στοιχεία του X, ισχύει $x_n \xrightarrow{\rho_1} x$ αν και μόνο αν $x_n \xrightarrow{\rho_2} x$.*

Η συνθήκη (2), περιγράφει την αμφισυνέχεια της ταυτοτικής $I : (X, \rho_1) \to (X, \rho_2)$ με βάση τον αρχικό ορισμό της συνέχειας, ενώ η (3) κάνει το ίδιο με βάση την αρχή της μεταφοράς.

Θα ολοκληρώσουμε την παράγραφο των ισοδυνάμων μετρικών με δύο ενδιαφέρουσες εφαρμογές όσων αναπτύξαμε προηγουμένως.

Ας θυμηθούμε ότι στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^k$ ορίζονται οι p-νόρμες για $1 \leq p \leq \infty$ και με την βοήθεια αυτών οι p-μετρικές που συμβολίζονται με ρ_p.

Λημμα 3.28. *Αν $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^k$ και $1 \leq p < \infty$ τότε*

$$\rho_\infty(\vec{x}, \vec{y}) \leq \rho_p(\vec{x}, \vec{y}) \leq k \cdot \rho_\infty(\vec{x}, \vec{y}).$$

Αποδειξη.

$$\rho_\infty(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq k} \{|x_i - y_i|\}$$

$$\rho_p(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|_p = \Big(\sum_{i=1}^k |x_i - y_i|^p \Big)^{1/p}$$

Επίσης $\vec{x} - \vec{y} = \sum_{i=1}^k (x_i - y_i)\vec{e}_i$ και άρα

$$\begin{aligned}
\|\vec{x} - \vec{y}\|_p &= \| \sum_{i=1}^k (x_i - y_i)\vec{e}_i \|_p \\
&\leq \sum_{i=1}^k \|(x_i - y_i)\vec{e}_i\|_p \\
&= \sum_{i=1}^k |x_i - y_i|.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\rho_\infty(\vec{x}, \vec{y}) &= \max_{1 \leq i \leq k} \{|x_i - y_i|\} \\
&\leq (\sum_{i=1}^k |x_i - y_i|^p)^{1/p} \\
&= \rho_p(\vec{x}, \vec{y}) \\
&\leq \sum_{i=1}^k |x_i - y_i| \\
&\leq k \cdot \max_{1 \leq i \leq k} \{|x_i - y_i|\} \\
&= k \cdot \rho_\infty(\vec{x}, \vec{y})
\end{aligned}$$

□

Θεωρημα 3.29. *Η σχέση "Οι μετρικές ρ_1, ρ_2 είναι ισοδύναμεσ" είναι μεταβατική. Δηλαδή, αν ρ_1, ρ_2, ρ_3 είναι τρεις μετρικές σε ένα σύνολο X και ρ_1, ρ_2 είναι ισοδύναμες, ρ_2, ρ_3 είναι ισοδύναμες, τότε και ρ_1, ρ_3 είναι επίσης ισοδύναμες.*

Αποδειξη. Η $I : (X, \rho_1) \to (X, \rho_3)$ γράφεται ως $(X, \rho_1) \xrightarrow{I} (X, \rho_2) \xrightarrow{I} (X, \rho_3)$ άρα είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών. Παρόμοια η $I : (X, \rho_3) \to (X, \rho_1)$ γράφεται ως $(X, \rho_3) \xrightarrow{I}$

$(X,\rho_2) \xrightarrow{I} (X,\rho_1)$ και για ίδιους λόγους είναι συνεχής, άρα η $I : (X,\rho_1) \to (X,\rho_3)$ είναι αμφισυνεχής. $\square$

Θεωρημα 3.30. *Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $1 \le p < q \le \infty$. Τότε οι μετρικές $(\mathbb{R}^k, \rho_p)$, $(\mathbb{R}^k, \rho_q)$ είναι ισοδύναμες*

Αποδειξη. Θα δείξουμε ότι για κάθε $1 \le p < \infty$ η ρ_p στον $\mathbb{R}^k$ είναι ισοδύναμη με την ρ_∞. Αν αυτό έχει δειχτεί, τότε από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει η ισοδυναμία των ρ_p, ρ_q για $1 \le p < q \le \infty$. Με βάση τον ορισμό της ισοδυναμίας μετρικών, αρκεί να δείξουμε ότι

$$I : (\mathbb{R}^k, \rho_p) \to (\mathbb{R}^k, \rho_\infty) \text{ και}$$
$$I : (\mathbb{R}^k, \rho_\infty) \to (\mathbb{R}^k, \rho_p)$$

είναι συνεχείς.

Από το λήμμα 3.28, έπεται ότι η πρώτη συνάρτηση είναι 1-Lipschitz και η δεύτερη k-Lipschitz, άρα και οι δύο είναι συνεχείς. Συνεπώς η $I : (\mathbb{R}^k, \rho_p) \to (\mathbb{R}^k, \rho_\infty)$ είναι αμφισυνεχής, και εξ΄ ορισμού οι ρ_p, ρ_∞ είναι ισοδύναμες. $\square$

Παρατηρησεις. (1). Το περιεχόμενο του προηγούμενου θεωρήματος είναι ότι ενώ οι μετρικές ρ_p, $1 \le p \le +\infty$, στον $\mathbb{R}^k$ διαφέρουν μεταξύ τους γεωμετρικά ενώ από τοπολογικής άποψης ταυτίζονται πλήρως. Έτσι οι χαρακτηρισμοί σύγκλισης ακολουθιών και συνέχειας συναρτήσεων που ισχύουν για την ευκλείδεια μετρική στον $\mathbb{R}^k$ επεκτείνονται και στις υπόλοιπες.

(2). Πρέπει να αναφέρουμε ότι αν θεωρήσουμε τις μετρικές ρ_p στον διανυσματικό χώρο $c_{00}(\mathbb{N})$ των τελικά μηδενικών ακολουθιών ο οποίος είναι απειροδιάστατος, τότε χάνεται το φαινόμενο ισοδυναμίας αυτών. Δηλαδή, αν $1 \le p < q \le \infty$ τότε οι ρ_p και ρ_q δεν είναι ισοδύναμες στον $(c_{00}(\mathbb{N})$.

Ορισμος 3.31. (1). Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subset X$ μη κενό. Η ***διάμετρος του*** A συμβολίζεται με $\operatorname{diam}(A)$ και ισούται με

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{\rho(x,y) : x, y \in A\}.$$

Είναι σαφές ότι $\operatorname{diam}(A)$ μπορεί να πάρει την τιμή ∞. Επίσης ορίζουμε $\operatorname{diam}(\emptyset) = 0$.

(2). Ένα $A \subset X$ λέγεται ***φραγμένο*** αν $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

(3). Η μετρική ρ λέγεται φραγμένη, αν $\operatorname{diam}(X) < \infty$.

Προταση 3.32. *Για κάθε A υποσύνολο του X,* $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\overline{A})$.

Αποδειξη. Αν $A = \emptyset$ τότε και $\overline{A} = \emptyset$ και άρα $\operatorname{diam}(A) = 0 = \operatorname{diam}(\overline{A})$. Ας παρατηρήσουμε ότι αν $A \subset B$ τότε $\operatorname{diam}(A) \le \operatorname{diam}(B)$. Άρα αν $\operatorname{diam}(A) = \infty$ τότε και $\operatorname{diam}(\overline{A}) = \infty$ και η πρόταση έχει δειχθεί.

Έστω τώρα $A \ne \emptyset$ με $\operatorname{diam}(A) < \infty$. Από την προηγούμενη παρατήρηση είναι άμεσο ότι $\operatorname{diam}(A) \le \operatorname{diam}(\overline{A})$. Συνεπώς αρκεί να δειχθεί ότι $\operatorname{diam}(\overline{A}) \le \operatorname{diam}(A)$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, $\operatorname{diam}(\overline{A}) \le \operatorname{diam}(A) + \varepsilon$. Έστω $\varepsilon > 0$ και $x, y \in \overline{A}$. Τότε από τον ορισμό του $\overline{A}$ έπεται ότι υπάρχουν $x', y' \in A$ ώστε $x' \in S(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A$ και $y' \in S(y, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A$. Απλή εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας συνεπάγεται ότι

$$\rho(x,y) \le \rho(x',y') + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

και άρα αφού $\rho(x',y') \leq \operatorname{diam}(A)$ έχουμε ότι $\rho(x,y) \leq \operatorname{diam}(A)+\varepsilon$. Επειδή αυτό συμβαίνει για κάθε $x, y \in \overline{A}$ έπεται ότι

$$\operatorname{diam}(\overline{A}) = \sup\{\rho(x,y) : \ x,y \in \overline{A}\} \leq \operatorname{diam}(A) + \varepsilon.$$

□

Λημμα 3.33. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Ορίζουμε*

$$\rho_1(x,y) = \min\{\rho(x,y), 1\}.$$

Τότε η ρ_1 είναι επίσης μετρική στον X που επιπλέον είναι φραγμένη.

Αποδειξη. Αφήνεται στον αναγνώστη. □

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι για κάθε μετρική ρ που ορίζεται σ' ένα σύνολο X υπάρχει ισοδύναμη μετρική ρ_1 η οποία είναι φραγμένη.

Θεωρημα 3.34. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και ρ_1 η μετρική που ορίζεται με χρήση της μετρικής ρ στο προηγούμενο λήμμα. Τότε οι μετικές ρ, ρ_1 είναι ισοδύναμες.*

Αποδειξη. Αφήνεται στον αναγνώστη. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δώστε παράδειγμα ενός μετρικού χώρου (X,ρ), $x_1, x_2 \in X$ και $0 < r_1 < r_2$ ώστε $S(x_2, r_2) \subset S(x_1, r_1)$.

2. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, $A \subset X$ και U ανοικτό υποσύνολο του X. Δείξτε ότι αν $U \cap \overline{A} \neq \emptyset$ τότε $U \cap A \neq \emptyset$.

3. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, $A \subset X$ και $x \in X$. Δείξτε ότι $x \in \overline{A}$ αν και μόνο αν $\rho(x, A) = 0$.

4. Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_n$ διάφορα ανά δύο στοιχεία ενός μετρικού χώρου (X,ρ). Δείξτε ότι υπάρχουν $U_1, U_2, \ldots, U_n$ ανοικτά και ξένα ανά δύο υποσύνολα του X ώστε $x_i \in U_i$ για $i = 1, 2, \ldots, n$.

5. Δώστε παράδειγμα ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σε έναν κατάλληλο μετρικό χώρο για την οποία δεν ικανοποιείται το συμπέρασμα της προηγούμενης άσκησης.

6. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $x \in X$. Δείξτε ότι αν $\operatorname{int}\{x\} = \emptyset$ (για τον ορισμό του $\operatorname{int} A$, $A \subset X$ δείτε το Κεφάλαιο 5) τότε το x είναι σημείο συσσώρευσης του X.

7. Αποδείξτε το Λήμμα 3.33.

8. Έστω X πεπερασμένο σύνολο. Δείξτε ότι κάθε μετρική ρ στο X είναι ισοδύναμη με τη διακριτή μετρική.

9. Έστω F, G κλειστά μη κενά και ξένα υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X,ρ). Ορίζουμε

$$f(x) = \frac{\rho(x,F)}{\rho(x,F) + \rho(x,G)} \qquad \text{για κάθε } x \in X.$$

Δείξτε ότι:

(i) Η f είναι συνεχής, $f(x) = 0$ για κάθε $x \in F$ και $f(x) = 1$ για κάθε $x \in G$.

(ii) Υπάρχουν U, V ανοικτά υποσύνολα του X με $U \cap V = \emptyset$ ώστε $F \subset U$ και $G \subset V$.

10. Για δύο μη κενά υποσύνολα A, B ενός μετρικού χώρου (X,ρ) η ***απόσταση*** του A από το B είναι ο πραγματικός αριθμός

$$\rho(A,B) = \inf\{\rho(x,y) : \ x \in A, \ y \in B\}.$$

Απόδείξτε ότι $\rho(A,B) = \rho(\overline{A}, \overline{B})$ για οποιαδήποτε μη κενά υποσύνολα του X.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Πυκνά σύνολα και Διαχωρίσιμοι Μετρικοί Χώροι

1. Αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα. Το λήμμα Zorn.

Είναι χρήσιμο για τα επόμενα να υπενθυμίσουμε μερικές βασικές έννοιες της Θεωρίας Συνόλων. Αν $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών τότε ένα σύνολο A καλείται ***αριθμήσιμο*** αν είναι πεπερασμένο ή υπάρχει απεικόνιση $f : \mathbb{N} \to A$ *ένα-προσ-ένα* και επί. Ένα σύνολο θα καλείται ***υπεραριθμήσιμο*** αν δεν είναι αριθμήσιμο. Άμεσο είναι ότι ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο είναι άπειρο και μάλιστα περιέχει ένα άπειρο αριθμήσιμο γνήσιο υποσύνολο.

Το επόμενο θεώρημα δίνει ένα χαρακτηρισμό των αριθμήσιμων συνόλων.

Θεωρημα 4.1. *Έστω A ένα μη κενό σύνολο. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*
(i) Το A είναι αριθμήσιμο.
(ii) Υπάρχει απεικόνιση $f : \mathbb{N} \to A$ επί.
(iii) Υπάρχει απεικόνιση $g : A \to \mathbb{N}$ ένα-προσ-ένα.

Από το παραπάνω θεώρημα έχουμε τα εξής πορίσματα.

Πορισμα 4.2. *Κάθε υποσύνολο ενός αριθμήσιμου συνόλου είναι αριθμήσιμο.*

Αποδειξη. Έστω $B \subset A$ όπου A αριθμήσιμο. Αφού το A είναι αριθμήσιμο, από τον ορισμό του αριθμήσιμου συνόλου υπάρχει απεικόνιση $g : A \to \mathbb{N}$ *ένα-προσ-ένα* και *επί*. Αν $g_{|B}$ είναι ο περιορισμός της g στο B τότε η $g_{|B} : B \to \mathbb{N}$ είναι *ένα-προσ-ένα* άρα από το (iii)⇒(i) του παραπάνω θεωρήματος έχουμε ότι το B είναι αριθμήσιμο. □

Πορισμα 4.3. *Το σύνολο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο.*

Αποδειξη. Έστω $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με $g(n, m) = 2^n \cdot 3^m$. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η g είναι *ένα-προσ-ένα*. Άρα από το Θεώρημα 4.1 το $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο. □

Πορισμα 4.4. *Τα σύνολα $\mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}^-$ των θετικών και αρνητικών ρητών είναι αριθμήσιμα.*

Αποδειξη. Έχουμε ότι $\mathbb{Q}^+ = \{\frac{n}{m} : (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ και } n, m \text{ πρώτοι μεταξύ τους}\}$. Η απεικόνιση $g : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}$ με $g(\frac{n}{m}) = 2^n \cdot 3^m$ είναι *ένα-προσ-ένα* και άρα το $\mathbb{Q}^+$ είναι αριθμήσιμο. Όμοια για το $\mathbb{Q}^-$. □

Θεωρημα 4.5. *Αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο.*

Αποδειξη. Έστω I αριθμήσιμο σύνολο και $\{A_n\}_{n \in I}$ οικογένεια αριθμησίμων συνόλων. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $I \neq \emptyset$ και $A_n \neq \emptyset$ για κάθε $n \in I$. Αφού A_n αριθμήσιμο υπάρχει $f_n : \mathbb{N} \to A_n$ *επί*. Ομοίως υπάρχει $g : \mathbb{N} \to I$ *επί*. Η απεικόνιση

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n \in I} A_n \quad \text{με} \quad g(n, m) = f_{g(n)}(m)$$

είναι εύκολο να δειχθεί ότι είναι *επί*. Από το Πόρισμα 4.3 και το Θεώρημα 4.1 προκύπτει ότι η $\bigcup_{n \in I} A_n$ είναι αριθμήσιμο σύνολο. □

Πορισμα 4.6. *Το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ και των ακεραίων $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμα.*

Αποδειξη. Επειδή $\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z}$ αρκεί να δειχθεί ότι το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο. Έχουμε $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$ και το συμπέρασμα έπεται από το Πόρισμα 4.4 και το Θεώρημα 4.5. □

Θεωρημα 4.7. *Πεπερασμένο γινόμενο αριθμησίμων συνόλων είναι αριθμήσιμο.*

Αποδειξη. Ας δείξουμε πρώτα ότι το γινόμενο δύο αριθμησίμων συνόλων A και B είναι αριθμήσιμο. Αν $A = \emptyset$ ή $B = \emptyset$ τότε $A \times B = \emptyset$ και άρα είναι αριθμήσιμο. Έστω A, B μη κενά. Τότε υπάρχουν $h : \mathbb{N} \to A$ και $g : \mathbb{N} \to B$ *επί*. Τότε η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times B$ με $f(n, m) = (h(n), g(m))$ είναι *επί*, και άρα αφού το $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο το ίδιο ισχύει και για το $A \times B$. Η γενική περίπτωση έπεται με επαγωγή. □

Πορισμα 4.8. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $\mathbb{Q}^n$ είναι αριθμήσιμο.*

Αριθμήσιμα γινόμενα αριθμησίμων συνόλων δεν είναι κατανάγκη αριθμήσιμα π.χ αποδεικνύεται ότι το σύνολο $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(x_n) : x_n = 0 \text{ ή } x_n = 1\}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Επίσης υπεραριθμήσιμο είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ καθώς επίσης και το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{A : \ A \subset \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{N}$.

Το ***Λήμμα του Zorn*** είναι ένα αποδεικτικό εργαλείο (απ΄ όπου και η ονομασία του ως ''Λήμμα'') που εξυπηρετεί παρόμοιες ανάγκες όπως η Μαθηματική επαγωγή. Για να το διατυπώσουμε είναι απαραίτητοι μερικοί ορισμοί. Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μια διμελής σχέση $\leq$ στο X καλείται ***μερική διάταξη*** στο X αν είναι αυτοπαθής ($x \leq x$, για όλα τα $x \in X$), μεταβατική (για όλα τα $x, y, z \in X$ αν $x \leq y$ και $y \leq z$ τότε $x \leq z$) και αντισυμμετρική (για όλα τα $x, y \in X$ αν $x \leq y$ και $y \leq x$ τότε $x = y$). Αν $\leq$ είναι μια σχέση μερικής διάταξης στο X τότε ο $(X, \leq)$ (ή απλά ο X) καλείται ***μερικά διατεταγμένος χώρος***. Ένα υποσύνολο C του $(X, \leq)$ καλείται ***αλυσίδα*** του X αν οποιαδήποτε δύο στοιχεία του C είναι συγκρίσιμα ως προς την $\leq$, δηλαδή για όλα τα $x, y \in C$ είτε $x \leq y$ είτε $y \leq x$. Αν A υποσύνολο του διατεταγμένου χώρου X, τότε ένα στοιχείο M του X καλείται ***άνω φράγμα*** του A αν για όλα τα $a \in A$ έχουμε ότι $a \leq M$. Τέλος ένα στοιχείο m του X καλείται ***μεγιστικό*** αν κανένα στοιχείο του X δεν είναι γνήσια μεγαλυτερό του, δηλαδή αν $x \in X$ και $m \leq x$ τότε $m = x$.

ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ ZORN. Έστω $(X, \leq)$ μερικά διατεταγμένος χώρος. Αν κάθε αλυσίδα του X έχει άνω φράγμα τότε ο X περιέχει ένα τουλάχιστον μεγιστικό στοιχείο.

2. Πυκνά υποσύνολα μετρικών χώρων και διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι.

Ορισμος 4.9. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $D \subset X$. Το D λέγεται ***πυκνό*** υποσύνολο του X αν $\overline{D} = X$.

Η επόμενη πρόταση χαρακτηρίζει τα πυκνά υποσύνολα του X.

Προταση 4.10. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $D \subset X$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*
(i) Το D είναι πυκνό στον X.
(ii) Για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $x \in X$ υπάρχει $y \in D$ ώστε $\rho(x, y) < \varepsilon$.
(iii) Για κάθε $x \in X$ υπάρχει ακολουθία (y_n) στο D ώστε $y_n \to x$.
(iv) Για κάθε ανοικτή σφαίρα $S(x, \varepsilon)$ του X, $D \cap S(x, \varepsilon) \neq \emptyset$.
(v) Για κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο U του X, $U \cap D \neq \emptyset$.

Αποδειξη. (i)$\Rightarrow$(ii). Έστω $x \in X$. Αφού το D είναι πυκνό υποσύνολο του X έχουμε ότι $X = \overline{D}$. Άρα το $x \in \overline{D}$, δηλαδή είναι οριακό σημείο του D. Συνεπώς για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $y \in D$ ώστε $y \in S(x, \varepsilon)$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Έστω $x \in X$. Τότε για $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ έχουμε ότι υπάρχει $y_n \in D$ ώστε $\rho(x, y_n) < \frac{1}{n}$. Άρα $\rho(x, y_n) \to 0$ οπότε $y_n \to x$.

(iii)$\Rightarrow$(iv) Έστω $\varepsilon > 0, x \in X$ και (y_n) ακολουθία στο D ώστε $y_n \to x$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $\rho(x, y_n) < \varepsilon$ οπότε $y_n \in S(x, \varepsilon)$.

(iv)$\Rightarrow$(v) Έστω $\mathcal{U}$ ανοικτό μη κενό. Τότε υπάρχει $x \in \mathcal{U}$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $S(x, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$. Αφού $D \cap S(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ έπεται ότι και $D \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$.

(v)$\Rightarrow$(i) Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Τότε η $S(x, \varepsilon)$ είναι ανοικτό μη κενό υποσύνολο του X και άρα $S(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$. Άρα το x είναι οριακό σημείο του D. Αφού αυτό συμβαίνει για κάθε $x \in X$ έχουμε ότι $X \subset \overline{D}$. Επειδή $\overline{D} \subset X$, έπεται ότι $\overline{D} = X$. $\square$

Παραδειγματα. (i) Το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Πράγματι από την ''πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$'' έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ το ανοικτό διάστημα $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ περιέχει τουλάχιστον ένα ρητό.

(ii) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ το $\mathbb{Q}^k$ είναι πυκνό υποσύνολο στον $\mathbb{R}^k$ με την Ευκλείδεια μετρική ρ_2.

Πράγματι, έστω $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ υπάρχουν $q_1, \ldots, q_k$ ρητοί ώστε για κάθε $i = 1, \ldots, k$, $|x_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$. Τότε αν $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_k) \in \mathbb{Q}^k$ έχουμε ότι

$$\rho_2(\vec{x}, \vec{q}) = \Big(\sum_{i=1}^{k} |x_i - q_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon\,.$$

Ορισμος 4.11. Ένας μετρικός χώρος (X, ρ) λέγεται ***διαχωρίσιμος*** εάν έχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο.

Παραδειγμα. Για κάθε $k = 1, 2, \ldots$ ο $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$ είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Πράγματι το $\mathbb{Q}^k$ είναι αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$.

Ορισμος 4.12. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $\varepsilon > 0$. Ένα υποσύνολο A του X καλείται ε-***διαχωρισμένο*** αν για κάθε $x, y \in A$ με $x \neq y$, $\rho(x, y) \geq \varepsilon$.

Παρατηρείστε ότι ένα υποσύνολο A του X δεν είναι $\varepsilon-$διαχωρισμένο για κάποιο $\varepsilon > 0$ αν υπάρχουν $x, y \in A$ με $x \neq y$ ώστε $\rho(x, y) < \varepsilon$. Η επόμενη πρόταση μας πληροφορεί ότι σε κάθε μετρικό χώρο X και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν μεγιστικά $\varepsilon-$διαχωρισμένα υποσύνολα του X.

Προταση 4.13. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $\varepsilon > 0$. Τότε ο X περιέχει ένα μεγιστικό $\varepsilon-$διαχωρισμένο υποσύνολο (δηλαδή υπάρχει $A \subset X$, $\varepsilon-$διαχωρισμένο ώστε για κάθε $B \subset X$ $\varepsilon-$διαχωρισμένο αν $A \subset B$ τότε $A = B$).*

Αποδειξη. Έστω $\Delta_\varepsilon = \{A \subset X : A \text{ είναι } \varepsilon-\text{διαχωρισμένο}\}$. Παρατηρείστε ότι ο Δ_ε με την μερική διάταξη του περιέχεσθαι, $\subseteq$, είναι ένας μερικά διατεταγμένος χώρος. Θα δείξουμε ότι ο $(\Delta_\varepsilon, \subseteq)$ ικανοποιεί την συνθήκη του Λήμματος του Zorn. Έστω λοιπόν C μια αλυσίδα στον $(\Delta_\varepsilon, \subseteq)$. Έστω $\cup C$ να είναι η ένωση όλων των συνόλων που ανήκουν στην C. Τότε έχουμε ότι

(i) Η $\cup C$ ανήκει στο Δ_ε.

Πράγματι, έστω $x, y \in \cup C$. Τότε υπάρχουν $A, B \in C$ ώστε $x \in A$ και $y \in B$. Αφού η C είναι αλυσίδα, είτε $A \subseteq B$ είτε $B \subseteq A$. Αν $A \subseteq B$ τότε $x, y \in B$ και επειδή $B \in \Delta_\varepsilon$, $\rho(x,y) \geq \varepsilon$. Όμοια άν $B \subseteq A$. Άρα η $\cup C$ είναι $\varepsilon-$διαχωρισμένο υποσύνολο του (X, ρ).

(ii) Η $\cup C$ είναι άνω φράγμα της C.

Πράγματι, έστω $A \in C$. Τότε προφανώς $A \subset \cup C$.

Από τα παραπάνω κάθε αλυσίδα στο $(\Delta_\varepsilon, \subseteq)$ έχει άνω φράγμα. Συνεπώς από το Λήμμα του Zorn το $(\Delta_\varepsilon, \subseteq)$ έχει ένα τουλάχιστον μεγιστικό στοιχείο. □

Πρόταση 4.14. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A_n \subseteq X$, $n = 1, 2, \ldots$, ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το A_n είναι ένα μεγιστικό $\frac{1}{n}-$διαχωρισμένο υποσύνολο του X. Τότε η $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Αρκεί να δειχθεί ότι υπάρχει $y \in \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ώστε $\rho(x, y) < \varepsilon$. Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Αν $x \in A_{n_0}$ θέτουμε $y = x$. Αν $x \notin A_{n_0}$ τότε, αφού το A_{n_0} είναι μεγιστικό $\frac{1}{n_0}-$διαχωρισμένο υποσύνολο του X, έπεται ότι το σύνολο $B = A_{n_0} \cup \{x\}$ δεν είναι $\frac{1}{n_0}-$διαχωρισμένο. Συνεπώς το B περιέχει δύο διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία που η απόστασή τους είναι μικρότερη από $\frac{1}{n_0}$. Επειδή το A_{n_0} είναι $\frac{1}{n_0}$-διαχωρισμένο, εύκολα καταλήγουμε ότι το ένα από τα δύο αυτά σημεία είναι το x ενώ το άλλο είναι κάποιο $y \in A_{n_0}$. Άρα υπάρχει $y \in A_{n_0}$ ώστε $\rho(x, y) < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Συνεπώς για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $y \in \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ώστε $\rho(x,y) < \varepsilon$. Από τον χαρακτηρισμό των πυκνών υποσυνόλων του X έχουμε ότι η $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του X. □

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι ένα $\varepsilon-$διαχωρισμένο υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, ρ) δεν μπορεί να έχει ''περισσότερα'' στοιχεία από ένα πυκνό υποσύνολο του.

