

$G \subseteq (X, d)$ ανοικτό : αν κάθε $x \in G$ είναι εσωτερικό σημείο του G (δηλ. $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq G$).

ΠΡΟΤΑΣΗ: G ανοικτό $\Leftrightarrow$ για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \rightarrow x \in G$ υπάρχει $n_0 : \forall n \geq n_0, x_n \in G$.

$F \subseteq (X, d)$ κλειστό : αν το $X \setminus F$ είναι ανοικτό.

ΠΡΟΤΑΣΗ : F κλειστό $\Leftrightarrow$ για κάθε ακολουθία (x_n) στο X , με $x_n \rightarrow x \in X$ έπεται ότι $x \in F$.

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$. Έστω $x_n \in F$ και έστω ότι $x_n \rightarrow x \in X$. Θα δείξουμε ότι $x \in F$. Έστω ότι $x \notin F \Rightarrow x \in (X \setminus F)$ και το $X \setminus F$ είναι ανοικτό.

π.λ. $\Rightarrow \exists n_0 \forall n \geq n_0, x_n \in G = X \setminus F$, δηλ. $\forall n \geq n_0, x_n \notin F$.

που είναι άτοπο.

$(\Leftarrow)$ Πρέπει να δείξουμε ότι το $X \setminus F$ είναι ανοικτό. Έστω ότι δεν είναι. Τότε υπάρχει $x \in X \setminus F$ το οποίο δεν είναι εσωτερικό σημείο του $X \setminus F$.

Τότε, $\forall \varepsilon > 0$, η $B(x, \varepsilon)$ δεν περιέχεται στο $X \setminus F$, δηλ.

$\forall \varepsilon > 0$ στον $B(x, \varepsilon)$ υπάρχουν σημεία στον F .

Τότε, $\forall n \in \mathbb{N}$, μπορούμε να βρούμε $x_n \in F$, με

$$x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \Rightarrow d(x_n, x) < \frac{1}{n}.$$

Εώρα (x_n) στο F , $x_n \rightarrow x \in X \Rightarrow x \in F$, άτοπο.
ΥΠΟΘΕΣΗ

Εσωτερικό και κλειστό θήκη.

Για κάθε $A \subseteq (X, d)$ θα ορίσουμε :

• το εσωτερικό του A (A° ή $\text{int}(A)$).

- την κλειστή θήκη του A ($\bar{A}$ ή $cl(A)$).
- το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του A (A').
- το σύνορο του A ($\partial(A)$, ή $bd(A)$).

Εσωτερικό σιωδου

ορισμος: Έστω $A \subseteq (X, d)$. Το εσωτερικό του A είναι το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του A , το συμβολίζουμε με A° .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: (i). Στο $\mathbb{R}$, το $(a, b]$ έχει εσωτερικό το (a, b) .

(ii). Στο $\mathbb{R}$, το $\mathbb{Q}$ έχει εσωτερικό $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$.

(αν κάποιο $q \in \mathbb{Q}$ ήταν εσω. σημείο του $\mathbb{Q}$, θα υπήρχε $\varepsilon > 0$:
 ώστε $(q - \varepsilon, q + \varepsilon) \subseteq \mathbb{Q}$ άρα για στο
 $(q - \varepsilon, q + \varepsilon)$ υπάρχουν αλληλοι.

Παρατηρήσεις: (1) $\forall A \subseteq (X, d)$, $A^\circ \subseteq A$

$$(x \in A^\circ \Rightarrow \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subseteq A \Rightarrow x \in A) \\ (x \in B(x, \varepsilon))$$

(2). Το A° είναι ανοιχτό σιωδο.

Έστω $x \in A^\circ$. Θα δείξουμε ότι το x είναι εσωτερικό σημείο του A° . Άρα θα πρέπει να βρούμε $\varepsilon > 0$:

$B(x, \varepsilon) \subseteq A^\circ$. Αφού $x \in A^\circ$, υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq A$.

Θα δείξουμε ότι $B(x, \varepsilon) \subseteq A^\circ$. Παιρνουμε $y \in B(x, \varepsilon)$ και

δείχνουμε ότι $y \in A^\circ$, δηλ. ότι $\exists \delta > 0$: $B(y, \delta) \subseteq A$.

Παιρνουμε $\delta = \varepsilon - d(x, y) > 0$. Τότε αν $z \in B(y, \delta)$ έχουμε

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \delta + d(y, x) = \varepsilon.$$

$$\Rightarrow z \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow z \in A.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: (ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ).

Έστω $A, B \subseteq (X, d)$.

