Χαρακτηρισμός της συμπάγειας

Δίνουμε μια εναλλακτική απόδειξη του βήματος $(iv) \Rightarrow (i)$ στον χαρακτηρισμό της συμπάγειας ενός μετρικού χώρου. Ας σημειωθεί ότι η απόδειξη αυτή είναι μεν πιό σύντομη, αλλά χρησιμοποιεί το Θεώρημα του Cantor.

Πρόταση 1 *Αν ένας μετρικός χώρος (X, d) είναι (α) πλήρης και (β) ολικά φραγμένος, τότε είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Με άτοπο: υποθέτουμε ότι ο χώρος ΔΕΝ είναι συμπαγής. Υπάρχει τότε ένα ανοικτό κάλυμμα $\mathcal{U}$ του X που δεν έχει κανένα πεπερασμένο υποκάλυμμα.

Αφού ο X *είναι ολικά φραγμένος*, καλύπτεται από ένα *πεπερασμένο* πλήθος από ανοικτές μπάλες, άρα και από κλειστές μπάλες, με διάμετρο το πολύ 1. Μία τουλάχιστον από αυτές δεν μπορεί να καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος στοιχεία του καλύμματος $\mathcal{U}$ (γιατί αν καθεμιά μπορούσε να καλυφθεί από πεπερασμένο πλήθος στοιχεία του $\mathcal{U}$, τότε και η ένωσή τους, δηλαδή ο X, θα μπορούσε να καλυφθεί από πεπερασμένο πλήθος στοιχεία του $\mathcal{U}$, αντίθετα με την υπόθεση ότι το $\mathcal{U}$ δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα). Αυτήν την κλειστή μπάλα την ονομάζουμε F_1.

Το σύνολο F_1 είναι κι αυτό ολικά φραγμένο. Συνεπώς καλύπτεται από ένα *πεπερασμένο* πλήθος από ανοικτές, άρα και από κλειστές, μπάλες με διάμετρο το πολύ $1/2$. Με τον ίδιο συλλογισμό όπως πριν, η τομή μιάς τουλάχιστον από αυτές τις μπάλες με το F_1 δεν μπορεί να καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος στοιχεία του καλύμματος $\mathcal{U}$· ονομάζουμε F_2 αυτήν την τομή, οπότε $F_2 \subseteq F_1$.

Το επαγωγικό βήμα είναι ακριβώς ο ίδιος συλλογισμός: αν έχουμε κλειστά σύνολα $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n$ με $\mathrm{diam}(F_k) \leq 1/k$ για κάθε k, κανένα από τα οποία δεν καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος στοιχεία του καλύμματος $\mathcal{U}$, καλύπτουμε το σύνολο F_n, αφού είναι ολικά φραγμένο, από ένα *πεπερασμένο* πλήθος από κλειστές μπάλες με διάμετρο το πολύ $\frac{1}{n+1}$. Η τομή μιάς τουλάχιστον από αυτές με το F_n δεν μπορεί να καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος στοιχεία του καλύμματος $\mathcal{U}$· ονομάζουμε F_{n+1} την τομή αυτής της μπάλας με το F_n.

Έχουμε λοιπόν μια φθίνουσα ακολουθία $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \ldots$ από κλειστά, μη κενά σύνολα με $\mathrm{diam}(F_n) \leq 1/n$ για κάθε n, κανένα από τα οποία δεν καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος στοιχεία του καλύμματος $\mathcal{U}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα F_n που καλύπτεται από *ένα* στοιχείο του $\mathcal{U}$, κι έτσι θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Επειδή ο χώρος *είναι πλήρης*, η τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ δεν είναι κενή (Θεώρημα Cantor). Υπάρχει λοιπόν $x \in X$ ώστε $x \in F_n$ για κάθε n. Αφού το $\mathcal{U}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X, υπάρχει $U \in \mathcal{U}$ ώστε $x \in U$. Το U είναι ανοικτό, άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $B(x, \frac{2}{n}) \subseteq U$. Όμως, αφού κάθε $y \in F_n$ ικανοποιεί $d(x, y) \leq \mathrm{diam}(F_n) \leq \frac{1}{n} < \frac{2}{n}$, έχουμε $y \in B(x, \frac{2}{n}) \subseteq U$. Δείξαμε λοιπόν ότι $F_n \subseteq U$.

Παρατήρηση 2 *Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου (X, d) είναι ολικά φραγμένο αν και μόνον αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει μια πεπερασμένη οικογένεια $A_1, \ldots, A_n$ από* υποσύνολα του A *με* $\mathrm{diam}(A_k) \leq \epsilon$ *για κάθε $k = 1, \ldots, n$ που καλύπτει το A, δηλ. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A$.*

Πράγματι, αν ο χώρος έχει την ιδιότητα αυτή, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε πεπερασμένη οικογένεια $K_1, \ldots, K_m$ από *μη κενά* υποσύνολα του A με $\mathrm{diam}(K_k) \leq \epsilon/2$ για κάθε $k = 1, \ldots, m$ που να καλύπτει το A. Τώρα επιλέγοντας ένα a_k σε κάθε K_k παρατηρούμε ότι για κάθε $y \in K_k$ ισχύει $d(y, a_k) \leq \mathrm{diam}(K_k) < \epsilon$, δηλαδή $K_k \subseteq B(a_k, \epsilon)$ και συνεπώς οι ανοικτές μπάλες $B(a_1, \epsilon), B(a_2, \epsilon), \ldots, B(a_m, \epsilon)$ καλύπτουν το A.

Το αντίστροφο είναι βέβαια προφανές: αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν ανοικτές μπάλες $B(x_1, \epsilon/2)$, $B(x_2, \epsilon/2), \ldots, B(x_n, \epsilon/2)$ καλύπτουν το A, τότε τα σύνολα $A_k := B(x_k, \epsilon/2) \cap A$ ικανοποιούν τις απαιτούμενες συνθήκες.