Πρόταση 4.15. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $\varepsilon > 0$, $A \subseteq X$ ένα $\varepsilon-$διαχωρισμένο υποσύνολο του X και D ένα πυκνό υποσύνολο του X. Τότε υπάρχει μια ένα-προς-ένα απεικόνιση $\phi : A \to D$.*

Απόδειξη. Αφού το D είναι πυκνό υποσύνολο του X, έχουμε ότι για κάθε $\alpha \in A$, $S(\alpha, \frac{\varepsilon}{4}) \cap D \neq \emptyset$. Άρα για κάθε $\alpha \in A$ μπορούμε να επιλέξουμε ένα $y_\alpha \in D \cap S(\alpha, \frac{\varepsilon}{4})$. Θέτουμε $\phi : A \to D$ με $\phi(\alpha) = y_\alpha$, για κάθε $\alpha \in A$. Η ϕ είναι *ένα-προς-ένα*. Πράγματι, έστω $\alpha, \alpha' \in A$. Τότε επειδή το A είναι $\varepsilon-$διαχωρίσιμο, έχουμε ότι $\rho(\alpha, \alpha') \geq \varepsilon$ και άρα $S(\alpha, \frac{\varepsilon}{4}) \cap S(\alpha', \frac{\varepsilon}{4}) = \emptyset$. Συνεπώς $y_\alpha \neq y_{\alpha'}$ δηλαδή $\phi(\alpha) \neq \phi(\alpha')$. □

Οι Προτάσεις 4.13-4.15 δίνουν τον εξής χαρακτηρισμό των διαχωρίσιμων μετρικών χώρων.

Θεώρημα 4.16. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) Ο (X, ρ) είναι διαχωρίσιμος.

(ii) Για κάθε $\varepsilon > 0$ οποιοδήποτε $\varepsilon-$διαχωρισμένο υποσύνολο του X είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη. (i)⇒(ii). Έστω D ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X, $\varepsilon > 0$ και A ένα $\varepsilon-$ διαχωρισμένο υποσύνολο του X. Από την Πρόταση 4.15 έχουμε ότι υπάρχει $\phi : A \to D$ *ένα-προς-ένα*. Επειδή το D αριθμήσιμο έπεται ότι το A είναι αριθμήσιμο.

(ii)⇒(i). Από Πρόταση 4.13 για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένα μεγιστικό $\frac{1}{n}-$διαχωρισμένο υποσύνολο του X, έστω A_n. Από Πρόταση 4.14 η ένωση $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του X. Από την υπόθεσή μας κάθε A_n είναι αριθμήσιμο. Συνεπώς και $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ είναι αριθμήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων συνόλων. Άρα ο X περιέχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο οπότε είναι διαχωρίσιμος. □

Πορισμα 4.17. *Έστω (X,ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $A \subset X$. Τότε ο (A,ρ) είναι διαχωρίσιμος.*

Αποδειξη. Από το προηγούμενο θεώρημα, αρκεί να δειχθεί ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, κάθε $D \subset A$ ε-διαχωρισμένο είναι αριθμήσιμο. Πράγματι έστω $\varepsilon > 0$ και $D \subset A$ ε-διαχωρισμένο. Τότε το $D \subset X$ είναι ε-διαχωρισμένο αφού οι μετρικές στο A και στο X ταυτίζονται. Πάλι από το θεώρημα 4.16, επειδή ο X είναι διαχωρίσιμος, έπεται ότι το D είναι αριθμήσιμο. □

3. Βάσεις περιοχών

Ορισμος 4.18. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και B μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X. Η B καλείται ***βάση περιοχών*** του X αν κάθε ανοικτό μη κενό υποσύνολο του X γράφεται ως ένωση στοιχείων της B.

Επειδή κάθε ανοικτό σύνολο ενός μετρικού χώρου (X,ρ) γράφεται ως ένωση ανοικτών σφαιρών (δες Κεφ. 3) έχουμε ότι σε κάθε μετρικό χώρο X η οικογένεια $\{S(x,r) : x \in X, r > 0\}$ αποτελεί βάση περιοχών του X.

Προταση 4.19. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και D πυκνό υποσύνολο του X. Τότε η οικογένεια $\mathcal{B} = \{S(y,q) : y \in D$ και q θετικός ρητός$\}$ αποτελεί βάση περιοχών του X.*

Αποδειξη. Έστω $\mathcal{U}$ μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X. Αρκεί να δειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathcal{U}$ υπάρχει $y_x \in D$ και q_x θετικός ρητός ώστε $x \in S(y_x, q_x) \subset \mathcal{U}$. Πράγματι, τότε για κάθε $x \in \mathcal{U}$, $S(y_x,q_x) \in \mathcal{B}$ και $\mathcal{U} = \cup_{x \in X} S(y_x, q_x)$.

Έστω λοιπόν $x \in \mathcal{U}$. Αφού το $\mathcal{U}$ είναι ανοικτό υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $x \in S(x,\varepsilon) \subset \mathcal{U}$. Μπορούμε να υποθέσουμε, παίρνωντας ένα ε μικρότερο εάν χρειάζεται, ότι το ε είναι θετικός ρητός. Αφού το D είναι πυκνό υπάρχει $y_x \in D \cap S(x, \frac{\varepsilon}{3})$. Συνεπώς $x \in S(y_x, \frac{\varepsilon}{3})$ και αφού $\frac{\varepsilon}{3}$ θετικός ρητός, $S(y_x, \frac{\varepsilon}{3}) \in \mathcal{B}$. Επιπλέον $S(y_x, \frac{\varepsilon}{3}) \subset \mathcal{U}$. Πράγματι αν $z \in S(y_x, \frac{\varepsilon}{3})$ τότε

$$\rho(x,z) \le \rho(x,y_x) + \rho(y_x,z) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon\,,$$

και άρα $S(y_x, \frac{\varepsilon}{3}) \subset S(x,\varepsilon) \subset \mathcal{U}$. □

Παραδειγμα. Στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική η οικογένεια των ανοικτών διαστημάτων με ρητά άκρα $\{(q_1,q_2) :\ q_1 < q_2$ ρητοί$\}$ είναι βάση περιοχών του $\mathbb{R}$.

Προταση 4.20. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*
(i) Ο (X,ρ) είναι διαχωρίσιμος.
(ii) Ο (X,ρ) έχει μια αριθμήσιμη βάση περιοχών.

Αποδειξη. (i)⇒(ii). Από την προηγούμενη πρόταση, αν D ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X, η οικογένεια $\mathcal{B} = \{S(y,q) : y \in D, q\,\text{θετικός ρητός}\}$ είναι μια βάση περιοχών X. Έστω $\phi : D \times \mathbb{Q}^+ \to \mathcal{B}$ όπου $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$ και $\phi(y,q) = S(y,q)$ για κάθε $(y,q) \in D \times \mathbb{Q}^+$. Προφανώς η ϕ είναι επί της $\mathcal{B}$. Επιπλέον το $D \times \mathbb{Q}^+$ είναι αριθμήσιμο ως καρτεσιανό γινόμενο δύο αριθμησίμων συνόλων. Άρα η $\mathcal{B}$ είναι αριθμήσιμη (δες και Θεώρημα 4.1(ii)) της παραγράφου 1).

(ii)⇒(i). Έστω ότι ο (X,ρ) έχει μια αριθμήσιμη βάση περιοχών $\mathcal{B}$. Για κάθε $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$ επιλέγουμε $y_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}$. Θέτουμε $D = \{y_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \in \mathcal{B}\}$. Τότε το D είναι αριθμήσιμο (αφού η απεικόνιση $f : \mathcal{B} \to D$ με $f(\mathcal{U}) = y_{\mathcal{U}}, \mathcal{U} \in \mathcal{B}$ είναι *επί*) και επίσης είναι και πυκνό υποσύνολο του X. Πράγματι, έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Τότε η $S(x,\varepsilon)$ γράφεται ως ένωση συνόλων της $\mathcal{B}$. Άρα υπάρχει $y \in D \cap S(x,\varepsilon)$. □

Πρόταση 4.21. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $\mathcal{B}$ οικογένεια από ανοικτά υποσύνολα του X. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Η $\mathcal{B}$ είναι βάση περιοχών του X.

(ii) Για κάθε $x \in X$ και για κάθε ανοικτό $\mathcal{U} \subset X$ με $x \in \mathcal{U}$, υπάρχει ανοικτό $G_x \in \mathcal{B}$ ώστε $x \in G_x \subset \mathcal{U}$.

Απόδειξη. (i)⇒(ii). Έστω $x \in X$ και $\mathcal{U}$ ανοικτό που περιέχει το x. Αφού η $\mathcal{B}$ είναι βάση περιοχών το $\mathcal{U}$ γράφεται ως ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$, και άρα κάποιο από αυτά περιέχει και το x.

(ii)⇒(i). Προφανές, αφού $\mathcal{U} = \cup_{x\in\mathcal{U}} G_x$. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $f,g : (X,\rho) \longrightarrow (Y,d)$ συνεχείς συναρτήσεις και $D \subset X$ πυκνό. Δείξτε ότι αν $f_{|D} = g_{|D}$ τότε $f = g$.

2. Έστω $f : (X,\rho) \longrightarrow (Y,d)$ συνεχής και D πυκνό υποσύνολο του X. Δείξτε ότι το $f(D)$ είναι πυκνό υποσύνολο στον $(f(X),d)$. Τι συμπεραίνετε αν η f είναι επί και ο X είναι διαχωρίσιμος;

3. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος ώστε για κάθε $x \in X$, $\operatorname{int}\{x\} = \emptyset$. Δείξτε ότι για κάθε $D \subset X$ πυκνό το $D \setminus \{x\}$ είναι πυκνό για κάθε $x \in D$. (Για τον ορισμό του $\operatorname{int} A$ για $A \subset X$ δείτε το Κεφάλαιο 5).

4. Έστω x_0 στοιχείο ενός μετρικού χώρου (X,ρ) ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε D πυκνό υποσύνολο του X, $x_0 \in D$. Δείξτε ότι το $\{x_0\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Πλήρεις μετρικοί χώροι

1. Πληρότητα

Ορισμος 5.1. Μια ακολουθία (x_n) στοιχείων ενός μετρικού χώροι (X,ρ) λέγεται ***βασική*** ή ***Cauchy*** να για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n,m \in \mathbb{N}$ με $n,m \geq n_0$ ισχύει $\rho(x_n,x_m) < \varepsilon$.

Παρατηρησεις. (i) Είναι εύκολο να δούμε ότι εάν $x_n \to x$ τότε η (x_n) είναι βασική. Πράγματι, για δοθέν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $\rho(x_n,x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Απλή εφαρμογή της τριγωνικής ιδιότητας συνεπάγεται ότι για κάθε $n,m \geq n_0$

$$\rho(x_n,x_m) \leq \rho(x_n,x) + \rho(x,x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

(ii) Το αντίστροφο δεν είναι εν γένει σωστό και θα δούμε κάποια παραδείγματα στη συνέχεια.

Η βασική διαφορά μεταξύ μεταξύ συγκλινουσών ακολουθιών και βασικών ακολουθιών είναι ότι στην πρώτη κατηγορία εξετάζεται η σχέση των όρων της ακολουθίας με το όριο ενώ στη δεύτερη περίπτωση εξετάζεται η σχέση των όρων της ακολουθίας μεταξύ τους.

Προταση 5.2 (Κριτήριο ύπαρξης ορίου βασικής ακολουθίας). *Έστω (x_n) βασική ακολουθία και υποθέτουμε ότι υπάρχει (x_{k_n}) υπακολουθία της που συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$. Τότε η (x_n) συγκλίνει στο x.*

Αποδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $\rho(x_n,x) < \varepsilon$. Για το δοθέν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_1$, $\rho(x_{k_n},x) < \frac{\varepsilon}{2}$ (λόγω της σύγκλισης της υπακολουθίας (x_{k_n}) στο x). Επίσης υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m,n \geq n_2$, $\rho(x_n,x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1,n_2\}$ και ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $n \geq n_0$, $\rho(x_n,x) < \varepsilon$.

Πράγματι, επειδή $k_{n_0} \geq n_0$, για $n \geq n_0$ θα ισχύει

$$\rho(x_n,x) \leq \rho(x_n,x_{k_{n_0}}) + \rho(x_{k_{n_0}},x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Άρα $x_n \to x$. □

Προταση 5.3. *Έστω $(x_n)_n$ βασική ακολουθία. Τότε το σύνολο $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο.*

Αποδειξη. Ας θυμηθούμε ότι ένα σύνολο A ονομάζεται φραγμένο αν $\mathrm{diam}(A) = \sup\{\rho(x,y) : x,y \in A\} < \infty$. Άρα θα δείξουμε ότι

$$\sup\{\rho(x_n,x_m) : n,m \in \mathbb{N}\} < \infty\,.$$

Για $\varepsilon = 1$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για $n,m \geq n_0$, να ισχύει $\rho(x_n,x_m) < 1$. Επίσης υπάρχει $M \geq 1$ ώστε

$$\max\{\rho(x_n,x_{n_0}) : n = 1,\dots,n_0\} < M\,.$$

Άρα για $n, m \in \mathbb{N}$

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x_{n_0}) + \rho(x_m, x_{n_0}) < 2M\,,$$

επομένως $\operatorname{diam}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \leq 2M$. □

Πορισμα 5.4. *Κάθε βασική ακολουθία (x_n) στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$.*

Αποδειξη. Επειδή (x_n) είναι βασική, από την προηγούμενη πρόταση είναι φραγμένη. Από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass η (x_n) έχει υπακολουθία (x_{k_n}) που συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$, άρα από την προηγούμενη πρόταση και η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο x. □

Προταση 5.5. *Κάθε βασική ακολουθία $(\vec{x}_n)$ στον $\mathbb{R}^k$ με την Ευκλείδεια μετρική είναι συγκλίνουσα.*

Αποδειξη. Έστω $(\vec{x}_n)$ βασική ακολουθία στον $\mathbb{R}^k$, $\vec{x}_n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_k^n)$. Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$ η ακολουθία $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία πραγματικών αριθμών. Πράγματι, $|x_i^n - x_i^m| \leq \|\vec{x}_n - \vec{x}_m\|$ άρα αν $\varepsilon > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|\vec{x}_n - \vec{x}_m\| < \varepsilon$ για $n, m \geq n_0$, τότε για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$ και $n, m \geq n_0$, $|x_n^i - x_m^i| < \varepsilon$. Από το προηγούμενο πόρισμα $(x_i^n)_n \to x_i$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$. Από το κριτήριο σύγκλισης ακολουθιών στον $\mathbb{R}^k$ συμπεραίνουμε ότι $\vec{x}_n \to \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$. □

Ορισμος 5.6. Ένας μετρικός χώρος (X, ρ) λέγεται ***πλήρης*** αν κάθε βασική ακολουθία του (X, ρ) είναι συγκλίνουσα.

Παρατηρησεις. (i) Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών με την συνήθη μετρική και ο $\mathbb{R}^k$ με την Ευκλείδεια μετρική, όπως δείξαμε προηγουμένως, είναι πλήρεις μετρικοί χώροι.

(ii) Ο $\mathbb{R}^k$ με την $\rho_p, 1 \leq p \leq \infty$ είναι επίσης πλήρης μετρικός χώρος. Η απόδειξη αυτού γίνεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που δείξαμε ότι ο $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$ είναι πλήρης.

(iii) Αν ρ_1, ρ_2 είναι ισοδύναμες μετρικές σε ένα σύνολο X και (X, ρ_1) είναι πλήρης μετρικός χώρος δεν συνεπάγεται εν γένει ότι ο (X, ρ_2) είναι πλήρης. Για παράδειγμα αν $X = (0, 1]$ και $\rho_2(x, y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$ τότε ο $(\,(0, 1], \rho_2)$ είναι πλήρης, η ρ_2 είναι ισοδύναμη με την συνήθη μετρική στον $(0, 1]$ και ο $(\,(0, 1], |\cdot|)$ δεν είναι πλήρης.

Προταση 5.7. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $K \subset X$ ώστε (K, ρ) να είναι πλήρης μετρικός χώρος. Τότε το K είναι κλειστό υποσύνολο του X.*

Αποδειξη. Έστω ότι αυτό δεν συμβαίνει. Τότε $K \neq \overline{K}$, και άρα υπάρχει $x \in \overline{K} \setminus K$. Όπως έχουμε δείξει το x θα είναι σημείο συσσώρευσης του K και άρα υπάρχει (x_n) ακολουθία στο K ώστε $x_n \to x$. Αλλά τότε η (x_n) είναι βασική και δεν συγκλίνει σε στοιχείο του K άρα το (K, ρ) δεν είναι πλήρης μετρικός χώρος, άτοπο. □

Ορισμος 5.8. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Μια συνάρτηση $f : X \longrightarrow X$ καλείται ***συνάρτηση συστολής*** αν υπάρχει $0 < C < 1$ ώστε $\rho(f(x), f(y)) \leq C\rho(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$.

Θεωρημα 5.9 (Σταθερού σημείου του Banach). *Έστω (X, ρ) ένας πλήρης μετρικός χώρος. Τότε κάθε συνάρτηση συστολής $f : X \longrightarrow X$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x_0 \in X$ ώστε $f(x_0) = x_0$.*

Απόδειξη. Έστω $0 < C < 1$ ώστε $\rho(f(x), f(y)) \leq C\rho(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$. Για $n = 1, 2, \ldots$ θεωρούμε τη συνάρτηση $f^n : X \longrightarrow X$ με $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ φορές}}$. (Τυπικά η (f^n) ορίζεται αναδρομικά ως εξής: $f^1 = f$, και $f^{n+1} = f \circ f^n$ για $n = 1, 2, \ldots$.) Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο $x \in X$.

Ισχυρισμός Η $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy.

Κατ' αρχήν με επαγωγή αποδεικνύεται ότι $\rho(f^n(x), f^{n+1}(x)) \leq C^n\rho(x, f(x))$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Άρα αν m, n φυσικοί με $m > n$ τότε

$$\begin{aligned}
\rho(f^n(x), f^m(x)) &\leq \rho(f^n(x), f^{n+1}(x)) + \rho(f^{n+1}(x), f^{n+2}(x)) + \cdots + \rho(f^{m-1}(x), f^m(x)) \\
&\leq C^n\rho(x, f(x)) + C^{n+1}\rho(x, f(x)) + \cdots + C^{m-1}\rho(x, f(x)) \\
&\leq \rho(x, f(x))C^n(1 + C + \cdots + C^{m-n+1}) \\
&\leq \rho(x, f(x))C^n\frac{1}{1-C}
\end{aligned}$$

(αφού $0 < C < 1$ και άρα γεωμετρική σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} C^k$ συγκλίνει στο $\frac{1}{1-C}$). Έτσι αν $\varepsilon > 0$ επιλέγοντας $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x, f(x))\frac{C^{n_0}}{1-C} < \varepsilon$ τότε για κάθε $m > n \geq n_0$ έχουμε $\rho(f^n(x), f^m(x)) < \varepsilon$. Επομένως η ακολουθία $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy.

Αφού ο X είναι πλήρης η βασική ακολουθία $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάποιο $x_0 \in X$. Η συνάρτηση f είναι συνάρτηση Lipschitz με σταθερά C και άρα είναι συνεχής. Συνεπώς από την αρχή της μεταφοράς η ακολουθία $(f(f^n(x)))_{n\in\mathbb{N}}$ δηλαδή η ακολουθία $(f^{n+1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $f(x_0)$. Όμως η $(f^{n+1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ και άρα συγκλίνει στο ίδιο όριο με αυτή, δηλαδή στο x_0. Από τη μοναδικότητα του ορίου ακολουθίας έπεται ότι $f(x_0) = x_0$ δηλαδή το x_0 είναι σταθερό σημείο της f.

Αποδεικνύουμε τώρα τη μοναδικότητα του σταθερού σημείου. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $y_0 \in X$ με $x_0 \neq y_0$ ώστε $f(y_0) = y_0$. Τότε $\rho(x_0, y_0) = \rho(f(x_0), f(y_0)) \leq C\rho(x_0, y_0)$ και αφού $\rho(x_0, y_0) > 0$ (εφόσον $x_0 \neq y_0$) έπεται ότι $1 \leq C$, άτοπο. □

Παρατηρήσεις. (1). Το συμπέρασμα του θεωρήματος δεν ισχύει γενικά για $f : X \longrightarrow X$ με $\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(x, y)$. Για παράδειγμα ο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική είναι πλήρης ενώ για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x + 1$ είναι $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ ενώ η f δεν έχει σταθερό σημείο.

(2). Η υπόθεση της πληρότητας στο θεώρημα σταθερού σημείου δεν μπορεί να παραλειφθεί. Πράγματι, η συνάρτηση $g : (0, 1) \longrightarrow (0, 1)$ με $g(x) = \frac{1}{2}x$ είναι συνάρτηση συστολής με σταθερά $C = \frac{1}{2}$ ενώ δεν έχει σταθερό σημείο.

Πρόταση 5.10 (Χαρακτηρισμός Cantor πλήρων μετρικών χώρων). *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο (X, ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος.

(ii) Αν $(F_n)_n$ είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών μη κενών υποσυνόλων του X με $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$ τότε $\cap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

Απόδειξη. (i)⇒(ii). Έστω $(F_n)_n$ φθίνουσα ακολουθία (δηλ. $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$) κλειστών μη κενών υποσυνόλων του X με $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$. Ας παρατηρήσουμε κατ' αρχάς ότι αν $\cap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ τότε υποχρεωτικά $\cap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$. Πράγματι, διαφορετικά θα υπήρχαν $x, y \in \cap_{n=1}^{\infty} F_n$ με $x \neq y$. Τότε $\rho(x, y) = \delta > 0$. Επειδή $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$ θα υπήρχε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\text{diam}(F_{n_0}) < \delta$ και επίσης τα x, y θα ανήκουν στο F_{n_0}. Άτοπο διότι $\delta = \rho(x, y) \leq \text{diam}(F_{n_0}) < \delta$.

Μένει να δείξουμε ότι $\cap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. Επιλέγουμε $x_n \in F_n$ και δείχνουμε πρώτα ότι η ακολουθία (x_n) είναι βασική. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $\text{diam}(F_n) < \varepsilon$. Επίσης για $n_0 \leq n < m$ παρατηρούμε ότι x_m, x_n ανήκουν στο F_n άρα $\rho(x_n, x_m) \leq \text{diam}(F_n) < \varepsilon$. Επειδή ο (X, ρ) είναι πλήρης και η ακολουθία (x_n) βασική, υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \to x$. Θα δείξουμε ότι $x \in F_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $x \in \cap_{n=1}^{\infty} F_n$. Πράγματι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $(x_n)_{n \geq k} \subset F_k$. Άρα το x είναι οριακό σημείο του F_k, το F_k είναι κλειστό άρα $x \in F_k$.

(ii)⇒(i) Θα δείξουμε ότι κάθε βασική ακολουθία (x_n) είναι συγκλίνουσα. Θέτουμε $F_n = \overline{\{x_k : k \geq n\}}$ και παρατηρούμε ότι η (F_n) είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων και $\text{diam}(F_n) \to 0$. Το τελευταίο ισχύει διότι $\text{diam}(\{x_k\}_{k \geq n}) \to 0$ (από το ότι η (x_n) είναι βασική και επίσης $\text{diam}(F_n) = \text{diam}(\{x_k\}_{k \geq n})$. Από την υπόθεση έπεται ότι $\cap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι $x_n \to x$. $\square$

2. Το θεώρημα κατηγορίας του Baire

Ας θυμηθούμε ότι ένα σύνολο D υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, ρ) λέγεται πυκνό εάν $\overline{D} = X$. Όπως έχουμε δείξει αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι για κάθε ανοικτή σφαίρα $S(x, \varepsilon)$ ισχύει ότι $S(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$. Ας σημειώσουμε επίσης ότι υπάρχουν μετρικοί χώροι (X, ρ) που έχουν δύο πυκνά υποσύνολα D_1,D_2 ώστε $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Για παράδειγμα θεωρείστε $D_1 = \mathbb{Q}$, το σύνολο των ρητών, και $D_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ οι άρρητοι που και τα δύο είναι πυκνά υποσύνολα στο $\mathbb{R}$ αλλά ξένα. Το θεώρημα κατηγορίας του Baire που θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε στη συνέχεια αναφέρεται στη συμπεριφορά των ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων μετρικών χώρων. Ας ξεκινήσουμε με την επόμενη απλή παρατήρηση. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $\mathcal{U} \subset X$ ανοικτό και πυκνό. Τότε λόγω της πυκνότητας του $\mathcal{U}$, για κάθε ανοικτή σφαίρα $S(x, \varepsilon)$ ισχύει $S(x, \varepsilon) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Επειδή τα σύνολα είναι ανοικτά η τομή $S(x, \varepsilon) \cap \mathcal{U}$ είναι ανοικτό άρα υπάρχει $y \in X$ και $\delta > 0$ ώστε $S(y, \delta) \subseteq S(x, \varepsilon) \cap \mathcal{U}$. Αυτή η παρατήρηση είναι κρίσιμη για τα επόμενα.

