Κεφάλαιο 4

Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων

Ομάδα Α΄

4.1. *Έστω $f, g : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ δυο συνεχείς συναρτήσεις και D πυκνό υποσύνολο του (X,ρ). Δείξτε ότι:*

(α) *Το σύνολο $E = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ είναι κλειστό.*

(β) *Αν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in D$, τότε $f \equiv g$.*

Υπόδειξη. (α) Έστω (x_n) ακολουθία στο E με $x_n \to x \in X$. Αφού οι f και g είναι συνεχείς στο x, έχουμε $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ και $g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n)$. Όμως, $x_n \in E$ άρα $f(x_n) = g(x_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x).$$

Άρα, $x \in E$.

(β) Από το (α), το σύνολο $E = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ είναι κλειστό. Από την $D \subseteq E$ έπεται ότι $X = \overline{D} \subseteq E$, δηλαδή $E = X$. Άρα, $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in X$.

4.2. *Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ και $x_0 \in X$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in X$ και $\rho(x,x_0) < \delta$, $\rho(y,x_0) < \delta$ τότε $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Υπόδειξη. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x_0 και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: για κάθε $x \in X$ με $\rho(x,x_0) < \delta$ ισχύει $\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon/2$. Τότε, αν τα $x, y \in X$ ικανοποιούν τις $\rho(x,x_0) < \delta$ και $\rho(y,x_0) < \delta$ έχουμε

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq \sigma(f(x), f(x_0)) + \sigma(f(x_0), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Αντίστροφα, έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in X$ και $\rho(x, x_0) < \delta$ και $\rho(y, x_0) < \delta$ τότε $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Θέτοντας $y = x_0$ (παρατηρήστε ότι $\rho(x_0, x_0) < \delta$) βλέπουμε ότι αν $x \in X$ και $\rho(x, x_0) < \delta$ ισχύει $\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

4.3. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $G \subseteq X$. Δείξτε ότι το G είναι ανοικτό αν και μόνο αν υπάρχουν συνεχής συνάρτηση $f : (X, \rho) \to \mathbb{R}$ και $V \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό, ώστε $G = f^{-1}(V)$.*

Υπόδειξη. Αν η $f : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής γνωρίζουμε ότι για κάθε ανοικτό $V \subseteq \mathbb{R}$ το $f^{-1}(V)$ είναι ανοικτό.

Αντίστροφα, έστω G ανοικτό υποσύνολο του X. Υποθέτουμε πρώτα ότι $X \setminus G \neq \emptyset$. Τότε, η συνάρτηση $f(x) = \mathrm{dist}(x, X \setminus G)$ είναι καλά ορισμένη, μη αρνητική, και ισχύει $f(x) = 0$ αν και μόνο αν $x \in X \setminus G$ διότι το $X \setminus G$ είναι κλειστό. Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε

$$G = f^{-1}((0, \infty)).$$

Αφού το $V = (0, \infty)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχουμε το ζητούμενο. Αν $G = X$, θεωρούμε την $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ και γράφουμε $G = X = f^{-1}(\mathbb{R})$.

4.4. (α) *Έστω $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και $Z(f)$ το σύνολο μηδενισμού της f, δηλαδή*

$$Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}.$$

Δείξτε ότι: αν η f είναι συνεχής τότε το $Z(f)$ είναι κλειστό στον X.

(β) *Έστω $F \subseteq X$. Δείξτε ότι το F είναι κλειστό αν και μόνον αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : (X, \rho) \to \mathbb{R}$ ώστε $Z(f) = F$.*

Υπόδειξη. (α) Αφού η $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση, το $Z(f) = f^{-1}(\{0\})$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

(β) Λόγω του (α) αρκεί να δείξουμε ότι αν το F είναι κλειστό υποσύνολο του X τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε $Z(f) = F$. Υποθέτουμε πρώτα ότι $F \neq \emptyset$. Τότε, για τη συνεχή συνάρτηση $f(x) = \mathrm{dist}(x, F)$ έχουμε $f(x) = 0$ αν και μόνο αν $x \in \overline{F} = F$, δηλαδή $Z(f) = F$. Αν $F = \emptyset$ θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ που δεν μηδενίζεται πουθενά, για παράδειγμα τη σταθερή συνάρτηση $f(x) = 1$.

4.5. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Συμβολίζουμε με χ_A την χαρακτηριστική συνάρτηση του A, όπου $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως*

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A \\ 0, & t \notin A \end{cases}.$$

Αποδείξτε ότι το σύνολο των σημείων συνέχειας της χ_A ειναι το $A^\circ \cup (X \setminus A)^\circ$, το σύνολο των σημείων ασυνέχειάς της είναι το $\mathrm{bd}(A)$ και ότι η f είναι συνεχής αν και μόνον αν το A είναι ανοικτό και κλειστό (clopen).

Υπόδειξη. Έστω $x \in A^\circ$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(x,\delta) \subseteq A$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ αν επιλέξουμε το συγκεκριμένο $\delta > 0$ έχουμε: αν $x_1 \in B(x,\delta)$ τότε

$$|\chi_A(x) - \chi_A(x_0)| = |1-1| = 0 < \varepsilon.$$

Έπεται ότι η χ_A είναι συνεχής στο x. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι η χ_A είναι συνεχής σε κάθε $x \in (X \setminus A)^\circ$: υπάρχει ανοικτή μπάλα $B(x,\delta) \subseteq X \setminus A$, συνεπώς η χ_A είναι σταθερή και ίση με μηδέν στην $B(x,\delta)$.

Έστω $x \in \mathrm{bd}(A)$. Υπάρχουν ακολουθίες (x_n) στο A ώστε $x_n \to x$ και (x_n') στο $X \setminus A$ ώστε $x_n' \to x$. Τότε, $\chi_A(x_n) = 1 \to 1$ και $\chi_A(x_n') = 0 \to 0$. Από την αρχή της μεταφοράς, η f είναι ασυνεχής στο x.

Αφού $X = A^\circ \cup \mathrm{bd}(A) \cup (X \setminus A)^\circ$, έπεται το ζητούμενο.

Για την τελευταία ερώτηση, με βάση τα προηγούμενα, η χ_A είναι συνεχής αν και μόνο αν $\mathrm{bd}(A) = \emptyset$. Τότε, από την $\overline{A} = A^\circ \cup \mathrm{bd}(A)$ βλέπουμε ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $\overline{A} = A^\circ$, δηλαδή αν και μόνο αν το A είναι ανοικτό και κλειστό.

4.6. *Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$. Το γράφημα της f είναι το σύνολο*

$$\mathrm{Gr}(f) = \big\{(x, f(x)) : x \in X\big\} \subseteq X \times Y.$$

Δείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής συνάρτηση, τότε το γράφημα $\mathrm{Gr}(f)$ της f είναι κλειστό στον $X \times Y$ ως προς κάθε μετρική γινόμενο. Δώστε παράδειγμα το οποίο να δείχνει ότι το αντίστροφο δεν ισχύει.

