Κεφάλαιο 8

Χώροι συναρτήσεων

Ομάδα Α΄

8.1. *Έστω* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα*

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0$$

για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$. *Αποδείξτε ότι* $f \equiv 0$.

Υπόδειξη. Από το θεώρημα Weierstrass έπεται ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο [0,1]. Αφού η f είναι φραγμένη, έχουμε ότι $fp_n \to f^2$ ομοιόμορφα. Άρα,

$$\int_0^1 (f(t))^2\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 p_n(t)f(t)\,dt.$$

Όμως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $\int_0^1 p_n(t)f(t)\,dt$ είναι πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός των $\int_0^1 t^n f(t)\,dt$ τα οποία είναι ισα με μηδέν από την υπόθεση. Άρα, $\int_0^1 p_n(t)f(t)\,dt = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όποτε $\int_0^1 f^2 = 0$. Από την τελευταία σχέση έπεται ότι $f \equiv 0$ (εξηγήστε γιατί).

8.2. *Έστω* $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *συνεχείς συναρτήσεις. Αν ισχύει* $\int_0^1 x^n f(x)\,dx = \int_0^1 x^n g(x)\,dx$ *για κάθε* $n = 0, 1, \ldots$ *δείξτε ότι* $f \equiv g$.

Υπόδειξη. Αν θέσουμε $h(x) = f(x) - g(x)$ τότε έπεται ότι

$$\int_0^1 x^n h(x)\,dx = \int_0^1 x^n f(x)\,dx - \int_0^1 x^n g(x)\,dx = 0.$$

Επιπλέον, η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ άρα από την Άσκηση 1 έπεται ότι $h \equiv 0$ δηλαδή $f \equiv g$.

8.3. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν ισχύει $\int_0^1 x^{2n} f(x)\,dx = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$ δείξτε ότι $f \equiv 0$.*

1η Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $h(x) = f(\sqrt{x})$. Παρατηρούμε ότι η h είναι συνεχής, άρα από το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $\|h - p_n\|_\infty < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει $|p_n(x) - h(x)| < 1/n$. Έπεται ότι

$$|p_n(x^2) - f(x)| = |p_n(x^2) - h(x^2)| < \frac{1}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in [0,1]$. Θέτοντας $q_n(x) = p_n(x^2)$, παρατηρούμε ότι κάθε q_n είναι πολυώνυμο που περιέχει μόνο άρτια μονώνυμα και ότι $\|q_n - f\|_\infty \leq 1/n$ για κάθε n από την τελευταία σχέση. Άρα, η (q_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Έπεται ότι $fq_n \to f^2$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$. Τότε,

$$\int_0^1 f(x) q_n(x)\,dx \to \int_0^1 (f(x))^2\,dx.$$

Από την υπόθεση έχουμε $\int_0^1 q_n(x) f(x)\,dx = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (εξηγήστε γιατί), άρα έχουμε το συμπέρασμα.

2η Απόδειξη. Έστω F η *άρτια επέκταση* της f στο $[-1,1]$ δηλαδή, $F : [-1,1] \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ f(-x), & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}.$$

Τότε, η F είναι συνεχής. Επιπλέον είναι άρτια, οπότε ισχύει

$$\int_{-1}^1 x^{2n-1} F(x)\,dx = 0$$

για $n = 1, 2, \dots$ (εξηγήστε γιατί) και ακόμη

$$\int_{-1}^1 x^{2n} F(x)\,dx = 2\int_0^1 x^{2n} F(x)\,dx = 2\int_0^1 x^{2n} f(x)\,dx = 0$$

για κάθε $n = 0, 1, \dots$ από την υπόθεση. Άρα, η F ικανοποιεί τις υποθέσεις της Άσκησης 2, οπότε είναι ταυτοτικά μηδέν. Ειδικότερα, $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

8.4. *Δώστε παράδειγμα ακολουθίας πολυωνύμων $p_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $p_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ και $\int_0^1 p_n(x)\,dx \to 1$.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε τα πολυώνυμα $p_n(x) = 2nx(1 - x^2)^{n-1}$ με $x \in [0,1]$. Τότε εύκολα ελέγχουμε ότι για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει $p_n(x) \to 0$, αλλά $\int_0^1 p_n(x)\,dx = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