Πρόταση 5.11. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^n$ πεπερασμένη οικογένεια ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του X. Τότε $\cap_{i=1}^n \mathcal{U}_i$ είναι ανοικτό και πυκνό.*

Απόδειξη. Το ότι $\cap_{i=1}^n \mathcal{U}_i$ είναι ανοικτό έπεται από τις θεμελιώδεις ιδιότητες των ανοικτών συνόλων. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι είναι πυκνό. Έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon_0 > 0$. Θα δείξουμε ότι $\cap_{i=1}^n \mathcal{U}_i \cap S(x_0, \varepsilon_0) \neq \emptyset$. Επαγωγικά επιλέγουμε $x_1, x_2, \ldots, x_n$ στοιχεία του X, $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ θετικούς ώστε να ισχύουν τα επόμενα:

$$S(x_1, \varepsilon_1) \subset \mathcal{U}_1 \cap S(x_0, \varepsilon_0) \text{ και για } i \geq 2, \quad S(x_i, \varepsilon_i) \subset \mathcal{U}_i \cap S(x_{i-1}, \varepsilon_{i-1}).$$

Η επιλογή γίνεται με χρήση της παρατήρησης που αναφέραμε προηγουμένως. Επίσης επαγωγικά δείχνεται εύκολα ότι

$$S(x_i, \varepsilon_i) \subset \cap_{j=1}^i \mathcal{U}_j \cap S(x_0, \varepsilon_0), \ \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ειδικότερα για $i = n$,

$$S(x_n, \varepsilon_n) \subset \cap_{j=1}^n \mathcal{U}_j \cap S(x_0, \varepsilon_0),$$

που αποδεικνύει ότι $\cap_{i=1}^n \mathcal{U}_i$ είναι πυκνό στον X. $\square$

Παρατηρηση. Ας υποθέσουμε τώρα ότι αντί για πεπερασμένη οικογένεια $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^n$ ανοικτών και πυκνών έχουμε μια αριθμήσιμη οικογένεια $\{\mathcal{U}_k\}_{k=1}^\infty$ τέτοιων συνόλων. Το ερώτημα που τίθεται φυσιολογικά είναι εάν $\cap_{k=1}^\infty \mathcal{U}_k$ είναι πυκνό (ανοικτό είναι δύσκολο να περιμένουμε να είναι, διότι η τομή είναι άπειρη). Αυτό εν γένει δεν είναι πυκνό όπως φαίνεται από το επόμενο παράδειγμα.

Παραδειγμα. Θεωρούμε τον μετρικό χώρο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών με την συνήθη μετρική. Το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο, άρα $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Θέτουμε $\mathcal{U}_k = \mathbb{Q} \setminus \{q_k\}$, το οποίο είναι ανοικτό και πυκνό και παρατηρούμε ότι $\cap_{k=1}^\infty \mathcal{U}_k = \emptyset$.

Το θεώρημα κατηγορίας του Baire ισχυρίζεται ότι το φαινόμενο που είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα δεν εμφανίζεται όταν ο (X, ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Θεωρημα 5.12 (Θεώρημα κατηγορίας του Baire). *Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αριθμήσιμη οικογένεια ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του X. Τότε το $\cap_{n=1}^\infty \mathcal{U}_n$ είναι πυκνό.*

Αποδειξη. Έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon_0 > 0$. Θα δείξουμε ότι $\cap_{n=1}^\infty \mathcal{U}_n \cap S(x_0, \varepsilon_0) \neq \emptyset$. Επαγωγικά επιλέγουμε μια ακολουθία (x_n) στοιχείων του X, και μια ακολουθία (ε_n) θετικών αριθμών με $0 < \varepsilon_n < \frac{1}{n}$ ώστε

$$S(x_n, \varepsilon_n) \subset \mathcal{U}_n \cap S(x_{n-1}, \tfrac{\varepsilon_{n-1}}{2}) .$$

Η επιλογή των (x_n) και (ε_n) γίνεται ως εξής:

Επειδή το $\mathcal{U}_1$ είναι ανοικτό και πυκνό υπάρχει x_1, $0 < \varepsilon_1 < 1$ ώστε $S(x_1, \varepsilon_1) \subset \mathcal{U}_1 \cap S(x_0, \frac{\varepsilon_0}{2})$. Ας παρατηρήσουμε εδώ ότι $\overline{S(x_1, \frac{\varepsilon_1}{2})} \subset S(x_1, \varepsilon_1)$ και $\operatorname{diam}(\overline{S(x_1, \frac{\varepsilon_1}{2})}) \leq \varepsilon_1$.

Στο γενικό επαγωγικό βήμα η επιλογή των x_n, ε_n γίνεται με τον ίδιο τρόπο. Θεωρούμε δηλαδή ότι τα x_{n-1}, ε_{n-1} έχουν επιλεγεί και επιλέγουμε x_n, ε_n ώστε $0 < \varepsilon_n < \frac{1}{n}$ και $S(x_n, \varepsilon_n) \subset \mathcal{U}_n \cap S(x_{n-1}, \frac{\varepsilon_{n-1}}{2})$. Επίσης θα έχουμε ότι $\overline{S(x_n, \frac{\varepsilon_n}{2})} \subset S(x_n, \varepsilon_n)$ και $\operatorname{diam} \overline{S(x_n, \frac{\varepsilon_n}{2})} \leq \varepsilon_n < \frac{1}{n}$. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι

$$S(x_0, \varepsilon_0) \supset S(x_1, \varepsilon_1) \supset \overline{S(x_1, \tfrac{\varepsilon_1}{2})} \supset \ldots \supset S(x_n, \varepsilon_n) \supset \overline{S(x_n, \tfrac{\varepsilon_n}{2})} \supset \ldots$$

και επίσης

$$\overline{S(x_n, \tfrac{\varepsilon_n}{2})} \subset S(x_n, \varepsilon_n) \subset \mathcal{U}_n .$$

Σαν συνέπεια των προηγουμένων έπεται ότι $\{\overline{S(x_n, \frac{\varepsilon_n}{2})}\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X με $\operatorname{diam}(\overline{S(x_n, \frac{\varepsilon_n}{2})}) \to 0$ και επειδή ο X είναι πλήρης μετρικός χώρος $\cap_{n=1}^\infty \overline{S(x_n, \frac{\varepsilon_n}{2})} = \{x\}$. Είναι $x \in S(x_0, \varepsilon_0)$ και επίσης $x \in \mathcal{U}_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα $\cap_{n=1}^\infty \mathcal{U}_n \cap S(x_0, \varepsilon_0) \neq \emptyset$ και άρα το $\cap_{n=1}^\infty \mathcal{U}_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του X. □

Ορισμος 5.13. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Το σύνολο

$$\operatorname{int} A = \{x \in X : \text{υπάρχει } \varepsilon > 0 \text{ ώστε } S(x, \varepsilon) \subset A\}$$

καλείται *εσωτερικό* του A.

Από τον ορισμό, έχουμε ότι $\operatorname{int} A \subset A$, για κάθε $A \subset X$ και αν $A = \emptyset$ τότε $\operatorname{int} A = \emptyset$.

Προταση 5.14. *Έστω $A \subset X$, (X, ρ) μετρικός χώρος. Τότε το $\operatorname{int} A$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. Αν $\operatorname{int} A = \emptyset$ τότε το $\operatorname{int} A$ είναι ανοικτό. Έστω $\operatorname{int} A \neq \emptyset$ και $x \in \operatorname{int} A$. Άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $S(x,\varepsilon) \subset A$. Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι $S(x,\varepsilon) \subset \operatorname{int} A$. Πράγματι: Έστω $y \in S(x,\varepsilon)$. Επειδή η $S(x,\varepsilon)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X υπάρχει $\varepsilon' > 0$ ώστε $S(y,\varepsilon') \subset S(x,\varepsilon) \subset A$. Άρα $y \in \operatorname{int} A$ για όλα τα $y \in S(x,\varepsilon)$ δηλαδή $S(x,\varepsilon) \subset \operatorname{int} A$. □

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι το $\operatorname{int} A$ είναι το μεγαλύτερο ανοικτό υποσύνολο του X που περιέχεται στο A.

Πρόταση 5.15. *Έστω $A \subset X$ και $V \subset A$ ώστε το V είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Τότε $V \subset \operatorname{int} A$.*

Απόδειξη. Έστω $V \neq \emptyset$ και $x \in V$. Αφού το V είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $S(x,\varepsilon) \subset V$ και άρα $S(x,\varepsilon) \subset A$. Συνεπώς $x \in \operatorname{int} A$ για όλα τα $x \in V$, δηλαδή $V \subset \operatorname{int} A$. □

Πρόταση 5.16. *Ένα υποσύνολο A του X, είναι ανοικτό αν και μονο αν $\operatorname{int} A = A$.*

Απόδειξη. Αν A ανοικτό, τότε αφού $A \subset A$, από την προηγούμενη πρόταση $A \subset \operatorname{int} A$. Επειδή και $\operatorname{int} A \subset A$ έχουμε $A = \operatorname{int} A$.

Αν $A = \operatorname{int} A$ τότε το A είναι ανοικτό από τα προηγούμενα. □

Παραδείγματα. (1). Αν $A = [0,1] \subset \mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, τότε $\operatorname{int} A = (0,1)$.

(2). Αν $x \in \mathbb{R}$ και $A = \{x\} \subset \mathbb{R}$ τότε το A έχει εσωτερικό το κενό. Πράγματι, αν $y \in \operatorname{int} A$ τότε θα πρέπει να υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(y-\varepsilon, y+\varepsilon) \subset A = \{x\}$ άτοπο.

(3). Αν X σύνολο και ρ_δ η διακριτή μετρική τότε για κάθε $A \subset (X,\rho_\delta)$, $\operatorname{int} A = A$. Πραγματικά, κάθε υποσύνολο A του X είναι ανοικτό και συνεπώς από την προηγούμενη πρόταση $\operatorname{int} A = A$.

Πρόταση 5.17. *Έστω $F \subset X$ κλειστό. Τότε $\operatorname{int} F = \emptyset$ αν και μόνο αν το $X \setminus F$ είναι ανοικτό και πυκνό στον X.*

Απόδειξη. Έστω ότι $\operatorname{int} F = \emptyset$. Τότε το $X \setminus F$ είναι ανοικτό (ως συμπλήρωμα κλειστού). Επέσης είναι και πυκνό στον X. Πράγματι, έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Τότε $S(x,\varepsilon) \cap (X \setminus F) \neq \emptyset$ διότι διαφορετικά $S(x,\varepsilon) \subset F$ και άρα $x \in \operatorname{int} F$, άτοπο, αφού $\operatorname{int} F = \emptyset$.

Αντίστροφα, έστω ότι το $X \setminus F$ είναι ανοικτό και πυκνό στον X. Τότε το F είναι κλειστό (ως συμπλήρωμα ανοικτού) και επιπλέον $\operatorname{int} F = \emptyset$. Πραγματικά, αν $\operatorname{int} F \neq \emptyset$ τότε το $\operatorname{int} F$ είναι ανοικτό μη κενό και συνεπώς θα τέμνει κάθε πυκνό υποσύνολο του X, οπότε $\operatorname{int} F \cap (X \setminus F) \neq \emptyset$, άτοπο αφού $\operatorname{int} F \subset F$. □

Από το Θεώρημα Baire έχουμε το εξής:

Θεώρημα 5.18. *Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και έστω $X = \cup_{n=1}^\infty F_n$ όπου F_n κλειστό υποσύνολο του X για κάθε $n = 1,2,\ldots$ Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\operatorname{int} F_{n_0} \neq \emptyset$.*

Απόδειξη. Αν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{int} F_n = \emptyset$ τότε από την προηγούμενη πρόταση $X \setminus F_n$ ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του X για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Από το θεώρημα Baire $\cap_{n=1}^\infty (X \setminus F_n) \neq \emptyset$ οπότε $\cup_{n=1}^\infty F_n \neq X$, άτοπο. □

Πόρισμα 5.19. *Το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Αν το $\mathbb{R}$ ήταν αριθμήσιμο τότε $\mathbb{R} = \cup_{n=1}^\infty \{x_n\}$. Αλλά κάθε μονοσύνολο στον $\mathbb{R}$ με την συνήθη μετρική είναι κλειστό με κενό εσωτερικό. Άτοπο. □

3. Ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις

Ορισμος 5.20. Έστω (X,ρ), (Y,d) μετρικοί χώροι και και $f(X,\rho)\longrightarrow(Y,d)$. Η f καλείται ***ομοιόμορφα συνεχής*** αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε $x,y\in X$ με $\rho(x,y)<\delta$ να ισχύει $d(f(x),f(y))<\varepsilon$.

Είναι άμεσο ότι κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση είναι και συνεχής. Το αντίστροφο δεν αληθεύει. (Θεωρήστε π.χ. την $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$). Στο Κεφάλαιο 2 ορίσαμε τις συναρτήσεις μεταξύ δύο μετρικών χώρων που ικανοποιούν τη συνθήκη Lipschitz. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι κάθε τέτοια συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής (αρκεί να θέσουμε για $\varepsilon>0$, $\delta=\dfrac{\varepsilon}{C}$ όπου C η σταθερά Lipschitz). Όμως κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση δεν είναι απαραίτητα και Lipschitz. Π.χ. αποδεικνύεται ότι η $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ με $f(x)=\sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, ως συνεχής ορισμένη σε κλειστό φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$, αλλά όχι Lipschitz.

Προταση 5.21. *Έστω (X,ρ), (Y,d) δυο μετρικοί χώροι και $f:(X,\rho)\longrightarrow(Y,d)$ ομοιόμορφα συνεχής. Τότε η f απεικονίζει βασικές ακολουθίες του (X,ρ) σε βασικές ακολουθίες του (Y,d), δηδαδή αν η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στον (X,ρ) τότε η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στον (Y,d).*

Αποδειξη. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία στον (X,ρ). Θα αποδείξουμε ότι η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στον (Y,d).

Έστω $\varepsilon>0$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της f υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε $x,y\in X$ με $\rho(x,y)<\delta$ να ισχύει $d(f(x),f(y))<\varepsilon$. Από το γεγονός ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία έπεται ότι υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n,m\geq n_0$ να ισχύει $\rho(x_n,x_m)<\delta$. Έτσι για κάθε $n,m\geq n_0$ έχουμε $d(f(x_n),f(x_m))<\varepsilon$ και άρα $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία. □

Προταση 5.22. *Αν (X,ρ), (Y,d) μετρικοί χώροι και $f:(X,\rho)\longrightarrow(Y,d)$ συνάρτηση που απεικονίζει βασικές ακολουθίες του (X,ρ) σε βασικές ακολουθίες του (Y,d) τότε η f είναι συνεχής. Αν επιπλέον ο (X,ρ) έχει την ιδιότητα ότι κάθε ακολουθία του έχει βασική υπακολουθία, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Αποδειξη. Από την αρχή της μεταφοράς αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x_0\in X$ και ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον (X,ρ) που συγκλίνει στο x_0, η ακολουθία $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ του (Y,d) συγκλίνει στο $f(x_0)$.

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον (X,ρ) που συγκλίνει στο x_0. Θεωρούμε την ακολουθία $(x_0,x_1,x_0,x_2,\dots)$ δηλαδή την ακολουθία $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x'_n=x_0$ αν n περιττός και $x'_n=x_k$ αν n άρτιος, $n=2k$. Η ακολουθία αυτή συγκλίνει επίσης στο x_0 και άρα είναι βασική ακολουθία. Από την υπόθεση της πρότασης η ακολουθία $(f(x'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ δηλαδή η ακολουθία $(f(x_0),f(x_1),f(x_0),f(x_2),\dots)$ είναι βασική ακολουθία στον (Y,d) και η υπακολουθία των περιττών όρων της $(f(x'_{2n-1}))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η σταθερή ακολουθία $f(x_0)$ που προφανώς συγκλίνει στο $f(x_0)$. Άρα, αφού η βασική ακολουθία $(f(x'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο $f(x_0)$ θα συγκλίνει και η ίδια στο $f(x_0)$. Συνεπώς και η υπακολουθία $(f(x'_{2n}))_{n\in\mathbb{N}}$ των αρτίων όρων της δηλαδή η ακολουθία $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ θα συγκλίνει επίσης στο $f(x_0)$. Επομένως η f είναι συνεχής.

Έστω τώρα ότι επιπλέον κάθε ακολουθία στον (X,ρ) έχει βασική υπακολουθία. Υποθέτουμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε υπάρχει

$\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχουν $x, y \in X$ με $\rho(x, y) < \delta$ και $d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$. Εφαρμόζοντας αυτό για $\delta = \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ βρίσκουμε δυο ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X με $\rho(x_n, y_n) \longrightarrow 0$ και $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Από την υπόθεση μας η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει μια βασική υπακολουθία έστω $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε η ακολουθία $(x_{k_1}, y_{k_1}, x_{k_2}, y_{k_2}, \ldots)$ δηλαδή η ακολουθία $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $z_n = x_{k_l}$ αν $n = 2l-1$, $l \in \mathbb{N}$ και $z = y_{k_l}$ αν $n = 2l$, $l \in \mathbb{N}$ είναι, όπως εύκολα μπορούμε να δούμε, επίσης βασική ακολουθία στον (X, ρ). Αφού η f μεταφέρει βασικές ακολουθίες του (X, ρ) σε βασικές ακολουθίες του (Y, d), η $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ θα είναι βασική ακολουθία στον (Y, d). Έτσι μπορούμε να βρούμε φυσικό n ώστε $d(f(z_{2n-1}), f(z_{2n})) < \varepsilon$ δηλαδή $d(f(x_{k_n}), f(y_{k_n})) < \varepsilon$ που αντιβαίνει στο γεγονός ότι $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Επομένως η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. □

Παρατηρηση. Αν η $f : (X, \rho) \longrightarrow (Y, d)$ μεταφέρει βασικές ακολουθίες σε βασικές ακολουθίες τότε η f δεν είναι απαραίτητα ομοιόμορφα συνεχής. Ως αντιπαράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε την $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$.

Θεωρημα 5.23. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, (Y, d) πλήρης μετρικός χώρος, D πυκνό υποσύνολο του X και $f : D \longrightarrow Y$ ομοιόμορφα συνεχής. Τότε υπάρχει μοναδική συνεχής επέκταση της f στον X, δηλαδή υπάρχει μοναδική συνεχής $\tilde{f} : X \longrightarrow Y$ ώστε $\tilde{f}_{|D} = f$. Η μοναδική αυτή επέκταση $\tilde{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Αποδειξη. Η μοναδικότητα αποδεικνύεται εύκολα με την αρχή της μεταφοράς (βλ. και Ασκ. 2 Κεφ. 4). Η απόδειξη της ύπαρξης της $\tilde{f}$ χωρίζεται σε δύο βήματα. Στο πρώτο βήμα θα ορίσουμε την $\tilde{f}$ και θα δείξουμε ότι είναι καλά ορισμένη σαν συνάρτηση. Στο δεύτερο βήμα θα δείξουμε ότι η $\tilde{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Βήμα 1ο Έστω $x \in X$. Αν $x \in D$ ορίζουμε $\tilde{f}(x) = f(x)$. Αν $x \in X \setminus D$ επιλέγουμε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο D με $x_n \longrightarrow x$. Η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολυθία στο D άρα, αφού η $f : D \longrightarrow Y$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, από Πρόταση 5.21 έπεται ότι η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στον (Y, d). Εφόσον ο (Y, d) είναι πλήρης μετρικός χώρος η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία στον (Y, d). Ορίζουμε $\tilde{f}(x) = \lim_n f(x_n)$. Για να είναι καλός ο ορισμός αυτός πρέπει να δείξουμε ότι το $\tilde{f}(x)$ όπως ορίστηκε δεν εξαρτάται από την επιλογή της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, δηλαδή αν $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στο D με $y_n \longrightarrow x$ τότε οι ακολουθίες $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ και $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ έχουν κοινό όριο.

Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ όπως πριν τότε η ακολουθία $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $z_n = x_k$ αν $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$ και $z_n = y_k$ αν $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, δηλαδή η ακολουθία $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$ συγκλίνει επίσης στο x άρα είναι βασική ακολουθία στον (X, ρ). Όπως προηγουμένως, η $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ θα είναι βασική ακολουθία στον (Y, d). Οι υπακολουθίες της $(f(z_{2n-1}))_{n\in\mathbb{N}}$, $(f(z_{2n}))_{n\in\mathbb{N}}$ των περιττών και αρτίων όρων της αντίστοιχα θα συγκλίνουν στο ίδιο όριο με αυτή και άρα θα έχουν κοινό όριο. Όμως $(f(z_{2n-1}))_{n\in\mathbb{N}} = (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ και $(f(z_{2n}))_{n\in\mathbb{N}} = (f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ συνεπώς $\lim_n f(x_n) = \lim_n f(y_n)$ επομένως η f είναι καλά ορισμένη.

Βήμα 2ο Δείχνουμε ότι η $\tilde{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της $f : D \longrightarrow Y$ μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x_0, y_0 \in D$ με $\rho(x_0, y_0) < \delta$ να ισχύει $d(f(x_0), f(y_0)) < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Έστω τώρα $x, y \in X$ με $\rho(x, y) < \delta$. Από τον ορισμό της $\tilde{f}$ μπορούμε να επιλέξουμε $x' \in D$ με $\rho(x', x) < \dfrac{\delta - \rho(x, y)}{2}$ και $d(f(x'), \tilde{f}(x)) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Ομοίως επιλέγουμε $y' \in D$ με

$\rho(y',y) < \dfrac{\delta - \rho(x,y)}{2}$ και $d(f(y'),\tilde{f}(y)) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Επειδή $x',y' \in D$ και

$$\begin{aligned} \rho(x',y') &\leq \rho(x',x) + \rho(x,y) + \rho(y,y') \\ &< \frac{\delta - \rho(x,y)}{2} + \rho(x,y) + \frac{\delta - \rho(x,y)}{2} = \delta \end{aligned}$$

έπεται ότι $d(f(x'),f(y')) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} d(\tilde{f}(x),\tilde{f}(y)) &\leq d(\tilde{f}(x),f(x')) + d(f(x'),f(y')) + d(f(y'),\tilde{f}(y)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

και άρα η $\tilde{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. □

Παρατηρηση. Αν εξασθενήσουμε στο παραπάνω θεώρημα την υπόθεση ότι η $f : D \longrightarrow Y$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αντικαθιστώντας την με την υπόθεση ότι η η $f : D \longrightarrow Y$ είναι συνεχής δεν εξασφαλίζουμε την ύπαρξη συνεχούς επέκτασης της f στο X. Αν για παράδειγμα $X = Y = \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ και $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{1}{x}$ η f δεν επεκτείνεται συνεχώς στο $X = \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω X σύνολο και d η διακριτή μετρική στο X. Δείξτε ότι ο (X,d) είναι πλήρης.

2. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βασική ακολουθία σε ένα μετρικό χώρο ώστε το σύνολο $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι κλειστό. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \to x$.

3. Δώστε παράδειγμα μιας ακολουθίας $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ώστε $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots$ και $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

4. Δώστε παράδειγμα μιας φθίνουσας ακολουθίας $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{Q}$ με $\operatorname{diam} F_n \to 0$ και $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

5. Συμβολίζουμε με I το σύνολο των αρρήτων. Δείξτε ότι:

(i) Το I είναι αριθμήσιμη τομή ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.

(ii) Αν $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία από ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τότε $(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n) \cap I \neq \emptyset$.

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Baire.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Συμπαγείς μετρικοί χώροι

Ορισμος 6.1. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A\subset X$. Μια οικογένεια $\{G_i\}_{i\in I}$ υποσυνόλων του X λέγεται ***κάλυμμα*** του A αν $A\subset\bigcup\limits_{i\in I}G_i$. Αν επιπλέον για κάθε $i\in I$ το G_i είναι ανοικτό, το $\{G_i\}_{i\in I}$ λέγεται ***ανοικτό κάλυμμα*** ενώ στην περίπτωση που το I είναι πεπερασμένο το $\{G_i\}_{i\in I}$ λέγεται ***πεπερασμένο κάλυμμα***. Αν $J\subset I$ ώστε $A\subset\bigcup\limits_{i\in J}G_i$ το $\{G_i\}_{i\in J}$ λέγεται ***υποκάλυμμα*** του $\{G_i\}_{i\in I}$ (για το A).

Ορισμος 6.2. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $K\subset X$. Το K θα καλείται ***συμπαγές*** αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του K έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, δηλαδή αν για κάθε οικογένεια $\{G_i\}_{i\in I}$ ανοικτών υποσυνόλων του X με $K\subset\bigcup\limits_{i\in I}G_i$ υπάρχουν $n\in\mathbb{N}$ και $i_1,i_2,\ldots,i_n\in I$ ώστε $K\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}G_{i_k}$. Ειδικότερα αν $K=X$ τότε ο X θα καλείται ***συμπαγής μετρικός χώρος***.

Παραδείγματα

(i) Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο ενός μετρικού χώρου X είναι συμπαγές. (Η απόδειξη είναι εύκολη και αφήνεται στον αναγνώστη.)

(ii) Κάθε ακολουθία σε ένα μετρικό χώρο X μαζί με το όριό της είναι συμπαγές υποσύνολο του X, δηλαδή αν (x_n) ακολουθία στο X και $x\in X$ ώστε $x_n\to x$ τότε το σύνολο $K=\{x_n:\ n\in\mathbb{N}\}\cup\{x\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X. Πράγματι, έστω $\{G_i\}_{i\in I}$ οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X με $K\subset\bigcup\limits_{i\in I}G_i$. Τότε υπάρχει $i_0\in I$ ώστε $x\in G_{i_0}$ και άρα, αφού G_{i_0} ανοικτό, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n\geq n_0$, $x_n\in G_{i_0}$. Επίσης για κάθε $k=1,2,\ldots,n_0-1$ υπάρχει $i_k\in I$ ώστε $x_k\in G_{i_k}$. Συνεπώς $K\subset\bigcup\limits_{k=0}^{n_0-1}G_{i_k}$.

(iii) Αν το X είναι άπειρο σύνολο και ρ η διακριτή μετρική στο X τότε ο μετρικός χώρος (X,ρ) δεν είναι συμπαγής. Πράγματι, η οικογένεια $\{\{x\}\}_{x\in X}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X που δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

(iv) Το $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική δεν είναι συμπαγής μετρικός χώρος. Πράγματι, το ανοικτό κάλυμμα $\{(-n,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ του $\mathbb{R}$ δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

(v) Το ανοικτό διάστημα $(0,1)$ δεν είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Πράγματι, η οικογένεια $\{(\frac{1}{n},1):\ n=2,3,\ldots\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του $(0,1)$ που δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Όμοια τα διαστήματα $[0,1)$ και $(0,1]$ δεν είναι συμπαγή. (Θεωρείστε π.χ. τα ανοικτά καλύμματα $\{(-1,1-\frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{(\frac{1}{n},1+\frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ των $[0,1)$ και $(0,1]$ αντιστοίχως).