- (1). Το A° είναι ανοιχτό και περιέχεται στο A .
- (2). Αν G ανοιχτό και $G \subseteq A$ τότε $G \subseteq A^\circ$
(το A° είναι το μεγαλύτερο ανοιχτό υποσύνολο του A).
- (3). Αν $A \subseteq B$ τότε $A^\circ \subseteq B^\circ$.
- (4). $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.
- (5). $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$ (και δεν ισχύει πάντα ισότητα).
- (6). $A^\circ = A$ αν και μόνο αν το A είναι ανοιχτό.

Απόδειξη: (1). Έχει χίνει.

(2). Έστω $G \subseteq A$ ανοιχτό. Αν $x \in G \implies$
 G ανοιχτό

$\exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subseteq G \implies x$ εστ. σημείο του A , δηλ. $x \in A^\circ$
 $G \subseteq A$

(3). Έστω $x \in A^\circ \implies \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subseteq A \subseteq B$

$\implies x$ εστ. σημείο του B , δηλ. $x \in B^\circ$

(4). $A \cap B \subseteq A \left\{ \begin{array}{l} \implies (A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \\ (A \cap B)^\circ \subseteq B^\circ \end{array} \right. \xrightarrow{(3)} (A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$

Έχουμε $A^\circ \subseteq A, \left\{ \begin{array}{l} \implies A^\circ \cap B^\circ \subseteq A \cap B \end{array} \right. \xrightarrow{(2)} A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$
 $B^\circ \subseteq B$

(G ανοιχτό, ως τμήμα δύο ανοικτών συνόλων)

Αλλά και, Έστω $x \in A^\circ \cap B^\circ \implies \left\{ \begin{array}{l} x \in A^\circ \\ x \in B^\circ \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \exists \varepsilon_1 > 0 : B(x, \varepsilon_1) \subseteq A \\ \exists \varepsilon_2 > 0 : B(x, \varepsilon_2) \subseteq B \end{array} \right.$

$\implies$ Αν $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ τότε $B(x, \varepsilon) \subseteq A \cap B \implies x \in (A \cap B)^\circ$

(5). $A \subseteq A \cup B \left\{ \begin{array}{l} \implies A^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ \\ B \subseteq A \cup B \end{array} \right. \xrightarrow{(3)} B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ \implies A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$

Παράδειγμα: (για τον αντίστροφο χειρισμό)

Έστω $\mathbb{R}$: $A = \mathbb{Q} \implies A^\circ = \emptyset$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \implies B^\circ = \emptyset$,
 $A \cup B = \mathbb{R} \implies (A \cup B)^\circ = \mathbb{R}$. ($\emptyset \subsetneq \mathbb{R}$)

(6). $A = A^\circ \Leftrightarrow A$ ανοιχτό.

($\Rightarrow$) Ναι, αφού $A = A^\circ$ και το A° ανοιχτό.

($\Leftarrow$) Ναι. Ξέρουμε ότι $A^\circ \subseteq A$, και $A \subseteq A^\circ \Leftrightarrow A \subseteq A^\circ$.

Κλειστή Θήκη.

ανοιχτό.

Ορισμός: (σημείο επαφής). Έστω $A \subseteq (X, d)$.

Ένα $x \in X$ λέγεται σημείο επαφής του A , αν:

"οσοδήποτε κοντά στο x υπάρχουν σημεία του A ".

δηλ. $\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Χρήσιμο: x σημείο επαφής του $A \Leftrightarrow \exists (x_n)$ στο A η οποία συχρδίνει στο x .

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε: $B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$.

$\Rightarrow \forall n \exists x_n \in A$ και $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$.

Τότε η (x_n) είναι στο A και $d(x_n, x) < \frac{1}{n} \rightarrow x_n \rightarrow x$.

($\Leftarrow$) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει (x_n) στο A ,

με $x_n \rightarrow x$. Έστω ε > 0. Αφού $x_n \rightarrow x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$.

$\forall n \geq n_0 \quad \left. \begin{array}{l} x_n \in B(x, \varepsilon) \\ (\text{και } x_n \in A) \end{array} \right\} \rightarrow B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

Ορισμός: (κλειστή Θήκη). Αν $A \subseteq (X, d)$ τότε η κλειστή

θήκη του A είναι το σύνολο $\bar{A}$ όλων των σημείων επαφής του A .

Ιδιότητες της κλειστής Θήκης.

(1). $A \subseteq \bar{A}$. Έστω $x \in A$. Για κάθε $\varepsilon > 0$, έχουμε $x \in B(x, \varepsilon) \cap A$.

$\Rightarrow B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Άλλως, αν $x \in A$ τότε η σταθερή ακολουθία

$x_n = x$ είναι στο A και $x_n \rightarrow x$ ($d(x_n, x) = d(x, x) = 0 \rightarrow 0$).

(2). Αν $A \subseteq (X, d)$ τότε η κλειστότητα του $\bar{A}$ είναι κλειστό σύνολο.