Υπόδειξη. Έστω d μια μετρική γινόμενο στο $X \times Y$. Θεωρούμε τυχούσα ακολουθία $(x_n, f(x_n)) \in \mathrm{Gr}(f)$ με $(x_n, f(x_n)) \xrightarrow{d} (x,y) \in X \times Y$. Αφού η d είναι μετρική γινόμενο, έχουμε $x_n \xrightarrow{\rho} x$ και $f(x_n) \xrightarrow{\sigma} y$. Αφού η f είναι συνεχής στο x και $x_n \xrightarrow{\rho} x$, από την αρχή της μεταφοράς παίρνουμε $f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(x)$. Από τη μοναδικότητα του ορίου για την $(f(x_n))$ συμπεραίνουμε ότι $y = f(x)$. Συνεπώς, $(x,y) = (x, f(x)) \in \mathrm{Gr}(f)$. Έπεται ότι το $\mathrm{Gr}(f)$ είναι κλειστό σύνολο στον $(X \times Y, d)$.

Το αντίστροφο δεν είναι απαραίτητα σωστό. Η $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 0$ είναι ασυνεχής στο 0. Παρατηρήστε όμως ότι $\mathrm{Gr}(f) = A \cup B$ όπου $A = \{(0,0)\}$ και $B = \big\{\big(x, \frac{1}{x}\big) \mid x > 0\big\}$. Το A είναι κλειστό ως μονοσύνολο, ενώ το B είναι επίσης κλειστό (Άσκηση 3.27). Άρα, το $\mathrm{Gr}(f)$ είναι κλειστό στο $[0,\infty) \times \mathbb{R}$ με την Ευκλείδεια μετρική.

4.7. *Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ συνεχής συνάρτηση και έστω A διαχωρίσιμο υποσύνολο του X (δηλαδή, ο (A, ρ_A) είναι διαχωρίσιμος). Δείξτε ότι το $f(A)$ είναι διαχωρίσιμο υποσύνολο του Y.*

Υπόδειξη. Έστω D αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $(A, \rho|_A)$. Θεωρούμε το $f(D) \subseteq f(A)$. Το $f(D)$ είναι κι αυτό αριθμήσιμο. Θα δείξουμε ότι είναι πυκνό στον $(f(A), \sigma|_{f(A)})$. Έστω $y \in f(A)$ και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $x \in A$ ώστε $y = f(x)$. Η f είναι συνεχής στο x, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x_1 \in B(x,\delta)$ τότε $\sigma(f(x_1), f(x)) < \varepsilon$. Αφού το

D είναι πυκνό στο A, μπορούμε να βρούμε $d \in D \cap B(x,\delta)$. Τότε, $f(d) \in f(D)$ και $\sigma(f(d),y) = \sigma(f(d),f(x)) < \varepsilon$. Τα $y \in f(A)$ και $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόντα, άρα το $f(D)$ είναι πυκνό (και αριθμήσιμο) υποσύνολο του $f(A)$.

4.8. *Δώστε παράδειγμα φραγμένης, συνεχούς συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Μπορεί μια μη φραγμένη συνάρτηση να είναι ομοιόμορφα συνεχής;*

Υπόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \cos(x^2)$. Η f είναι συνεχής και φραγμένη: $|f(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Όμως η f *δεν* είναι ομοιόμορφα συνεχής: για να το δούμε, θεωρούμε τις ακολουθίες

$$x_n = \sqrt{(n+1)\pi} \text{ και } y_n = \sqrt{n\pi}.$$

Τότε,

$$x_n - y_n = \sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi} = \frac{(n+1)\pi - n\pi}{\sqrt{(n+1)\pi} + \sqrt{n\pi}} = \frac{\pi}{\sqrt{(n+1)\pi} + \sqrt{n\pi}} \to 0,$$

αλλά

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |\cos((n+1)\pi) - \cos(n\pi)| = 2$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπάρχουν ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που δεν είναι φραγμένες. Για παράδειγμα, η $g(x) = x$.

4.9. *Δώστε ένα παράδειγμα δυο ξένων υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου τα οποία διαχωρίζονται, αλλά δε διαχωρίζονται πλήρως.*

Υπόδειξη. Λέμε ότι δύο ξένα υποσύνολα A και B ενός μετρικού χώρου (X,ρ) διαχωρίζονται αν υπάρχουν ανοικτά σύνολα $U, V \subseteq X$ ώστε $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ και $U \cap V = \emptyset$. Αν επιπλέον ισχύει $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$, λέμε ότι τα A και B διαχωρίζονται πλήρως. Στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική θεωρούμε τα σύνολα $A = (-\infty, 0)$ και $B = (0, \infty)$. Τα A και B διαχωρίζονται, διότι είναι ήδη ανοικτά: αν πάρουμε $U = A$ και $V = B$ τότε $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ και $U \cap V = A \cap B = \emptyset$. Όμως, δεν διαχωρίζονται πλήρως: αν θεωρήσουμε οποιαδήποτε ανοικτά σύνολα $U_1 \supseteq A$ και $V_1 \supseteq B$, τότε $0 \in \overline{A} \subseteq \overline{U_1}$ και $0 \in \overline{B} \subseteq \overline{V_1}$, άρα $0 \in \overline{U_1} \cap \overline{V_1}$ δηλαδή $\overline{U_1} \cap \overline{V_1} \neq \emptyset$.

4.10. *Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ ομοιομορφισμός. Δείξτε ότι ο (X,ρ) είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν ο (Y,σ) είναι διαχωρίσιμος.*

Υπόδειξη. Έστω D αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του (X,ρ). Θεωρούμε το $f(D) \subseteq Y$. Το $f(D)$ είναι κι αυτό αριθμήσιμο. Θα δείξουμε ότι είναι πυκνό στον (Y,σ). Έστω $y \in Y$ και έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι επί, άρα υπάρχει $x \in X$ ώστε $y = f(x)$. Η f είναι συνεχής στο x, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x_1 \in B(x,\delta)$ τότε $\sigma(f(x_1), f(x)) < \varepsilon$. Αφού το D είναι πυκνό στον X, μπορούμε να βρούμε $d \in D \cap B(x,\delta)$. Τότε, $f(d) \in f(D)$ και

$\sigma(f(d),y) = \sigma(f(d),f(x)) < \varepsilon$. Τα $y \in Y$ και $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόντα, άρα το $f(D)$ είναι πυκνό (και αριθμήσιμο) υποσύνολο του Y.

Παρατηρήστε ότι χρησιμοποιήσαμε μόνο το γεγονός ότι η f είναι επί και συνεχής. Για την αντίστροφη κατεύθυνση θα χρειαστούμε τη συνέχεια (και το «επί») της f^{-1}.

Ομάδα Β΄

4.11. *Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$. Δείξτε ότι, αν για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $f(A') \subseteq (f(A))'$, τότε η f είναι συνεχής. Ισχύει το αντίστροφο;*

Υπόδειξη. Έχουμε αποδείξει ότι: αν $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ για κάθε $A \subseteq X$ τότε η f είναι συνεχής. Πράγματι, αν $C \subseteq Y$ κλειστό, θέτοντας $A = f^{-1}(C)$ στην παραπάνω σχέση παίρνουμε $f(\overline{f^{-1}(C)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} \subseteq \overline{C} = C$, άρα $\overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(C)$, δηλαδή το $f^{-1}(C)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

Με βάση αυτό το κριτήριο συνέχειας, αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $A \subseteq X$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Λόγω της $\overline{A} = A \cup A'$, αρκεί να δείξουμε ότι $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$ (το οποίο είναι φανερό) και $f(A') \subseteq \overline{f(A)}$. Όμως, από την υπόθεση έχουμε $f(A') \subseteq (f(A))'$ και $\overline{f(A)} = f(A) \cup (f(A))'$ άρα $(f(A))' \subseteq \overline{f(A)}$. Συνεπώς, $f(A') \subseteq \overline{f(A)}$.