(vi) Κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,b]$ είναι, όπως θα δούμε παρακάτω, συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

1. Ιδιότητες συμπαγών χώρων

Πρόταση 6.3. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και K συμπαγές υποσύνολο του X. Τότε το K είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι το K είναι κλειστό. Αρκεί να δειχθεί ότι το $X \setminus K$ είναι ανοικτό ή ισοδύναμα για κάθε $x \in X \setminus K$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $S(x,\varepsilon) \subset X \setminus K$. Έστω $x \in X \setminus K$. Τότε για κάθε $y \in K$, $y \neq x$ και άρα $\rho(x,y) > 0$. Θέτουμε για κάθε $y \in K$, $\varepsilon_y = \dfrac{\rho(x,y)}{2}$ και παρατηρούμε ότι $S(x,\varepsilon_y) \cap S(y,\varepsilon_y) = \emptyset$ για όλα τα $y \in K$. Επιπλέον $K \subset \bigcup\limits_{y\in K} S(y,\varepsilon_y)$ και αφού το K είναι συμπαγές υπάρχουν $y_1, y_2, \ldots, y_n$ στο K ώστε $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} S(y_i,\varepsilon_{y_i})$. Θέτουμε $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{y_i} : \ i = 1,2,\ldots,n\}$. Τότε $S(x,\varepsilon) \cap S(y_i,\varepsilon_{y_i}) \subset S(x,\varepsilon_{y_i}) \cap S(y_i,\varepsilon_{y_i}) = \emptyset$ για όλα τα $i = 1,2,\ldots,n$. Συνεπώς $S(x,\varepsilon) \cap \bigcup\limits_{i=1}^{n} S(y_i,\varepsilon_{y_i}) = \emptyset$ και αφού $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} S(y_i,\varepsilon_{y_i})$ έπεται ότι $S(x,\varepsilon) \cap K = \emptyset$ ή $S(x,\varepsilon) \subset X \setminus K$.

Δείχνουμε στη συνέχεια ότι το K είναι φραγμένο. Πράγματι, έστω x τυχαίο σημείο του X. Τότε $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S(x,n)$ και άρα $K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S(x,n)$. Άρα, αφού K συμπαγές, υπάρχουν $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ώστε $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} S(x,n_i)$. Αν $n_0 = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ τότε $K \subset S(x,n_0)$ (αφού $S(x,n_i) \subset S(x,n_0)$ για όλα τα $i = 1,2,\ldots,k$). Επομένως $\operatorname{diam} K \leq 2n_0 < \infty$. □

Πρόταση 6.4. *Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος. Τότε κάθε κλειστό υποσύνολο του X είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Έστω F κλειστό υποσύνολο του X και $\{G_i\}_{i\in I}$ οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X ώστε $F \subset \bigcup\limits_{i\in I} G_i$. Αφού το F είναι κλειστό, το $X \setminus F$ είναι ανοικτό και άρα θέτοντας $G_i' = (X\setminus F) \cup G_i$ για κάθε $i \in I$, η οικογένεια $\{G_i'\}_{i\in I}$ αποτελείται από ανοικτά υποσύνολα του X. Επιπλέον $X = F \cup (X \setminus F) \subset (\bigcup\limits_{i\in I} G_i) \cup (X \setminus F) \subset \bigcup\limits_{i\in I} G_i'$ δηλαδή η οικογένεια $\{G_i'\}_{i\in I}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X. Εφόσον ο X είναι συμπαγής υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ ώστε $X = \bigcup\limits_{k=1}^{n} G_{i_k}' = \bigcup\limits_{k=1}^{n} (G_{i_k}) \cup (X \setminus F)$ και άρα $F \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} G_{i_k}$. Συνεπώς κάθε ανοικτό κάλυμμα του F έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα και άρα το F είναι συμπαγές υποσύνολο του X. □

Πρόταση 6.5. *Κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Έστω X ένας συμπαγής μετρικός χώρος. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η οικογένεια $\{S(x,\frac{1}{n}) : \ x \in X\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X και άρα υπάρχει D_n πεπερασμένο υποσύνολο του X ώστε $X = \bigcup\limits_{x\in D_n} S(x,\frac{1}{n})$. Θέτουμε $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$.

Το D είναι αριθμήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων. Επίσης το D είναι πυκνό στο X. Πράγματι, έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < \varepsilon$ και αφού $X = \bigcup\limits_{x\in D_n} S(x,\frac{1}{n})$ έχουμε ότι υπάρχει $y \in D_n$ ώστε $x \in S(y,\frac{1}{n})$. Άρα υπάρχει $y \in D$ ώστε $\rho(x,y) < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Συνεπώς το D είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του X επομένως ο X είναι διαχωρίσιμος. $\square$

Ορισμος 6.6. Εστω X ένα σύνολο. Μια οικογένεια $(F_i)_{i\in I}$ υποσυνόλων του X έχει την ***ιδιότητα της πεπερασμένης τομής*** αν για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ και $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$, $\bigcap\limits_{k=1}^{n} F_{i_k} \neq \emptyset$.

Η επόμενη πρόταση αποτελεί τη δυϊκή ερμηνεία της έννοιας της συμπάγειας μέσω τομών κλειστών συνόλων.

Προταση 6.7. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Ο X είναι συμπαγής αν και μόνο αν για κάθε οικογένεια $(F_i)_{i\in I}$ κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής ισχύει $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.*

Αποδειξη. Έστω ότι ο X είναι συμπαγής και $(F_i)_{i\in I}$ οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Υποθέτουμε ότι $\bigcap\limits_{i\in I} F_i = \emptyset$. Τότε $\bigcup\limits_{i\in I}(X \setminus F_i) = X$ (δείτε τους κανόνες De Morgan στο Κεφάλαιο 3). Συνεπώς η οικογένεια $\{X \setminus F_i\}_{i\in I}$ αποτελεί ένα ανοικτό κάλυμμα του X και αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ ώστε $X = \bigcup\limits_{k=1}^{n} (X \setminus F_{i_k})$. Αλλά τότε $\bigcap\limits_{k=1}^{n} F_{i_k} = \emptyset$ άτοπο, διότι η οικογένεια $(F_i)_{i\in I}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Επομένως $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε οικογένεια $(F_i)_{i\in I}$ κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής ισχύει $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \emptyset$. Θα δείξουμε ότι τότε ο X είναι συμπαγής. Πράγματι, διαφορετικά υπάρχει $\{G_i\}_{i\in I}$ ανοικτό κάλυμμα του X χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα. Συνεπώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $i_i, i_2, \ldots, i_n \in I$, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} G_{i_k} \neq X$ ή $\bigcap\limits_{k=1}^{n} (X \setminus G_{i_k}) \neq \emptyset$. Θέτουμε $F_i = X \setminus G_i$ για κάθε $i \in I$. Τότε η $\{F_i\}_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Άρα από υπόθεση θα πρέπει $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \emptyset$. Αλλά τότε $\bigcup\limits_{i\in I}(X \setminus F_i) \neq X$ ή $\bigcup\limits_{i\in I} G_i \neq X$ άτοπο. $\square$

Άμεση εφαρμογή της παραπάνω πρότασης είναι η εξής:

Προταση 6.8. *Κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι πλήρης.*

Αποδειξη. Έπεται άμεσα από την προηγούμενη πρόταση και από τον χαρακτηρισμό Cantor για τους πλήρεις μετρικούς χώρους. $\square$

Προταση 6.9. *Έστω K συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου X. Τότε κάθε άπειρο υποσύνολο του K έχει ένα τουλάχιστον σημείο συσσώρευσης στο K.*

Αποδειξη. Έστω A άπειρο υποσύνολο του K. Ας υποθέσουμε ότι το A δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης στο K. Άρα για κάθε $x \in K$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $A \cap (S(x, \varepsilon_x) \setminus \{x\}) = \emptyset$. Έχουμε ότι $K \subset \bigcup\limits_{x\in K} S(x, \varepsilon_x)$ και αφού το K είναι συμπαγές υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ ώστε $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} S(x_i, \varepsilon_{x_i})$ και άρα, αφού $A \subset K$, $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} S(x_i, \varepsilon_{x_i})$. Επειδή $A \cap (S(x_i, \varepsilon_{x_i}) \setminus \{x_i\}) = \emptyset$ για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, n$ θα πρέπει $A \subset \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ δηλαδή το A είναι πεπερασμένο, άτοπο. $\square$

Προταση 6.10. *Έστω K συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, ρ). Τότε κάθε ακολουθία στο K έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε σημείο του K.*

Απόδειξη. Έστω (x_n) ακολουθία στο K. Θέτουμε $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Αν το A είναι πεπερασμένο τότε υπάρχει άπειρο υποσύνολο $\{k_1 < k_2 < \cdots\}$ του $\mathbb{N}$ και $x \in K$ ώστε $x_{k_n} = x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα $x_{k_n} \to x$.

Αν το A είναι άπειρο τότε από Πρόταση 6.9 υπάρχει $x \in K$ ώστε το x να είναι σημείο συσσώρευσης του A. Επαγωγικά κατασκευάζουμε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) με $x_{k_n} \to x$ ως εξής: Επιλέγουμε $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_{k_1}, x) < 1$. Έστω ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έχουμε επιλέξει φυσικούς $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ ώστε $\rho(x_{k_i}, x) < \frac{1}{i}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. Θέτουμε $M = \{m \in \mathbb{N} : \ m > k_n \text{ και } \rho(x_m, x) < \frac{1}{n+1}\}$. Το σύνολο M είναι μη κενό. Πράγματι, αν $M = \emptyset$ τότε $S(x, \frac{1}{n+1}) \cap A \subset \{x_1, x_2, \ldots, x_{k_n}\}$, άτοπο αφού για κάθε $\varepsilon > 0$ το $S(x, \varepsilon) \cap A$ είναι απειροσύνολο (δες Κεφάλαιο 3). Αν $k_{n+1} = \min M$ τότε $k_{n+1} > k_n$ και $\rho(x_{k_{n+1}}, x) < \frac{1}{n+1}$. Έτσι η (x_{k_n}) είναι μια υπακολουθία της (x_n) με $x_{k_n} \to x$. □

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο της Πρότασης 6.10. Για το σκοπό αυτό θα μας χρειασθεί η έννοια του ε-διαχωρισμένου υποσυνόλου ενός μετρικού χώρου. Υπενθυμίζουμε ότι ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου (X, ρ) καλείται ***ε-διαχωρισμένο*** αν για κάθε $x, y \in A$ με $x \neq y$ έχουμε ότι $\rho(x, y) \geq \varepsilon$.

Λημμα 6.11. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $K \subset X$ με την ιδιότητα ότι κάθε ακολουθία στο K έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Τότε αν $\varepsilon > 0$, κάθε ε-διαχωρισμένο υποσύνολο του K είναι πεπερασμένο.*

Απόδειξη. Έστω ότι για κάποιο $\varepsilon > 0$ υπάρχει A άπειρο ε-διαχωρισμένο υποσύνολο του K. Επιλέγουμε ακολουθία (x_n) στο A με $x_n \neq x_m$ για $n \neq m$. Από υπόθεση η (x_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Επειδή κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι και ακολουθία Cauchy έχουμε ότι θα υπάρχουν $n \neq m$ φυσικοί ώστε $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Άτοπο, αφού $x_n \neq x_m$ και A ε-διαχωρισμένο. □

Λημμα 6.12. *Έστω (X, ρ) μετρικός με την ιδιότητα κάθε ακολουθία στον X να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Τότε ο X είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι κάθε ε-διαχωρισμένο υποσύνολο του X είναι πεπερασμένο. Το συμπέρασμα έπεται άμεσα από το Θεώρημα 4.16. □

Το προηγούμενο λήμμα γενικεύεται και ως εξής:

Λημμα 6.13. *Έστω K υποσύνολο του X με την ιδιότητα κάθε ακολουθία στο K να έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε στοιχείο του K. Τότε υπάρχει D αριθμήσιμο υποσύνολο του K ώστε $K \subset \overline{D}$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη ακολουθεί τις ίδιες γραμμές με την απόδειξη του Θεωρήματος 4.16. Περιγράφουμε συνοπτικά τα βήματα της απόδειξης. Καταρχήν με εφαρμογή του Λήμματος του Zorn δείχνουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ το μερικά διατεταγμένο (από την $\subset$) σύνολο $\Delta_\varepsilon = \{A : \ A \subset K \text{ και } A \ \varepsilon\text{-διαχωρισμένο}\}$ έχει ένα μεγιστικό στοιχείο. Ύστερα, αν A_n είναι μεγιστικό στοιχείο του $\Delta_{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ και δείχνουμε ότι $K \subset \overline{D}$. (Δείτε και τις αποδείξεις των Προτάσεων 4.13 και 4.14.) Το D είναι αριθμήσιμο, ως αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων (αφού από Λήμμα 6.11 κάθε A_n είναι πεπερασμένο). □

Λημμα 6.14. *Έστω $K \subset X$ όπως στο Λήμμα 6.13. Τότε κάθε ανοικτό κάλυμμα του K έχει αριθμήσιμο υποκάλυμμα.*

Αποδειξη. Έστω καταρχήν ότι $K = X$. Από Λήμμα 6.12 έχουμε ότι ο X είναι διαχωρίσιμος και άρα από Πρόταση 4.20 ο X έχει αριθμήσιμη βάση περιοχών, έστω $\mathcal{B} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. Έστω τώρα $\{G_i\}_{i\in I}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του X. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $i_x \in I$ και $n_x \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in V_{n_x} \subset G_{i_x}$. Θέτουμε $M = \{n_x : x \in X\}$. Τότε $M \subset \mathbb{N}$ και άρα το M είναι αριθμήσιμο. Για κάθε $m \in M$, επιλέγουμε $i_m \in I$ ώστε $V_m \subset G_{i_m}$ (αυτό μπορεί να γίνει διότι αν $m \in M$ υπάρχει $x \in X$ ώστε $m = n_x$ και $x \in V_{n_x} \subset G_{i_x}$). Άρα $X = \bigcup_{m\in M} V_m \subset \bigcup_{m\in M} G_{i_m}$. Συνεπώς η οικογένεια $\{G_{i_m}\}_{m\in M}$ είναι ένα αριθμήσιμο υποκάλυμμα του $\{G_i\}_{i\in I}$ για το X.

Προχωράμε τώρα στη γενική περίπτωση $K \subset X$. Από το Λήμμα 6.13 υπάρχει D αριθμήσιμο υποσύνολο του K ώστε $K \subset \overline{D}$. Θέτουμε $\mathcal{B} = \{S(y,q) : y \in D, q \in \mathbb{Q}^+\}$. Όπως στην Πρόταση 4.19 δείχνουμε ότι για κάθε $x \in K$ και κάθε $G \subset X$ ανοικτό ώστε $x \in G$, υπάρχει $S(y,q) \in \mathcal{B}$ ώστε $x \in S(y,q) \subset G$. Επειδή η $\mathcal{B}$ είναι αριθμήσιμη μπορεί να γραφεί στη μορφή $\mathcal{B} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ και ύστερα συνεχίζουμε όπως στην περίπτωση $K = X$. $\square$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Ας σημειώσουμε εδώ ότι ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ καλείται ***χώρος Lindelöf*** αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει αριθμήσιμο υποκάλυμμα. Έτσι από το Λήμμα 6.14 έχουμε ότι κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι χώρος Lindelöf Παρατηρήστε επίσης ότι ένας υπεραριθμήσιμος χώρος με τη διακριτή μετρική δεν είναι χώρος Lindelöf.

Λημμα 6.15. *Έστω $K \subset X$ όπως στο Λήμμα 6.13. Τότε κάθε αριθμήσιμο ανοικτό κάλυμμα του K έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.*

Αποδειξη. Έστω $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ αριθμήσιμο ανοικτό κάλυμμα του K. Υποθέτουμε ότι το $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Συνεπώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $K \setminus \bigcup_{i=1}^{n} G_i \neq \emptyset$. Επιλέγουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{n} G_i$. Από την υπόθεση μας για το K η (x_n) έχει μια υπακολουθία (x_{k_n}) που συγκλίνει σε ένα στοιχείο x του K. Επιλέγουμε $i_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in G_{i_0}$ και αφού $x_{k_n} \to x$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_{k_n} \in G_{i_0}$ για κάθε $n \geq n_0$. Άτοπο, αφου για κάθε $n \geq i_0$ από την κατασκευή της (x_n), $x_n \notin G_{i_0}$. $\square$

Είμαστε τώρα έτοιμοι να αποδείξουμε τον εξής θεμελιώδους σημασίας χαρακτηρισμό των συμπαγών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου.

Θεωρημα 6.16. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $K \subset X$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το K είναι συμπαγές υποσύνολο του X.*

(ii) *Κάθε υπακολουθία του K έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε στοιχείο του K.*

Αποδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Είναι η Πρόταση 6.10.
(ii) $\Longrightarrow$ (i) Έστω $\{G_i\}_{i\in I}$ ανοικτό κάλυμμα του K. Από το Λήμμα 6.14, υπάρχει $I' \subset I$ αριθμήσιμο ώστε $K \subset \bigcup_{i\in I'} G_i$. Από το Λήμμα 6.15 υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I' \subset I$ ώστε $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$. Επομένως το K είναι συμπαγές. $\square$

Θεωρημα 6.17 (Heine-Borel). *Κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,b]$ του $\mathbb{R}$ είναι συμπαγές.*

Αποδειξη. Από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass κάθε ακολουθία (x_n) του $[a,b]$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε στοιχείο του $[a,b]$. Από το Θεώρημα 6.16 έχουμε ότι το $[a,b]$ είναι συμπαγές. $\square$

Γενικά έχουμε τον επόμενο χαρακτηρισμό των συμπαγών υποσυνόλων του Ευκλειδείου χώρου $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$.

Θεωρημα 6.18. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^k$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το K είναι συμπαγές.*

(ii) *Το K είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$.*

Αποδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Προκύπτει από την Πρόταση 6.3.
(ii) $\Longrightarrow$ (i) Έστω (x_n) ακολουθία του K. Αφού το K είναι φραγμένο, η (x_n) είναι φραγμένη ακολουθία του $\mathbb{R}^k$ και άρα από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (x_{k_n}). Αν $x = \lim x_{k_n}$ έπεται ότι $x \in K$, αφού το K είναι κλειστό. Από το Θεώρημα 6.16 έπεται ότι το K είναι συμπαγές. $\square$

Παρατηρηση. Ο παραπάνω χαρακτηρισμός δεν ισχύει γενικά για μετρικούς χώρους. Πράγματι, όπως γνωρίζουμε, για κάθε μετρικό χώρο υπάρχει ισοδύναμη φραγμένη μετρική (Κεφάλαιο 3). Έτσι οποιοδήποτε κλειστό υποσύνολο του $(\mathbb{R}^k, \rho)$ όπου ρ φραγμένη είναι κλειστό και φραγμένο αλλά όχι απαραίτητα συμπαγές (π.χ. ο $(\mathbb{R}^k, \rho)$ δεν είναι συμπαγής). Γενικά, αν (X, ρ) είναι μη συμπαγής μετρικός χώρος και η μετρική ρ είναι φραγμένη τότε ο ίδιος ο X είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο αλλά όχι συμπαγές.

2. Συνεχείς συναρτήσεις σε συμπαγείς μετρικούς χώρους

Υπενθυμίζουμε ότι όπως έχει δειχθεί στο Κεφάλαιο 3, μια συνάρτηση $f : (X, \rho) \longrightarrow (Y, d)$ είναι συνεχής αν και μόνο αν $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X για κάθε U ανοικτό υποσύνολο του Y, ή $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X για κάθε F κλειστό υποσύνολο του Y. Στην παρούσα παράγραφο εξετάζονται επιπλέον ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων όταν αυτές ορίζονται σε ένα συμπαγή μετρικό χώρο.

Προταση 6.19. *Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος, (Y, d) μετρικός χώρος και $f : (X, \rho) \longrightarrow (Y, d)$ συνεχής συνάρτηση. Τότε ισχύουν τα επόμενα:*

(i) *Η εικόνα $f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y και άρα αν η f είναι επί τότε και ο Y είναι συμπαγής.*

(ii) *Για κάθε $F \subset X$ κλειστό, η εικόνα $f(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y.*

Αποδειξη. (i) Έστω $\{U_i\}_{i \in I}$ ανοικτό κάλυμμα του $f(X)$ στον (Y, d). Τότε $f(X) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ και άρα $X \subset f^{-1}(\bigcup_{i \in I} U_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$. Αφού η f είναι συνεχής για κάθε $i \in I$ το σύνολο $f^{-1}(U_i)$ είναι ανοικτό στο X και άρα το $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X. Εφόσον ο X είναι συμπαγής υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ ώστε $X \subset \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(U_{i_k})$, οπότε $f(X) \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$. Επομένως το $f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y. Αν η f είναι επί τότε $f(X) = Y$ και άρα ο Y είναι συμπαγής.

(ii) Έστω $F \subset X$ κλειστό. Αφού ο X είναι συμπαγής, το F είναι συμπαγές υποσύνολο του X (Πρόταση 6.4). Ομοίως με το (i) δείχνουμε ότι το $f(F)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y. Από Πρόταση 6.3 το $f(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y. $\square$

Από τα παραπάνω έπεται και η εξής:

Προταση 6.20. *Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος, (Y, d) μετρικός χώρος και $f : (X, \rho) \longrightarrow (Y, d)$ συνεχής, 1-1 και επί. Τότε η $f^{-1} : (Y, d) \longrightarrow (X, \rho)$ είναι επίσης συνεχής και άρα ο f είναι ομοιομορφισμός.*

Απόδειξη. Έστω $F \subset X$ κλειστό. Αρκεί να δειχθεί ότι το $(f^{-1})^{-1}(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y. Όμως $(f^{-1})^{-1} = f$ και άρα $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$. Από Πρόταση 6.19(ii) έχουμε το συμπέρασμα. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Το συμπέρασμα της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει αν ο (X,ρ) δεν είναι συμπαγής. Π.χ. θεωρήστε το $\mathbb{R}$ με τη διακριτή μετρική ρ_δ και έστω $f : (\mathbb{R}, \rho_\delta) \longrightarrow (\mathbb{R}, \rho)$ με $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όπου ρ είναι η συνήθης μετρική. Τότε η f είναι συνεχής, 1-1 και επί αλλά δεν είναι ομοιομορφισμός. Πράγματι, η ταυτοτική συνάρτηση από το $(\mathbb{R}, \rho)$ στο $(\mathbb{R}, \rho_\delta)$ δεν είναι συνεχής αφού π.χ $\dfrac{1}{n} \to 0$ στον $(\mathbb{R}, \rho)$ ενώ $\dfrac{1}{n} \not\to 0$ στον $(\mathbb{R}, \rho_\delta)$. Σχετική είναι και η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 6.21. *Έστω X σύνολο και ρ, d δυο μετρικές στο X. Αν ο (X,ρ) είναι συμπαγής και η ταυτοτική συνάρτηση $I : (X,\rho) \longrightarrow (X, d)$ είναι συνεχής τότε οι μετρικές ρ και d είναι ισοδύναμες.*

Απόδειξη. Προκύπτει από την Πρόταση 6.20 αφού η I είναι 1-1 και επί. □

Πρόταση 6.22. *Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : (X, \rho) \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.*

Απόδειξη. Το $f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (Πρόταση 6.19 (i)). Άρα είναι φραγμένο και συνεπώς υπάρχει το $M = \sup f(X)$ και το $m = \inf f(X)$. Επειδή το $f(X)$ είναι και κλειστό (Πρόταση 6.3) έχουμε ότι $m, M \in f(X)$. □

Λήμμα 6.23 (Lebesgue). *Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και $\{G_i\}_{i\in I}$ ανοικτό κάλυμμα του X. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $A \subset X$ με $\operatorname{diam}(A) < \delta$ υπάρχει $i \in I$ ώστε $A \subset G_i$.*

Απόδειξη. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $i_x \in I$ και $\varepsilon_x > 0$ ώστε $S(x, \varepsilon_x) \subset G_{i_x}$. Η οικογένεια $\{S(x, \frac{\varepsilon_x}{2})\}_{x\in X}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X και αφού ο X είναι συμπαγής υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ ώστε $X = \bigcup_{i=1}^{n} S(x_i, \frac{\varepsilon_{x_i}}{2})$. Θέτουμε $\delta = \frac{1}{2}\min\{\varepsilon_{x_1}, \varepsilon_{x_2}, \ldots, \varepsilon_{x_n}\}$.

Τότε $\delta > 0$ και για κάθε $A \subset X$ με $\operatorname{diam}(A) < \delta$, $A \subset S(y, \delta)$ για οποιοδήποτε $y \in A$. Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $y \in X$ υπάρχει $i \in I$ ώστε $S(y, \delta) \subset G_i$. Πράγματι, έστω $y \in X$. Αφού $X = \bigcup_{i=1}^{n} S(x_i, \frac{\varepsilon_{x_i}}{2})$ υπάρχει $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ώστε $y \in S(x_k, \frac{\varepsilon_{x_k}}{2})$ και άρα από την τριγωνική ανισότητα $S(y, \delta) \subset S(x_k, \varepsilon_{x_k}) \subset G_{i_{x_k}}$. □

Γνωρίζουμε ότι κάθε συνεχής $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι και ομοιόμορφα συνεχής. (Το αποτέλεσμα αυτό έχει θεμελιώδη σημασία στην απόδειξη της ολοκληρωσιμότητας των συνεχών συναρτήσεων.) Γενικά για συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε συμπαγείς μετρικούς χώρους και με τιμές σε οποιοδήποτε μετρικό χώρο έχουμε το επόμενο.

Θεώρημα 6.24. *Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος, (Y, d) μετρικός χώρος και $f : (X, \rho) \longrightarrow (Y, d)$ συνεχής. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη. Θα εφαρμόσουμε το Λήμμα Lebesgue. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι συνεχής η οικογένεια $\{f^{-1}(S(y, \frac{\varepsilon}{2}))\}_{y\in Y}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X. Από το Λήμμα Lebesgue υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x_1, x_2 \in X$ με $\rho(x_1, x_2) < \delta$ υπάρχει $y \in Y$

ώστε $x_1, x_2 \in f^{-1}(S(y, \frac{\varepsilon}{2}))$. Άρα $f(x_1), f(x_2) \in S(y, \frac{\varepsilon}{2})$ συνεπώς $d(f(x_1), f(x_2)) \leq d(f(x_1), y) + d(y, f(x_2)) < \varepsilon$. $\square$

Τέλος, μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα των συμπαγών μετρικών χώρων, είναι και η ακόλουθη:

Πρόταση 6.25. *Έστω (K, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $T : (K, \rho) \to (K, \rho)$ ισομετρία. Τότε η T είναι επί.*

Απόδειξη. Έστω ότι η T δεν είναι επί. Άρα έχουμε την ακόλουθη κατάσταση:

$$T[K] \subsetneq K$$

Διαλέγουμε $x_0 \in K \setminus T[K]$ και παρατηρούμε ότι επειδή ο K είναι συμπαγής, $\varepsilon_0 = \rho(x_0, T[K]) > 0$ και επειδή η T είναι ισομετρία για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η T^n θα είναι επίσης ισομετρία και άρα $\rho(T^n(x_0), T^{n+1}[K]) = \varepsilon_0$. Άρα για κάθε $m > n$, $T^m(x_0) = T^{n+1}(T^{m-n-1}(x_0)) \in T^{n+1}[K]$, συνεπώς $\rho(T^n(x_0), T^m(x_0)) \geq \varepsilon_0$ και άρα η ακολουθία $(T^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ δεν μπορεί να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία που είναι άτοπο από τη συμπάγεια του K. $\square$

3. Ολικά φραγμένα υποσύνολα μετρικών χώρων.

