Κεφάλαιο 7

Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων

Ομάδα Α΄

7.1. *Έστω* $f_n(t) = \frac{1}{1+nt}$, $t \in [0,1]$. *Δείξτε ότι η* (f_n) *συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, σε κάποια συνάρτηση* f *στο* $[0,1]$. *Ποιά είναι η* f*;*

Υπόδειξη. Αν $t=0$ τότε $f_n(0) = 1 \to 1$ όταν $n \to \infty$. Για κάθε $t \in (0,1]$ έχουμε

$$f_n(t) = \frac{1}{1+nt} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{\frac{1}{n}+t} \to 0.$$

Συνεπώς, η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο στην $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \in (0,1] \end{cases}$$

Η f είναι ασυνεχής στο σημείο $t_0 = 0$ ενώ όλες οι f_n είναι συνεχείς. Άρα, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

Άλλος τρόπος για να αιτιολογήσουμε τον τελευταίο ισχυρισμό: παρατηρούμε ότι $\|f_n - f\|_\infty \geq |f_n(1/n) - f(1/n)| = f_n(1/n) = 1/2$. Άρα, $\|f_n - f\|_\infty \not\to 0$.

7.2. *Έστω* $f_n(t) = \frac{t^{2n}}{1+t^{2n}}$, $t \in \mathbb{R}$. *Δείξτε ότι η* (f_n) *συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, σε κάποια συνάρτηση* f *στο* $\mathbb{R}$. *Ποιά είναι η* f*;*

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι:

(i) Αν $|t| < 1$ τότε $t^{2n} \to 0$, άρα $f_n(t) \to \frac{0}{1+0} = 0$.

(ii) Αν $|t| = 1$ τότε $t^{2n} = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $f_n(t) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$.

(iii) Αν $|t| > 1$ τότε $t^{-2n} \to 0$, άρα $f_n(t) = \frac{1}{t^{-2n}+1} \to \frac{1}{0+1} = 1$.

Συνεπώς, η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο στην $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(t) = \begin{cases} 0, & |t| < 1 \\ \frac{1}{2}, & |t| = 1 \\ 1, & |t| > 1 \end{cases}$$

Η f είναι ασυνεχής στα σημεία $t_1 = 1$ και $t_2 = -1$, ενώ όλες οι f_n είναι συνεχείς. Άρα, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

7.3. *Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_n(t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{1}{n+1} \text{ ή } \frac{1}{n} < t \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{t}\right), & \frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n} \end{cases}$. Δείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια f συνεχή στο $\mathbb{R}$. Ισχύει ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$;*

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι $f_n \to 0$ κατά σημείο. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν $t \leq 0$ τότε $f_n(t) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = 0$.

(ii) Αν $t > 0$ τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < t$. Συνεπώς, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $t \notin \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, απ' όπου έπεται ότι η $(f_n(t))$ είναι τελικά σταθερή και ίση με 0. Δηλαδή, σε αυτή την περίπτωση ισχύει πάλι ότι $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = 0$.

Παρατηρούμε τώρα ότι $\|f_n - 0\|_\infty = \|f_n\|_\infty \leq 1$ διότι $\sin^2(\pi/t) \leq 1$ και ισχύει ισότητα διότι, αν θέσουμε $t_n = \frac{2}{2n+1}$ τότε $t_n \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ και $\|f_n\|_\infty \geq |f_n(t_n)| = \sin^2\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$. Αφού $\|f_n\|_\infty = 1 \not\to 1$, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

7.4. *Έστω $f_n(t) = n^p t(1-t^2)^n$, $t \in [0,1]$, με $p > 0$ παράμετρο στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι για κάθε $p > 0$ η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια f στο $[0,1]$. Για ποιές τιμές του p είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη; Για ποιές τιμές του p ισχύει ότι $\int_0^1 f_n \to \int_0^1 f$;*

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι $f_n \to f \equiv 0$ κατά σημείο. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν $t = 0$ ή $t = 1$ τότε $f_n(t) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = 0$.

(ii) Αν $0 < t < 1$ τότε $0 < 1 - t^2 < 1$. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου βλέπουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} n^p t(1-t^2)^n = 0$. Συνεπώς, σε αυτή την περίπτωση ισχύει πάλι ότι $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = 0$.

Έχουμε $\|f_n - 0\|_\infty = \max(f_n)$ διότι $f_n \geq 0$. Παραγωγίζοντας την f_n βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} f_n'(t) &= n^p(1-t^2)^n - n^p tn(1-t^2)^{n-1}(2t) \\ &= n^p(1-t^2)^{n-1}[1 - t^2 - 2nt^2] = n^p(1-t^2)^{n-1}[1-(2n+1)t^2]. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\|f_n - 0\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) = \frac{n^p}{\sqrt{2n+1}}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n.$$

Παρατηρούμε ότι $\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n \to \frac{1}{\sqrt{e}}$. Συνεπώς,

(i) Αν $0 < p < \frac{1}{2}$ τότε $\frac{n^p}{\sqrt{2n+1}} \to 0$ και $\|f_n - 0\|_\infty \to 0$.

(ii) Αν $p > \frac{1}{2}$ τότε $\frac{n^p}{\sqrt{2n+1}} \to +\infty$ και $\|f_n - 0\|_\infty \to +\infty$.

(iii) Αν $p = \frac{1}{2}$ τότε $\frac{n^p}{\sqrt{2n+1}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}$ και $\|f_n - 0\|_\infty \to \frac{1}{\sqrt{2e}} > 0$.

Έπεται ότι $f_n \to 0$ ομοιόμορφα (δηλαδή, $\|f_n - 0\|_\infty \to 0$) αν και μόνο αν $0 < p < \frac{1}{2}$.

Για το τελευταίο ερώτημα υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της f_n (για κάθε τιμή της παραμέτρου p): θέτοντας $y = 1 - t^2$ βλέπουμε ότι

$$\int_0^1 n^p t(1-t^2)^n dt = \int_0^1 \frac{n^p}{2} y^n dy = \frac{n^p}{2}\int_0^1 y^n dy = \frac{n^p}{2(n+1)}.$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{n^p}{2(n+1)} \to 0$ αν και μόνο αν $0 < p < 1$. Άρα, $\int_0^1 f_n \to \int_0^1 f$ αν $0 < p < 1$.