Το αντίστροφο δεν είναι απαραίτητα σωστό. Για παράδειγμα, αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια σταθερή συνάρτηση, το $f(A')$ είναι μονοσύνολο για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ με $A' \neq \emptyset$ (για παράδειγμα, αν $A = \mathbb{R}$) ενώ $(f(A))' = \emptyset$ (εξηγήστε γιατί).

4.12. *Δίνεται μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to (Y,\delta)$, όπου δ η διακριτή μετρική στον Y. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής αν και μόνον αν είναι σταθερή.*

Υπόδειξη. Αν η f είναι σταθερή τότε είναι προφανώς συνεχής. Αντίστροφα, έστω $f : \mathbb{R} \to (Y,\delta)$ συνεχής συνάρτηση. Θεωρούμε τυχόν $x_0 \in X$ και το $y_0 = f(x_0) \in Y$. Το $\{y_0\}$ είναι ταυτόχρονα ανοικτό και κλειστό στον (Y,δ) (εξηγήστε γιατί). Άρα, το $A = f^{-1}(\{y_0\})$ είναι ταυτόχρονα ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Έχουμε δείξει ότι αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν $A = \emptyset$ ή $A = \mathbb{R}$. Αφού $x_0 \in A$, συμπεραίνουμε ότι $A = \mathbb{R}$. Συνεπώς, $f(x) = y_0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (η f είναι σταθερή).

4.13. *Μια συνάρτηση $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ λέγεται τοπικά φραγμένη (locally bounded) αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει περιοχή U_x του x ώστε η $f|_{U_x}$ να είναι φραγμένη.*

(α) *Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η f είναι τοπικά φραγμένη. Ισχύει το αντίστροφο;*

(β) *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

  (i) *Η f είναι συνεχής.*

  (ii) *Η f είναι τοπικά φραγμένη και έχει κλειστό γράφημα.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση και έστω $x \in X$. Παίρνοντας $\varepsilon = 1 > 0$ βρίσκουμε $\delta > 0$ ώστε $f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),1)$. Θέτοντας $U_x = B(x,\delta)$ έχουμε το ζητούμενο. Το αντίστροφο δεν είναι απαραίτητα σωστό: για παράδειγμα, υπάρχουν πολλές φραγμένες, ασυνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(β) Από το (α) και την Άσκηση 4.6 έχουμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση (μεταξύ μετρικών χώρων) είναι τοπικά φραγμένη και έχει κλειστό γράφημα. Αντίστροφα, έστω ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι τοπικά φραγμένη και έχει κλειστό γράφημα. Έστω (x_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $x_n \to x \in \mathbb{R}$ αλλά $f(x_n) \not\to f(x)$. Περνώντας σε υπακολουθία της (x_n) μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $|f(x_n) - f(x)| \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού η f είναι τοπικά φραγμένη, υπάρχουν περιοχή U_x του x και $M > 0$ ώστε $|f(t)| \leq M$ για κάθε $t \in U_x$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in U_x$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε, $|f(x_n)| \leq M$ για κάθε $n \geq n_0$, άρα η $(f(x_n))$ είναι φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Από το θεώρημα Bolzano–Weierstrass υπάρχει υπακολουθία $(f(x_{k_n}))$ της $(f(x_n))$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο $y \in \mathbb{R}$. Τότε, $(x_{k_n}, f(x_{k_n})) \in \mathrm{Gr}(f)$ και $(x_{k_n}, f(x_{k_n})) \to (x, y)$. Αφού το $\mathrm{Gr}(f)$ είναι κλειστό συμπεραίνουμε ότι $y = f(x)$, δηλαδή $f(x_{k_n}) \to f(x)$. Αυτό είναι άτοπο, διότι $|f(x_{k_n}) - f(x)| \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

4.14. *Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ συνεχής συνάρτηση και D πυκνό υποσύνολο του X. Εξετάστε αν οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι αληθείς.*

(α) *Αν η $f|_D$ είναι φραγμένη, τότε η f είναι φραγμένη.*

(β) *Αν η $f|_D$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

(γ) *Αν η $f|_D$ είναι 1-1, τότε η f είναι 1-1.*

Υπόδειξη. (α) Η υπόθεση ότι η $f|_D$ είναι φραγμένη σημαίνει ότι υπάρχει (κλειστή) μπάλα $\hat{B}(y, r)$ στον Y ώστε $f(d) \in \hat{B}(y, r)$ για κάθε $d \in D$. Έστω $x \in X$. Αφού το D είναι πυκνό υποσύνολο του X, υπάρχει ακολουθία (d_n) στο D με $d_n \to x$. Τότε, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(d_n)$ άρα $f(x) \in \overline{\hat{B}(y, r)} = \hat{B}(y, r)$. Αυτό δείχνει ότι $f(X) \subseteq \hat{B}(x, r)$, δηλαδή η f είναι φραγμένη.

(β) Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η $f|_D$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $d_1, d_2 \in D$ και $\rho(d_1, d_2) < \delta$ τότε $\sigma(f(d_1), f(d_2)) < \varepsilon$. Έστω $x_1, x_2 \in X$ με $\rho(x_1, x_2) < \delta/2$. Η f είναι συνεχής στα x_1 και x_2, άρα υπάρχει $\eta > 0$ ώστε αν $x \in X$ και $\rho(x, x_i) < \eta$ τότε $\sigma(f(x), f(x_i)) < \varepsilon$, $i = 1, 2$. Αφού το D είναι πυκνό στον X, μπορούμε να βρούμε $d_1, d_2 \in D$ ώστε $\rho(d_1, x_1) < \min\{\delta/4, \eta\}$ και $\rho(d_2, x_2) < \min\{\delta/4, \eta\}$. Τότε,

$$\rho(d_1, d_2) \leq \rho(d_1, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, d_2) < \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{4} = \delta,$$

άρα $\sigma(f(d_1), f(d_2)) < \varepsilon$. Επίσης, από τις $\rho(d_i, x_i) < \eta$ $(i = 1, 2)$ παίρνουμε $\sigma(f(d_i), f(x_i)) < \varepsilon$, $i = 1, 2$. Έπεται ότι

$$\sigma(f(x_1), f(x_2)) \leq \sigma(f(x_1), f(d_1)) + \sigma(f(d_1), f(d_2)) + \sigma(f(d_2), f(x_2)) < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Δείξαμε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $x_1, x_2 \in X$ και $\rho(x_1, x_2) < \delta/2$ τότε $\sigma(f(x_1), f(x_2)) < 3\varepsilon$. Άρα, η $f : X \to Y$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(γ) Δεν είναι απαραίτητα σωστό: η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ δεν είναι 1-1. Το σύνολο $D = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x < 0\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και η $f|_D$ είναι 1-1 (παρατηρήστε ότι: αν $t \neq s$ και $f(t) = f(s) \neq 0$ τότε $t = -s$, και ειδικότερα, οι t, s είναι ετερόσημοι και είτε $t, s \in \mathbb{Q}$ ή $t, s \notin \mathbb{Q}$).