Απόδειξη: Με βάση τον χαρακτηρισμό του κλειστού συνόλου, αρκεί να πάρω (x_n) στο $\bar{A}$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$ και να δείξω ότι $x \in \bar{A}$.

Έχουμε: $\left\{ \begin{array}{l} x_n \in \bar{A} \\ x_n \rightarrow x \in X \end{array} \right.$ Παίρνουμε $\varepsilon > 0$, και θα δείξουμε ότι $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Θεωρούμε την $B(x_n, \varepsilon/2)$. Αφού $x_n \in \bar{A}$ υπάρχει $a \in A$,

$$a \in B(x_n, \varepsilon/2) \Rightarrow d(a, x_n) < \varepsilon/2.$$

Τότε $a \in A$ και $d(a, x) \leq d(a, x_n) + d(x_n, x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Άρα $a \in A \cap B(x, \varepsilon)$.

Αγλιώς (με ακολουθίες). Έστω $x_n \in A$, $x_n \rightarrow x$ και θέλω να βρω (a_n) στο A , με $a_n \rightarrow x$ ($\Rightarrow x \in \bar{A}$)

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $a_n \in A$, με $d(a_n, x_n) < \frac{1}{n}$.

Τότε $d(a_n, x) \leq d(a_n, x_n) + d(x_n, x) < \frac{1}{n} + d(x_n, x) \rightarrow 0 + 0 = 0$.

(3). Αν F κλειστό και $F \supseteq A$, τότε $F \supseteq \bar{A}$.

(δηλ. το $\bar{A}$ είναι το μικρότερο κλειστό υπερσύνολο του A).

Απόδειξη: Έστω $x \in \bar{A} \Rightarrow \exists x_n$ στο A , με $x_n \rightarrow x$.
($F \supseteq A$)

Αφού το F είναι κλειστό, $x_n \in F$ και $x_n \rightarrow x$, έπεται ότι $x \in F$ (χαρακτηρισμός των κλειστών συνόλων μέσω ακολουθιών).

(4). $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$.

Απόδειξη: Έστω $x \in \bar{A}$. Για κάθε $\varepsilon > 0$, έχουμε $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

και $A \subseteq B \Rightarrow B(x, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$. Άρα $x \in \bar{B}$.

$$(5). \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\left. \begin{array}{l} A \subseteq A \cup B \\ B \subseteq A \cup B \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \bar{A} \subseteq \overline{A \cup B} \\ \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B} \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό :

$$\left. \begin{array}{l} A \subseteq \bar{A} \\ B \subseteq \bar{B} \end{array} \right\} \Rightarrow A \cup B \subseteq \bar{A} \cap \bar{B} \Rightarrow \overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B} \quad (3)$$

Ο εγκλεισμός μπορεί να είναι γνήσιος ;

$$A = \emptyset \Rightarrow \bar{A} = \mathbb{R}$$

κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι όριο ακολουθίας

$$B = \mathbb{R} \cap \mathbb{Q} \Rightarrow \bar{B} = \mathbb{R}$$

για στο $\mathbb{Q}$, άρα $x \in \bar{B}$.

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \overline{A \cap B} = \mathbb{R}$$

$$\text{και } \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

$$(7). A = \bar{A} \Leftrightarrow A \text{ κλειστό.}$$

$$(\Rightarrow) \text{ Ναι. } \bar{A} = \text{κλειστό} \Rightarrow A = \bar{A} \wedge A \text{ κλειστό.}$$

$$(\Leftarrow) \text{ Ναι. } A \subseteq \underbrace{A}_{\text{κλειστό}} \xRightarrow{(3)} \bar{A} \subseteq A \text{ και φυσικά } A \subseteq \bar{A}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Λειτουργία εσωτερικής και εξωτερικής θύρας)

$$\text{Για κάθε } A \subseteq (X, d): \quad (i). X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A}$$

$$(ii). X \setminus \bar{A} = (X \setminus A)^\circ$$

$$\text{Απόδειξη: (i). } x \in X \setminus A^\circ \Leftrightarrow x \notin A^\circ$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \not\subseteq A$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow x \in \overline{X \setminus A}$$

$$(ii). x \in X \setminus \bar{A} \Leftrightarrow x \notin \bar{A} \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus A \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus A$$

$$\Leftrightarrow x \in (X \setminus A)^\circ \quad \left[\begin{array}{l} \text{Άλλος τρόπος: Εφαρμόζουμε το (i) με το } X \setminus A \\ \text{στην θέση του } A: X \setminus (X \setminus A)^\circ = \overline{X \setminus (X \setminus A)} = \bar{A} \\ \Rightarrow (X \setminus A)^\circ = X \setminus \bar{A} \end{array} \right]$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Κεφάλαιο 3)

(1). $F, G \subseteq (X, d) \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow (F|G) \text{ κλειστό} \\ F \text{ κλειστό} \\ G \text{ ανοιχτό} \end{array} \right. \rightarrow (G|F) \text{ ανοιχτό}$

- $F|G = F \cap (X|G) =$ κλειστό ως τομή κλειστών.
 - $\uparrow$ κλειστό
 - $\uparrow$ κλειστό ως συμπλήρωμα ανοικτού

$G \mid F = G \wedge (x \mid F) = \text{ανοικτό ως πεπερασμένη τομή ανοικτών}.$

(2) Αν $A \subseteq (X, d)$, τότε το A γράφεται ως ζογή ανοικτών υποσυνόλων του (X, d) .