7.5. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων*

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \delta$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $\left|\left(x + \frac{1}{n}\right) - x\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \delta$, άρα

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

7.6. *Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^\infty a_k$ συγκλίνει απολύτως. Δείξτε ότι οι σειρές συναρτήσεων $\sum_{k=1}^\infty a_k \sin(kt)$ και $\sum_{k=1}^\infty a_k \cos(kt)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. Εφαρμόζουμε το κριτήριο του Weierstrass: αν $f_k(t) = a_k \sin(kt)$ τότε

$$|f_k(t)| = |a_k \sin(kt)| \leq |a_k|, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Από την υπόθεση, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει. Άρα, η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kt)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Για την $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt)$ δουλεύουμε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο.

7.7. *Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x^2}$ συγκλίνει για κάθε $x \neq 0$ και αποκλίνει για $x = 0$. Δείξτε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[A, \infty)$ ή $(-\infty, -A]$, όπου $A > 0$.*

Υπόδειξη. Αν $x = 0$ τότε $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2 0^2} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = +\infty$. Αν $x \neq 0$ τότε

$$0 < \frac{1}{1+k^2x^2} < \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{k^2}$$

και αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x^2}$ συγκλίνει.

Έστω $A > 0$. Αν $f_k(x) = \frac{1}{1+k^2x^2}$ τότε, για κάθε $x \in [A, \infty)$,

$$0 < \frac{1}{1+k^2x^2} < \frac{1}{x^2k^2} \leq \frac{1}{A^2k^2}$$

και αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{A^2k^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο του Weierstrass η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[A, \infty)$. Όμοια για το διάστημα $(-\infty, -A]$.

7.8. *Έστω $\alpha > 1/2$. Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}(1+kx^2)}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_k(x) = \frac{x}{k^{\alpha}(1+kx^2)}$. Παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι

$$f_k'(x) = \frac{1-kx^2}{k^{\alpha}(1+kx^2)^2}.$$

Η f_k παίρνει μέγιστη τιμή στο $[0, \infty)$ όταν $x = \frac{1}{\sqrt{k}}$. Αφού η f_k είναι περιττή συνάρτηση, συμπεραίνουμε ότι

$$\|f_k\|_{\infty} = f_k\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \frac{1}{2k^{\alpha+\frac{1}{2}}}.$$

Από την υπόθεση για το α έχουμε $\alpha + \frac{1}{2} > 1$, άρα η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

συγκλίνει. Από το κριτήριο του Weierstrass έπεται ότι η

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}(1+kx^2)}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

7.9. (α) *Δώστε παράδειγμα ακολουθίας ασυνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση.*

(β) *Δώστε παράδειγμα ακολουθίας ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ που συγκλίνει κατά σημείο σε μια μη ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{1}{n}$ αν $x \in \mathbb{Q}$ και $f_n(x) = 0$ αν $x \notin \mathbb{Q}$. Παρατηρήστε ότι κάθε f_n είναι *ασυνεχής σε κάθε* $x \in \mathbb{R}$. Επίσης, $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$, άρα $f_n \to f \equiv 0$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ (και η $f \equiv 0$ είναι συνεχής συνάρτηση).

(β) Θεωρούμε μια αρίθμηση $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ του $[a,b] \cap \mathbb{Q}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = 1$ αν $x \in D_n = \{q_1, \ldots, q_n\}$ και $f_n(x) = 0$ αν $x \notin D_n$. Παρατηρήστε ότι κάθε f_n έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας, τα $q_1, \ldots, q_n$, άρα είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Επίσης, $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$, όπου $f(x) = 1$ αν $x \in \mathbb{Q} \cap [a,b]$ και $f(x) = 0$ αλλιώς (παρατηρήστε ότι: αν $x = q_m$ για κάποιον $m \in \mathbb{N}$, τότε $f_n(x) = 1$ για κάθε $n \geq m$, άρα $f_n(x) \to 1 = f(x)$). Τέλος, η f δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη (κάθε άνω άθροισμα της f είναι ίσο με $b-a$ και κάθε κάτω άθροισμα της f είναι ίσο με 0).

7.10. (α) *Έστω X σύνολο, $f_n : X \to \mathbb{R}$ για $n = 1, 2, \ldots$ και $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X. Αποδείξτε ότι $|f_n| \to |f|$ ομοιόμορφα στο X.*

(β) *Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = (-1)^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)$ για $n = 1, 2, \ldots$ Αποδείξτε ότι η $(|f_n|)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$ ενώ η (f_n) δεν συγκλίνει.*

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι

$$\big|\, |f_n(x)| - |f(x)| \,\big| \leq |f_n(x) - f(x)|$$

για κάθε $x \in X$, άρα

$$\|\, |f_n| - |f| \,\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty \to 0.$$

Άρα, $|f_n| \to |f|$ ομοιόμορφα στο X.

(β) Παρατηρούμε ότι $f_{2n}(x) = 1 + \frac{x}{n} \to 1$ για κάθε $x \in [0,1]$ και $f_{2n-1}(x) = -\left(1 + \frac{x}{n}\right) \to -1$ για κάθε $x \in [0,1]$. Συνεπώς, η $(f_n(x))$ αποκλίνει για κάθε $x \in [0,1]$. Όμως,

$$|f_n(x)| = 1 + \frac{x}{n} \to f(x) = 1$$

στο $[0,1]$ και

$$\|f_n - f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} \frac{x}{n} = \frac{1}{n} \to 0.$$

Δηλαδή, $|f_n| \to f \equiv 1$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

7.11. *Έστω X σύνολο, $f_n, g_n, f, g : X \to \mathbb{R}$ για $n = 1, 2, \dots$ ώστε $f_n \to f$ και $g_n \to g$ ομοιόμορφα στο X. Αποδείξτε ότι αν οι f, g είναι φραγμένες τότε $f_n g_n \to fg$ ομοιόμορφα στο X.*

Υπόδειξη. Υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|f\|_\infty \leq M$ και $\|g\|_\infty \leq M$. Επίσης, αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$, $\|f_n - f\|_\infty < 1$, και άρα, $\|f_n\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty < 1 + M$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\|f_n g_n - fg\|_\infty &\leq \|f_n(g_n - g)\|_\infty + \|g(f_n - f)\|_\infty \\
&\leq \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \|f_n - f\|_\infty \\
&\leq (1 + M)\|g_n - g\|_\infty + M\|f_n - f\|_\infty \to 0,
\end{aligned}$$

δηλαδή $f_n g_n \to fg$ ομοιόμορφα στο X.