Εισάγουμε εδώ την έννοια του ολικά φραγμένου υποσυνόλου ενός μετρικού χώρου. Η έννοια αυτή είναι αρκετά κοντά με την συμπάγεια αλλά πιο ασθενής από αυτή. Συγκεκριμένα όπως θα δούμε, ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, ρ) είναι ολικά φραγμένο αν και μόνο αν κάθε ακολουθία του περιέχει Cauchy υπακολουθία. Έτσι κάθε συμπαγές υποσύνολο του (X, ρ) είναι ολικά φραγμένο, αλλά το αντίστροφο δεν συμβαίνει πάντα αφού κάθε ακολουθία Cauchy σε ένα υποσύνολο A του (X, ρ) δεν συγκλίνει απαραίτητα στο A αλλά ούτε και στον X, (εκτός αν ο X είναι πλήρης). Επίσης η έννοια του ολικά φραγμένου υποσυνόλου δεν μεταφέρεται σε ισοδύναμες μετρικές σε αντίθεση με τη συμπάγεια. Τέλος, η ιδιότητα του ολικά φραγμένου συνόλου, κληρονομείται σε όλα τα υποσύνολά του, κάτι που δεν συμβαίνει με τη συμπάγεια που κληρονομείται μόνο στα κλειστά υποσύνολα.

Δίνουμε τον ορισμό του ολικά φραγμένου υποσυνόλου ενός μετρικού χώρου (X, ρ) :

Ορισμός 6.26. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Το A καλείται *ολικά φραγμένο* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο $F \subset A$ ώστε $A \subset \cup_{x\in F} S(x, \varepsilon)$. Αν $A = X$ τότε ο (X, ρ) θα καλείται ολικά φραγμένος μετρικός χώρος. Επίσης αν $A = \emptyset$, τότε θα θεωρούμε ότι το A είναι ολικά φραγμένο.

Παρατηρήσεις. 1. Αν $A \subset X$, συμπαγές, τότε το A είναι ολικά φραγμένο. Πράγματι, αν $\varepsilon > 0$ τότε η ανοικτή κάλυψη $A \subset \cup_{x\in A} S(x, \varepsilon)$ του A έχει πεπερασμένη υποκάλυψη και άρα υπάρχει $F \subset A$ πεπερασμένο ώστε $A \subset \cup_{x\in F} S(x, \varepsilon)$.

2. Αν $A \subset X$ ολικά φραγμένο, τότε το A είναι και φραγμένο. Πράγματι. Για $\varepsilon = 1$ υπάρχει $F \subset A$ πεπερασμένο ώστε $A \subset \cup_{x\in F} S(x, 1)$. Επειδή το F είναι πεπερασμένο,

$$\operatorname{diam} F = \max\{\rho(x, y) : x, y \in F\} < \infty.$$

Εύκολα τώρα προκύπτει ότι $\operatorname{diam} A \leq \operatorname{diam} F + 2 < \infty$.

3. Κάθε φραγμένο υποσύνολο ενός μετρικού χώρου δεν είναι κατ΄ ανάγκη ολικά φραγμενο. Π.χ. Θεωρείστε τον $(\mathbb{R}, \rho_\delta)$ όπου ρ_δ η διακριτή μετρική ($\rho_\delta(x, y) = 1$ αν $x \neq y$ και $\rho_\delta(x, y) = 0$ αν $x = y$). Τότε ο $(\mathbb{R}, \rho_\delta)$ είναι φραγμένος μετρικός χώρος αλλά όχι ολικά φραγμένος αφού για $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $S_{\rho_\delta}(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$ και άρα για κάθε $F \subset \mathbb{R}$ πεπερασμένο, $\cup_{x\in F} S_{\rho_\delta}(x, \frac{1}{2}) = F \neq \mathbb{R}$.

Λημμα 6.27. *Έστω* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ακολουθία στον* (X,ρ) *τέτοια ώστε κάθε υπακολουθία της δεν είναι Cauchy. Τότε υπάρχουν* $\varepsilon>0$ *και* $M\subset\mathbb{N}$ *άπειρο, ώστε για κάθε* $M'\subset M$ *άπειρο,* $\operatorname{diam}\{x_m : m\in M'\}>\varepsilon$.

Αποδειξη. Έστω προς απαγωγή σε άτοπο, ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει. Τότε για κάθε $\varepsilon>0$ και για κάθε άπειρο υποσύνολο M του $\mathbb{N}$ υπάρχει περαιτέρω άπειρο υποσύνολο M' του M ώστε $\operatorname{diam}\{x_m : m\in M'\}\le\varepsilon$. Συνεπώς για $\varepsilon=1$ και για $M=\mathbb{N}$ υπάρχει $M_1'\subset M$ άπειρο ώστε $\operatorname{diam}\{x_m : m\in M_1'\}\le 1$. Ομοίως για $\varepsilon=\frac{1}{2}$ και για $M=M_1'$ υπάρχει $M_2'\subset M_1'$ άπειρο ώστε $\operatorname{diam}\{x_m : m\in M_2'\}\le\frac{1}{2}$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζουμε επαγωγικά μια φθίνουσα ακολουθία

$$\mathbb{N}\supset M_1'\supset M_2'\supset\cdots\supset M_n'\supset\dots$$

άπειρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n\in\mathbb{N}$,

$$\operatorname{diam}\{x_m : m\in M_n'\}\le\frac{1}{n}.$$

Έστω $M_\infty=\{m_1,m_2,\dots,m_n,\dots\}$ μια διαγωνοποίηση της $(M_n')_{n\in\mathbb{N}}$ δηλαδή $m_1<m_2<\cdots<m_n<\dots$ και $m_n\in M_n'$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Τότε για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $\{m_k : k\ge n\}\subset M_n'$ (αφού $m_k\in M_k'\subset M_n'$ για κάθε $k\ge n$) και άρα $\{x_{m_k} : k\ge n\}\subset\{x_m : m\in M_n'\}$. Συνεπώς για κάθε $n\in\mathbb{N}$,

$$\operatorname{diam}\{x_{m_k} : k\ge n\}\le\operatorname{diam}\{x_m : m\in M_n\}\le\frac{1}{n}.$$

Εύκολα τώρα προκύπτει ότι η $(x_m)_{m\in M_\infty}$ είναι μια Cauchy υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, άτοπο. □

Προταση 6.28. *Έστω* (X,ρ) *μετρικός χώρος και* $A\subset X$. *Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1). Το A *είναι ολικά φραγμένο.*

(2). Κάθε ακολουθία στο A *περιέχει Cauchy υπακολουθία.*

Αποδειξη. (1)⇒(2). Έστω ότι το A είναι ολικά φραγμένο. Υποθέτουμε προς απαγωγή σε άτοπο, ότι υπάρχει $(x_n)_n$ με $x_n\in A$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ώστε κάθε υπακολουθία της $(x_n)_n$ δεν είναι Cauchy. Από το προηγούμενο λήμμα υπάρχουν $\varepsilon>0$ και $M\subset\mathbb{N}$ άπειρο ώστε για κάθε $M'\subset M$ άπειρο, $\operatorname{diam}\{x_m : m\in M'\}>\varepsilon$. Επειδή το A είναι ολικά φραγμένο, υπάρχουν $k\in\mathbb{N}$ και $x_1,\dots,x_k\in A$ ώστε $A\subset\cup_{i=1}^k S(x_i,\frac{\varepsilon}{2})$.

Για κάθε $i=1,\dots,k$ θέτουμε $M_i=\{m\in M : x_m\in S(x_i,\frac{\varepsilon}{2})\}$. Τότε $M=M_1\cup\cdots\cup M_k$ και αφού το M είναι απειροσύνολο, ένα τουλάχιστον από τα $M_1,\dots,M_k$ είναι απειροσύνολο. Άρα υπάρχει $i_0\in\{1,\dots,k\}$ ώστε $M_{i_0}\subset M$ είναι άπειρο. Αλλά τότε $\{x_m : m\in M_{i_0}\}\subset S(x_{i_0},\frac{\varepsilon}{2})$ και άρα

$$\operatorname{diam}\{x_m : m\in M_{i_0}\}\le\operatorname{diam}S(x_{i_0},\frac{\varepsilon}{2})\le\varepsilon,$$

άτοπο. Άρα κάθε ακολουθία στο A περιέχει Cauchy υπακολουθία.

Αντίστροφα, έστω $A\subset X$ με την ιδιότητα κάθε ακολουθία στο A περιέχει Cauchy υπακολουθία. Θα δείξουμε ότι το A είναι ολικά φραγμένο. Πάλι με απαγωγή σε άτοπο, ας υποθέσουμε ότι το A δεν είναι ολικά φραγμένο. Τότε υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε για κάθε $k\in\mathbb{N}$ και κάθε επιλογή $x_1,\dots,x_k$ στοιχείων του A, $A\not\subset\cup_{i=1}^k S(x_i,\varepsilon)$.

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, κατασκευάζουμε επαγωγικά μια ακολουθία $(x_n)_n$ στο A με $\rho(x_n,x_m)\ge\varepsilon$, για κάθε $n\ne m$, ως εξής:

Έστω $x_1 \in A$. Επειδή $A \not\subset S(x_1,\varepsilon)$, υπάρχει $x_2 \in A$ με $\rho(x_1,x_2) \geq \varepsilon$. Ομοίως, επειδή $A \not\subset S(x_1,\varepsilon) \cup S(x_2,\varepsilon)$ υπάρχει $x_3 \in A$ ώστε $\rho(x_1,x_3) \geq \varepsilon$ και $\rho(x_2,x_3) \geq \varepsilon$. Γενικά, έστω ότι έχουμε επιλέξει $x_1,\ldots,x_k \in A$ ώστε $\rho(x_i,x_j) \geq \varepsilon$ για κάθε $i \neq j$, $1 \leq i,j \leq k$. Τότε $A \not\subset \cup_{i=1}^k S(x_i,\varepsilon)$ και συνεπώς υπάρχει $x_{k+1} \in A$ ώστε $\rho(x_{k+1},x_i) \geq \varepsilon$ για κάθε $i = 1,\ldots,k$.

Φανερά η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στο A που δεν περιέχει Cauchy υπακολουθία, άτοπο. Άρα το A είναι ολικά φραγμένο. □

Η επόμενη πρόταση δείχνει την ακριβή σχέση της έννοιας της συμπάγειας και του ολικά φραγμένου μετρικού χώρου.

Πρόταση 6.29. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*
(1). Ο (X,ρ) είναι συμπαγής
(2). Ο (X,ρ) είναι ολικά φραγμένος και πλήρης.

Απόδειξη. (1)⇒(2). Έστω ότι ο (X,ρ) είναι συμπαγής. Καταρχήν από πρόταση 6.8 έπεται ότι ο (X,ρ) είναι πλήρης. Δείχνουμε ότι είναι και ολικά φραγμένος. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $X = \cup_{x\in X} S(x,\varepsilon)$ και άρα υπάρχουν $x_1,\ldots,x_k \in X$ ώστε $X = \cup_{i=1}^k S(x_i,\varepsilon)$. Άρα ο (X,ρ) είναι ολικά φραγμένος.

(2)⇒(1). Αφού ο (X,ρ) είναι ολικά φραγμένος, από την προηγούμενη πρόταση κάθε ακολουθία του περιέχει Cauchy υπακολουθία. Επειδή ο (X,ρ) είναι πλήρης κάθε Cauchy υπακολουθία του X είναι συγκλίνουσα. Άρα κάθε ακολουθία του X περιέχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία και συνεπώς ο X είναι συμπαγής. □

Δείχνουμε τώρα ότι κάθε υποσύνολο ενός ολικά φραγμένου $A \subset X$ είναι και αυτό ολικά φραγμένο καθώς επίσης ότι και η κλειστότητα $\overline{A}$ του A είναι ολικά φραγμένο υποσύνολο του X.

Πρόταση 6.30. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subset X$ ολικά φραγμένο. Τότε*
(1). Κάθε υποσύνολο του A είναι ολικά φραγμένο.
(2). Η κλειστότητα του A, είναι ολικά φραγμένο.

Απόδειξη. (1). Έστω $B \subset A$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή το A είναι ολικά φραγμένο υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο F του A ώστε $A \subset \cup_{x\in F} S(x,\frac{\varepsilon}{2})$ και άρα $B \subset \cup_{x\in F} S(x,\frac{\varepsilon}{2})$. Θέτουμε

$$F' = \{x \in F : S(x,\frac{\varepsilon}{2}) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Τότε το F' είναι πεπερασμένο και έστω $F' = \{x_1,\ldots,x_k\}$. Άρα $B \subset \cup_{i=1}^k S(x_i,\frac{\varepsilon}{2})$ με $S(x_i,\frac{\varepsilon}{2}) \cap B \neq \emptyset$ για κάθε $i = 1,\ldots,k$. Επιλέγουμε $y_i \in S(x_i,\frac{\varepsilon}{2}) \cap B$. Τότε $S(x_i,\frac{\varepsilon}{2}) \subset S(y_i,\varepsilon)$, $i = 1,\ldots,k$ και άρα

$$B \subset \cup_{i=1}^k S(x_i,\frac{\varepsilon}{2}) \subset \cup_{i=1}^k S(y_i,\varepsilon).$$

Συνεπώς το B είναι ολικά φραγμένο.

(2). Έστω $\overline{A}$ η κλειστότητα του A και $\varepsilon > 0$. Αφού το A είναι ολικά φραγμένο, υπάρχουν $k \in \mathbb{N}$ και $x_1,\ldots,x_k \in A$ ώστε $A \subset \cup_{i=1}^k S(x_i,\frac{\varepsilon}{2})$.

Ισχυριζόμαστε ότι $\overline{A} \subset \cup_{i=1}^k S(x_i,\varepsilon)$. Αν αυτό δειχτεί, τότε επειδή $x_i \in A \subset \overline{A}$ για όλα τα $i = 1,\ldots,k$ θα έχουμε ότι το $\overline{A}$ είναι ολικά φραγμένο. Πράγματι. Έστω $y \in \overline{A}$. Τότε υπάρχει $x \in A$ ώστε $\rho(x,y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Επειδή $A \subset \cup_{i=1}^k S(x_i,\frac{\varepsilon}{2})$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $i_0 \in \{1,\ldots,k\}$ ώστε $x \in S(x_{i_0},\frac{\varepsilon}{2})$. Άρα

$$\rho(y,x_{i_0}) \leq \rho(y,x) + \rho(x,x_{i_0}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

δηλαδή, $y \in S(x_{i_0}, \varepsilon) \subset \cup_{i=1}^{k} S(x_i, \varepsilon)$. συνεπώς $\overline{A} \subset \cup_{i=1}^{k} S(x_i, \varepsilon)$. $\square$

Πορισμα 6.31. *Αν $A \subset X$ είναι ολικά φραγμένο, τότε κάθε $B \subset \overline{A}$ είναι ολικά φραγμένο.*

Αποδειξη. Από το (2), της προηγούμενης πρότασης, έχουμε ότι το $\overline{A}$ είναι ολικά φραγμένο και άρα από το (1), το συμπέρασμα έπεται άμεσα. $\square$

Πορισμα 6.32. *Κάθε υποσύνολο ενός συμπαγούς $K \subset (X, \rho)$ είναι ολικά φραγμένο.*

Αποδειξη. Κάθε συμπαγές K είναι ολικά φραγμένο και συνεπώς καθε $K' \subset K$ είναι και αυτό ολικά φραγμένο. $\square$

Παραδειγμα. Το σύνολο $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ είναι ολικά φραγμένο και φανερά όχι συμπαγές.

Κλείνουμε την παράγραφο αυτή με την παρατήρηση ότι η έννοια του ολικά φραγμένου μετρικού χώρου δεν είναι αναλλοίωτη κάτω από ισοδύναμες μετρικες, δηλαδή αν ο (X, ρ) είναι ολικά φραγμένος και η ρ' είναι ισοδύναμη της ρ αυτό δεν σημαίνει ότι και ο (X, ρ') θα είναι ολικά φραγμένος. Ένα απλό παράδειγμα είναι ο $(\mathbb{N}, \rho_\sigma)$ και ο $(\mathbb{N}, \rho)$ όπου $\rho_\sigma(n, m) = |n - m|$ και $\rho(n, m) = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$. Ο $(\mathbb{N}, \rho_\sigma)$ δεν είναι ολικά φραγμένος (αφού δεν είναι φραγμένος) ενώ ο $(\mathbb{N}, \rho)$ είναι ολικά φραγμένος:

Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $n_0 = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$. Ισχυριζόμαστε ότι $\mathbb{N} = \cup_{n \leq n_0} S_\rho(n, \varepsilon)$. Πράγματι, έστω $n \in \mathbb{N}$. Αν $n < n_0$ τότε $n \in S_\rho(n, \varepsilon)$ ενώ αν $n \geq n_0$ έχουμε ότι

$$\rho(n, n_0) = |\frac{1}{n} - \frac{1}{n_0}| = \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

και άρα $n \in S_\rho(n_0, \varepsilon)$.

Έτσι, σε αντίθεση με την συμπάγεια και όμοια με την πληρότητα, η έννοια του ολικά φραγμένου μετρικού χώρου δεν διατηρείται κάτω από ισοδύναμες μετρικές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $K \subset X$ συμπαγές και $F \subset X$ κλειστό ώστε $F \cap K = \emptyset$. Δείξτε ότι $\rho(K, F) = \inf\{\rho(x, y) : \ x \in K, \ y \in F\} > 0$. (Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : (X, \rho) \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \rho(x, F)$ και εξετάστε το σύνολο $f(K)$).

2. Δώστε παράδειγμα δυο κλειστών υποσυνόλων F_1, F_2 του $\mathbb{R}$ ώστε $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ και $\rho(F_1, F_2) = 0$.

3. Έστω K συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου. Δείξτε ότι $\operatorname{diam} K < +\infty$ και ότι υπάρχουν $x_0, y_0 \in K$ ώστε $\operatorname{diam} K = \rho(x_0, y_0)$.

4. Αν K_1, K_2 είναι δύο συμπαγή υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X, ρ) και $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ δείξτε ότι υπάρχουν $x_1 \in K_1$ και $x_2 \in K_2$ με $\rho(x_1, x_2) = \rho(K_1, K_2)$.

5. Έστω $\{F_i : \ i \in I\}$ οικογένεια κλειστών υποσυνόλων ενός συμπαγούς μετρικού χώρου (X, ρ) με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Θέτουμε $F = \bigcap_{i \in I} F_i$. Αν V είναι ανοικτό υποσύνολο του X και $F \subset V$ δείξτε ότι υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $i_1, \ldots, i_n \in I$ ώστε $\bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k} \subset V$. (Υπόδειξη: Υποθέτοντας, ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα δείξτε ότι η η οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X, $\{F_i : \ i \in I\} \cup \{X \setminus V\}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Καταλήξτε σε άτοπο.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Ακολουθίες συναρτήσεων

1. Κατά σημείο σύγκλιση ακολουθίας πραγματικών συναρτήσεων

Ορισμος 7.1. Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων σε ένα σύνολο X με τιμές στο $\mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***συγκλίνει κατά σημείο*** αν για κάθε $x \in X$ το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ υπάρχει. Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ καλείται το κατά σημείο όριο της ακολουθίας $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Κάθε ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει κατά σημείο καλείται ***κατά σημείο συγκλίνουσα*** ακολουθία συναρτήσεων.

Ορισμος 7.2. Έστω $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ ακολουθία συναρτήσεων Η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θα λέγεται ***κατά σημείο Cauchy*** ακολουθία συναρτήσεων αν για κάθε $x \in X$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ (που εξαρτάται και από το ε και από το x) τέτοιο ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ (δηλαδή αν για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία Cauchy).

Προταση 7.3. *Έστω $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ Η ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι κατά σημείο συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι κατά σημείο Cauchy.*

Αποδειξη. Προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy. □

Παραδείγματα

(i) Έστω $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ με $f_n(x) = x^n$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Τότε είναι εύκολο να δειχθεί ότι ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ αν $x \in [0, 1)$ και $f(1) = 1$.

(ii) Έστω $f_n : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{αν } 0 \leq x \leq n \\ n & \text{αν } x > n. \end{cases}$$

Τότε η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

(iii) Έστω $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = (-1)^n x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει κατά σημείο.

Έχουμε δει ότι κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία (Θεώρημα Bolzano-Weierstrass). Ισχύει κάτι ανάλογο για ακολουθίες πραγματικών συναρτήσεων; Συγκεκριμένα αν $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ είναι μια ακολουθία συναρτήσεων τέτοια ώστε για κάθε $x \in X$ η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, τότε υπάρχει κατά σημείο συγκλίνουσα υπακολουθία της $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$; Αυτό γενικά αποδεικνύεται ότι δεν είναι σωστό, ισχύει όμως στην περίπτωση που το X είναι αριθμήσιμο. Πράγματι, έχουμε την εξής πρόταση:

Πρόταση 7.4. *Έστω X αριθμήσιμο σύνολο και $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων ώστε για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. Τότε η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει μια κατά σημείο συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω καταρχήν ότι το X είναι πεπερασμένο, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Από υπόθεση η $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$ και άρα, από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass, έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Συνεπώς υπάρχει $N_1 \subset \mathbb{N}$ άπειρο ώστε η $(f_n(x_1))_{n\in N_1}$ να είναι συγκλίνουσα ακολουθία στο $\mathbb{R}$ (δείτε και την απόδειξη του Θεωρήματος Bolzano-Weierstrass για τον $\mathbb{R}^k$). Όμοια η $(f_n(x_2))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη οπότε και η υπακολουθία της $(f_n(x_2))_{n\in N_1}$ είναι επίσης φραγμένη. Συνεπώς υπάρχει $N_2 \subset N_1$ άπειρο ώστε η $(f_n(x_2))_{n\in N_2}$ να συγκλίνει. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζουμε άπειρα σύνολα $\mathbb{N} \supset N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_k$ ώστε για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$ η $(f_n(x_i))_{n\in N_i}$ να είναι συγκλίνουσα ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Έτσι για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$ η $(f_n(x_i))_{n\in N_k}$ είναι συγκλίνουσα ως υπακολουθία της $(f_n(x_i))_{n\in N_i}$. Επομένως η $(f_n)_{n\in N_k}$ είναι κατά σημείο συγκλίνουσα υπακολουθία της $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Υποθέτουμε τώρα ότι το X είναι άπειρο $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Όπως και παραπάνω κατασκευάζουμε άπειρα υποσύνολα του $\mathbb{N}$, $N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_i \supset N_{i+1} \supset \cdots$ ώστε για κάθε $i = 1, 2, \ldots$ η υπακολουθία $(f_n(x_i))_{n\in N_i}$ να είναι συγκλίνουσα. Επιλέγουμε φυσικούς $n_1 < n_2 < \cdots < n_i < n_{i+1} < \cdots$ ώστε για κάθε $i \in \mathbb{N}$, $n_i \in N_i$ και θέτουμε $M = \{n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots\}$.

Ισχυριζόμαστε ότι η υπακολουθία $(f_n)_{n\in M}$ της $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι κατά σημείο συγκλίνουσα. Πράγματι, έστω $x \in X$. Τότε υπάρχει $i \in \mathbb{N}$ ώστε $x = x_i$. Η ακολουθία $(f_n(x_i))_{n\in M}$, εκτός ίσως από τους $i-1$ πρώτους όρους της, είναι υπακολουθία της $(f_n(x_i))_{n\in N_i}$ αφού από την κατασκευή του M και των $N_1, N_2, \ldots$ έχουμε ότι $\{n_i, n_{i+1}, \ldots\} \subset N_i$. Εφόσον η $(f_n(x_i))_{n\in N_i}$ είναι συγκλίνουσα το ίδιο συμβαίνει και για την $(f_n(x_i))_{n\in M}$.

Επομένως η $(f_n(x))_{n\in M}$ είναι συγκλίνουσα για κάθε $x \in X$, οπότε η $(f_n)_{n\in M}$ είναι κατά σημείο συγκλίνουσα υπακολουθία της $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

2. Ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθιών πραγματικών συναρτήσεων

Ορισμός 7.5. Έστω $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ ακολουθία συναρτήσεων και $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***συγκλίνει ομοιόμορφα*** στην f αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

για όλα τα $x \in X$.

Κάθε ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ που συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ θα καλείται ***ομοιόμορφα συγκλίνουσα ακολουθία*** συναρτήσεων. Είναι σαφές ότι αν η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f τότε συγκλίνει και κατά σημείο στην f. Η διαφορά των δύο εννοιών είναι η εξής: Αν η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο στην f τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $x \in X$ υπάρχει φυσικός n_0 που εξαρτάται και από το ε και από το x, ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Αν η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ βρίσκουμε ένα μοναδικό $n_0 \in \mathbb{N}$ που εξαρτάται μόνο από το ε και είναι κατάλληλος για όλα τα x.

Ορισμός 7.6. Έστω $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$. Η ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ καλείται ***ομοιόμορφα Cauchy*** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

για όλα τα $x \in X$.

Προσέξτε και εδώ την ίδια διαφορά (σχετικά με την εξάρτηση του n_0 από το ε και το x) με την αντίστοιχη έννοια της κατά σημείο Cauchy ακολουθίας.

Πρόταση 7.7. *Έστω $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ Η ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι ομοιόμορφα Cauchy.*

Απόδειξη. Έστω ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ για όλα τα $x \in X$. Άρα για κάθε $n, m \geq n_0$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

για όλα τα $x \in X$. Επομένως η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy.

Αντιστρόφως, έστω ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy. Τότε είναι και κατά σημείο Cauchy και άρα κατά σημείο συγκλίνουσα, συνεπώς υπάρχει $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ώστε η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να συγκλίνει κατά σημείο στην f δηλαδή $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ για κάθε $x \in X$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$, $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ για όλα τα $x \in X$. Άρα για κάθε n
gen_0

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - \lim_{m\to\infty} f_m(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

για όλα τα $x \in X$. Επομένως η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα. □

Το παρακάτω κριτήριο για την ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθίας συναρτήσεων είναι αρκετά χρήσιμο:

Πρόταση 7.8. *Έστω $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ ακολουθία συναρτήσεων που συγκλίνει κατά σημείο στην $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Θέτουμε $M_n = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|$ για $n = 1, 2 \ldots$ Τότε η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f αν και μόνο αν $M_n \to 0$.*

(Η απόδειξη είναι άμεση από τους ορισμούς.)