4.15. *Έστω (X,ρ), (Y,σ) μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

(β) *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε: αν $A, B \subseteq X$ με $\mathrm{dist}(A,B) < \delta$, τότε $\mathrm{dist}(f(A), f(B)) < \varepsilon$.*

Υπόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β) Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in X$ και $\rho(x,y) < \delta$ τότε $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Θεωρούμε $A, B \subseteq X$ με

$$\mathrm{dist}(A,B) = \inf\{\rho(a,b) : a \in A, b \in B\} < \delta.$$

Τότε, υπάρχουν $a_0 \in A$ και $b_0 \in B$ ώστε $\rho(a_0, b_0) < \delta$. Έπεται ότι $\sigma(f(a_0), f(b_0)) < \varepsilon$. Τότε,

$$\mathrm{dist}(f(A), f(B)) = \inf\{\sigma(f(a), f(b)) : a \in A, b \in B\} \leq \sigma(f(a_0), f(b_0)) < \varepsilon.$$

(β) $\Rightarrow$ (α) Έστω $\varepsilon > 0$. Έχουμε υποθέσει ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $A, B \subseteq X$ και $\mathrm{dist}(A,B) < \delta$ τότε $\mathrm{dist}(f(A), f(B)) < \varepsilon$. Θεωρούμε $x, y \in X$ με $\rho(x,y) < \delta$. Αν θέσουμε $A = \{x\}$ και $B = \{y\}$ τότε $\mathrm{dist}(A,B) = \rho(x,y) < \delta$, συνεπώς $\sigma(f(x), f(y)) = \mathrm{dist}(f(A), f(B)) < \varepsilon$.

4.16. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A, B \subseteq X$ κλειστά και ξένα. Αν $f : X \to [0,1]$ είναι η συνάρτηση του Urysohn, δηλαδή $f(x) = \frac{\mathrm{dist}(x,A)}{\mathrm{dist}(x,A)+\mathrm{dist}(x,B)}$, αποδείξτε ότι:*

(α) *Αν $\mathrm{dist}(A,B) = 0$, τότε η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

(β) *Αν $\mathrm{dist}(A,B) = \delta > 0$, τότε η f είναι δ^{-1}–Lipschitz.*

Υπόδειξη. (α) Αφού $\mathrm{dist}(A,B) = \inf\{\rho(a,b) : a \in A, b \in B\} = 0$, μπορούμε να βρούμε $x_n \in A$ και $y_n \in B$ ώστε $\rho(x_n, y_n) < 1/n$. Τότε, $\rho(x_n, y_n) \to 0$. Αν η f ήταν ομοιόμορφα συνεχής, θα είχαμε $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$. Όμως, $f \equiv 0$ στο A και $f \equiv 1$ στο B, άρα $|f(x_n) - f(y_n)| = 1 \not\to 0$. Έπεται ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Για συντομία γράφουμε $d_A(x) := \mathrm{dist}(x,A)$ και $d_B(x) := \mathrm{dist}(x,B)$. Έστω $x \in X$. Για κάθε $a \in A$ και $b \in B$ έχουμε

$$\rho(x,a) + \rho(x,b) \geq \rho(a,b) \geq \mathrm{dist}(A,B) = \delta.$$

Παίρνοντας infimum πρώτα ως προς $a \in A$ και μετά ως προς $b \in B$ συμπεραίνουμε ότι

$$d_A(x) + d_B(x) \geq \delta \text{ για κάθε } x \in X.$$

Έστω $x, y \in X$. Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι οι d_A, d_B είναι συναρτήσεις Lipschitz με σταθερά 1, έχουμε

$$|f(x) - f(y)| \;=\; \left| \frac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)} - \frac{d_A(y)}{d_A(y) + d_B(y)} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(d_A(x)+d_B(x))(d_A(y)+d_B(y))}\,|d_A(x)d_B(y)-d_A(y)d_B(x)| \\
&= \frac{1}{(d_A(x)+d_B(x))(d_A(y)+d_B(y))}\,|(d_A(x)-d_A(y))d_B(y)+d_A(y)(d_B(y)-d_B(x))| \\
&\le \frac{1}{(d_A(x)+d_B(x))(d_A(y)+d_B(y))}\,\big(|d_A(x)-d_A(y)|d_B(y)+d_A(y)|d_B(y)-d_B(x)|\big) \\
&\le \frac{1}{(d_A(x)+d_B(x))(d_A(y)+d_B(y))}\,\big(d_B(y)+d_A(y)\big)\rho(x,y) \\
&= \frac{1}{(d_A(x)+d_B(x))}\,\rho(x,y) \le \frac{1}{\delta}\,\rho(x,y).
\end{aligned}$$

4.17. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A,B\subseteq X$ με $\mathrm{dist}(A,B)>0$ και $f_1:A\to\mathbb{R}$, $f_2:B\to\mathbb{R}$ (ομοιόμορφα) συνεχείς συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f:A\cup B\to\mathbb{R}$ με*

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\in A\\ f_2(x), & x\in B\end{cases}$$

είναι (ομοιόμορφα) συνεχής.

Υπόδειξη. Εξετάζουμε μόνο την περίπτωση που οι f_1,f_2 είναι ομοιόμορφα συνεχείς. Θα δείξουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Έστω $\varepsilon>0$. Αφού η f_1 είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta_1>0$ ώστε: αν $a_1,a_2\in A$ και $\rho(a_1,a_2)<\delta_1$ τότε $|f_1(a_1)-f_1(a_2)|<\varepsilon$. Όμοια, αφού η f_2 είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta_2>0$ ώστε: αν $b_1,b_2\in B$ και $\rho(b_1,b_2)<\delta_2$ τότε $|f_2(b_1)-f_2(b_2)|<\varepsilon$. Θέτουμε $\delta=\frac{1}{2}\min\{\delta_1,\delta_2,\mathrm{dist}(A,B)\}>0$. Έστω $x,y\in A\cup B$ με $\rho(x,y)<\delta$. Αφού $\rho(x,y)<\mathrm{dist}(A,B)$, θα έχουμε $x,y\in A$ ή $x,y\in B$. Στην πρώτη περίπτωση, αφού $\rho(x,y)<\delta<\delta_1$ παίρνουμε $|f(x)-f(y)|=|f_1(x)-f_1(y)|<\varepsilon$. Στη δεύτερη, αφού $\rho(x,y)<\delta<\delta_2$ παίρνουμε $|f(x)-f(y)|=|f_2(x)-f_2(y)|<\varepsilon$. Έπεται ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

4.18. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A\subseteq X$. Αν $f:A\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, απόδειξτε ότι η f επεκτείνεται σε μια ομοιόμορφα συνεχή συνάρτηση $F:\overline{A}\to\mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. Έστω $x\in\overline{A}$. Θεωρούμε τυχούσα ακολουθία (x_n) στο A με $x_n\to x$. Η (x_n) είναι βασική, άρα η $(f(x_n))$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$ (διότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής). Τότε, υπάρχει το $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\in\mathbb{R}$. Αν (x_n') είναι κάποια άλλη ακολουθία στο A με $x_n'\to x$, τότε $\rho(x_n,x_n')\to 0$ άρα $f(x_n')-f(x_n)\to 0$ (πάλι από την ομοιόμορφη συνέχεια της f). Συνεπώς, $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n')=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ παίρνοντας σαν (x_n) μία από τις ακολουθίες του A που συγκλίνουν στο x (το όριο δεν εξαρτάται από την επιλογή της ακολουθίας).