7.12. *Βρείτε ακολουθίες $(f_n), (g_n)$ ορισμένες στο $\mathbb{R}$, οι οποίες συγκλίνουν ομοιόμορφα, αλλά η $(f_n g_n)$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ και ορίζουμε $f_n = f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς, $f_n \to f$ ομοιόμορφα (έχουμε $\|f_n - f\|_\infty = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$).

Επίσης, ορίζουμε $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g_n(x) = \frac{1}{n}$. Τότε, $g_n \to 0$ ομοιόμορφα, διότι $\|g_n - 0\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$.

Όμως, για την ακολουθία των συναρτήσεων $(f_n g_n)(x) = \frac{x}{n}$ έχουμε $f_n g_n \to 0$ κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα, αφού $\|f_n g_n - 0\|_\infty = \sup\left\{\frac{|x|}{n} : x \in \mathbb{R}\right\} = +\infty$.

7.13. *Έστω $(X, d), (Y, \rho)$ μετρικοί χώροι και $f_n, f : X \to Y$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X. Αν κάθε f_n είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sup\{\rho(f_{n_0}(x), f(x)) : x \in X\} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Αφού η f_{n_0} είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: για κάθε $x, y \in X$ με $d(x, y) < \delta$,

$$\rho(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Τότε, για κάθε $x, y \in X$ με $d(x,y) < \delta$, γράφουμε

$$\begin{aligned}\rho(f(x), f(y)) &\leq \rho(f(x), f_{n_0}(x)) + \rho(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) + \rho(f_{n_0}(y), f(y)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Άρα, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

7.14. *Έστω $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι: αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X και κάθε f_n είναι φραγμένη στο X, τότε η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο X.*

Υπόδειξη. Παίρνουμε $\varepsilon = 1 > 0$. Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα, από το κριτήριο Cauchy υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n, m \geq n_0$, $\|f_m - f_n\|_\infty < 1$. Ειδικότερα, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$\|f_n\|_\infty \leq \|f_n - f_{n_0}\|_\infty + \|f_{n_0}\|_\infty < 1 + \|f_{n_0}\|_\infty.$$

Κάθε f_n είναι φραγμένη, αν λοιπόν ορίσουμε

$$M = \max\{\|f_1\|_\infty, \|f_2\|_\infty, \ldots, \|f_{n_0-1}\|_\infty, 1 + \|f_{n_0}\|_\infty\} < +\infty,$$

τότε $\|f_n\|_\infty \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλάδή, η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη.

7.15. *Έστω $f, f_n : (X, \rho) \to [a,b]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X. Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι $g \circ f_n \to g \circ f$ ομοιόμορφα στο X.*

Υπόδειξη. Η g είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $t, s \in [a,b]$ και $|t - s| < \delta$ τότε $|g(t) - g(s)| < \varepsilon$.

Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in X$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \delta$. Τότε, θέτοντας $t = f_n(x)$ και $s = f(x)$ στην προηγούμενη σχέση, συμπεραίνουμε ότι: για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in X$ ισχύει $|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon$.

Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in X$ ισχύει $|(g \circ f_n)(x) - (g \circ f)(x)| < \varepsilon$. Άρα, $g \circ f_n \to g \circ f$ ομοιόμορφα στο X.

7.16. *Έστω $\delta > 0$ και $f, f_n : X \to \mathbb{R}$ ώστε $|f_n(x)| \geq \delta$ για κάθε $x \in X$ και $n = 1, 2, \ldots$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X, δείξτε ότι:*

(α) *$f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in X$.*

(β) *$\frac{1}{f_n} \to \frac{1}{f}$ ομοιόμορφα στο X.*

Υπόδειξη. (α) Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα, για κάθε $x \in X$ έχουμε $f_n(x) \to f(x)$. Από την $|f_n(x)| \geq \delta$, $n \in \mathbb{N}$, βλέπουμε ότι

$$|f(x)| = \lim_{n \to \infty} |f_n(x)| \geq \delta.$$

Ειδικότερα, $f(x) \neq 0$.

(β) Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in X$,

$$\left|\frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f(x)}\right| = \frac{|f_n(x) - f(x)|}{|f_n(x)|\,|f(x)|} \leq \frac{|f_n(x) - f(x)|}{\delta^2}.$$

Άρα,

$$\left\|\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f}\right\|_\infty \leq \frac{1}{\delta^2}\|f_n - f\|_\infty \to 0.$$

Δηλαδή, $\frac{1}{f_n} \to \frac{1}{f}$ ομοιόμορφα στο X.

Ομάδα Β΄

7.17. *Έστω* $f_n(t) = \frac{t}{1+nt^2}$, $t \in \mathbb{R}$. *Δείξτε ότι υπάρχει* f *ώστε* $f_n \to f$ *ομοιόμορφα στο* $\mathbb{R}$. *Δείξτε ότι* $f_n'(t) \to f'(t)$ *αν* $t \neq 0$, *αλλά* $f_n'(0) \not\to f'(0)$. *Για ποιά διαστήματα* $[a,b]$ *ισχύει ότι* $f_n' \to f'$ *ομοιόμορφα στο* $[a,b]$;

Υπόδειξη. (α) Αν $t = 0$ τότε $f_n(0) = 0 \to 0$. Αν $t \neq 0$ τότε $1+nt^2 \to +\infty$, άρα $f_n(t) \to 0$. Συνεπώς, $f_n \to f \equiv 0$ κατά σημείο.

Για την ομοιόμορφη σύγκλιση εξετάζουμε αν

$$\|f_n\|_\infty = \sup\left\{\frac{|t|}{1+nt^2} : t \in \mathbb{R}\right\} = \sup\left\{\frac{t}{1+nt^2} : t \geq 0\right\} \to 0.$$

Μελετάμε την $|f_n| = f_n$ στο $[0,\infty)$. Έχουμε

$$f_n'(t) = \frac{1+nt^2 - 2nt^2}{(1+nt^2)^2} = \frac{1-nt^2}{(1+nt^2)^2},$$

δηλαδή η $|f_n|$ παίρνει μέγιστη τιμή στο σημείο $1/\sqrt{n}$:

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+n\frac{1}{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0.$$

Συνεπώς, $f_n \to f \equiv 0$ ομοιόμορφα.