Θέλω να βρω μια οικογένεια $(G_i)_{i \in I}$ αυστηρά αυξανών, ούτως,

wozu $A = \bigcap_{i \in I} A_i$

(*) Τα μονοσυνόρια $\{x\}$ είναι κλειστά σύνολα, σε κάθε μετρικό χώρο.

Έστω (y_n) στο $\{x\}$ και έστω ότι $y_n \rightarrow y \in X$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Υποσέσωται, } y_n = x \text{ για κάθε } n \\ \text{και} \end{array} \right\} \Rightarrow y = x \in \{x\}$$

$$x = y_n \rightarrow y$$

Εστω $A \subseteq (X, d)$. Τότε έχουμε: $A^c = \bigcup_{x \in A^c} \{x\} \rightarrow$

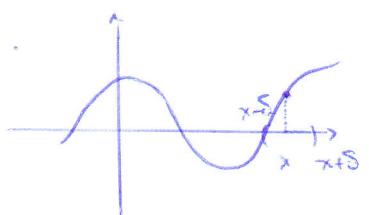
$$A = \bigcap_{x \in A^c} (X \setminus \{x\})$$

(5) · κάθε πεπερασμένο $A \subseteq (X, d)$ είναι κλειστό.

Έστω ότι $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

Τότε $A = \underbrace{\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \dots \cup \{a_m\}}_{\text{ένωση κλειστών συνόλων}} = \text{κλειστό ως πεπερασμένη ένωση κλειστών συνόλων. (κλειστό).}$

(3) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι το $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$ ανοιχτό και το $B = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ είναι κλειστό. και το $\Gamma = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 4\}$ είναι κλειστό.

(α).  Έστω $x \in A$. Τότε $f(x) > 0$.
Από Απ. 1. (αφού η f είναι συνεχής στο x).

υπάρχει $\delta > 0 : \forall y \in (x-\delta, x+\delta) : f(y) > 0$.

(εφαρμόστε τον ορισμό της συνέχειας στο x , με $\varepsilon = \frac{f(x)}{2}$).

Άρα $(x-\delta, x+\delta) \subseteq A$, δηλ. $x \in A^\circ$.

(β) Έστω $x_n \in B$ και έστω ότι $x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}$.

Θα δείξουμε ότι $x \in B$.

Έστω $\left. \begin{array}{l} \bullet f(x_n) = 0 \text{ για κάθε } n. \\ \bullet x_n \rightarrow x \xrightarrow[\text{συνεχής}]{f} f(x_n) \rightarrow f(x) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x \in B.$

(γ) Έστω $x_n \in \Gamma$, με $x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}$.

$\left. \begin{array}{l} \bullet x_n \in \Gamma \Rightarrow f(x_n) \leq 4 \\ \bullet x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \leq 4 \Rightarrow x \in \Gamma.$

(4) · κάθε $[a, b]$ είναι αριθμήσιμη τμήν ανοικτών διαστημάτων.
κάθε (a, b) είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών διαστημάτων.

· $[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$. Αφού $a - \frac{1}{n} < a < b < b + \frac{1}{n}$.

$$\Rightarrow [a, b] \subseteq \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right) (\forall n). \Rightarrow [a, b] \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$$

$$\cdot \forall x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right).$$

$$\Rightarrow \forall n \quad a - \frac{1}{n} < x < b + \frac{1}{n} \quad \Rightarrow a \leq x \leq b.$$

$$\Rightarrow x \in [a, b]$$

$$\cdot (a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{b-a}{3n}, b - \frac{b-a}{3n}\right].$$

Δείχνουμε τον $\subseteq$. (ο $\supseteq$ είναι απλός).

Έστω $x \in (a, b)$. Τότε $a < x < b$. Αφού $a + \frac{b-a}{3n} \rightarrow a < x$.

τελικά $a + \frac{b-a}{3n} < x$. και αφού $b - \frac{b-a}{3n} \rightarrow b > x$ τελικά

$$x < b - \frac{b-a}{3n}. \text{ Άρα, } \exists n : x \in \left[a + \frac{b-a}{3n}, b - \frac{b-a}{3n}\right]$$