8.5. *Δώστε παράδειγμα συνεχούς και φραγμένης συνάρτησης $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε να μην υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $p_n : (0,1] \to \mathbb{R}$ με $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $(0,1]$.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin(1/x)$. Δεν υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων, η οποία να συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $(0,1]$. Πράγματι· αν αυτό ήταν σωστό θα υπήρχε πολυώνυμο p ώστε $\|f - p\|_\infty < 1/2$. Τότε θα είχαμε ότι $|\sin(1/x) - p(x)| < 1/2$ για κάθε $0 < x \leq 1$. Ειδικότερα, θα είχαμε ότι: για $x_n = (2\pi n + \frac{\pi}{2})^{-1}$ ισχύει

$$|1 - p(0)| = \lim_{n\to\infty} \left|\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) - p(x_n)\right| \leq \frac{1}{2}$$

ενώ για τα $y_n = (2\pi n - \frac{\pi}{2})^{-1}$ ισχύει:

$$|1 + p(0)| = \lim_{n\to\infty} \left|\sin\left(\frac{1}{y_n}\right) - p(y_n)\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Από τις δυο τελευταίες σχέσεις καταλήγουμε σε άτοπο: η πρώτη δίνει $p(0) \geq 1/2$ ενώ η δεύτερη $p(0) \leq -1/2$.

8.6. (α) *Έστω $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x) < p(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$.*

(β) *Αποδείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο q ώστε $e^x \leq q(x) \leq e^{2x}$ για κάθε $x \in [0,1]$.*

(γ) *Αν $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, αποδείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \to h$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$.*

Υπόδειξη. (α) Αφού οι f, g είναι συνεχείς και $g(x) - f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,1]$, υπάρχει $m > 0$ ώστε $g(x) - f(x) \geq m$ για κάθε $x \in [0,1]$ (εξηγήστε γιατί). Καθώς, η $\frac{f+g}{2}$ είναι συνεχής, από το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $\|p - \frac{f+g}{2}\|_\infty < \frac{m}{4}$. Τότε, για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει:

$$f(x) < \frac{f(x)+g(x)}{2} - \frac{m}{4} < p(x) < \frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{m}{4} < g(x).$$

(β) Εφαρμόζουμε το προηγούμενο ερώτημα για τις $f(x) = e^x$ και $g(x) = 2e^{2x}$, $x \in [0,1]$. Υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $e^t < p(t) < 2e^{2t}$ για κάθε $t \in [0,1]$. Έστω $x \in (0,1]$. Τότε, έχουμε

$$\int_0^x e^t\,dt < \int_0^x p(t)\,dt < 2\int_0^x e^{2t}\,dt$$

δηλαδή,

$$e^x < \int_0^x p(t)\,dt + 1 < e^{2x}$$

για κάθε $x \in (0,1]$. Έπεται, ότι για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει

$$e^x \leq q(x) \leq e^{2x},$$

όπου $q(x) = \int_0^x p(t)\,dt + 1$. Παρατηρούμε ότι το q είναι πολυώνυμο, άρα έχουμε το ζητούμενο.

(γ) Από το πρώτο ερώτημα έχουμε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει πολυώνυμο p_n ώστε

$$h(x) - \frac{1}{n} < p_n(x) < h(x) - \frac{1}{n+1}$$

για κάθε $x \in [0,1]$. Παρατηρούμε ότι η (p_n) είναι γνησίως αύξουσα εκ κατασκευής και ότι $|p_n(x) - h(x)| < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in [0,1]$. Έπεται ότι η $p_n \to h$ ομοιόμορφα.