(β) Εξετάζουμε τώρα τη σύγκλιση της (f_n'): αν $t = 0$ τότε $f_n'(0) = 1 \to 1$. Αν $t \neq 0$ τότε

$$f_n'(t) = \frac{1-nt^2}{1+2nt^2+n^2t^4} \to 0,$$

διότι ο βαθμός του παρονομαστή (ως προς n) είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του αριθμητή. Αφού $f' \equiv 0$, η f_n' δεν συγκλίνει στην f' στο σημείο 0. Ειδικότερα, η (f_n') δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f' \equiv 0$ σε κανένα διάστημα $[a,b]$ το οποίο περιέχει το 0.

Έστω τώρα διάστημα $[a,b]$ το οποίο δεν περιέχει το 0. Εξετάζουμε μόνο την περίπτωση $0<a<b$: έχουμε

$$|f_n'(t)| = \frac{|1-nt^2|}{(1+nt^2)^2} \leq \frac{1+nt^2}{(1+nt^2)^2} = \frac{1}{1+nt^2} \leq \frac{1}{1+na^2},$$

άρα

$$\max_{t\in[a,b]} |f_n'(t)| \leq \frac{1}{1+na^2} \to 0.$$

Άρα, $f_n' \to f' \equiv 0$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Το ίδιο ισχύει αν $a<b<0$ (εξηγήστε γιατί).

7.18. *Έστω $f_n(t) = \frac{1}{n}e^{-n^2t^2}$, $t\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ και $f_n' \to 0$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι σε κάθε διάστημα το οποίο περιέχει το 0 η f_n' δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση, ενώ σε κάθε κλειστό διάστημα το οποίο δεν περιέχει το 0 η f_n' συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση.*

Υπόδειξη. Για κάθε $t\in\mathbb{R}$ έχουμε $e^{n^2t^2}\geq 1$, άρα $0\leq f_n(t) = \frac{1}{n}e^{-n^2t^2} \leq \frac{1}{n}$, με ισότητα αν $t=0$. Συνεπώς, $f_n(t)\to 0$ κατά σημείο, και μάλιστα,

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0,$$

άρα $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Έστω $t\in\mathbb{R}$. Τότε,

$$|f_n'(t)| = 2|t|ne^{-n^2t^2} \to 0$$

διότι $e^{n^2t^2} \geq 1+n^2t^2$ άρα $|f_n'(t)| < \frac{2|t|n}{1+n^2t^2} \to 0$. Δηλαδή, $f_n' \to f' \equiv 0$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.

(α) Έστω $[a,b]$ κλειστό διάστημα που δεν περιέχει το 0. Εξετάζουμε την περίπτωση $0<a<b$: παρατηρούμε ότι, για κάθε $t\in[a,b]$,

$$|f_n'(t)| = 2tne^{-n^2t^2} \leq 2bne^{-n^2a^2}.$$

Συνεπώς,

$$\max_{t\in[a,b]} |f_n(t)| \leq 2bne^{-n^2a^2} < \frac{2bn}{n^2a^2} = \frac{2b}{a^2n} \to 0.$$

Έπεται ότι $f_n' \to 0$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$ (η περίπτωση $a<b<0$ εξετάζεται με ανάλογο τρόπο).

(β) Έστω $[a,b]$ κλειστό διάστημα που περιέχει το 0. Για μεγάλα n, τουλάχιστον ένας από τους $\pm\frac{1}{n}$ θα ανήκει στο $[a,b]$ (εξηγήστε γιατί), άρα

$$\max_{t\in[a,b]} |f_n'(t)| \geq |f_n'(\pm 1/n)| = 2\frac{1}{n}ne^{-n^2\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{e}.$$

Αυτό δείχνει ότι $f_n' \not\to 0$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$.

7.19. *Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων* $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *με*

$$f_1(x) = \sqrt{x}, \qquad f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)}$$

συγκλίνει κατά σημείο, και βρείτε την οριακή συνάρτηση.

Υπόδειξη. Αν $x = 0$ τότε $f_1(0) = 0$ και αν $f_k(0) = 0$ τότε $f_{k+1}(0) = \sqrt{0 + f_k(0)} = 0$. Επαγωγικά βλέπουμε ότι $f_n(0) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $f_n(0) \to 0$.

Έστω $x > 0$. Ελέγχουμε πρώτα με επαγωγή ότι $f_n(x) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, $f_1(x) = \sqrt{x} < \sqrt{x + \sqrt{x}} = f_2(x)$ και αν $f_k(x) < f_{k+1}(x)$ τότε $f_{k+1}(x) = \sqrt{x + f_k(x)} < \sqrt{x + f_{k+1}(x)} = f_{k+2}(x)$. Έπεται ότι η ακολουθία $(f_n(x))$ είναι γνησίως αύξουσα.

Δείχνουμε ότι η $(f_n(x))$ είναι άνω φραγμένη διακρίνοντας δύο περιπτώσεις:

(i) Αν $0 < x < 2$ τότε $f_n(x) < 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ διότι $f_1(x) = \sqrt{x} < \sqrt{2} < 2$ και αν $f_k(x) < 2$ τότε $f_{k+1}(x) = \sqrt{x + f_k(x)} < \sqrt{2+2} = 2$.

(ii) Αν $x \geq 2$ τότε $f_n(x) < x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ διότι $f_1(x) = \sqrt{x} < x$ και αν $f_k(x) < x$ τότε $f_{k+1}(x) = \sqrt{x + f_k(x)} < \sqrt{x + x} = \sqrt{2x} \leq \sqrt{x^2} = x$.