Η F είναι επέκταση της f: αν $x\in A$ τότε η σταθερή ακολουθία $x_n=x$ είναι στο A και συγκλίνει στο x, άρα $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=f(x)$. Μένει να δείξουμε ότι η F είναι ομοιόμορφα συνεχής. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $z, w \in A$ και $\rho(z,w) < \delta$ τότε $|f(z) - f(w)| < \varepsilon/2$. Έστω $x, y \in \overline{A}$ με $\rho(x,y) < \delta$. Υπάρχουν $x_n, y_n \in A$ ώστε $x_n \to x$ και $y_n \to y$. Τότε, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x,y) < \delta$, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\rho(x_n, y_n) < \delta$. Από την επιλογή του δ έχουμε $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon/2$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπώς, $|F(x) - F(y)| = \lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$.

4.19. *Εξετάστε αν ισχυουν τα παρακάτω.*

(α) *Το $\mathbb{R}$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Z}$.*

(β) *Το $\mathbb{R}$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Q}$.*

(γ) *Το $\mathbb{Q}$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Z}$.*

(δ) *Το $\mathbb{Z}$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{N}$.*

Υπόδειξη. (α) Το $\mathbb{R}$ δεν είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Z}$. Δεν υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ διότι το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο ενώ το $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο. Συνεπώς, δεν υπάρχει ομοιομορφισμός $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$.

(β) Το $\mathbb{R}$ δεν είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Q}$. Δεν υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ διότι το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο ενώ το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο. Συνεπώς, δεν υπάρχει ομοιομορφισμός $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$.

(γ) Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{Z}$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$. Θεωρούμε την ακολουθία (q_n) στο $\mathbb{Q}$ με $q_n = \frac{1}{n}$. Έχουμε $q_n = \frac{1}{n} \to 0 \in \mathbb{Q}$, άρα $f(1/n) \to f(0)$. Αναγκαστικά, η $f(1/n)$ πρέπει να είναι τελικά σταθερή και ίση με $f(0)$ (οι συγκλίνουσες ακολουθίες ακεραίων είναι οι τελικά σταθερές ακολουθίες ακεραίων). Υπάρχει λοιπόν $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $f(1/n) = f(0)$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε, αφού η f είναι 1-1, θα πρέπει να ισχύει $1/n = 0$ για κάθε $n \geq n_0$, το οποίο είναι άτοπο.

(δ) Το $\mathbb{Z}$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{N}$. Έχουμε δει ότι κάθε συνάρτηση $u : \mathbb{N} \to (X, \rho)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και κάθε συνάρτηση $v : \mathbb{Z} \to (Y, \sigma)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τα σύνολα $\mathbb{N}$ και $\mathbb{Z}$ είναι ισοπληθικά, άρα υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$. Τότε, οι f και f^{-1} είναι συνεχείς, άρα η f είναι ομοιομορφισμός.

4.20. *Δίνονται οι μετρικοί χώροι $(X_1, d_1), \ldots, (X_k, d_k)$ και ο χώρος γινόμενο $\prod_{i=1}^k X_i$ με μετρική γινόμενο την $d_\infty = \max\{d_i : 1 \leq i \leq k\}$. Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και $f : X \to \prod_{i=1}^k X_i$ με $f = (f_1, \ldots, f_k)$, όπου $f_i : X \to X_i$ για $i = 1, \ldots, k$. Δείξτε τα εξής:*

(α) *Η f είναι συνεχής αν και μόνο αν οι f_i, $i = 1, \ldots, k$ είναι συνεχείς.*

(β) *Η f είναι Lipschitz αν και μόνο αν κάθε f_i είναι Lipschitz.*

(γ) *Η f είναι ομοιομόρφα συνεχής αν και μόνο αν οι f_i, $i = 1, \ldots, k$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς.*

(δ) *Είναι σωστό ότι η f είναι ισομετρία αν και μόνο αν οι f_i είναι ισομετρίες;*

(ε) *Είναι σωστό ότι η f είναι ομοιομορφισμός αν και μόνο αν οι f_i είναι ομοιομορφισμοί;*

Υπόδειξη. (α) Έστω (x_n) ακολουθία στον X με $x_n \to x$. Αν οι f_i, $i = 1, \ldots, k$ είναι συνεχείς τότε $f_i(x_n) \to f_i(x)$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$ και συμπεραίνουμε ότι $f(x_n) \to f(x)$ από το γεγονός ότι η d_∞ είναι μετρική γινόμενο. Για την αντίστροφη κατεύθυνση παρατηρήστε ότι $f_i = \pi_i \circ f$, $i = 1, \ldots, k$ (βλέπε Άσκηση 4.24).

(β) Αν κάθε f_i είναι Lipschitz με σταθερά $M_i > 0$ τότε για κάθε $x, y \in X$ έχουμε

$$d_\infty(f(x), f(y)) = \max\{d_i(f_i(x), f_i(y)) : i = 1, \ldots, k\} \leq (\max M_i)\, \rho(x, y).$$

Αντίστροφα, αν η f είναι Lipschitz με σταθερά $M > 0$ τότε για κάθε $x, y \in X$ και για κάθε $i = 1, \ldots, k$ έχουμε

$$d_i(f_i(x), f_i(y)) \leq d_\infty(f(x), f(y)) \leq M\, \rho(x, y).$$

(γ) Υποθέτουμε πρώτα ότι οι f_i, $i = 1, \ldots, k$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς. Έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε $\delta_i > 0$ ώστε: αν $\rho(x, y) < \delta_i$ τότε $d_i(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon$. Τότε, αν $\rho(x, y) < \delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_k\}$ έχουμε

$$d_\infty(f(x), f(y)) = \max\{d_i(f_i(x), f_i(y)) : i = 1, \ldots, k\} < \varepsilon.$$

Για την αντίστροφη κατεύθυνση δουλεύουμε ανάλογα.

(δ) Αν κάθε f_i είναι ισομετρία τότε η f είναι ισομετρία. Πράγματι, έχουμε για κάθε $1 \leq i \leq k$, $d_i(f_i(x), f_i(y)) = \rho(x, y)$ για κάθε $x, y \in X_i$. Τότε, αν $x, y \in X$ ισχύει:

$$d_\infty(f(x), f(y)) = \max\{d_i(f_i(x), f_i(y)) : 1 \leq i \leq k\} = \rho(x, y).$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει: Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $\pi_i : (\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ με $\pi_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k) = x_i$ (δηλαδή την i–προβολή) τότε καμιά από τις π_i δεν είναι ισομετρία, αλλά η $f = (\pi_1, \ldots, \pi_k) : (\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty)$ είναι ισομετρία αφού είναι η ταυτοτική συνάρτηση.

(ε) Το προηγούμενο παράδειγμα δείχνει ότι μπορεί η f να είναι ομοιομορφισμός και καμιά από τις f_i να μην είναι. Επίσης, μπορεί κάθε f_i να ομοιομορφισμός και η f να μην είναι: Αν θεωρήσουμε τις $f_1, f_2 : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ με $f_1(x) = x$ και $f_2(x) = -x$ τότε αυτές είναι ομοιομορφισμοί, αλλά η $f = (f_1, f_2) : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι επί. (Παρατηρήστε ότι στέλνει όλα τα σημεία στην ευθεία $x + y = 0$.)