8.7. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$ και $\|f' - p'\|_\infty < \varepsilon$.*

Υπόδειξη. 1η Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ από το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass έχουμε ότι υπάρχει πολυώνυμο q ώστε $\|f' - q\|_\infty < \varepsilon$. Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(x) = \int_0^x q(t)\,dt + f(0)$. Τότε, ισχύει $p'(x) = q(x)$ και ακόμη αν $x \in [0,1]$ έχουμε

$$|p(x) - f(x)| = \left| \int_0^x q(t)\,dt - \int_0^x f'(t)\,dt \right| \leq \int_0^x |f'(t) - q(t)|\,dt \leq \varepsilon x \leq \varepsilon.$$

Άρα, $\|f - p\|_\infty \leq \varepsilon$ και $\|f' - p'\|_\infty < \varepsilon$.

2η Απόδειξη. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι: αν f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, τότε $[B_n(f)]' \to f'$ ομοιόμορφα και επειδή ισχύει $B_n(f) \to f$ ομοιόμορφα (από το θεώρημα του Bernstein) έχουμε το ζητούμενο. Γι' αυτό το σκοπό δείξτε διαδοχικά τα εξής:

- $p'_{n+1,k} = (n+1)(p_{n,k-1} - p_{n,k})$, όπου $p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1 - x^{n-k})$.
- $[B_{n+1}(f)]' = (n+1)\sum_{k=0}^n [f((k+1)/n) - f(k/n)] p_{n,k}$.
- Από το θεώρημα μέσης τιμής, για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n$ υπάρχει t_k με $|t_k - \frac{k}{n+1}| \leq \frac{1}{n+1}$ ώστε $[B_{n+1}(f)]' = \sum_{k=0}^n f'(t_k) p_{n,k}$.
- Χρησιμοποιώντας το παραπάνω εύκολα βλέπουμε ότι $\|[B_{n+1}(f)]' - B_n(f')\|_\infty \leq \omega_{f'}(\frac{1}{n+1})$.
- Αποδεικνύοντας ότι για κάθε φραγμένη συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ισχύει $\|B_n(g) - g\|_\infty \leq \frac{3}{2}\omega_g(\frac{1}{\sqrt{n}})$ και συνδυάζοντας με το προηγούμενο, συμπεραίνουμε ότι

$$\|[B_{n+1}(f)]' - f'\|_\infty \leq \frac{5}{2}\omega_{f'}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Άρα, $[B_n(f)]' \to f'$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$, αφού η f' ομοιόμορφα συνεχής (Θυμηθείτε ότι μια συνάρτηση $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνον αν $\omega_h(\delta) \to 0$ καθώς $\delta \to 0^+$).

Ομάδα Β′

8.8. *Δείξτε ότι ο $\mathcal{C}([0,1])$ είναι διαχωρίσιμος.*

Υπόδειξη. 1η Απόδειξη. Με χρήση του θεωρήματος πρόσεγγισης του Weierstrass: Θα δείξουμε ότι ο σύνολο $\mathbb{Q}[x]$ των πολυωνύμων με ρητούς συντελεστές είναι αριθμήσιμο και πυκνό στον $\mathcal{C}([0,1])$. Έστω $f \in \mathcal{C}([0,1])$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$, $a_i \in \mathbb{R}$ ώστε $\|f-p\|_\infty < \varepsilon/2$. Από την πυκνότητα των ρητών, για κάθε $i = 0,1,\dots,m$ υπάρχει $q_i \in \mathbb{Q}$ ώστε $|a_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{2(m+1)}$. Τότε, το πολυώνυμο $q(x) = q_0 + q_1x + \cdots + q_mx^m$ ανήκει στο $\mathbb{Q}[x]$ και έχει την ιδιότητα: αν $x \in [0,1]$ τότε

$$|p(x) - q(x)| \leq \sum_{i=0}^{m} |a_i - q_i| x^i \leq \sum_{i=0}^{m} |a_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Άρα, $\|p-q\|_\infty \leq \varepsilon/2$. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι $\|f-q\|_\infty < \varepsilon$. Έπεται ότι το $\mathbb{Q}[x]$ είναι πυκνό στον $\mathcal{C}([0,1])$.