Παραδείγματα

(i) Η $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ με $f_n(x) = \dfrac{\sin x}{n}$ είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin x}{n} = 0$ και άρα η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο στην $f = 0$. Επειδή

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\frac{\sin x}{n}| = \frac{1}{n}$$

από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

(ii) Η ακολουθία $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \leq n \\ 1 & \text{αν } x > n \end{cases}$$

συγκλίνει κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ (αφού για δεδομένο $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει φυσικός n_0 ώστε $x \leq n_0$ οπότε $f_n(x) = 0$ για κάθε $n \geq n_0$) και άρα η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο στην $f = 0$. Όμως $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 1 \not\to 0$ και άρα σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

Μέχρι αυτό το σημείο οι ακολουθίες συναρτήσεων που θεωρούσαμε είχαν πεδίο ορισμού ένα αυθαίρετο μη κενό σύνολο X. Αν το X είναι ένας μετρικός χώρος τότε η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μπορεί να έχει κάποιες επιπλέον ιδιότητες π.χ. να είναι ακολουθία συνεχών συναρτήσεων. Σχετικά έχουμε την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 7.9. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ $n = 1,2,\dots$ μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Τότε και η f είναι συνεχής συνάρτηση.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$. Αφού η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_{n_0}(x)-f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ για όλα τα $x \in X$. Επειδή η f_{n_0} είναι συνεχής στο x_0 υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$ με $\rho(x,x_0) < \delta$ να ισχύει $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Άρα για κάθε $x \in X$ με $\rho(x,x_0) < \delta$ έχουμε:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f_(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

συνεπώς η f είναι συνεχής στο x_0. Αφού αυτό συμβαίνει για όλα τα $x_0 \in X$ η f είναι συνεχής. □

Το συμπέρασμα της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει για την κατά σημείο σύγκλιση. Π.χ. η ακολουθία $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = x^n$ συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση f που είναι ασυνεχής στο $x_0 = 1$. Από την Πρόταση 7.9 έχουμε το εξής πόρισμα:

Πόρισμα 7.10. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ $n = 1,2,\dots$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει κατά σημείο στην $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Αν η f δεν είναι συνεχής τότε η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Για τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων να εξετάσετε αν συγκλίνουν κατά σημείο και αν συγκλίνουν ομοιόμορφα:

(i) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin(n^2x)$, $n = 1,2,\dots$

(ii) $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x}$, $n = 1,2,\dots$

(iii) $f_n : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x}$, $n = 1,2,\dots$

(iv) $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = (1-x)^n\dfrac{nx}{nx+1}$, $n = 1,2,\dots$

(v) $f_n : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \dfrac{1}{nx+1}$, $n = 1,2,\dots$

(vi) $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = n^2x(1-x)^n$, $n = 1,2,\dots$

(vii) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \dfrac{x^2+nx}{n}$, $n = 1,2,\dots$

(viii) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \dfrac{1}{n}e^{-\frac{x^4}{n}}$, $n = 1,2,\dots$

2. Έστω X πεπερασμένο σύνολο και $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 1,2,\dots$ κατά σημείο συγκλίνουσα ακολουθία συναρτήσεων. Δείξτε ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι και ομοιόμορφα συγκλίνουσα.

3. Έστω $f, f_n : (X,\rho) \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 1,2,\dots$ ώστε η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο στην f και κάθε f_n είναι Lipschitz με σταθερά M (ανεξάρτητο του n). Δείξτε ότι η f είναι συνεχής.

4. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 1,2,\dots$ συνεχείς συναρτήσεις ώστε η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στο X και $x_0 \in X$ με $x_n \to x_0$ τότε $f_n(x_n) \to f(x_0)$.

5. Έστω $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πολυωνύμων $p_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Αν η $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ τότε η f είναι πολυώνυμο. (Υπόδειξη: Αφού η $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα είναι ομοιόμορφα Cauchy και άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|p_n(x) - p_m(x)| < 1$ για κάθε $n, m \geq n_0$ και $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρήστε ότι τα μόνα φραγμένα πολυώνυμα στο $\mathbb{R}$ είναι τα σταθερά.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Οι χώροι $C[a,b]$

1. Διανυσματικοί χώροι με νόρμα

Στο Κεφάλαιο 1, ορίσαμε τις έννοιες του διανυσματικού χώρου και της νόρμας σε ένα διανυσματικό χώρο. Στην παράγραφο αυτή θα συνεχίσουμε τη μελέτη μας πάνω στα θέματα αυτά και ειδικότερα πάνω στην έννοια της βάσης ενός διανυσματικού χώρου. Υπενθυμίζουμε ότι αν X είναι ένας διανυσματικός χώρος και $x_1, x_2, \dots, x_n$ στοιχεία του X, τότε τα $x_1, x_2, \dots, x_n$ καλούνται ***γραμμικά ανεξάρτητα*** αν η ισότητα $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ όπου $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ισχύει μόνο όταν $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Ένα υποσύνολο A του X καλείται ***γραμμικά ανεξάρτητο*** υποσύνολο του X αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του αποτελείται από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

Ένα υποσύνολο B του X καλείται ***(Hamel) βάση*** του X αν

(i) Το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

(ii) Για κάθε $x \in X$ υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in B$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ώστε $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$.

Αποδεικνύεται ότι το $B \subset X$ είναι βάση του X αν και μόνο αν για κάθε $x \in X$ με $x \neq 0$ υπάρχουν μοναδικά $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n$ διαφορετικά ανά δύο στοιχεία του B και μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ώστε $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$. Ακόμη, ένας άλλος χρήσιμος για τα επόμενα χαρακτηρισμός της βάσης ενός διανυσματικού χώρου X είναι ο εξής: Ένα υποσύνολο B του X είναι βάση του X αν και μόνο αν το B είναι ένα μεγιστικό γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του X (δηλαδή αν B' γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του X με $B \subset B'$ τότε $B = B'$).

Ο παραπάνω χαρακτηρισμός της βάσης ενός διανυσματικού χώρου σε συνδυασμό με το Λήμμα του Zorn δίνει το εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.1 (Ύπαρξη βάσης σε διανυσματικούς χώρους). *Κάθε διανυσματικός χώρος X έχει βάση.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θέτουμε

$$\mathcal{F} = \{A \subset X : \ \text{Το } A \text{ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του } X\}.$$

Στο $\mathcal{F}$ ορίζουμε τη σχέση $\leq$ ως εξής: Για $A, B \in \mathcal{F}$, $A \leq B$ αν και μόνο αν $A \subset B$. Από τον παραπάνω χαρακτηρισμό της βάσης αρκεί να δειχθεί ότι το $(\mathcal{F}, \leq)$ έχει ένα μεγιστικό στοιχείο. Συνεπώς από το Λήμμα του Zorn αρκεί να δείξουμε ότι κάθε αλυσίδα $\mathcal{C}$ του $\mathcal{F}$ έχει άνω φράγμα στο $\mathcal{F}$. Πράγματι, έστω $\mathcal{C} = \{A_i\}_{i \in I}$ μια αλυσίδα στο $\mathcal{F}$. Θέτουμε $A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$. Τότε για κάθε $i \in I$, $A_i \subset A$ και άρα, αν $A \in \mathcal{F}$ θα είναι $A_i \leq A$. Απομένει λοιπόν να δειχθεί ότι $A \in \mathcal{F}$. Πράγματι, έστω $\{x_1, \dots, x_n\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του A με n στοιχεία. Τότε υπάρχουν $i_1, \dots, i_n \in I$ ώστε $x_k \in A_{i_k}$ για $k = 1, \dots, n$. Επειδή το $\mathcal{C}$ είναι αλυσίδα και $A_{i_1}, \dots, A_{i_n} \in \mathcal{C}$ υπάρχει $k_0 \in \{1, \dots, n\}$ ώστε $A_{i_k} \leq A_{i_{k_0}}$ για κάθε $k = 1, \dots, n$. Έτσι αφού $x_k \in A_{i_k} \subset A_{i_{k_0}}$ για $k = 1, \dots, n$ έχουμε $\{x_1, \dots, x_n\} \subset A_{i_{k_0}}$ και επειδή $A_{i_{k_0}} \in \mathcal{F}$ τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επομένως το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του X δηλαδή $A \in \mathcal{F}$. $\square$

Αποδεικνύεται επίσης ότι δυο οποιεσδήποτε βάσεις ενός διανυσματικού χώρου X είναι ισοπληθικές. ***Διάσταση*** του διανυσματικού χώρου X ονομάζεται η πληθικότητα μιας βάσης του και συμβολίζεται με $\dim X$. Επίσης ένας διανυσματικός χώρος X ονομάζεται απειροδιάστατος αν μία (και άρα κάθε) βάση του είναι απειροσύνολο.

Έστω τώρα $(X, \| \ \|)$ ένας διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με μια νόρμα. Όπως ήδη έχουμε επισημάνει στο Κεφάλαιο 1 η νόρμα $\| \ \|$ επάγει μια μετρική $\rho = \rho_{\| \ \|}$ στο χώρο X όπου $\rho(x, y) = \|x - y\|$ για κάθε $x, y \in X$. Η επόμενη πρόταση δίνει κάποιες ιδιότητες των ανοικτών σφαιρών σε ένα διανυσματικό χώρο με νόρμα $(X, \| \ \|)$.

Πρόταση 8.2. *Έστω $(X, \| \ \|)$ διανυσματικός χώρος με νόρμα. Τότε*

(i) (α) *Αν $x \in X$ και $\varepsilon > 0$ τότε $S(x, \varepsilon) = x + S(0, \varepsilon)$.*
(β) *Αν $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$ τότε $S(0, \lambda\varepsilon) = \lambda S(0, \varepsilon)$.*

(ii) *$X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} nS(0, \varepsilon)$ για κάθε $\varepsilon > 0$.*

Απόδειξη. (i)(α) Έστω $y \in S(x, \varepsilon)$. Θέτουμε $z = y - x$. Τότε $y = x + z$ και $\rho(z, 0) = \|z - 0\| = \|y - x\| = \rho(x, y) < \varepsilon$. Άρα $z \in S(0, \varepsilon)$ συνεπώς $y \in x + S(0, \varepsilon)$. Επομένως $S(x, \varepsilon) \subset x + S(0, \varepsilon)$. Αντίστροφα, έστω $y \in x + S(0, \varepsilon)$. Τότε $y = x + z$ με $z \in S(0, \varepsilon)$ δηλαδή $\|z\| = \|z - 0\| = \rho(z, 0) < \varepsilon$. Άρα $\rho(y, x) = \|y - x\| = \|z\| < \varepsilon$ οπότε $y \in S(x, \varepsilon)$. Επομένως $x + S(0, \varepsilon) \subset S(x, \varepsilon)$. Από τα προηγούμενα έπεται ότι $S(x, \varepsilon) = x + S(0, \varepsilon)$.
(β) Έστω $y \in S(0, \lambda\varepsilon)$. Θέτουμε $z = \frac{1}{\lambda}y$. Τότε $\rho(z, 0) = \|z - 0\| = \|z\| = \|\frac{1}{\lambda}y\| = \frac{1}{\lambda}\|y\| = \frac{1}{\lambda}\|y - 0\| = \frac{1}{\lambda}\rho(y, 0) < \frac{1}{\lambda}\lambda\varepsilon = \varepsilon$ οπότε $z \in S(0, \varepsilon)$. Επειδή $y = \lambda z$ έχουμε ότι $y \in \lambda S(0, \varepsilon)$. Αντίστροφα, έστω $y \in \lambda S(0, \varepsilon)$. Τότε υπάρχει $z \in S(0, \varepsilon)$ ώστε $y = \lambda z$. Άρα $\rho(y, 0) = \|y - 0\| = \|y\| = \|\lambda z\| = \lambda\|z\| = \lambda\|z - 0\| = \lambda\rho(z, 0) < \lambda\varepsilon$, δηλαδή $y \in S(0, \lambda\varepsilon)$. Επομένως $S(0, \lambda\varepsilon) = \lambda S(0, \varepsilon)$.
(ii) Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\|x\| < n\varepsilon$ (Αρχιμήδεια ιδιότητα). Άρα $\rho(x, 0) = \|x - 0\| = \|x\| < n\varepsilon$ δηλαδή $x \in S(0, n\varepsilon)$. Άρα από το (i)(β) $x \in S(0, n\varepsilon)$. Επομένως $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} nS(0, \varepsilon)$. $\square$

Πρόταση 8.3. *Έστω $(X, \| \ \|)$ διανυσματικός χώρος με νόρμα και Y γραμμικός υπόχωρος του X ώστε υπάρχει $y \in Y$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $S(y, \varepsilon) \subset Y$. Τότε $Y = X$.*

Απόδειξη. Αφού $S(y, \varepsilon) = y + S(0, \varepsilon)$ έπεται ότι $S(0, \varepsilon) \subset Y$. (Πράγματι, αν $z \in S(0, \varepsilon)$ τότε $y + z \in y + S(0, \varepsilon) = S(y, \varepsilon) \subset Y$ δηλαδή υπάρχει $y' \in Y$ ώστε $y + z = y'$. Άρα $z = y' - y \in Y$ αφού ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X).

Όμως τότε για κάθε $\lambda > 0$, $\lambda S(0, \varepsilon) \subset Y$ (πάλι επειδή ο Y είναι κλειστός ως προς τις πράξεις). Άρα $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} nS(0, \varepsilon) \subset Y$. $\square$

Αναφέρουμε εδώ χωρίς απόδειξη και την εξής πρόταση (η απόδειξη θα δοθεί στο μάθημα της Συναρτησιακής Ανάλυσης).

Πρόταση 8.4. *Έστω $(X, \| \ \|)$ διανυσματικός χώρος με νόρμα και Y γραμμικός υπόχωρος του X πεπερασμένης διάστασης. Τότε ο Y με τη μετρική $\rho_{\| \ \|}$ είναι πλήρης μετρικός χώρος και άρα ο $(Y, \| \ \|)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν $\dim Y = 1$ τότε το συμπέρασμα της πρότασης είναι άμεσο από το γεγονός ότι ο $(Y, \rho_{\| \|})$ και ο $(\mathbb{R}, \rho)$, όπου ρ είναι η συνήθης μετρική, είναι ισομετρικοί. Πράγματι, επιλέγοντας $y_0 \in Y$ με $\|y_0\| = 1$ το $\{y_0\}$ είναι βάση του Y και άρα για κάθε $y \in Y$ υπάρχει μοναδικό $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $y = \lambda y_0$. Αν ορίσουμε την απεικόνιση $T : (\mathbb{R}, \rho) \longrightarrow (Y, \rho_{\| \|})$ με $T(\lambda) = \lambda y_0$ η T είναι ισομετρία επί και άρα επειδή ο $(\mathbb{R}, \rho)$ είναι πλήρης, και ο $(Y, \rho_{\| \|})$ ως ισομετρικός με αυτόν θα είναι πλήρης (γιατί;).

Ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα $(X, \| \|)$ καλείται ***χώρος Banach*** αν ο X με τη μετρική που επάγεται από τη νόρμα είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Πρόταση 8.5. *Αν $(X, \| \|)$ είναι απειροδιάστατος χώρος Banach τότε κάθε Hamel βάση του X είναι υπεραριθμήσιμη.*

Απόδειξη. Έστω B μια Hamel βάση του X και ας υποθέσουμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι η B είναι αριθμήσιμη, $B = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ θέτουμε X_n τον γραμμικό χώρο που παράγεται από τα διανύσματα $x_1, \ldots, x_n$. Τότε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ και από Πρόταση 8.4 έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο X_n είναι κλειστός υπόχωρος του X αφού είναι πεπερασμένης διάστασης ($\dim X_n = n$). Από το θεώρημα Baire έπεται ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathrm{int}(X_{n_0}) \neq \emptyset$. Αρα ο υπόχωρος X_{n_0} περιέχει μια ανοικτή σφαίρα του X, συνεπώς από Πρόταση 8.3, $X = X_{n_0}$ και άρα $\dim X = n_0$, άτοπο διότι ο X είναι απειροδιάστατος. $\square$

Πόρισμα 8.6. *Έστω $(X, \| \|)$ απειροδιάστατος χώρος Banach και Y υπόχωρος του X ώστε ο U να έχει αριθμήσιμη Hamel βάση. Τότε ο Y δεν είναι κλειστός υπόχωρος του X.*

Απόδειξη. Πράγματι, αν ο Y ήταν κλειστός υπόχωρος του X τότε θα ήταν πλήρης (αφού ο X είναι πλήρης) και άρα ο $(Y, \| \|)$ θα ήταν χώρος Banach. Άρα κάθε βάση του Y θα ήταν υπεραριθμήσιμη, άτοπο. $\square$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Ο $c_{00}(\mathbb{N})$ με οποιαδήποτε νόρμα δεν είναι χώρος Banach. Πράγματι, ο $c_{00}(\mathbb{N})$ έχει αριθμήσιμη Hamel βάση, την $e_1, e_2, \ldots$. (Δές Κεφάλαιο 1.)

2. Ο διανυσματικός χώρος $C[a, b]$ με τη νόρμα $\| \|_\infty$

Όπως έχουμε ήδη δει στο Κεφάλαιο 1, το σύνολο $C[a, b]$ όλων των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων που ορίζονται στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, εφοδιασμένο με την πρόσθεση και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό οριζόμενα κατά σημείο απότελεί ένα διανυσματικό χώρο. Ο $C[a, b]$ εφοδιάζεται με τη νόρμα $\| \|_\infty$ όπου για κάθε $f \in C[a, b]$, $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : \ x \in [a, b]\}$ (δείτε το Κεφάλαιο 1 για την απόδειξη ότι η $\| \|$ είναι όντως νόρμα). Έτσι ο $C[a, b]$ είναι μετρικός χώρος με τη μετρική ρ_∞ που επάγει η νόρμα $\| \|_\infty$ (δηλ. $\rho_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty$).

Πρόταση 8.7. *Έστω $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στον $C[a, b]$ και $f \in C[a, b]$. Τότε*

(i) *Η ακολουθία $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στην f ως προς τη μετρική ρ_∞ αν και μόνο αν η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f δηλαδή*

$$f_n \stackrel{\rho_\infty}{\to} f \Leftrightarrow \text{ Η } (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ συγκλίνει ομοιόμορφα στην } f$$

(ii) *Η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στον $(C[a, b], \| \|_\infty)$ αν και μόνο αν η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy ακολουθία συναρτήσεων.*

Η απόδειξη είναι άμεση από τους ορισμούς (δείτε και Κεφάλαιο 7).

Θεωρημα 8.8. *Ο* $(C[a,b], \rho_\infty)$ *είναι πλήρης μετρικός χώρος και άρα ο* $(C[a,b], \| \, \|_\infty)$ *είναι χώρος Banach.*

Αποδειξη. Στο Κεφάλαιο 7 είδαμε ότι μια ομοιόμορφα Cauchy ακολουθία συνεχών συναρτήσεων ορισμένων σε ένα μετρικό χώρο συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση (Προτάσεις 7.9 και 7.7). Συνεπώς από Πρόταση 8.7 έχουμε ότι κάθε Cauchy ακολουθία στον $(C[a,b], \rho_\infty)$ είναι συγκλίνουσα. Επομένως ο $(C[a,b], \rho_\infty)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος. □

Προταση 8.9. *Ο* $C[a,b]$ *είναι απειροδιάστατος διανυσματικός χώρος και κάθε Hamel βάση του* $C[a,b]$ *είναι υπεραριθμήσιμη.*

Αποδειξη. Θεωρούμε το σύνολο συναρτήσεων $A = \{P_n : \; n = 0, 1, 2, \ldots\}$ όπου $P_0 = 1$ (δηλ. $P_0(x) = 1$ για κάθε $x \in [a,b]$) και $P_n(x) = x^n$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ και $x \in [a,b]$.

Προφανώς $A \subset C[a,b]$. Επίσης το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Πράγματι, αν $n_1 < \cdots < n_k$ φυσικοί και $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ ώστε $\lambda_1 P_{n_1} + \cdots + \lambda_k P_{n_k} = 0$ δηλαδή $\lambda_1 x^{n_1} + \cdots + \lambda_k x^{n_k} = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$ (αφού το ένα πολυώνυμο βαθμού m μπορεί να έχει το πολύ m ρίζες). Άρα το A είναι ένα άπειρο (αριθμήσιμο) γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $C[a,b]$, συνεπώς ο $C[a,b]$ είναι απειροδιάστατος. Από το Θεώρημα 8.8 ο $(C[a,b], \| \, \|_\infty)$ είναι χώρος Banach και άρα από Πρόταση 8.5 κάθε Hamel βάση του $C[a,b]$ είναι υπεραριθμήσιμη. □

Ένας γραμμικός υπόχωρος του $C[a,b]$ είναι ο χώρος των πολυωνύμων στο $[a,b]$ που συμβολίζεται με $P[a,b]$. Μερικές ιδιότητες του $P[a,b]$ περιγράφονται στην ακόλουθη πρόταση.

Προταση 8.10.
(i) *Ο* $P[a,b]$ *είναι ένας απειροδιάστατος γραμμικός υπόχωρος του* $C[a,b]$ *με αριθμήσιμη Hamel βάση.*
(ii) *Ο* $P[a,b]$ *δεν είναι κλειστός υπόχωρος του* $C[a,b]$.

Αποδειξη. (i) Είναι εύκολο να δειχθεί (δες και απόδειξη της Πρότασης 8.9) ότι το σύνολο $\{P_n : \; n = 0, 1, 2, \ldots\}$ όπου $P_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, \ldots$ και $P_0(x) = 1$ είναι Hamel βάση του $P[a,b]$.
(ii) Έπεται άμεσα από το Πόρισμα 8.6 αφού ο $P[a,b]$ έχει αριθμήσιμη Hamel. □

Στο σημείο αυτό αναφέρουμε χωρίς απόδειξη ένα από τα πλέον εντυπωσιακά θεωρήματα της Πραγματικής Ανάλυσης.

Θεωρημα 8.11 (Weierstrass). *Ο* $P[a,b]$ *είναι πυκνός υπόχωρος του* $(C[a,b], \rho_\infty)$ *(και άρα για κάθε συνεχή* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων* $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *στο* $C[a,b]$ *ώστε* $p_n \overset{\rho_\infty}{\rightrightarrows} f$*).*

Το Θεώρημα Weierstrass έχει και την εξής ενδιαφέρουσα συνέπεια.

Προταση 8.12. *Ο* $(C[a,b], \rho_\infty)$ *είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.*

Περιγραφη της Αποδειξης: Ας συμβολίσουμε με $P_{\mathbb{Q}}[a,b]$ το σύνολο όλων των πολυωνύμων του $P[a,b]$ που έχουν ρητούς συντελεστές. Τότε αποδεικνύεται ότι
(i) Το $P_{\mathbb{Q}}[a,b]$ είναι αριθμήσιμο.
(ii) Για κάθε $p \in P[a,b]$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $q \in P_{\mathbb{Q}}[a,b]$ ώστε $\|p - q\|_\infty < \varepsilon$.

Από το Θεώρημα Weierstrass και το (ii) έπεται ότι το σύνολο $P_{\mathbb{Q}}[a,b]$ είναι πυκνό στον $(C[a,b],\rho_\infty)$. Πράγματι, αν $f\in C[a,b]$ και $\varepsilon>0$ τότε από το Θεώρημα Weierstrass υπάρχει $p\in P[a,b]$ ώστε $\rho_\infty(f,p)<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Από το (ii) υπάρχει $q\in P_{\mathbb{Q}}[a,b]$ ώστε $\rho_\infty(p,q)<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Άρα από την τριγωνική ανισότητα έπεται ότι $\rho_\infty(f,q)<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Συνεπώς $\overline{P_{\mathbb{Q}}[a,b]}=C[a,b]$ και αφού το $P_{\mathbb{Q}}[a,b]$ είναι αριθμήσιμο έπεται το συμπέρασμα. □

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο δείχνοντας ότι ο $(C[a,b],\rho_\infty)$ είναι μοναδικός από άποψη ισομετρίας για όλα τα $a<b$ και μάλιστα ταυτίζεται με τον $(C[0,1],\rho_\infty)$.

Πρόταση 8.13. *Έστω $a,b\in\mathbb{R}$ με $a<b$. Τότε ο $(C[a,b],\rho_\infty)$ είναι ισομετρικός με τον $(C[0,1],\rho_\infty)$.*

Απόδειξη. Έστω $\phi:[0,1]\longrightarrow[a,b]$ με $\phi(t)=(1-t)a+tb$ για κάθε $t\in[0,1]$. Η ϕ είναι ομοιομορφισμός του $[0,1]$ με το $[a,b]$. Θέτουμε $T:(C[a,b],\rho_\infty)\longrightarrow(C[0,1],\rho_\infty)$ με $T(f)=f\circ\phi$ για κάθε $f\in C[a,b]$. Τότε η T είναι ισομετρία επί του $(C[0,1],\rho_\infty)$. Πράγματι για κάθε $f,g\in(C[a,b],\rho_\infty)$ έχουμε $\rho_\infty(Tf,Tg)=\|Tf-Tg\|_\infty=\sup\{|f(\phi(t))-g(\phi(t))|:t\in[0,1]\}=\sup\{|f(x)-g(x)|:\ x\in[a,b]\}=\|f-g\|_\infty=\rho_\infty(f,g)$ και επιπλέον η T είναι επί αφού αν $g\in C[0,1]$ τότε η $f=g\circ\phi^{-1}$ ανήκει στον $C[a,b]$ και $T(f)=g\circ\phi^{-1}\circ\phi=g$. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Η απεικόνιση T στην παραπάνω απόδειξη είναι επιπλέον και γραμμική δηλαδή $T(\lambda f+\mu g)=\lambda T(f)+\mu T(g)$ για κάθε $f,g\in C[a,b]$ και $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

3. Ισοσυνεχείς οικογένειες συναρτήσεων και το Θεώρημα Arzela.

Ορισμός 8.14. Έστω (X,ρ), (Y,d) μετρικοί χώροι, $\mathcal{F}$ μια οικογένεια συναρτήσεων από τον (X,ρ) στον (Y,d) και $x_0\in X$. Η $\mathcal{F}$ καλείται ***ισοσυνεχής στο*** x_0 αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε $x\in X$ με $\rho(x,x_0)<\delta$ και κάθε $f\in\mathcal{F}$ να ισχύει $d(f(x),f(x_0))<\varepsilon$.

Αν η $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχής σε κάθε $x\in X$ τότε η $\mathcal{F}$ καλείται ***ισοσυνεχής οικογένεια συναρτήσεων στο*** X.