Σε κάθε περίπτωση, η $(f_n(x))$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, άρα συγκλίνει σε κάποιο $y = y_x \in \mathbb{R}$. Επιστρέφοντας στην αναδρομική σχέση $f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)}$ και αφήνοντας το $n \to \infty$, παίρνουμε $y = \sqrt{y + x}$ δηλαδή $y^2 - y - x = 0$. Αφού το y είναι θετικό, έχουμε $y = \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}$. Δηλαδή, $f_n \to f$ κατά σημείο, όπου

$$f(t) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}, & x > 0 \end{cases}$$

7.20. *Έστω* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *ακολουθία αυξουσών συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι η* (f_n) *συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνεχή συνάρτηση* f*. Δείξτε ότι η* f *είναι αύξουσα και ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.*

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η f είναι αύξουσα συνάρτηση: έστω $x < y$ στο $[a,b]$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $f_n(x) \leq f_n(y)$ διότι η f_n είναι αύξουσα. Έπεται ότι

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \leq \lim_{n\to\infty} f_n(y) = f(y).$$

Από την υπόθεση, η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in [a,b]$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Βρίσκουμε $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{b-a}{m} < \delta$ και χωρίζουμε το $[a,b]$ σε m ίσα διαδοχικά διαστήματα, με τα σημεία

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_m = b$$

όπου $x_k = a + \frac{k(b-a)}{m}$, $k = 0, 1, \ldots, m$. Αφού $f_n \to f$ κατά σημείο, έχουμε $f_n(x_k) \to f(x_k)$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, m$. Συνεπώς, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $k = 0, 1, \ldots, m$,

$$|f(x_k) - f_n(x_k)| < \varepsilon.$$

Έστω $x \in [a, b]$ και $n \geq n_0$. Υπάρχει $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ ώστε $x \in [x_k, x_{k+1}]$. Χρησιμοποιώντας τη μονοτονία των f, f_n παρατηρούμε ότι

$$f(x) - f_n(x) \leq f(x_{k+1}) - f_n(x_k) = [f(x_{k+1}) - f(x_k)] + [f(x_k) - f_n(x_k)] < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

και

$$f(x) - f_n(x) \geq f(x_k) - f_n(x_{k+1}) = [f(x_k) - f(x_{k+1})] + [f(x_{k+1}) - f_n(x_{k+1})] > -\varepsilon - \varepsilon = -2\varepsilon.$$

Άρα,

$$|f(x) - f_n(x)| < 2\varepsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in [a, b]$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

7.21. *Έστω $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι*

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(t)\, dt \to \int_0^1 f(t)\, dt.$$

Ισχύει πάντα το ίδιο αν η σύγκλιση είναι κατά σημείο;

Υπόδειξη. Αφού οι f_n είναι συνεχείς και $f_n \to f$ ομοιόμορφα, η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$. Ειδικότερα, $\|f\|_\infty < +\infty$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 f(t)\, dt - \int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(t)\, dt \right| &= \left| \int_{1-\frac{1}{n}}^1 f(t)\, dt + \int_0^{1-\frac{1}{n}} f(t)\, dt - \int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(t)\, dt \right| \\
&\leq \left| \int_{1-\frac{1}{n}}^1 f(t)\, dt \right| + \left| \int_0^{1-\frac{1}{n}} (f(t) - f_n(t))\, dt \right| \\
&\leq \int_{1-\frac{1}{n}}^1 |f(t)|\, dt + \int_0^{1-\frac{1}{n}} |f(t) - f_n(t)|\, dt \\
&\leq \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \|f\|_\infty dt + \int_0^{1-\frac{1}{n}} \|f - f_n\|_\infty dt \\
&\leq \frac{1}{n} \|f\|_\infty + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|f - f_n\|_\infty \\
&\leq \frac{\|f\|_\infty}{n} + \|f - f_n\|_\infty \to 0,
\end{aligned}$$

διότι $\|f-f_n\|_\infty \to 0$ αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

Αν η σύγκλιση είναι κατά σημείο, το προηγούμενο αποτέλεσμα δεν ισχύει γενικά. Για παράδειγμα αν

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x, & 0 \le x \le \frac{1}{2n} \\ -2n^2\left(x-\frac{1}{n}\right), & \frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

τότε εύκολα ελέγχουμε ότι $f_n \to 0$ κατά σημείο, όμως,

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx = 1 \not\to 0 = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

7.22. *Ορίζουμε ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με*

$$f_n(x) = n^2x(1-x)^{nx}.$$

Δείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο και βρείτε την οριακή συνάρτηση f. Βρείτε το όριο των ολοκληρωμάτων

$$I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt.$$

Είναι η σύγκλιση της (f_n) στην f ομοιόμορφη;

Υπόδειξη. Αν $x=0$ τότε $f_n(0)=0\to 0$. Αν $0<x\le 1$ τότε $0\le (1-x)^x<1$, άρα

$$n^2x(1-x)^{nx} = xn^2[(1-x)^x]^n \to 0.$$

Συνεπώς, $f_n \to 0$ κατά σημείο στο $[0,1]$.

Για το ολοκλήρωμα της f_n παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $x \mapsto (1-x)^x$ είναι φθίνουσα στο $[0,1]$, άρα

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(x)\,dx &= \int_0^1 n^2x(1-x)^{nx}dx \ge \int_{\frac{1}{2\sqrt{n}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} n^2x(1-x)^{nx}dx \\ &\ge \int_{\frac{1}{2\sqrt{n}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} n^2\frac{1}{2\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n\frac{1}{\sqrt{n}}}dx = \frac{n^2}{2\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\frac{1}{2\sqrt{n}} \\ &= \frac{n}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} \ge \frac{n}{4e} \to +\infty.\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι η σύγκλιση της (f_n) στην $f\equiv 0$ δεν είναι ομοιόμορφη: θα είχαμε

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = 0,$$

ενώ τα ολοκληρώματα αριστερά τείνουν στο $+\infty$. Ένας άλλος τρόπος για να το δούμε, είναι να παρατηρήσουμε ότι

$$\|f_n\|_\infty \geq f_n(1/n) = n^2 \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n\frac{1}{n}} = n - 1 \to +\infty.$$

7.23. *Ορίζουμε $f_n : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ θέτοντας $f_1(x) = \sin x$ και*

$$f_{n+1}(x) = \sin(f_n(x)). \quad n \in \mathbb{N}.$$

Εξετάστε την (f_n) ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση.

Υπόδειξη. Επαγωγικά δείχνουμε ότι κάθε f_n είναι αύξουσα και παίρνει τιμές στο $[0, 1]$. Επίσης, για κάθε $x \in [0, \pi/2]$ ισχύει

$$(*) \qquad 0 \leq f_{n+1}(x) = \sin(f_n(x)) \leq f_n(x), \quad n \in \mathbb{N}$$

διότι $\sin t \leq t$ αν $t \in [0, \pi/2]$.