Παρατηρούμε ότι το $\mathbb{Q}[x]$ γράφεται σαν ένωση της μορφής $\mathbb{Q}[x] = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{Q}_n[x]$, όπου $\mathbb{Q}_n[x]$ είναι το σύνολο των πολυωνύμων με ρητούς συντελεστές και βαθμό το πολύ n. Έτσι, για να δείξουμε ότι το $\mathbb{Q}[x]$ είναι αριθμήσιμο αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε n το $\mathbb{Q}_n[x]$ είναι αριθμήσιμο. Όμως, το $\mathbb{Q}_n[x]$ είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{Q}^{n+1}$ μέσω της αντιστοιχίας $q_0 + q_1x + \cdots + q_nx^n \mapsto (q_0, q_1, \dots, q_n)$. Αφού το $\mathbb{Q}^{n+1}$ είναι καρτεσιανό γινόμενο αριθμήσιμων συνόλων, έπεται ότι είναι αριθμήσιμο.

2η Απόδειξη. Με χρήση των πολυγωνικών συναρτήσεων: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο L_n των συναρτήσεων στο $[0,1]$ όπου είναι συνεχείς και γραμμικές σε κάθε υποδιάστημα $J_k = [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, $k = 1,2,\dots,n$. (παρατηρήστε ότι μέσω αυτής της περιγραφής οι συναρτήσεις αυτές είναι πλήρως καθορισμένες). Τότε, το σύνολο L των πολυγωνικών συναρτήσεων (με «κόμβους» στα σημεία $\frac{k}{n}$, $k = 0,1,\dots,n$, $n \in \mathbb{N}$) είναι το $\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$. Στη συνέχεια θεωρούμε το σύνολο Q_n των συνεχών πολυγωνικών συναρτήσεων που παίρνουν ρητές τιμές στα $\frac{k}{n}, k = 0,1,\dots,n$. Δηλαδή,

$$Q_n = L_n \cap \{f(k/n) \in \mathbb{Q} : k = 0,1,\dots,n\}.$$

Τότε, το σύνολο Q των πολυγωνικών συναρτήσεων με «ρητούς κόμβους» (στα σημεία k/n, $k = 0,1,\dots,n$, $n \in \mathbb{N}$) είναι το $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$. Παρατηρούμε (με ένα επιχείρημα όπως αυτό στην πρώτη απόδειξη) ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το Q_n είναι αριθμήσιμο σύνολο. Άρα, το Q είναι αριθμήσιμο. Θα αποδείξουμε ότι το Q είναι πυκνό στον $\mathcal{C}([0,1])$. Γι' αυτό αρκεί να δείξουμε ότι το L είναι πυκνό στον $C([0,1])$ και ότι το Q είναι πυκνό στο L (όπως στην πρώτη απόδειξη).

Έστω $f \in \mathcal{C}([0,1])$ και $\varepsilon > 0$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της f το $[0,1]$ έπεται ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε αν $x, y \in [0,1]$ και $|x-y| \leq \frac{1}{n}$ να ισχύει $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Θεωρούμε την πολυγωνική συνάρτηση g που είναι γραμμική σε κάθε υποδιάστημα $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, $k = 1, 2, \ldots, n$ και $g(k/n) = f(k/n)$. Τότε, $g \in L_n$ και η g έχει την ιδιότητα $\|g - f\|_\infty \leq \varepsilon$. Πράγματι, αν $x \in [0,1]$ τότε υπάρχει $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ώστε $\frac{j-1}{n} \leq x \leq \frac{j}{n}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\leq |f(x) - f(k/n)| + |g(k/n) - g(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + |g((k-1)/n) - g(k/n)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Αν τώρα πάρουμε $g \in L$ θα δείξουμε ότι μπορούμε να βρούμε όσο κοντά της θέλουμε στοιχείο h του Q. Πράγματι· υπάρχει κάποιο $m \in \mathbb{N}$ ώστε $g \in L_m$. Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, m$ επιλέγουμε $q_k \in \mathbb{Q}$ ώστε $g(k/n) < q_k < g(k/n) + \varepsilon$. Τότε, η πολυγωνική συνάρτηση h με $h(k/n) = q_k$ για $k = 0, 1, \ldots, n$ είναι στο Q_m και έχει την ιδιότητα: $g(x) < h(x) < g(x) + \varepsilon$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Σημείωση. Παρατηρήστε και με τις δύο αποδείξεις προκύπτει άμεσα ότι οι Lipschitz συναρτήσεις (στο $[0,1]$) είναι πυκνές στον $C([0,1])$. Αυτό έπεται από το γεγονός ότι κάθε πολυώνυμο περιορισμένο σε φραγμένο διάστημα είναι Lipschitz και κάθε πολυγωνική συνάρτηση είναι Lipschitz.