Ομάδα Γ′

4.21. *Έστω F μη κενό κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $f : F \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in F$.*

Υπόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε το $\mathbb{R} \setminus F$ σαν ένωση αριθμήσιμων το πλήθος ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων: $\mathbb{R} \setminus F = \bigcup (a_n, b_n)$. Παρατηρήστε ότι για κάθε n ισχύει $a_n, b_n \in F$, δηλαδή οι τιμές $f(a_n)$, $f(b_n)$ είναι ορισμένες. Επεκτείνουμε την f σε μια συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ορίζοντάς την σε κάθε (a_n, b_n). Ο απλούστερος τρόπος είναι να θέσουμε

$$g(x) = \frac{b_n - x}{b_n - a_n} f(a_n) + \frac{x - a_n}{b_n - a_n} f(b_n), \quad x \in (a_n, b_n),$$

δηλαδή να πάρουμε την g γραμμική στο $[a_n, b_n]$. Αν $x \in F$ ορίζουμε $g(x) = f(x)$. Εύκολα ελέγχουμε ότι η g είναι συνεχής σε κάθε (a_n, b_n), αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε ότι η g είναι συνεχής σε κάθε σημείο του F. Για να ελέγξετε τη συνέχεια της g στο x από δεξιά, δείξτε πρώτα ότι υπάρχουν τα εξής τρία ενδεχόμενα:

(i) Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $[x, x + \delta) \subset F$.

(ii) Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x = a_n$.

(iii) Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $(a_n, b_n) \subset [x, x + \delta)$.

Έστω ότι δεν ισχύει το 1. Τότε για κάθε $\delta > 0$ έχουμε $F^c \cap [x, x + \delta) \neq \emptyset$. Αν $x = a_n$ τελειώσαμε, διαφορετικά για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $[x, x+\delta) \cap (a_n, b_n) \neq \emptyset$. Αυτό όμως δίνει ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $(a_n, b_n) \subseteq [x, x + \delta)$. (Πράγματι· κατ' αρχήν παρατηρήστε ότι δε μπορεί να είναι $a_n < x$ λόγω του ότι τα (a_n, b_n) είναι ξένα ανά δυο. Τώρα, αν $\delta > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $[x, x+\delta) \cap (a_n, b_n) \neq \emptyset$. Τότε για $0 < \delta' < a_n - x$ έχουμε ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $(a_k, b_k) \cap [x, x + \delta') \neq \emptyset$. Άρα, το (a_k, b_k) είναι αριστερά από το (a_n, b_n) αφού είναι ξένα, δηλαδή $(a_k, b_k) \subseteq [x, x + \delta)$).

Τώρα δείχνουμε ότι σε καθεμιά από τις τρεις περιπτώσεις η g είναι συνεχής από τα δεξιά στο x. Έστω $\varepsilon > 0$.

Για το (i): Έχουμε ότι υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε $[x, x+\delta_1) \subseteq F$. Η f είναι συνεχής στο x (από τα δεξιά) άρα, υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε αν $t \in F \cap [x, x + \delta_2)$ τότε $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$. Έστω $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ και $t \in [x, x + \delta)$. Τότε είναι $t \in F$, άρα

$$|g(t) - g(x)| = |f(t) - f(x)| < \varepsilon.$$

Για το (ii): Έχουμε ότι $x = a_n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε για $0 < \delta < \min\{\frac{(b_n - a_n)\varepsilon}{1 + |f(b_n) - f(a_n)|}, b_n - a_n\}$ ισχύει $[x, x + \delta) \subseteq [a_n, b_n)$ και αν $t \in [x, x + \delta)$ έχουμε:

$$|g(t) - g(x)| = \left| \frac{f(a_n) - f(b_n)}{a_n - b_n}(t - x) \right| < \delta \left| \frac{f(a_n) - f(b_n)}{a_n - b_n} \right| < \varepsilon.$$

Για το (iii): Από τη συνέχεια της f στο x (από τα δεξιά) έχουμε ότι υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε αν $t \in F \cap [x, x+\delta_1)$ τότε $|f(t) - f(x)| < \varepsilon/3$. Σ' αυτήν την περίπτωση υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $(a_k, b_k) \subseteq [x, x+\delta_1)$. Τότε, αν $t \in [x, a_k)$ (εδώ $\delta = a_k - x > 0$) διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις:

- Αν $t \in F$, τότε ισχύει: $|g(t) - g(x)| = |f(t) - f(x)| < \varepsilon/3$.
- Αν $t \notin F$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $t \in (a_m, b_m)$. Παρατηρήστε ότι σε αυτήν την περίπτωση $x < a_m < b_m < a_k$. Τότε προκύπτει:

$$\begin{aligned} |g(t) - g(x)| &= \left| \frac{f(b_m) - f(a_m)}{b_m - a_m}(t - a_m) + f(a_m) - f(x) \right| \\ &\leq |f(b_m) - f(a_m)| + |f(a_m) - f(x)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

  αφού $a_m, b_m \in F \cap [x, x+\delta_1)$.

Έτσι σε κάθε περίπτωση η g είναι συνεχής στο x από τα δεξιά. Όμοια δείχνουμε τη συνέχεια από αριστερά.

4.22. *Έστω (X, ρ), (Y, σ) μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$. Για κάθε $\delta \geq 0$ ορίζουμε το μέτρο συνέχειας (modulus of continuity) της f ως εξής:*

$$\omega_f(\delta) = \sup\{\sigma(f(x), f(y)) : d(x, y) \leq \delta,\ x, y \in X\}.$$

(α) *Δείξτε ότι η συνάρτηση $\omega_f : [0, \infty) \to [0, \infty]$ είναι αύξουσα, δηλαδή αν $0 \leq \delta_1 < \delta_2$ τότε $\omega_f(\delta_1) \leq \omega_f(\delta_2)$.*

(β) *Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνον αν ισχύει $\omega_f(\delta) \to 0$ καθώς $\delta \to 0^+$.*

Υπόδειξη. (α) Αν $0 \leq \delta_1 < \delta_2$ τότε $\{\sigma(f(x), f(y)) : \rho(x, y) \leq \delta_1,\ x, y \in X\} \subseteq \{\sigma(f(x), f(y)) : \rho(x, y) \leq \delta_2,\ x, y \in X\}$, άρα

$$\begin{aligned} \omega_f(\delta_1) &= \sup\{\sigma(f(x), f(y)) : \rho(x, y) \leq \delta_1,\ x, y \in X\} \\ &\leq \sup\{\sigma(f(x), f(y)) : \rho(x, y) \leq \delta_2,\ x, y \in X\} \\ &= \omega_f(\delta_2). \end{aligned}$$

(β) Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε: αν $x, y \in X$ και $\rho(x, y) < \delta_1$ τότε $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon/2$. Έστω $0 < \delta < \delta_1$. Τότε,

$$\omega_f(\delta) = \sup\{\sigma(f(x), f(y)) : \rho(x, y) \leq \delta,\ x, y \in X\} \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Συνεπώς, $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \omega_f(\delta) = 0$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{\delta\to 0^+}\omega_f(\delta)=0$. Έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχει $\delta>0$ ώστε $\omega_f(\delta)<\varepsilon$. Τότε, αν $x,y\in X$ και $\rho(x,y)<\delta$ έχουμε $\sigma(f(x),f(y))\leq\omega_f(\delta)<\varepsilon$. Αυτό αποδεικνύει ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

4.23. *Έστω $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$. Η f λέγεται ανοικτή αν για κάθε ανοικτό $G\subseteq X$ το $f(G)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y. Ανάλογα, η f λέγεται κλειστή αν για κάθε κλειστό $F\subseteq X$ το $f(F)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y.*

(α) *Δώστε παράδειγμα: συνεχούς συνάρτησης η οποία δεν είναι ανοικτή, ανοικτής συνάρτησης η οποία δεν είναι συνεχής, συνεχούς συνάρτησης η οποία δεν είναι κλειστή, κλειστής συνάρτησης η οποία δεν είναι συνεχής.*

(β) *Αν η $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$ είναι 1-1 και επί, δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα: (i) η f είναι ανοικτή, (ii) η f είναι κλειστή, (iii) η f^{-1} είναι συνεχής.*

Συνεπώς, αν η f είναι συνεχής και ανοικτή (ή κλειστή) τότε είναι ομοιομορφισμός.