Παρατήρηση. Αν η $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχής στο $x_0\in X$, τότε είναι άμεσο από τον ορισμό ότι κάθε $f\in\mathcal{F}$ είναι συνεχής στο x_0. Αλλά αν η $\mathcal{F}$ είναι οικογένεια συνεχών συναρτήσεων στο x_0 δεν έπεται κατ΄ ανάγκη ότι η $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχής στο x_0, διότι πρέπει το δ να μην εξαρτάται από την συνάρτηση $f\in\mathcal{F}$. (Δείτε και το δεύτερο Παράδειγμα παρακάτω.)

Παράδειγμα. Αν $X=Y=\mathbb{R}$ και ρ η συνήθης μετρική σου $\mathbb{R}$ τότε η οικογένεια $\mathcal{F}$ των σταθερών πραγματικών συναρτήσεων είναι ισοσυνεχής.

Παράδειγμα. Αν

$$\mathcal{F}=\{f_n:[0,2\pi]\to\mathbb{R}:f_n(x)=\sin nx, n=1,2,\dots\}$$

τότε η $\mathcal{F}$ είναι οικογένεια συνεχών συναρτήσεων αλλά δεν είναι ισοσυνεχής σε κανένα σημείο $x\in[0,2\pi]$. Πράγματι, έστω $x_0\in[0,2\pi]$ και $\varepsilon=\frac{1}{2}$. Αν η $\mathcal{F}$ ήταν ισοσυνεχής στο x_0 θα έπρεπε να υπήρχε $\delta>0$ ώστε για κάθε $x\in[0,2\pi]$ με $|x-x_0|<\delta$ να ισχύει ότι $|f_n(x_0)-f_n(x)|<\frac{1}{2}$ για κάθε $n=1,2,\dots$. Επιλέγουμε $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\frac{2\pi}{n_0}<\delta$. Έστω $n\geq n_0$. Τότε η f_n έχει περίοδο $\frac{2\pi}{n}<\delta$ και

$$[0,2\pi]=\cup_{k=1}^n\Big[\frac{(k-1)2\pi}{n},\ \frac{k\cdot 2\pi}{n}\Big].$$

Άρα υπάρχει $k \in \{1, \dots, n\}$ ώστε $x_0 \in [\frac{(k-1)2\pi}{n}, \ \frac{k \cdot 2\pi}{n}]$ και επιπλέον υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\frac{(k-1)\cdot 2\pi}{n}, \ \frac{k \cdot 2\pi}{n}]$ ώστε $f_n(x_1) = 1$, $f_n(x_2) = -1$. Όμως

$$|x_1 - x_0| < \frac{2\pi}{n} < \delta$$

και όμοια

$$|x_2 - x_0| < \frac{2\pi}{n} < \delta.$$

Άρα θα έπρεπε

$$\begin{aligned} 2 &= |f_n(x_1) - f_n(x_2)| \\ &\leq |f_n(x_1) - f_n(x_0)| + |f_n(x_2) - f_n(x_0)| \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \end{aligned}$$

άτοπο.

Ορισμος 8.15. Έστω (X, ρ), (Y, d) μετρικοί χώροι και $\mathcal{F}$ οικογένεια συναρτήσεων από τον X στον Y. Η $\mathcal{F}$ καλείται ***ομοιόμορφα ισοσυνεχής*** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x_1, x_2 \in X$ με $\rho(x_1, x_2) < \delta$ και για κάθε $f \in \mathcal{F}$ να ισχύει ότι $d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

Παρατηρηση. Από τον παραπάνω ορισμό, έχουμε ότι κάθε ομοιόμορφα ισοσυνεχής οικογένεια συναρτήσεων είναι και ισοσυνεχής στο X. Η διαφορά βρίσκεται στο ότι εδώ το δ δεν εξαρτάται από το σημείο x_0 αλλά μόνο από το ε. Έχουμε δηλαδή ένα αντίστοιχο φαινόμενο με αυτό της συνέχειας και της ομοιόμορφης συνέχειας μιας συνάρτησης. Παρατηρείστε επίσης ότι αν η $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχής, τότε κάθε $f \in \mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

Προταση 8.16. *Έστω (X, ρ), (Y, d) μετρικοί χώροι και $\mathcal{F}$ ένα πεπερασμένο σύνολο συναρτήσεων από τον X στον Y. Τότε*

(1) *Αν η $\mathcal{F}$ αποτελείται από συνεχείς συναρτήσεις, τότε η $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχής.*
(2) *Αν η $\mathcal{F}$ αποτελείται από ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις, τότε η $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχής.*

Αποδειξη. Έστω $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$. Για το (1), ας υποθέσουμε ότι $x_0 \in Q$ και $\varepsilon > 0$. Τότε για κάθε $k = 1, \dots, n$ υπάρχει $\delta_k > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$ αν $\rho(x, x_0) < \delta_k$ τότε $d(f_k(x), f_k(x_0)) < \varepsilon$. Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_k : k = 1, \dots, n\}$. Τότε $\delta > 0$ και για κάθε $k = 1, \dots, n$ και $x \in Q$ με $\rho(x, x_0) < \delta$ θα έχουμε $d(f_k(x), f_k(x_0)) < \varepsilon$. Αφού αυτό συμβαίνει για κάθε $x_0 \in X$ και κάθε $\varepsilon > 0$ η $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχής.

Για το (2), η απόδειξη είναι ανάλογη, και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη. □

Προταση 8.17. *Έστω (X, ρ), (Y, d) μετρικοί χώροι, και $\mathcal{F}$ ισοσυνεχής οικογένεια συναρτήσεων από τον X στον Y. Αν ο (X, ρ) είναι συμπαγής μετρικός χώρος, τότε η $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχής.*

Αποδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχής, για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\delta_x > 0$ ώστε για κάθε $y \in X$ με $\rho(y, x) < \delta_x$ και για κάθε $f \in \mathcal{F}$ να έχουμε ότι $d(f(y), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Εφόσον

$$X = \cup_{x \in X} S_\rho(x, \delta_x)$$

και X συμπαγής, από το Λήμμα Lebesgue (δείτε το κεφάλαιο για τους συμπαγείς μετρικούς χώρους), έχουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε υποσύνολο A του X με $\operatorname{diam} A < \delta$ να ισχύει ότι $A \subset S_\rho(x, \delta_x)$ για κάποιο $x \in X$. Συνεπώς, για κάθε $x_1, x_2 \in X$ με $\rho(x_1, x_2) < \delta$ υπάρχει $x \in X$ με $x_1, x_2 \in S_\rho(x, \delta_x)$, δηλαδή $\rho(x_1, x) < \delta_x$ και $\rho(x_2, x) < \delta_x$ οπότε και $d(f(x_1), f(x)) < \varepsilon/2$, $d(f(x_2), f(x)) < \varepsilon/2$ για κάθε $f \in \mathcal{F}$. Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in X$ με $\rho(x_1, x_2) < \delta$ και για κάθε $f \in \mathcal{F}$

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq d(f(x_1), f(x)) + d(f(x_2), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Παρατηρηση. Αντίστοιχο φαινόμενο είχαμε δεί και στις συνεχείς συναρτήσεις $f : (X, \rho) \to (Y, d)$ όπου (X, ρ) συμπαγής. Δηλαδή αν η f είναι συνεχής και ο (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. (Δείτε το Κεφάλαιο των συμπαγών μετρικών χώρων.)

Στα επόμενα θα ασχοληθούμε με ισοσυνεχείς οικογένειες συναρτήσεων από ένα κ-λειστό φραγμένο διάστημα $[a, b]$ του $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$.

Προταση 8.18. *Έστω $\mathcal{F} \subset C[a, b]$ ισοσυνεχής οικογένεια. Τότε η $\overline{\mathcal{F}}$ στον $(C[a, b], \rho_\infty)$ είναι ισοσυνεχής.*

Αποδειξη. Έστω $x_0 \in [a, b]$ και $\varepsilon > 0$. Αφού η $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in [a, b]$ με $|x - x_0| < \delta$ και κάθε $f \in \mathcal{F}$,

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/3.$$

Αν $g \in \overline{\mathcal{F}}$ τότε υπάρχει $f \in \mathcal{F}$ ώστε $f \in S_{\rho_\infty}(g, \varepsilon/3)$ δηλαδή

$$\|f - g\|_\infty = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\} < \varepsilon/3.$$

Αλλά τότε για κάθε $x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_0)| &\leq |g(x) - f(x)| + |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - g(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $g \in \overline{\mathcal{F}}$ και για κάθε $x \in [a, b]$ με $|x - x_0| < \delta$ θα έχουμε ότι $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$. Συνεπώς η κλειστότητα $\overline{\mathcal{F}}$ του $\mathcal{F}$ στον $(C[a, b], \rho_\infty)$ είναι ισοσυνεχής οικογένεια συναρτήσεων. □

Προταση 8.19. *Αν $K \subset (C[a, b], \rho_\infty)$ είναι συμπαγές, τότε το K είναι ισοσυνεχές.*

Αποδειξη. Έστω $x_0 \in [a, b]$ και $\varepsilon > 0$. Τότε

$$K \subset \cup_{f \in K} S_{\rho_\infty}(f, \varepsilon/3)$$

οπότε υπάρχουν $f_1, \ldots, f_n \in K$ ώστε

$$K \subset \cup_{i=1}^n S_{\rho_\infty}(f_i, \varepsilon/3).$$

Επειδή το $\{f_1, \ldots, f_n\}$ είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $C[a, b]$ από την Πρόταση 8.16, το $\{f_1, \ldots, f_n\}$ είναι ισοσυνεχές και συνεπώς υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $i = 1, \ldots, n$ και κάθε $x \in [a, b]$ με $|x - x_0| < \delta$ να έχουμε $|f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon/3$. Τότε για κάθε $f \in K$ και κάθε $x \in [a, b]$ με $\rho(x, x_0) < \delta$ ισχύει ότι $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ και άρα το K είναι ισοσυνεχές. Πράγματι. Έστω $f \in K$. Τότε υπάρχει $i \in \{1, \ldots, n\}$ ώστε $f \in S_{\rho_\infty}(f_i, \varepsilon/3)$. Συνεπώς, για κάθε $x \in [a, b]$ με $|x - x_0|, < \delta$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(x_0)| + |f_i(x_0) - f(x_0)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

Λημμα 8.20. *Αν $(f_n)_n$ ισοσυνεχής ακολουθία στον $(C[a,b],\rho_\infty)$ ώστε για κάθε ρητό $q \in \mathbb{Q}\cap[a,b]$ η ακολουθία $(f_n(q))_n$ είναι βασική στον $\mathbb{R}$, τότε η $(f_n)_n$ είναι βασική ακολουθία στον $(C[a,b],\rho_\infty)$.*

Αποδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Πρέπει να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$.

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \sup\{|f_n(y) - f_m(y)| : y \in [a,b]\} < \varepsilon \tag{1}$$

Αφού η $(f_n)_n$ είναι ισοσυνεχής ακολουθία, για κάθε $x \in [a,b]$ υπάρχει $\delta_x > 0$ ώστε για κάθε $y \in [a,b]$ με $|y-x| < \delta_x$ και για κάθε $n = 1, 2, \ldots,$

$$|f_n(y) - f_n(x)| < \varepsilon/6. \tag{2}$$

Έχουμε ότι $[a,b] \subset \cup_{x\in[a,b]}(x-\delta_x, x+\delta_x)$ και επειδή το $[a,b]$ είναι συμπαγές, υπάρχουν $N \in \mathbb{N}$ και $x_1, \ldots, x_N \in [a,b]$ ώστε

$$[a,b] \subset \cup_{i=1}^N (x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}). \tag{3}$$

Από την πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$, υπάρχουν ρητοί $q_1, \ldots, q_N \in \mathbb{Q}$ ώστε για κάθε $i = 1, \ldots, N$ $q_i \in (x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x-i})$. Επειδή για κάθε $i = 1, \ldots, N$ η $(f_n(q_i))_n$ είναι Cauchy στον $\mathbb{R}$ υπάρχει $n_i \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geq n_i$,

$$|f_n(q_i) - f_m(q_i)| < \varepsilon/6. \tag{4}$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_i : i = 1, \ldots, N\}$. Ισχυριζόμαστε ότι γι' αυτό το n_0 ικανοποιείται η (1). Πράγματι. Έστω $n, m \geq n_0$ και $y \in [a,b]$. Τότε υπάρχει $i \in \{1, \ldots, N\}$ ώστε $|y - x_i| < \delta_{x_i}$ (από την (3).) Τότε

$$\begin{aligned}
|f_n(y) - f_m(y)| \leq & |f_n(y) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f_n(q_i)| \\
& + |f_n(q_i) - f_m(q_i)| + |f_m(q_i) - f_m(x_i)| \\
& + |f_m(x_i) - f_m(y)| \\
< & \varepsilon/6 + \varepsilon/6 + \varepsilon/6 + \varepsilon/6 + \varepsilon/6 \\
< & 5\varepsilon/6
\end{aligned}$$

(από (2), (4) και τον ορισμό του n_0.)

Άρα για κάθε $n, m \geq n_0$,

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \sup\{|f_n(y) - f_m(y)| : y \in [a,b]\} \leq 5\varepsilon/6 < \varepsilon.$$

$\square$

Θεωρημα 8.21 (Arzela). *Έστω $K \subset (C[a,b],\rho_\infty)$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Το K είναι συμπαγές.*
(2) *Το K είναι κλειστό, φραγμένο και ισοσυνεχές.*

Αποδειξη. (1)$\Rightarrow$(2). Αφού το K είναι συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου, είναι κλειστό και φραγμένο. (δες Κεφάλαιο για συμπαγείς μετρικούς χώρους.) Από την Πρόταση 8.19 είναι και ισοσυνεχές.

(2)$\Rightarrow$(1). Αρκεί να δειχθεί ότι κάθε ακολουθία στο K έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο K. Πράγματι, έστω ακολουθία $(f_n)_n$ στο K. Επειδή το K είναι φραγμένο υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|f_n\|_\infty \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $D = \mathbb{Q}\cap[a,b]$. Τότε το D είναι αριθμήσιμο και από την Πρόταση 7.4 η $(f_n|D)_n$ έχει κατά σημείο συγκλίνουσα υπακολουθία. Έστω $(f_{k_n})_n$ η υπακολουθία της $(f_n)_n$ ώστε η $(f_{k_n}|D)_n$ είναι κατά σημείο συγκλίνουσα.

Αλλά τότε η $(f_{k_n}(q))_n$ είναι βασική για κάθε $q \in \mathbb{Q} \cap [a,b]$. Επειδή η (f_{k_n}) είναι ισοσυνεχής (ως υποσύνολο ισοσυνεχούς) από το Λήμμα 8.20 έχουμε ότι η (f_{k_n}) είναι βασική στον $(C[a,b], \rho_\infty)$. Από την πληρότητα του $(C[a,b], \rho_\infty)$ έχουμε ότι υπάρχει $f \in C[a,b]$ ώστε $f_{k_n} \overset{\rho_\infty}{\rightrightarrows} f$. Τέλος, επειδή το K είναι κλειστό έχουμε ότι $f \in K$. □

Παρατηρηση. 1. Ο χαρακτηρισμός της συμπάγειας μέσω ισοσυνεχών συναρτήσεων δεν μπορεί να επεκταθεί στην περίπτωση του γενικού μετρικού χώρου και στηρίζεται στο γεγονός ότι τα στοιχεία του μετρικού χώρου $C[a,b]$ είναι συνεχείς συναρτήσεις.

2. Το Θεώρημα Arzela ισχύει γενικότερα στον $(C(X), \rho_\infty)$ όπου (X,ρ) είναι συμπαγής μετρικός χώρος και

$$C(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ συνεχής}\}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δείξτε ότι το σύνολο $\mathrm{Lip}_M = \{f : (X,\rho) \to (Y,d) : \text{ Η } f \text{ είναι } M-\mathrm{Lipschitz}\}$ είναι ισοσυνεχές, για κάθε $M > 0$.

2. Δείξτε ότι το σύνολο

$$\mathcal{F} = \{F \in C[a,b] : \text{υπάρχει } f \in C[a,b] \text{ με } \|f\|_\infty \leq 1$$
$$\text{ώστε } F(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ για κάθε } x \in (a,b]\}$$

είναι ισοσυνεχές.

3. Έστω $f_n, f \in C[a,b]$, $n = 1,2,\ldots$ ώστε $f_n \overset{\rho_\infty}{\rightrightarrows} f$. Δείξτε ότι τα σύνολα $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{f\}$, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ισοσυνεχή.

4. Έστω $(X, \|\ \|)$ διανυσματικός χώρος με νόρμα, Y γραμμικός υπόχωρος του X. Αν $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι

$$\rho_{\|\ \|}(\lambda x, Y) = |\lambda| \rho_{\|\ \|}(x, Y).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Γινόμενα μετρικών χώρων

Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_k$ μια πεπερασμένη ακολουθία μη κενών συνόλων. Το καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{i=1}^{k} A_i$ ορίζεται με ανάλογο τρόπο με το $\mathbb{R}^k$. Δηλαδή

$$\prod_{i=1}^{k} A_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) : \ a_i \in A_i, \ i = 1, 2, \ \ldots, k \ \}$$

Τα καρτεσιανά γινόμενα συνόλων είναι ένα από τα βασικά εργαλεία δημιουργίας νέων συνόλων. Με ανάλογο τρόπο ορίζεται το άπειρο γινόμενο συνόλων. Έτσι αν $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία μη κενών συνόλων τότε

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} : \ a_i \in A_i, \ i = 1, 2, \ \ldots \}$$

δηλαδή τα στοιχεία του γινομένου $\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$ είναι οι ακολουθίες $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ που ικανοποιούν τον περιορισμό ότι $a_i \in A_i$. Ο ορισμός του απείρου γινομένου επεκτείνεται σε γενικότερες οικογένειες $(A_i)_{i\in I}$ και έτσι

$$\prod_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} : \ a_i \in A_i \ \ \forall i \in I \ \}.$$

Στην περίπτωση που $A_i = A$ για κάθε $i \in I$ το γινόμενο $\prod_{i\in I} A_i$ συμβολίζεται με A^I. Έτσι για παράδειγμα $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ είναι το σύνολο όλων των ακολουθιών πραγματικών αριθμών.

Ο στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να μελετηθούν μετρικές που ορίζονται σε πεπερασμένα ή άπειρα αριθμήσιμα καρτεσιανά γινόμενα μετρικών χώρων.

1. Πεπερασμένα γινόμενα μετρικών χώρων

Ορισμος 9.1. Έστω $(X_i, \rho_i)_{i=1}^{k}$ μια πεπερασμένη ακολουθία μετρικών χώρων. Μια μετρική ρ ορισμένη στο καρτεσιανό γινόμενο $X = \prod_{i=1}^{k} X_i$ λέγεται ***μετρική γινόμενο*** αν για κάθε ακολουθία $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X, $\vec{x}_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k)$ και κάθε $\vec{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in X$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) $\vec{x}_n \xrightarrow{\rho} \vec{x}$

(β) $x_n^i \xrightarrow{\rho_i} x^i$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$.

Δηλαδή η σύγκλιση της $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\vec{x}$ προσδιορίζει αλλά και προσδιορίζεται από την κατά συντεταγμένη σύγκλιση της.

Παρατηρησεις. (1). Όπως έχουμε δει στον $\mathbb{R}^k = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{R}_i$ με $\mathbb{R}_i = \mathbb{R}$ με την ευκλείδεια μετρική ικανοποιείται ο προηγούμενος ορισμός άρα η ευκλείδεια μετρική είναι μια μετρική γινόμενο.

(2). Επειδή η σύγκλιση ακολουθιών παραμένει αναλλοίωτη σε ισοδύναμες μετρικές έπεται ότι αν η ρ είναι μετρική γινόμενο στον $X = \prod_{i=1}^{k} X_i$ και η ρ' είναι μετρική στον X ισοδύναμη με τη ρ τότε και η ρ' είναι μετρική γινόμενο. Με την ίδια λογική αν η ρ είναι μετρική γινόμενο για τους $(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2), \ldots, (X_k, \rho_k)$ θα είναι επίσης μετρική γινόμενο για τους $(X_1, \rho_1'), (X_2, \rho_2'), \ldots, (X_k, \rho_k')$ όπου ρ_i' είναι μετρική στον X_i ισοδύναμη με τη ρ_i για $i = 1, 2, \ldots, k$.

Αν $(A_i)_{i\in I}$ είναι οικογένεια μη κενών συνόλων και $A = \prod_{i\in I} A_i$ το καρτεσιανό τους γινόμενο τότε για κάθε $i_0 \in I$ ορίζεται η προβολή στην i_0 συντεταγμένη που είναι η συνάρτηση

$$\pi_{i_0} : \prod_{i\in I} A_i \longrightarrow A_{i_0}$$

με $\pi_{i_0}((a_i)_{i\in I}) = a_{i_0}$. Δηλαδή η π_{i_0} επιλέγει από ένα στοιχείο του $\prod_{i\in I} A_i$ την i_0 συντεταγμένη του.

Πρόταση 9.2. *Έστω $(X_i, \rho_i)_{i=1}^{k}$ οικογένεια μετρικών χώρων, $X = \prod_{i=1}^{k} X_i$ και ρ μια μετρική γινόμενο στον X. Τότε*

(1) *Η $\pi_i : X \longrightarrow X_i$ είναι συνεχής συνάρτηση για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$.*
(2) *Αν (Y, d) είναι μετρικός χώρος και $f : Y \longrightarrow X$ συνάρτηση, τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*
  (α) *Η f είναι συνεχής.*
  (β) *Η $\pi_i \circ f : Y \longrightarrow X_i$ είναι συνεχής για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$.*

Απόδειξη. (1) Έστω $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X και $\vec{x} \in X$ ώστε $\vec{x}_n \xrightarrow{\rho} \vec{x}$. Από τον ορισμό της μετρικής γινόμενο έπεται ότι $x_n^i \longrightarrow x^i$ για $i = 1, 2, \ldots, k$ όπου x_n^i, x^i είναι η i συντεταγμένη των $\vec{x}_n$ και $\vec{x}$ αντίστοιχα. Αλλά $\pi_i(\vec{x}_n) = x_n^i$ και $\pi_i(\vec{x}) = x^i$ και έτσι $\pi_i(\vec{x}_n) \xrightarrow{\rho_i} \pi_i(\vec{x})$, άρα από την αρχή της μεταφοράς έπεται ότι η π_i είναι συνεχής για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$.

(2) (α)⇒(β) Είναι άμεσο από το (1) και το γεγονός ότι η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής.
(β)⇒(α) Έστω $f : (Y, d) \longrightarrow (X, \rho)$ ώστε η $\pi_i \circ f : Y \longrightarrow X_i$ να είναι συνεχής για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$. Έστω $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον Y και $y \in Y$ ώστε $y_n \xrightarrow{d} y$. Θα δείξουμε ότι $f(y_n) \xrightarrow{\rho} f(y)$ και από την αρχή της μεταφοράς έπεται το ζητούμενο. Πράγματι, αν $f(y_n)(i)$ συμβολίζει την i συντεταγμένη του $f(y_n)$ και $f(y)(i)$ την i συντεταγμένη του $f(y)$ τότε $f(y_n)(i) = \pi_i \circ f(y_n)$ και $f(y)(i) = \pi_i \circ f(y)$. Άρα, αφού από τη συνέχεια της $\pi_i \circ f : Y \longrightarrow X_i$ για $i = 1, 2, \ldots, k$ έπεται ότι $\pi_i \circ f(y_n) \xrightarrow{\rho_i} \pi_i \circ f(y)$, θα έχουμε $f(y_n)(i) \xrightarrow{\rho_i} f(y)(i)$ για $i = 1, 2, \ldots, k$. Από τον ορισμό της μετρικής γινόμενο έπεται ότι $f(y_n) \xrightarrow{\rho} f(y)$, άρα η f είναι συνεχής. □

Πρόταση 9.3 (Ύπαρξη μετρικής γινόμενο). *Έστω $(X_i, \rho_i)_{i=1}^{k}$ οικογένεια μετρικών χώρων. Για $\vec{x}, \vec{y} \in X = \prod_{i=1}^{k} X_i$ ορίζουμε*

$$\rho^1(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(\vec{x}(i), \vec{y}(i)).$$

Τότε η ρ^1 είναι μια μετρική γινόμενο.

Απόδειξη. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η ρ^1 είναι μετρική και ότι ικανοποιεί τις ιδιότητες της μετρικής γινόμενο. $\square$

Παρατηρήσεις. (1). Οποιαδήποτε άλλη μετρική γινόμενο στον X θα είναι ισοδύναμη με τη ρ^1. Άλλες (ισοδύναμες) μετρικές γινόμενο είναι η ρ^∞ και ρ^p, $1 < p < \infty$ όπου

$$\rho^\infty(\vec{x}, \vec{y}) = \max_{1 \le i \le k} \rho_i(\vec{x}(i), \vec{y}(i))$$

και

$$\rho^p(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum_{i=1}^{k} \rho_i(\vec{x}(i), \vec{y}(i))^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(2). Είναι εύκολο να δειχθεί ότι για $\vec{x} \in X$, $\varepsilon > 0$ η ανοικτή σφαίρα $S_{\rho^\infty}(\vec{x}, \varepsilon)$ περιγράφεται από την ισότητα

$$S_{\rho^\infty}(\vec{x}, \varepsilon) = \prod_{i=1}^{k} S_{\rho_i}(\vec{x}(i), \varepsilon).$$

Αυτή η ιδιότητα συνεπάγεται ότι για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$ η π_i είναι ανοικτή απεικόνιση. (Μια απεικόνιση $f : (X, \rho) \longrightarrow (Y, d)$ λέγεται ανοικτή αν για κάθε $V \subset X$ ανοικτό το $f[V]$ είναι ανοικτό στον Y.) Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι οι συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ μετρικών χώρων δεν είναι κατ΄ ανάγκη ανοικτές.

(3). Μια άλλη συνέπεια της παραπάνω περιγραφής της $S_{\rho^\infty}(\vec{x}, \varepsilon)$ είναι ότι τα ανοικτά σύνολα της μορφής $\prod_{i=1}^{k} V_i$ με $V_i \subset X_i$ ανοικτό ορίζουν μια βάση ανοικτών περιοχών για την τοπολογία της οποιασδήποτε μερικής γινόμενο.