8.9. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.*
(α) *Δείξτε ότι $|B_n(f)| \leq B_n(|f|)$ και $B_n(f) \geq 0$ αν $f \geq 0$.*
(β) *Δείξτε ότι $\|B_n(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.*

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι η (B_n) είναι ακολουθία γραμμικών τελεστών $B_n : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$. Δηλαδή, αν $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $B_n(f + \lambda g) = B_n(f) + \lambda B_n(g)$. Επίσης, είναι άμεσο από τον ορισμό ότι κάθε τελεστής B_n είναι θετικός: αν $f \geq 0$ τότε $B_n(f) \geq 0$. Τέλος, αν $x \in [0,1]$ τότε

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} |f(k/n)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= B_n(|f|)(x) \end{aligned}$$

Άρα, $|B_n(f)| \leq B_n(|f|)$.
(β) Αφού ο B_n είναι θετικός και γραμμικός, είναι μονότονος: αν $f \leq g$ τότε $B_n(f) \leq B_n(g)$. Αφού

$$-\|f\|_\infty \leq f(x) \leq \|f\|_\infty$$

για κάθε $x \in [0,1]$, έχουμε

$$-B_n(\|f\|_\infty) \leq B_n(f) \leq B_n(\|f\|_\infty).$$

Από την $B_n(\|f\|_\infty) = \|f\|_\infty B_n(\mathbf{1}) = \|f\|_\infty$ έπεται ότι $|B_n(f)(x)| \leq \|f\|_\infty$ για κάθε $x \in [0,1]$. Παίρνοντας supremum ως προς x έχουμε το ζητούμενο.

8.10. *Έστω $0 < a < b < 1$ και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (p_n) πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές, ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$.*

Υπόδειξη. Έστω $0 < a < b < 1$. Επεκτείνουμε συνεχώς την f στο $[0,1]$ σε μια συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(0) = g(1) = 0$ ως εξής: στο $[0,a]$ την ορίζουμε γραμμική με άκρα τα $(0,0)$ και $(a, f(a))$ και ομοίως στο $[b,1]$. Θεωρούμε την ακολουθία πολυωνύμων

$$P_n(g)(x) := \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor g\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}\right\rfloor x^k(1-x)^{n-k}, \quad x \in [0,1].$$

Τα $P_n(g)$ έχουν ακέραιους συντελεστές και έχουν την ιδιότητα $P_n(g) \to g$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$ (άρα $P_n(g) \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$, το οποίο είναι το ζητούμενο). Για να το δείξουμε αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι $\|P_n(g) - B_n(g)\|_\infty \to 0$. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
|B_n(g)(x) - P_n(g)(x)| &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \left(g\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} - \left\lfloor g\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}\right\rfloor \right) x^k(1-x)^{n-k} \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

όπου στην προτελευταία ανισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι $\binom{n}{k} \geq n$ για $k = 1, 2, \ldots, n-1$ και στην τελευταία ότι $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = 1$. Άρα, $\|B_n(g) - P_n(g)\|_\infty \leq 1/n$ για κάθε $n \geq 2$. Έπεται ότι $P_n(g) \to g$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

8.11. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, η οποία δεν είναι πολυώνυμο. Αν (p_n) είναι ακολουθία πολυωνύμων ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι $\deg(p_n) \to \infty$.*

Υπόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε $k = 0, 1, \ldots$ το σύνολο $\mathbb{R}_k[x]$ των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό το πολύ k είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{C}([0,1])$. Πράγματι· αν (p_n) είναι μια ακολουθία πολυωνύμων στον $\mathbb{R}_k[x]$, τότε υπάρχουν ακολουθίες $(a_0^n), (a_1^n), \ldots, (a_k^n)$ ώστε $p_n(x) = a_0^n + a_1^n x + \ldots + a_k^n x^k$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n = 1, 2, \ldots$. Υποθέτουμε ότι η $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$. Θα δείξουμε ότι κάθε ακολουθία (a_i^n), $i = 0, 1, \ldots, k$ συγκλίνει σε κάποιο $a_i \in \mathbb{R}$ και άρα η f είναι το πολυώνυμο $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k$. Θεωρούμε $k+1$ σημεία $t_0 < t_1 < \ldots < t_k$ (τυχαία αλλά σταθερά) στο διάστημα