Η $(*)$ δείχνει ότι, για κάθε $x \in [0, \pi/2]$, η ακολουθία $(f_n(x))$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το 0, άρα συγκλίνει σε κάποιον $\ell_x \geq 0$. Επιπλέον,

$$\ell_x = \lim_{n\to\infty} f_{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} \sin(f_n(x)) = \sin\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big) = \sin \ell_x,$$

άρα $\ell_x = 0$ (η εξίσωση $\sin t = t$ έχει μοναδική ρίζα την $t = 0$). Δηλαδή, $f_n \to 0$ κατά σημείο.

Για να εξετάσουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση, παρατηρούμε ότι κάθε f_n είναι μη αρνητική και αύξουσα, άρα

$$\|f_n\|_\infty = \max_{x\in[0,\pi/2]} f_n(x) = f_n(\pi/2) \to 0$$

όταν $n \to \infty$. Άρα, $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $[0, \pi/2]$.

7.24. *Δείξτε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty}(1-x)x^k$ συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο $[0, 1]$. Αντιθέτως, δείξτε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k(1-x)$ συγκλινει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.*

Υπόδειξη. (α) Για την $\sum_{k=0}^{\infty}(1-x)x^k$: υπολογίζουμε τα μερικά αθροίσματα: αν $x = 1$ τότε $s_n(1) = 0$, ενώ αν $0 \leq x < 1$ έχουμε

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(1-x)x^k = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = 1 - x^{n+1} \to 1.$$

Άρα, $s_n(x) \to s(x)$, όπου $s(x) = 0$ αν $x = 1$ και $s(x) = 1$ αν $0 \leq x < 1$. Η s είναι ασυνεχής στο σημείο $x = 1$, άρα η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

(β) Για την $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k(1-x)$: όπως πριν,

$$s_n(x) = (1-x)\sum_{k=0}^{n}(-x)^k = (1-x)\frac{1-(-1)^{k+1}x^{n+1}}{1+x}.$$

Αν $0 \leq x < 1$ τότε $x^{n+1} \to 0$, άρα $s_n(x) \to \frac{1-x}{1+x}$. Αν $x = 1$ τότε $s_n(1) = 0 \to 0 = \frac{1-1}{1+1}$. Συνεπώς, $s_n \to s$ κατά σημείο, όπου $s : [0,1] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(1-x)(-1)^k x^k = \frac{1-x}{1+x}.$$

Για να δείξουμε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη, θεωρούμε τη διαφορά

$$\left|s_n(x) - \frac{1-x}{1+x}\right| = \left|\frac{1-x}{1+x}(-1)^n x^{n+1}\right| = \frac{x^{n+1}-x^{n+2}}{1+x} \leq x^{n+1} - x^{n+2}.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $x \mapsto x^{n+1} - x^{n+2}$ (στο $[0,1]$) παίρνει μέγιστη τιμή στο σημείο $\frac{n+1}{n+2}$, η οποία είναι ίση με

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}\left[1 - \frac{n+1}{n+2}\right] < \frac{1}{n+2}.$$

Συνεπώς,

$$\|s_n - s\|_\infty \leq \max_{x\in[0,1]}(x^{n+1} - x^{n+2}) < \frac{1}{n+2} \to 0.$$

Έπεται ότι η σειρά $\frac{1-x}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k(1-x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

7.25. *Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\sin\left(1+\frac{x}{k}\right)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[-A,A]$, $A>0$.

Υπόδειξη. Έστω $A > 0$. Γράφουμε $\sin\left(1+\frac{x}{k}\right) = \sin 1\cdot\cos(x/k) + \cos 1\cdot\sin(x/k)$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\cos\left(\frac{x}{k}\right) \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\sin\left(\frac{x}{k}\right)$$

συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[-A,A]$.

(α) Για την $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\sin\left(\frac{x}{k}\right)$: παρατηρούμε ότι

$$|f_k(x)| = \left|\frac{1}{\sqrt{k}}\sin\left(\frac{x}{k}\right)\right| \leq \frac{|x|}{k^{3/2}} \leq \frac{A}{k^{3/2}}$$

και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A}{k^{3/2}}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο του Weierstrass, η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\sin\left(\frac{x}{k}\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-A,A]$.

(β) Για την $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\cos\left(\frac{x}{k}\right)$: παρατηρούμε ότι

$$\left|\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\cos\left(\frac{x}{k}\right) - \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right| = \frac{1}{\sqrt{k}}\left|1-\cos\left(\frac{x}{k}\right)\right| = \frac{2}{\sqrt{k}}\sin^2\left(\frac{x}{2k}\right) \leq \frac{x^2}{2k^{5/2}} \leq \frac{A^2}{2k^{5/2}}$$

και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^2}{2k^{5/2}}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο του Weierstrass, η $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\cos\left(\frac{x}{k}\right) - \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-A,A]$. Από την άλλη πλευρά, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ συγκλίνει (από το κριτήριο του Leibniz) άρα συγκλίνει ομοιόμορφα σαν σειρά (σταθερών!) συναρτήσεων στο $[-A,A]$. Προσθέτοντας, συμπεραίνουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\cos\left(\frac{x}{k}\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-A,A]$.

Από τα (α) και (β) έπεται ότι η

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(1+\frac{x}{k}\right) = \sin 1\sum_{k=1}^{\infty}\cos\left(\frac{x}{k}\right) + \cos 1\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{x}{k}\right)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-A,A]$.

7.26. *Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^2+k}{k^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $[-A,A]$, $A>0$, αλλά δεν συγκλίνει απολύτως για καμιά τιμή του x.*

Υπόδειξη. Έστω $A>0$. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}$ συγκλίνει από το κριτήριο του Leibniz, άρα συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-A,A]$ αν την δούμε σαν σειρά (σταθερών) συναρτήσεων.

Αν ορίσουμε $f_k(x) = (-1)^k\frac{x^2}{k^2}$, τότε

$$|f_k(x)| = \frac{x^2}{k^2} \leq \frac{A^2}{k^2}$$

στο $[-A,A]$, και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^2}{k^2}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο του Weierstrass η $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^2}{k^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-A,A]$. Προσθέτοντας βλέπουμε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^2+k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^2}{k^2}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-A,A]$.