Θεώρημα 9.4. *Έστω $(X_i, \rho_i)_{i=1}^k$ οικογένεια συμπαγών μετρικών χώρων και ρ μια μετρική γινόμενο στον $X = \prod_{i=1}^{k} X_i$. Τότε ο (X, ρ) είναι επίσης συμπαγής.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με χρήση του θεμελιώδη χαρακτηρισμού μετρικών χώρων (Θεώρημα 6.16). Θα δείξουμε δηλαδή ότι κάθε ακολουθία $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Έστω $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X, $\vec{x}_n = (x_n(1), \ldots, x_n(k))$. Τότε υπάρχει $M_1 \subset \mathbb{N}$ άπειρο και $x(1) \in X_1$ ώστε $(x_n(1))_{n\in M_1} \xrightarrow{\rho_1} x(1)$. Με πεπερασμένη επαγωγή επιλέγουμε $M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_k$ άπειρα υποσύνολα του $\mathbb{N}$ και $x(i) \in X_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ ώστε $(x_n(i))_{n\in M_i} \xrightarrow{\rho_i} x(i)$. Παρατηρούμε ότι $(x_n(i))_{n\in M_k} \xrightarrow{\rho_i} x(i)$ για $i = 1, 2, \ldots, k$. Θέτουμε $\vec{x} = (x(1), x(2), \ldots, x(k))$ και από τον ορισμό της μετρικής γινόμενο προκύπτει ότι $(\vec{x}_n)_{n\in M_k} \xrightarrow{\rho} \vec{x}$. $\square$

2. Άπειρα αριθμήσιμα γινόμενα μετρικών χώρων

Αν $(A_i)_{i\in I}$ είναι οικογένεια μη κενών συνόλων και $x \in \prod_{i\in I} A_i$, $x = (a_i)_{i\in I}$ θα συμβολίζουμε με $x(i)$ το a_i δηλαδή την i συντεταγμένη του x.

Ορισμός 9.5. Έστω $(X_i, \rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μετρικών χώρων. Μια μετρική ρ στον $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ θα λέγεται μετρική γινόμενο (για την ακολουθία $(X_i, \rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$) αν για κάθε ακολουθία $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X και $\vec{x} \in X$ τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α) $\vec{x}_n \xrightarrow{\rho} \vec{x}$

(β) $\vec{x}_n(i) \xrightarrow{\rho_i} \vec{x}(i)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots$.

Παρατηρήστε ότι ο ορισμός αυτός αποτελεί τη φυσιολογική γενίκευση του αντίστοιχου ορισμού (Ορισμός 9.1) για πεπερασμένα γινόμενα μετρικών χώρων.

Πρόταση 9.6. *Αν $(X_i, \rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία μετρικών χώρων, d_i μετρική στον X_i ισοδύναμη της ρ_i για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και ρ μετρική γινόμενο για την ακολουθία $(X_i, d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ τότε η ρ είναι μετρική γινόμενο και για την ακολουθία $(X_i, \rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη. Είναι άμεσο από τον ορισμό και το γεγονός ότι οι ισοδύναμες μετρικές σε ένα μετρικό χώρο διατηρούν τη σύγκλιση ακολουθιών. $\square$

Θεώρημα 9.7. *Για κάθε ακολουθία $(X_i, \rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ μετρικών χώρων υπάρχει μετρική γινόμενο στον $X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$.*

Απόδειξη. Για κάθε $i \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε στον X_i μια μετρική d_i ισοδύναμη της ρ_i ώστε $d_i(x, y) \leq 1$ για κάθε $x, y \in X_i$ (π.χ. $d_i(x, y) = \min\{\rho_i(x, y), 1\}$, $\forall x, y \in X_i$ (βλ. Λήμμα 3.33 και Θεώρημα 3.34). Ορίζουμε $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ με

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d_i(\vec{x}(i), \vec{y}(i)).$$

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η ρ είναι μετρική στον X (Άσκηση). Δείχνουμε ότι η ρ είναι μετρική γινόμενο για την ακολουθία ακολουθία $(X_i, d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ οπότε, σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, θα είναι μετρική γινόμενο και για την ακολουθία $(X_i, \rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Έστω $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X, $\vec{x} \in X$ και θα δείξουμε την ισοδυναμία των (α) και (β) στον ορισμό 9.5. Δείχνουμε πρώτα ότι (α)$\Rightarrow$(β) δηλαδή υποθέτουμε ότι $\vec{x}_n \xrightarrow{\rho} \vec{x}$ και θα δείξουμε ότι $\vec{x}_n(i) \xrightarrow{d_i} \vec{x}(i)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots$. Έστω $i \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι $d_i(\vec{x}_n(i), \vec{y}_n(i)) \leq 2^i \rho(\vec{x}_n, \vec{y}_n)$ για κάθε n και αφού $\rho(\vec{x}_n, \vec{x}) \longrightarrow 0$ έπεται ότι $d_i(\vec{x}_n(i), \vec{x}(i)) \longrightarrow 0$ συνεπώς $\vec{x}_n(i) \xrightarrow{d_i} \vec{x}(i)$.

Αντιστρόφως, για να δείξουμε ότι (β)$\Rightarrow$(α) υποθέτουμε ότι $\vec{x}_n(i) \xrightarrow{d_i} \vec{x}(i)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots$ και θα αποδείξουμε ότι $\vec{x}_n \xrightarrow{\rho} \vec{x}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Αφού $d_i(\vec{x}_n(i), \vec{x}(i)) \longrightarrow 0$ για $i = 1, 2, \ldots, k$ μπορούμε να επιλέξουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $d_i(\vec{x}_n(i), \vec{x}(i)) < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$. Έτσι για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\rho(\vec{x}_n, \vec{x}) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} d_i((\vec{x}_n(i), \vec{x}(i)) + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d_i((\vec{x}_n(i), \vec{x}(i)) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^k} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Επομένως $\vec{x}_n \xrightarrow{\rho} \vec{x}$. $\square$

Παρατηρήσεις. (1). Από το προηγούμενο θεώρημα για $(X_i, \rho_i) = (\mathbb{R}, \rho)$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ όπου ρ είναι η συνήθης μετρική στο $\mathbb{R}$ εξασφαλίζεται η ύπαρξη μετρικής γινομένου στον $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(2). Έστω $(X_i, \rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μετρικών χώρων και ρ μια μετρική γινόμενο στον $X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$. Θεωρούμε για κάθε $i \in \mathbb{N}$ ένα μη κενό υποσύνολο A_i του X_i και $d_i = \rho_{i|A_i \times A_i}$ (δηλαδή d_i είναι η σχετική μετρική που επάγεται στο A_i από τη ρ_i). Θέτοντας $A = \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$ η $d = \rho_{|A\times A}$ (δηλαδή η σχετική μετρική που επάγεται στο A από τη ρ) είναι μετρική γινόμενο για την ακολουθία μετρικών χώρων $(A_i, d_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

(3). Συνέπεια των (1),(2) είναι ότι ο περιορισμός μιας μετρικής γινόμενο του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ στο $[0,1]^{\mathbb{N}}$ είναι μετρική γινόμενο και ο περιορισμός μιας μετρικής γινόμενο του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ στο $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ είναι επίσης μετρική γινόμενο.

Η επόμενη πρόταση είναι η αντίστοιχη της πρότασης 9.2 για άπειρα γινόμενα μετρικών χώρων.

Πρόταση 9.8. *Έστω $(X_i,\rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μετρικών χώρων, $X=\prod\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i$ και ρ μια μετρική γινόμενο στον X. Τότε*

(1) *Η $\pi_i : X \longrightarrow X_i$ είναι συνεχής συνάρτηση για κάθε $i=1,2,\ldots$.*
(2) *Αν (Y,d) είναι μετρικός χώρος και $f : Y \longrightarrow X$ συνάρτηση, τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*
   (α) *Η f είναι συνεχής.*
   (β) *Η $\pi_i \circ f : Y \longrightarrow X_i$ είναι συνεχής για κάθε $i=1,2,\ldots$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ανάλογη της απόδειξης της πρότασης 9.2 γι' αυτό και παραλείπεται. □

Πρόταση 9.9. *Αν $(X_i,\rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία συμπαγών μετρικών χώρων και ρ μετρική γινόμενο στον $X=\prod\limits_{i=1}^{k} X_i$ τότε και ο (X,ρ) είναι συμπαγής μετρικός χώρος.*

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε ακολουθία στον (X,ρ) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (Θεώρημα 6.16). Έστω $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X. Η $(\vec{x}_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στο συμπαγή μετρικό χώρο (X_1,ρ_1) και άρα μπορούμε να επιλέξουμε M_1 άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ και $x(1)\in X_1$ ώστε $(\vec{x}_n(1))_{n\in M_1} \xrightarrow{\rho_1} x(1)$. Λόγω της συμπάγειας του μετρικού χώρου (X_2,ρ_2) η ακολουθία $(\vec{x}_n(2))_{n\in M_1}$ του X_2 θα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία και άρα υπάρχει M_2 άπειρο υποσύνολο του M_1 και $x(2)\in X_2$ ώστε $(\vec{x}_n(2))_{n\in M_2} \xrightarrow{\rho_2} x(2)$. Επαγωγικά κατασκευάζουμε $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \cdots \supset M_i \supset M_{i+1} \supset \cdots$ και $x(i)\in X_i$, $i=1,2,\ldots$ ώστε $(\vec{x}_n(i))_{n\in M_i} \xrightarrow{\rho_i} x(i)$ για κάθε $i\in\mathbb{N}$.

Θεωρούμε M ένα διαγώνιο σύνολο της φθίνουσας ακολουθίας $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ δηλαδή $M=\{m_1<m_2<m_3<\cdots\}$ με $m_i\in M_i$ για $i=1,2,\ldots$. Για κάθε $i\in\mathbb{N}$ η ακολουθία $(\vec{x}_n(i))_{n\in M}$, εξαιρώντας τους πρώτους $i-1$ όρους της είναι υπακολουθία της $(\vec{x}_n(i))_{n\in M_i}$ και άρα $(\vec{x}_n(i))_{n\in M} \xrightarrow{\rho_i} x(i)$. Έτσι, θεωρώντας το $\vec{x}=(x(i))_{i\in\mathbb{N}}\in X$, και την υπακολουθία $(\vec{x}_n)_{n\in M}$ της $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχουμε $(\vec{x}_n)_{n\in M} \xrightarrow{\rho} \vec{x}$.

Επομένως ο (X,ρ) είναι συμπαγής. □

Πρόταση 9.10. *Έστω (X,ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $D=\{x_i : i\in\mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X. Για κάθε $i\in\mathbb{N}$ θεωρούμε τη συνάρτηση $f_i : X\longrightarrow\mathbb{R}$ με $f_i(x)=\rho(x,x_i)$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα για κάθε ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X.*

(1) $y_n \xrightarrow{\rho} y$
(2) $f_i(y_n)\longrightarrow f_i(y)$ για κάθε $i=1,2,\ldots$.

Απόδειξη. (1)⇒(2) Είναι άμεσο από το γεγονός ότι κάθε f_i, $i=1,2,\ldots$ είναι συνεχής (πρόταση 2.14) και την αρχή της μεταφοράς.

(2)⇒(1) Υποθέτουμε ότι $f_i(y_n)\longrightarrow f_i(y)$ για κάθε $i=1,2,\ldots$ και θα δείξουμε ότι $y_n \xrightarrow{\rho} y$. Έστω $\varepsilon>0$. Εφόσον το D είναι πυκνό υποσύνολο του X μπορούμε να επιλέξουμε $i_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\rho(y,x_{i_0})<\dfrac{\varepsilon}{3}$ δηλαδή $f_{i_0}(y)<\dfrac{\varepsilon}{3}$. Αφού $f_{i_0}(y_n)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_{i_0}(y)$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$

ώστε $|f_{i_0}(y_n) - f_{i_0}(y)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ για κάθε $n \geq n_0$. Έτσι για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \rho(y_n, y) &\leq \rho(y_n, x_{i_0}) + \rho(x_{i_0}, y) < f_{i_0}(y_n) + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq f_{i_0}(y) + |f_{i_0}(y_n) - f_{i_0}(y)| + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Επομένως $y_n \xrightarrow{\rho} y$. □

Ορισμος 9.11. Δυο μετρικοί χώροι (X, ρ), (Y, d) λέγονται ***ομοιομορφικοί*** αν υπάρχει $f : (X, \rho) \longrightarrow (Y, d)$ 1–1, επί και αμφισυνεχής (δηλαδή η f και η f^{-1} είναι συνεχής).

Αν δυο μετρικοί χώροι είναι ομοιομορφικοί τότε έχουν ακριβώς την ίδια δομή. Η σχέση ομοιομορφισμού μεταξύ μετρικών χώρων είναι σχέση ισοδυναμίας στην κλάση όλων των μετρικών χώρων και ταξινομεί τους μετρικούς χώρους.

Αν (X, ρ) είναι μετρικός ώρος και d μετρική στον X ισοδύναμη της ρ τότε οι (X, ρ) και (X, d) είναι ομοιομορφικοί (μέσω της ταυτοτικής απεικόνισης).

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι όλοι οι διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι μπορούν να θεωρηθούν ως υπόχωροι του $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Θεωρημα 9.12. *Αν ο (X, ρ) είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος τότε είναι ομοιομορφικός με έναν υπόχωρο του $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ (με τη μετρική γινόμενο).*

Αποδειξη. Μπορούμε να θεωρήσουμε, αντικαθιστώντας τη μετρική ρ με κατάλληλη ισοδύναμη μετρική της, ότι $\rho(x, y) \leq 1$ για κάθε $x, y \in X$. Έστω $D = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X και $f_i : X \longrightarrow [0, 1]$ με $f_i(y) = \rho(y, x_i)$, $y \in X$ για $i = 1, 2, \ldots$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F : X \longrightarrow [0, 1]^{\mathbb{N}}$ με $F(y) = (f_i(y))_{i \in \mathbb{N}}$. Παρατηρούμε καταρχήν ότι η F είναι 1–1. Πράγματι έστω $x, y \in X$ με $x \neq y$ και $\varepsilon = \rho(x, y) > 0$. Επιλέγουμε $i_0 \in \mathbb{N}$ με $\rho(x, x_{i_0}) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Τότε $\rho(y, y_{i_0}) > \dfrac{\varepsilon}{2}$ και άρα $f_{i_0}(y) > \dfrac{\varepsilon}{2} > f_{i_0}(x)$ συνεπώς $f_{i_0}(y) \neq f_{i_0}(x)$, άρα $F(x) \neq F(y)$ επομένως η F είναι 1–1.

Απομένει να δειχθεί ότι η $F : X \longrightarrow F[X] (\subset [0, 1]^{\mathbb{N}})$ είναι αμφισυνεχής. Κατ΄ αρχάς παρατηρούμε ότι $\pi_i \circ F = f_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, όπου π_i είναι η προβολή στην i συντεταγμένη. Έστω τώρα ακολουθία $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στον X. Είναι $y_n \xrightarrow{\rho} y$ αν και μόνο αν $f_i(y_n) \longrightarrow f_i(y)$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ (σύμφωνα με την πρόταση 9.10), δηλαδή αν και μόνο αν $\pi_i \circ F(y_n) \longrightarrow \pi_i \circ F(y)$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, που συμβαίνει αν και μόνο αν $F(y_n) \longrightarrow F(y)$ στη μετρική γινόμενο του $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. Επομένως η $F : X \longrightarrow F[X]$ είναι αμφισυνεχής. □

3. Το σύνολο Cantor

Υπενθυμίζουμε ότι με $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ συμβολίζεται το σύνολο

$$\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}} : \varepsilon_i = 0 \text{ ή } \varepsilon_i = 1, \ \forall i \in \mathbb{N}\}$$

δηλαδή το σύνολο όλων των ακολουθιών από 0 και 1.

Παρατηρησεις. (1) Το σύνολο $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ αναπαριστά κατά φυσιολογικό τρόπο το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ των φυσικών αριθμών. Πράγματι, η συνάρτηση

$$\begin{aligned} F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) &\longrightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \\ \text{με} \quad F(A) &= \chi_A \end{aligned}$$

είναι εύκολο να δειχθεί (Άσκηση) ότι είναι 1–1 και επί (υπενθυμίζουμε ότι χ_A συμβολίζει τη χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου A, δηλαδή $\chi_A : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$ με $\chi_A(n) = 1$ αν $n \in A$ και $\chi_A(n) = 0$ αν $n \in \mathbb{N} \setminus A$).

(2) Το σύνολο $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ παίζει σημαντικό ρόλο στη Θεωρία Πιθανοτήτων καθώς αναπαριστά όλα τα δυνατά αποτελέσματα μιας άπειρης αριθμήσιμης εκτέλεσης επαναλήψεων ενός πειράματος με δύο δυνατά ενδεχόμενα. Για παράδειγμα αν 0 και 1 αναπαριστούν τα δύο δυνατά αποτελέσματα σε μια ρίψη νομίσματος τότε κάθε ακολουθία $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ αναπαριστά ένα πιθανό αποτέλεσμα από την άπειρη διαδοχική εκτέλεση του πειράματος και αντίστροφα κάθε κάθε πιθανό αποτέλεσμα αντιστοιχεί σε μια τέτοια ακολουθία.

(3) Θα δείξουμε παρακάτω ότι το $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ με οποιαδήποτε μετρική γινόμενο που επάγεται από το $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ είναι ομοιομορφικό με το σύνολο Cantor που θα οριστεί στη συνέχεια.

Πρόταση 9.13. *Στο χώρο $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ορίζουμε*

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} 0 & \text{αν } \vec{x} = \vec{y} \\ \dfrac{1}{i_0} & \text{αν } \vec{x} \neq \vec{y} \text{ και } i_0 = \min\{i : \ \vec{x}(i) \neq \vec{y}(i)\}. \end{cases}$$

Τότε

(1) *Η d είναι μετρική γινόμενο στον $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.*

(2) *Για κάθε ακολουθία $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ και $\vec{x} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

  (α) $\vec{x}_n \xrightarrow{d} \vec{x}$.

  (β) *Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\vec{x}_n(i) = \vec{x}(i)$ για $i = 1, 2, \ldots, k$.*

Απόδειξη. Άσκηση. □

Αν $s = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ είναι μια πεπερασμένη ακολουθία με $\varepsilon_i \in \{0,1\}$ για $i = 1, \ldots, k$ θα συμβολίζουμε με $|s|$ το μήκος της, δηλαδή $|s| = k$. Για s, t πεπερασμένες ακολουθίες από 0 και 1, $s = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{|s|})$, $t = (\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_{|t|})$, θα γράφουμε $s \preceq t$ αν η s είναι αρχικό κομμάτι της t, δηλαδή αν $|s| \leq |t|$ και $\varepsilon_i = \varepsilon'_i$ για $i = 1, \ldots, |s|$. Επίσης αν $s = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ είναι μια πεπερασμένη ακολουθία από 0 και 1 και $\varepsilon_{k+1} \in \{0,1\}$ θα συμβολίζουμε με $s^\frown\varepsilon_{k+1}$ την ακολουθία $s = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, \varepsilon_{k+1})$.

Προχωράμε τώρα στον ορισμό του συνόλου Cantor για κάθε s πεπερασμένη ακολουθία από 0 και 1 θα ορίσουμε ένα κλειστό υποδιάστημα K_s του $[0,1]$.

Στο πρώτο βήμα θέτουμε

$$K_{(0)} = [0, \frac{1}{3}], \qquad K_{(1)} = [\frac{2}{3}, 1]$$

και

$$C_1 = K_{(0)} \cup K_{(1)}.$$

Στο δεύτερο βήμα θέτουμε

$$K_{(00)} = [0, \frac{1}{9}], \quad K_{(01)} = [\frac{1}{9}, \frac{1}{3}], \quad K_{(10)} = [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}], \quad K_{(11)} = [\frac{8}{9}, 1]$$

και

$$C_2 = K_{(00)} \cup K_{(01)} \cup K_{(10)} \cup K_{(11)}.$$

Παρατηρούμε ότι οι δείκτες είναι όλες οι ακολουθίες μήκους 2 από 0 και 1.

Ας υποθέσουμε ότι έχουν οριστεί τα σύνολα K_s για όλες τις ακολουθίες από 0 και 1 με $|s| \leq k$ ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες (α) Το K_s είναι κλειστό υποδιάστημα του $[0,1]$ μήκους $\frac{1}{3^{|s|}}$.

(β) Το s_1 είναι αρχικό διάστημα του s_2 αν και μόνο αν $K_{s_2} \subset K_{s_1}$.

(γ) Αν $|s_1| = |s_2|$ με $s_1 \neq s_2$ τότε $K_{s_1} \cap K_{s_2} = \emptyset$

και ότι $C_j = \bigcup_{|s|=j} K_s$ για $j = 1, \ldots, k$

Ορίζουμε τώρα το K_t για κάθε ακολουθία t από 0 και 1 μήκους $k+1$. Κάθε τέτοια t είναι της μορφής $s^\frown 0$ ή $s^\frown 1$ για κάποια s με $|s| = k$. Έτσι, αν $K_s = [a,b]$ ορίζουμε

$$K_{s^\frown 0} = [a, a + \frac{1}{3}(b-a)], \quad \text{και} \quad K_{s^\frown 1} = [a + \frac{2}{3}(b-a), b].$$

Έτσι τώρα έχουν οριστεί τα K_t για t με $|t| \leq k+1$ και είναι άμεσο ότι ικανοποιούνται οι ιδιότητες (α),(β),(γ). Θέτουμε

$$C_{k+1} = \bigcup_{|t|=k+1} K_t.$$

Το σύνολο Cantor είναι το σύνολο

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k.$$

Ιδιότητες του συνόλου Cantor

(1) Το σύνολο Cantor C είναι συμπαγές μη κενό υποσύνολο του $[0,1]$. Πράγματι, επειδή $0 \in C_k$ για κάθε k έπεται ότι $0 \in C$ και άρα $C \neq \emptyset$. Επειδή κάθε C_k είναι κλειστό υποσύνολο του $[0,1]$ η τομή τους $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$ θα είναι επίσης κλειστό υποσύνολο του $[0,1]$ και άρα το C θα είναι συμπαγές ως κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς $[0,1]$.

(2) Το C δεν περιέχει κανένα ανοικτό διάστημα. Πράγματι, έστω ότι περιείχε ένα ανοικτό διάστημα (a,b). Επιλέγουμε $k \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{3^k} < b - a$. Επειδή $C_k = \bigcup_{|s|=k} K_s$ και τα τα $(K_s)_{|s|=k}$ είναι ξένα ανά δύο κλειστά υποδιαστημάτα του $[0,1]$ το (a,b) πρέπει να περιέχεται σε κάποιο από αυτά. Όμως το μήκος κάθε διαστήματος K_s είναι ίσο με $\frac{1}{3^k}$ και άρα δεν μπορεί να περιέχει το διάστημα (a,b) που έχει μήκος $b-a$. Επομένως το C δεν περιέχει ανοικτό διάστημα.

(3) Έστω $\vec{s} = (\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ και θεωρούμε για κάθε k την πεπερασμένη ακολουθία $s_k = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$. Τότε η ακολουθία $(K_{s_k})_{k\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων με $\operatorname{diam} K_{s_k} \longrightarrow 0$ στον πλήρη μετρικό χώρο $[0,1]$. Άρα το σύνολο $\bigcap_{k=1}^{\infty} K_{s_k}$ είναι μονοσύνολο, $\bigcap_{k=1}^{\infty} K_{s_k} = \{x_{\vec{s}}\}$.

(4) Για κάθε $x \in C$ υπάρχει $\vec{s} = (\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ώστε $\{x\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} K_{s_k}$ (όπου $s_k = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ για κάθε k). Πράγματι, έστω $x \in C$. Τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $x \in C_k$ και άρα υπάρχει μοναδική ακολουθία s_k μήκους k (από 0 και 1) ώστε $x \in K_{s_k}$. Από τις (β),(γ) προκύπτει ότι αν $k_1 \leq k_2$ τότε $s_{k_1} \preceq s_{k_2}$ και άρα η ένωση των $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ορίζει ένα στοιχείο $\vec{s} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Είναι άμεσο ότι $x = x_{\vec{s}} = \bigcap_{k=1}^{\infty} K_{s_k}$.

Θεωρημα 9.14. *Οι συμπαγείς μετρικοί χώροι $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ και C είναι ομοιομορφικοί. (Για το λόγο αυτό πολλές φορές το $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ καλείται και σύνολο Cantor).*

Αποδειξη. Ορίζουμε

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & C \\ \text{με} \qquad \Phi(\vec{s}) & = & x_{\vec{s}} \end{array}$$

όπου $x_{\vec{s}}$ όπως στην (3) παραπάνω. Από τη (γ) στον ορισμό του συνόλου Cantor έπεται ότι η Φ είναι 1–1, ενώ από την ιδιότητα (4) παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η Φ είναι επί.

Απομένει να δειχθεί ότι η Φ είναι αμφισυνεχής. Λόγω της συμπάγειας του $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ αρκεί να δειχθεί ότι η Φ είναι συνεχής (βλέπε πρόταση 6.20). Έστω $(\vec{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ και $\vec{s} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ώστε $\vec{s}_n \longrightarrow \vec{s}$ και θα δείξουμε ότι $\Phi(\vec{s}_n) \longrightarrow \Phi(\vec{s})$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{3^k} < \varepsilon$. Θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\vec{s}_n(i) = \vec{s}(i)$ για $i = 1, 2, \ldots, k$ (από πρόταση 9.13). Έτσι για κάθε $n \geq n_0$ τα $\Phi(\vec{s}_n) = x_{\vec{s}_n}$ και $\Phi(\vec{s}) = x_{\vec{s}}$ ανήκουν στο $K_{(\vec{s}(1),\ldots,\vec{s}(k))}$ που είναι διάστημα μήκους $\frac{1}{3^k}$ και άρα $|\Phi(\vec{s}_n) - \Phi(\vec{s})| \leq \frac{1}{3^k} < \varepsilon$. Επομένως $\Phi(\vec{s}_n) \longrightarrow \Phi(\vec{s})$ και άρα η Φ είναι συνεχής. □

Πορισμα 9.15. *Ο χώρος $C^{\mathbb{N}}$ είναι ομοιομορφικός με τον C.*

Αποδειξη. Επειδή ο C είναι ομοιομορφικός με τον $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ο $C^{\mathbb{N}}$, θα είναι ομοιομορφικός του $\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}} = \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, που είναι ομοιμορφικός με τον $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (για την απόδειξη του τελευταίου ισομορφισμού χρησιμοποιήστε οποιαδήποτε 1–1 και επί απεικόνιση του $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ στο $\mathbb{N}$), που είναι ομοιομορφικός του C.

Επομένως ο $C^{\mathbb{N}}$ είναι ομοιομορφικός του C. □

Μπορεί να αποδειχθεί, χρησιμοποιώντας τεχνικές ανάλογες με αυτές του ορισμού του συνόλου Cantor, το επόμενο θεώρημα.

Θεωρημα 9.16. *Κάθε (X,ρ) πλήρης και υπεραριθμήσιμος μετρικός χώρος περιέχει ένα (συμπαγές) υποσύνολο ομοιομορφικό με το σύνολο Cantor.*

Μια άλλη καθολική ιδιότητα του συνόλου Cantor περιγράφεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεωρημα 9.17. *Κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι συνεχής εικόνα του σύνολου Cantor.*