$[0,1]$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$\begin{cases} a_0^n + a_1^n t_0 + \ldots + a_k^n t_0^k = p_n(t_0) \\ a_0^n + a_1^n t_1 + \ldots + a_k^n t_1^k = p_n(t_1) \\ \quad \vdots \\ a_0^n + a_1^n t_k + \ldots + a_k^n t_k^k = p_n(t_k) \end{cases}$$

Το παραπάνω σύστημα είναι γραμμικό $(k+1)\times(k+1)$ με αγνώστους τα a_j^n, $j = 0,1,\ldots,k$. Επίσης, η ορίζουσά του είναι τύπου Vandermonde:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & t_0 & \ldots & t_0^k \\ 1 & t_1 & \ldots & t_1^k \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & t_k & \ldots & t_k^k \end{vmatrix},$$

η οποία γνωρίζουμε ότι ισούται με

$$D = \prod_{0\le i<j\le k} (t_j - t_i)$$

και δεν είναι μηδενική από την επιλογή των t_j. Οπότε το σύστημα έχει μοναδική λύση $(a_0^n, a_1^n, \ldots, a_k^n)$, η οποία δίνεται ως $a_j^n = \frac{D_j}{D}$ για $j = 0,1,\ldots,k$. Κάθε D_j είναι *πεπερασμένος* γραμμικός συνδυασμός των t_j^i και $p_n(t_j)$ για $i,j = 0,1,\ldots,k$ (δηλαδή ακολουθία ως προς n). Επειδή δε, $p_n(t_j) \to f(t_j)$ για $j = 0,1,\ldots,k$ έχουμε ότι κάθε $(a_j^n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $\frac{1}{D}\lim_{n\to\infty} D_j$. Παρατηρήστε ότι χρειαστήκαμε μόνο την κατά σημείο σύγκλιση της (p_n) στην f. Η απόδειξη του ισχυρισμού είναι πλήρης.

Αν δεν ισχύει το ζητούμενο, τότε υπάρχει (k_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία δεικτών και $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\deg(p_{k_n}) \le m$ για $n = 1,2,\ldots$. Τότε, η ακολουθία (p_{k_n}) περιέχεται στο κλειστό $\mathbb{R}_m[x]$ και συγκλίνει (ομοιόμορφα) στην f. Άρα, η f είναι πολυώνυμο (βαθμού το πολύ m), άτοπο.

8.12. *Έστω $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$.*

(α) *Αν η f δεν είναι σταθερή, δείξτε ότι δεν υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[1,\infty)$.*

(β) *Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n(\frac{1}{x}) \to f(x)$ ομοιόμορφα ως προς x στο $[1,\infty)$.*

Υπόδειξη. (α) Αφού η f δεν είναι σταθερή, υπάρχουν σημεία $1 \le x < y$ ώστε $\delta := |f(x) - f(y)| > 0$. Αν υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[1,\infty)$, τότε υπάρχει πολυώνυμο p ώστε

$$(*) \qquad |p(t) - f(t)| < \delta/3, \quad t \ge 1.$$

Ειδικότερα, είναι $|p(x) - p(y)| > \delta/3$. Άρα, το πολυώνυμο p δεν είναι σταθερό, δηλαδή $|p(t)| \to +\infty$ καθώς $t \to \infty$. Επιπλέον, $\lim_{t\to\infty} f(t) = L$, οπότε υπάρχει $z > 1$ ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις: $|f(t) - L| < \delta/3$ και $|p(t)| > |L| + \delta$ για κάθε $t > z$. Τότε, χρησιμοποιώντας την $(*)$ καταλήγουμε σε άτοπο ως εξής: αν $t > z$ έχουμε

$$\delta < |p(t) - L| \leq |p(t) - f(t)| + |f(t) - L| < \delta/3 + \delta/ = 2\delta/3.$$