Για την απόλυτη σύγκλιση παρατηρούμε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(-1)^k\frac{x^2+k}{k^2}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^2+k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = +\infty.$$

Δηλαδή, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^2+k}{k^2}$ δεν συγκλίνει απολύτως για καμιά τιμή του x.

7.27. *Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1}-\frac{x^{k+1}}{2k+2}\right)$$

συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο $[0,1]$.

Υπόδειξη. Έστω $0<x<1$. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου, ελέγχουμε εύκολα ότι οι σειρές $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ και $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{2k+2}$ συγκλίνουν. Το ίδιο ισχύει, προφανώς, αν $x=0$. Άρα, η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1}-\frac{x^{k+1}}{2k+2}\right)$ συγκλίνει για κάθε $0\leq x<1$. Στην περίπτωση $x=1$ έχουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 < +\infty.$$

Δηλαδή, η $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1}-\frac{x^{k+1}}{2k+2}\right)$ συγκλίνει για κάθε $x\in[0,1]$.

Ας υποθέσουμε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$. Τότε, η συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1}-\frac{x^{k+1}}{2k+2}\right)$$

είναι συνεχής στο $[0,1]$. Γνωρίζουμε ότι: αν $|x|<1$ τότε

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Συνεπώς, για κάθε $x\in[0,1)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{2k+2} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2k}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{2(k+1)}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x^2)^k}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1}\\
&= \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-x^2}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x^2}{1-x}\right)\\
&= \frac{1}{2}\ln(1+x).
\end{aligned}$$

Αφού $f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x)$ στο $[0,1)$ και η f είναι συνεχής στο σημείο $x=1$, θα πρέπει να ισχύει

$$f(1) = \frac{\ln 2}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Είναι όμως γνωστό ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2,$$

απ' όπου καταλήγουμε σε άτοπο.

7.28. *Ορίζουμε $I(x)=0$ αν $x\leq 0$ και $I(x)=1$ αν $x>0$. Έστω (x_k) ακολουθία διαφορετικών ανά δύο σημείων σε κάποιο διάστημα (a,b) και έστω $\sum_{k=1}^{\infty}c_k$ απολύτως συγκλίνουσα σειρά. Δείξτε ότι η*

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_kI(x-x_k)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο (a,b) και ότι η συνάρτηση που ορίζεται από αυτή τη σειρά είναι συνεχής σε κάθε $x_0\in(a,b)\setminus\{x_k : k\in\mathbb{N}\}$.

Υπόδειξη. Αν θέσουμε $f_k(x) = c_kI(x-x_k)$ τότε $\|f_k\|_\infty = |c_k|$. Από την υπόθεση έχουμε $\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_\infty = \sum_{k=1}^{\infty}|c_k| < +\infty$ και, από το κριτήριο του Weierstrass, η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}c_kI(x-x_k)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο (a,b).

Θέτουμε $A=\{x_k : k\in\mathbb{N}\}$. Αν $x_0\notin A$ δείχνουμε ότι κάθε f_k είναι συνεχής στο x_0: διακρίνουμε τις περιπτώσεις $x_0<x_k$ και $x_0>x_k$. Στην πρώτη περίπτωση, υπάρχει $\delta>0$ ώστε $x_0+\delta<x_k$, και άρα, για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ ισχύει $f_k(x)=c_kI(x-x_k)=0$. Αφού η f_k είναι σταθερή σε μια περιοχή του x_0, είναι συνεχής στο x_0. Όμοια, στη δεύτερη περίπτωση, υπάρχει $\delta>0$ ώστε $x_k<x_0-\delta$, και άρα, για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ ισχύει $f_k(x)=c_kI(x-x_k)=c_k$. Αφού η f_k είναι σταθερή σε μια περιοχή του x_0, είναι συνεχής στο x_0. Τώρα, η $s_n=f_1+\cdots+f_n$ είναι συνεχής στο x_0 για κάθε $n\in\mathbb{N}$, και αφού $s_n\to s=\sum_{k=1}^{\infty}f_k$ ομοιόμορφα στο (a,b), η $s(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_kI(x-x_k)$ είναι συνεχής στο x_0.

7.29. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, $A \subseteq X$, $f, f_n : A \to \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A. Έστω t_0 σημείο συσσώρευσης του A και $\lim_{t\to t_0} f_n(t) = x_n \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι:*

α. *Η (x_n) συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ και*

β. *$\lim_{t\to t_0} f(t) = \lim_{n\to\infty} x_n$. Δηλαδή,*

$$\lim_{t\to t_0}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to t_0} f_n(t).$$

Υπόδειξη. (α) Θα δείξουμε ότι η (x_n) είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$, οπότε συγκλίνει. Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα, η (f_n) ικανοποιεί το κριτήριο Cauchy. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n, m \geq n_0$ και για κάθε $t \in A$,

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Έστω $n, m \geq n_0$. Αφού $\lim_{t\to t_0} f_n(t) = x_n$, υπάρχει $\delta_n > 0$ ώστε: αν $t \in A$ και $0 < \rho(t,t_0) < \delta_n$ τότε $|f_n(t) - x_n| < \frac{\varepsilon}{3}$. Όμοια, αφού $\lim_{t\to t_0} f_m(t) = x_m$, υπάρχει $\delta_m > 0$ ώστε: αν $t \in A$ και $0 < \rho(t,t_0) < \delta_m$ τότε $|f_m(t) - x_m| < \frac{\varepsilon}{3}$. Το t_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A, άρα υπάρχει $t \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < \rho(t,t_0) < \min\{\delta_n, \delta_m\}$. Τότε,

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - f_n(t)| + |f_n(t) - f_m(t)| + |f_m(t) - x_m| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Αυτό δείχνει ότι η (x_n) είναι βασική ακολουθία.