Υπόδειξη. (α) Η ταυτοτική συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to(\mathbb{R},\delta)$ με $g(x)=x$ είναι ανοικτή, διότι όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι δ-ανοικτά. Δεν είναι όμως συνεχής: στην άσκηση 6 είδαμε ότι οι μόνες συνεχείς συναρτήσεις από το $\mathbb{R}$ στον $(\mathbb{R},\delta)$ είναι οι σταθερές συναρτήσεις. Η ίδια συνάρτηση είναι κλειστή (αλλά όχι συνεχής). Η ταυτοτική συνάρτηση $g^{-1}:(\mathbb{R},\delta)\to\mathbb{R}$ με $g^{-1}(x)=x$ είναι συνεχής αλλά δεν είναι κλειστή ούτε ανοικτή (θα έπρεπε όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ να είναι κλειστά, ή αντίστοιχα, ανοικτά).

Άλλα παραδείγματα: κάθε συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι σταθερή σε κάποιο διάστημα $[a,b]$ δεν είναι ανοικτή (εξηγήστε γιατί). Η συνάρτηση $f(x)=|x|$ απεικονίζει το $(-1,1)$ στο $[0,1)$. Η συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$ απεικονίζει το κλειστό σύνολο $[0,\infty)$ στο $[0,1)$.

(β) Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι ανοικτή. Έστω F κλειστό υποσύνολο του (X,ρ). Τότε, το $X\setminus F$ είναι ανοικτό, άρα το $f(X\setminus F)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (Y,σ). Όμως, $f(X\setminus F)=Y\setminus f(F)$ διότι η f είναι 1-1 και επί. Άρα, το $f(F)$ είναι κλειστό. Έπεται ότι η f είναι κλειστή.

Υποθέτουμε τώρα ότι η f είναι κλειστή. Για κάθε κλειστό $F\subseteq X$ έχουμε ότι το $(f^{-1})^{-1}(F)=F$ είναι κλειστό στον (Y,σ). Άρα, η f^{-1} είναι συνεχής.

Υποθέτουμε τέλος ότι η $f^{-1}:Y\to X$ είναι συνεχής. Τότε, για κάθε $G\subseteq X$ ανοικτό, έχουμε ότι το $f(G)=(f^{-1})^{-1}(G)$ είναι ανοικτό. Άρα, η f είναι ανοικτή.

4.24. *Έστω (X_i,d_i) , $i=1,\ldots,m$ μετρικοί χώροι και $X=\prod_{i=1}^m X_i$ ο χώρος γινόμενο με τη μετρική $d=\sum_{i=1}^m d_i$. Η συνάρτηση $i-$προβολή είναι η $\pi_i:X\to X_i$ που ορίζεται ως εξής:*

$$\pi_i(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_m)=x_i.$$

Αποδείξτε ότι η π_i είναι συνεχής, επί και ανοικτή.

Υπόδειξη. Η π_i είναι προφανώς επί: αν $x_i\in X_i$ επιλέγουμε τυχόντα $x_j\in X_j$, $j\neq i$ και για το $x=(x_1,\ldots,x_m)\in X$ έχουμε $\pi_i(x)=x_i$. Η συνέχεια της π_i προκύπτει από το γεγονός ότι η d είναι μετρική γινόμενο. Αν $x^n = (x_1^n, \dots, x_m^n) \xrightarrow{d} x = (x_1, \dots, x_m)$ τότε, για κάθε $j \leq m$ έχουμε $x_j^n \xrightarrow{d_j} x_j$, άρα $\pi_i(x^n) = x_i^n \xrightarrow{d_i} x_i = \pi_i(x)$. Από την αρχή της μεταφοράς η π_i είναι συνεχής. Τέλος, η π_i είναι ανοικτή: έστω $G \subseteq X$ ανοικτό. Αν $x = (x_1, \dots, x_m) \in G$ τότε μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε $B_d(x, \delta) \subseteq G$. Από τον ορισμό της d ελέγχουμε εύκολα ότι

$$U := B_{d_1}(x_1, \delta/m) \times \cdots \times B_{d_m}(x_m, \delta/m) \subseteq B_d(x, \delta) \subseteq G.$$

Τότε, $\pi_i(U) = B_{d_i}(x_i, \delta/m) \subseteq \pi_i(G)$, δηλαδή $B_{d_i}(\pi_i(x), \delta/m) \subseteq \pi_i(G)$. Αφού το $p_i(x) \in \pi_i(G)$ ήταν τυχόν, το $\pi_i(G)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X_i.

4.25. *Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$. Δείξτε ότι η f είναι ανοικτή αν και μόνο αν $f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ$ για κάθε $A \subseteq X$. Δώστε παράδειγμα μιας συνεχούς, ανοικτής συνάρτησης $f : X \to Y$ και κάποιου $A \subseteq X$ ώστε το $f(A^\circ)$ να περιέχεται γνήσια στο $(f(A))^\circ$.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι ανοικτή. Έστω $A \subseteq X$. Το A° είναι ανοικτό, άρα το $f(A^\circ)$ είναι ανοικτό. Αφού $A^\circ \subseteq A$, έχουμε $f(A^\circ) \subseteq f(A)$. Έπεται ότι $f(A^\circ) \subseteq (f(A))^\circ$. Για την αντίστροφη κατεύθυνση, απλώς παρατηρούμε ότι αν G είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του X τότε η υπόθεση μας δίνει $f(G) = f(G^\circ) \subseteq (f(G))^\circ$. Τότε, $f(G) = (f(G))^\circ$ άρα το $f(G)$ είναι ανοικτό.

Η προβολή $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $\pi_1(x, y) = x$ είναι συνεχής και ανοικτή (δείτε την Άσκηση 4.24). Αν θέσουμε $A = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ τότε $A^\circ = \emptyset$ και $f(A) = \mathbb{R}$. Άρα, $f(A^\circ) = \emptyset$ ενώ $(f(A))^\circ = \mathbb{R}$.

4.26. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η ρ είναι ισοδύναμη με τη διακριτή μετρική στον X.*

(β) *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον X είναι τελικά σταθερή.*

(γ) *Ο X δεν έχει σημεία συσσώρευσης.*

(δ) *Για κάθε μετρικό χώρο Y, κάθε $f : X \to Y$ είναι συνεχής.*

(ε) *Η κλειστή θήκη κάθε ανοικτού συνόλου $G \subseteq X$ είναι ανοικτό σύνολο.*

Υπόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β) Υποθέτουμε ότι η ρ είναι ισοδύναμη με τη διακριτή μετρική στον X. Έστω (x_n) ακολουθία στον X με $\rho(x_n, x) \to 0$. Αφού $\rho \sim \delta$, θα ισχύει $\delta(x_n, x) \to 0$. Όμως, γνωρίζουμε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον (X, δ) είναι τελικά σταθερή. Άρα, η (x_n) είναι τελικά σταθερή.