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$F(t) = \begin{cases} f(1/t), & 0 < t \leq 1 \\ L, & t = 0 \end{cases}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η F είναι συνεχής στο $[0, 1]$, άρα από το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $\|p_n - F\|_\infty < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα,

$$|p_n(x) - F(x)| = |p_n(x) - f(1/x)| < \frac{1}{n}$$

για κάθε $0 < x \leq 1$ και $n \in \mathbb{N}$. Ισοδύναμα,

$$|p_n(1/x) - f(x)| < \frac{1}{n}$$

για κάθε $x \geq 1$ και $n \in \mathbb{N}$. Η τελευταία δίνει ότι $p_n(1/x) \to f(x)$ ομοιόμορφα στο $[1, \infty)$.

8.13. *Δείξτε ότι το σύνολο των πολυωνύμων (των περιορισμών τους στο* $[0, 1]$*) είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας στον* $\mathcal{C}([0, 1])$.

Υπόδειξη. Γράφουμε $\mathbb{R}_n[x]$ για το σύνολο των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό το πολύ n. Τότε, το σύνολο όλων των πολυωνύμων γράφεται ως $\bigcup_{n=0}^\infty \mathbb{R}_n[x]$. Παρατηρήσαμε στην Άσκηση 5 ότι ο $\mathbb{R}_n[x]$ είναι κλειστός στον $\mathcal{C}([0, 1])$. Αν δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $\mathbb{R}_n[x]$ έχει κενό εσωτερικό στον $\mathcal{C}([0, 1])$, τότε θα έχουμε γράψει το σύνολο των πολυωνύμων ως αριθμήσιμη ένωση πουθενά πυκνών υποσυνόλων του $\mathcal{C}([0, 1])$. Για να το αποδείξουμε αυτό αρκεί να βρούμε οσοδήποτε κοντά σε κάθε πολυώνυμο συνεχή συνάρτηση η οποία δεν είναι πολυώνυμο. Έστω p πολυώνυμο και $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$h(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) + p(0), & 0 < x \leq 1 \\ p(0), & x = 0 \end{cases}$$

Υπάρχει $0 < \delta < \min\{\varepsilon, 1\}$ ώστε $|p(x) - p(y)| < \varepsilon/2$ για κάθε $x, y \in [0, 1]$ με $|x - y| \leq \delta$. Ορίζουμε τη συνεχή συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} h(x), & 0 \leq x \leq \frac{\delta}{2} \\ \frac{2}{\delta}[p(\delta) - h(\delta/2)](x - \delta/2) + h(\delta/2), & \frac{\delta}{2} < x < \delta \\ p(x), & \delta \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Η f είναι η ζητούμενη συνάρτηση: για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει $|p(x) - f(x)| < 2\varepsilon$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- αν $x \in [0, \delta/2]$ τότε
$$|p(x) - f(x)| \leq |p(x) - p(0)| + |x \sin(1/x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\delta}{2} < 2\varepsilon.$$

- αν $x \in (\delta/2, \delta)$ τότε
$$\begin{aligned} |p(x) - f(x)| &\leq |p(x) - h(\delta/2)| + \frac{2}{\delta}|p(\delta) - h(\delta/2)|(x - \delta/2) \\ &\leq |p(x) - p(0)| + \frac{\delta}{2}|\sin(2/\delta)| + |p(\delta) - p(0)| + \frac{\delta}{2}|\sin(2/\delta)| \\ &< \varepsilon + \delta < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

- αν $x \in [\delta, 1]$ τότε
$$|p(x) - f(x)| = 0 < 2\varepsilon.$$

Σε κάθε περίπτωση ισχύει $|p(x) - f(x)| < 2\varepsilon$. Τέλος, παρατηρήστε ότι η f δεν είναι πολυώνυμο αφού στο διάστημα $[0, \delta/2]$ παίρνει άπειρες φορές την τιμή $p(0)$ (και δεν είναι σταθερή εκεί).