(β) Από το (α) υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $x_n \to x$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n \geq n_1$, $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n \geq n_2$ και για κάθε $t \in A$, $|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Θεωρούμε τυχόν $n > \max\{n_1, n_2\}$. Αφού $\lim_{t\to t_0} f_n(t) = x_n$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, αν $t \in A$ και $0 < \rho(t,t_0) < \delta$, τότε $|f_n(t) - x_n| < \frac{\varepsilon}{3}$. Συνεπώς, για κάθε $t \in A$ με $0 < \rho(t,t_0) < \delta$ έχουμε

$$|f(t) - x| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - x_n| + |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{t\to t_0} f(t) = x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

7.30. *Έστω $f_n(t) = t^n$ στο $[0,1]$ και $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0,1]$ με $g(1) = 0$. Δείξτε ότι η (gf_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$.*

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η g είναι συνεχής στο σημείο $t_0 = 1$, υπάρχει $0 < \delta < 1$ ώστε: αν $t \in [1-\delta, 1]$ τότε $|g(t)| = |g(t) - g(1)| < \varepsilon$.

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$, άρα υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε $t \in [0,1]$ ισχύει $|g(t)| \leq M$. Επίσης, $(1-\delta)^n \to 0$, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$,

$$M(1-\delta)^n < \varepsilon.$$

Θα δείξουμε ότι, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $\|gf_n\|_\infty \leq \varepsilon$. Αυτό αποδεικνύει ότι $gf_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

Έστω $n \geq n_0$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν $0 \leq t \leq 1-\delta$ τότε $|g(t)f_n(t)| \leq Mt^n \leq M(1-\delta)^n < \varepsilon$.

(ii) Αν $1-\delta \leq t \leq 1$ τότε $|g(t)f_n(t)| = |g(t)|\, t^n \leq |g(t)| < \varepsilon$.

Έπεται ότι, για κάθε $n \geq n_0$,

$$\|gf_n\|_\infty = \sup\{|g(t)f_n(t)| : t \in [0,1]\} \leq \varepsilon.$$

7.31. *Έστω (X,ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ πυκνό υποσύνολο του X. Ορίζουμε την ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ με*

$$f_n(x) = \mathrm{dist}(x, \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}),\ x \in X.$$

Δείξτε ότι:

(α) *Η (f_n) είναι φθίνουσα και $f_n \to 0$ κατά σημείο.*

(β) *$f_n \to 0$ ομοιόμορφα στον X αν και μόνον αν ο X είναι ολικά φραγμένος.*

Υπόδειξη. (α) Θέτουμε $D_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Έστω $x \in X$. Αφού $D_n \subseteq D_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$f_n(x) = \mathrm{dist}(x, D_n) \geq \mathrm{dist}(x, D_{n+1}) = f_{n+1}(x)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή η $(f_n(x))$ είναι φθίνουσα. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το D είναι πυκνό, υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$ ώστε $\rho(x, x_{n_0}) < \varepsilon$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$0 \leq f_n(x) \leq f_{n_0}(x) = \mathrm{dist}(x, D_{n_0}) \leq \rho(x, x_{n_0}) < \varepsilon.$$

Έπεται ότι $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

(β) Υποθέτουμε πρώτα ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα. Έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\|f_n\|_\infty = \|f_n - 0\|_\infty < \varepsilon.$$

Τότε,

$$X = \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon).$$

Πράγματι, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$f_n(x) = \mathrm{dist}(x, D_n) < \varepsilon$$

άρα, υπάρχει $j \leq n$ ώστε $\rho(x, x_j) < \varepsilon$, δηλαδή $x \in B(x_j, \varepsilon)$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο (X, ρ) είναι ολικά φραγμένος και θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $y_1, \ldots, y_k \in X$ ώστε

$$X = \bigcup_{j=1}^{k} B(y_j, \varepsilon/2).$$

Για κάθε $j \leq k$ βρίσκουμε $i_j \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_{i_j}, y_j) < \varepsilon/2$. Από την τριγωνική ανισότητα, βλέπουμε εύκολα ότι

$$X = \bigcup_{j=1}^{k} B(x_{i_j}, \varepsilon).$$

Θέτουμε $n(\varepsilon) = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Τότε, για κάθε $n \geq n(\varepsilon)$ έχουμε

$$X = \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon),$$

δηλαδή

$$f_n(x) = \mathrm{dist}(x, D_n) < \varepsilon$$

για κάθε $x \in X$. Έπεται ότι $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στον X.

7.32. (α) *Έστω $(X, d), (Y, \rho)$ μετρικοί χώροι με τον X συμπαγή. Αν $f_n : X \to Y$ για $n = 1, 2, \ldots$ και $f : X \to Y$ συνεχής ώστε για κάθε $x \in X$ και για κάθε (x_n) ακολουθία στον X με $x_n \to x$ ισχύει $f_n(x_n) \to f(x)$, αποδείξτε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα.*

(β) *Αποδείξτε ότι η συμπάγεια είναι απαραίτητη, θεωρώντας την ακολουθία $f_n : (0, 1] \to \mathbb{R}$ με*

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x}, & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

και την $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$. Διαπιστώστε ότι ικανοποιείται η υπόθεση, αλλά $f_n \not\to f$ ομοιόμορφα.

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι $\|f_n - f\|_\infty \not\to 0$. Περνώντας σε υπακολουθία της (f_n) μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty \geq 2\varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in X$ ώστε $\rho(f_n(x_n), f(x_n)) \geq \varepsilon$. Ο (X, d) είναι συμπαγής, άρα υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) με $x_{k_n} \to x_0 \in X$. Από την υπόθεση, $f_{k_n}(x_{k_n}) \to f(x_0)$ και από τη συνέχεια της f στο x_0, $f(x_{k_n}) \to f(x_0)$. Όμως τότε,

$$\rho(f_{k_n}(x_{k_n}), f(x_{k_n})) \to \rho(f(x_0), f(x_0)) = 0,$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού $\rho(f_{k_n}(x_{k_n}), f(x_{k_n})) \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(β) Έστω (x_n) ακολουθία στο $(0,1]$ με $x_n \to x \in (0,1]$. Αφού $x > 0$, παίρνοντας $\varepsilon = x/2 > 0$ βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \frac{x}{2}$ και $x_n > \frac{x}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$ (εξηγήστε γιατί μπορούμε να πετύχουμε και τα δύο ταυτόχρονα). Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $f_n(x_n) = \frac{1}{x_n}$, άρα $f_n(x) \to \frac{1}{x} = f(x)$.

Η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη: παρατηρήστε ότι

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{0<x<\frac{1}{n}} \left| n - \frac{1}{x} \right| = +\infty$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.