(β) $\Rightarrow$ (γ) Υποθέτουμε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον X είναι τελικά σταθερή. Έστω x σημείο συσσώρευσης του X. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στο X η οποία συγκλίνει στο x και έχει όρους διαφορετικούς ανά δύο. Τότε, η (x_n) είναι συγκλίνουσα και δεν είναι τελικά σταθερή, άτοπο.

(γ) $\Rightarrow$ (δ) Υποθέτουμε ότι ο X δεν έχει σημεία συσσώρευσης. Έστω (Y, σ) μετρικός χώρος, $f : X \to Y$ και $x_0 \in X$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Αφού το x_0

δεν είναι σημείο συσσώρευσης του X, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B_\rho(x_0,\delta) = \{x_0\}$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, έχουμε $f(B_\rho(x_0,\delta)) = \{f(x_0)\} \subseteq B_\sigma(f(x_0),\varepsilon)$. Άρα, η f είναι συνεχής στο x_0.

(δ) $\Rightarrow$ (ε) Υποθέτουμε ότι, για κάθε μετρικό χώρο Y, κάθε $f : X \to Y$ είναι συνεχής. Έστω G ανοικτό υποσύνολο του X. Η χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_G : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, άρα (από την Άσκηση 4.5) έχουμε $\mathrm{bd}(G) = \emptyset$. Τότε, $\overline{G} = G \cup \mathrm{bd}(G) = G$, δηλαδή το $\overline{G}$ είναι ανοικτό.

(ε) $\Rightarrow$ (α) Υποθέτουμε ότι η κλειστή θήκη κάθε ανοικτού συνόλου $G \subseteq (X,\rho)$ είναι ανοικτό σύνολο. Για να δείξουμε ότι $\rho \sim \delta$ πρέπει να ελέγξουμε ότι $x_n \xrightarrow{\rho} x$ αν και μόνο αν $x_n \xrightarrow{\delta} x$ δηλαδή αν και μόνο αν η (x_n) είναι τελικά σταθερή (με όρους ίσους με x). Η μία κατεύθυνση είναι φανερή, υποθέτουμε λοιπόν ότι $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Αν η (x_n) δεν είναι τελικά σταθερή μπορούμε να υποθέσουμε (περνώντας αν χρειαστεί σε υπακολουθία) ότι η ακολουθία $\rho(x_n,x)$ είναι γνησίως φθίνουσα και μηδενική. Μπορούμε τότε να βρούμε ακολουθία ακτίνων $\delta_n > 0$ ώστε οι μπάλες $B(x_n,\delta_n)$ να είναι ξένες και $x \notin \bigcup_{n=1}^\infty B(x_n,\delta_n)$ (άσκηση). Ορίζουμε $G_1 = \bigcup_{k=1}^\infty B(x_{2k},\delta_{2k})$ και $G_2 = \bigcup_{k=1}^\infty B(x_{2k-1},\delta_{2k-1})$. Τα G_1, G_2 είναι ξένα από την κατασκευή. Ορίζουμε $U_1 = \overline{G_1}$ και $U_2 = \overline{G_2}$. Έχουμε $G_1 \subseteq X \setminus G_2$ και το $X \setminus G_2$ είναι κλειστό, άρα $U_1 \subseteq X \setminus G_2$. Από την υπόθεση, το U_2 είναι ανοικτό και, ξεκινώντας τώρα από την $G_2 \subseteq X \setminus U_1$ βλέπουμε ότι $U_2 \subseteq X \setminus U_1$, δηλαδή, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Όμως, από την $x_{2k} \xrightarrow{\rho} x$ έχουμε $x \in \overline{G_1} = U_1$ και από την $x_{2k-1} \xrightarrow{\rho} x$ έχουμε $x \in \overline{G_2} = U_2$. Άρα $x \in U_1 \cap U_2$, το οποίο είναι άτοπο.

4.27. (α) *Μια συνάρτηση $f : (X,\rho) \to \mathbb{R}$ λέγεται κάτω ημισυνεχής αν για κάθε $t \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in X : f(x) \leq t\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X. Δείξτε ότι η f είναι κάτω ημισυνεχής αν και μόνο αν, για κάθε ακολουθία (x_n) στον X με $x_n \to x \in X$, ισχύει*

$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

Δώστε παράδειγμα κάτω ημισυνεχούς συνάρτησης η οποία δεν είναι συνεχής.

(β) *Μια συνάρτηση $f : (X,\rho) \to \mathbb{R}$ λέγεται άνω ημισυνεχής αν η $-f$ είναι κάτω ημισυνεχής. Διατυπώστε και αποδείξτε χαρακτηρισμούς της άνω ημισυνεχούς συνάρτησης, αντίστοιχους με τους χαρακτηρισμούς της κάτω ημισυνεχούς συνάρτησης που περιγράφτηκαν στο* (α).

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι κάτω ημισυνεχής. Έστω (x_n) στο X με $x_n \to x \in X$. Θέτουμε $t = \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$. Αν $f(x) > t$ τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $x \notin F_{t+\varepsilon} = \{z \in X : f(z) \leq t+\varepsilon\}$. Αφού το $F_{t+\varepsilon}$ είναι κλειστό, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $F_{t+\varepsilon} \cap B(x,\delta) = \emptyset$. Όμως, υπάρχει υπακολουθία $x_{k_n} \to x$ ώστε $f(x_{k_n}) \to t$. Αυτό σημαίνει ότι τελικά θα ισχύουν οι $x_{k_n} \in B(x,\delta)$ και $f(x_{k_n}) < t+\varepsilon$, δηλαδή $x_{k_n} \in F_{t+\varepsilon}$. Έπεται ότι $F_{t+\varepsilon} \cap B(x,\delta) \neq \emptyset$, το οποίο είναι άτοπο.

Αντίστροφα, έστω $F_t = \{z \in X : f(z) \leq t\}$, $t \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε $x \in \overline{F_t}$. Τότε, υπάρχει (x_n) στο F_t με $x_n \to x$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $f(x_n) \leq t$, άρα $\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \leq t$. Από την υπόθεση, $f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \leq t$, δηλαδή $x \in F_t$. Άρα, το F_t είναι κλειστό.

Μια κάτω ημισυνεχής συνάρτηση που δεν είναι συνεχής είναι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ αν $x = 0$ και $f(x) = 1$ αν $x \neq 0$ (εξηγήστε γιατί).

(β) Μια συνάρτηση $f : (X, \rho) \to \mathbb{R}$ είναι *άνω ημισυνεχής* αν για κάθε $t \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in X : f(x) \geq t\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X. Η f είναι άνω ημισυνεχής αν και μόνο αν, για κάθε ακολουθία (x_n) στον X με $x_n \to x \in X$, ισχύει

$$f(x) \geq \limsup_{n\to\infty} f(x_n).$$

Μια άνω ημισυνεχής συνάρτηση που δεν είναι συνεχής είναι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1$ αν $x = 0$ και $f(x) = 0$ αν $x \neq 0$ (εξηγήστε γιατί).

4.28. *Αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο μετρικοί χώροι (X, ρ), (Y, σ) οι οποίοι δεν είναι ομοιομορφικοί αλλά ικανοποιούν το εξής: υπάρχουν συναρτήσεις $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ οι οποίες είναι συνεχείς, 1-1 και επί.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε τα εξής υποσύνολα του $\mathbb{R}$:

$$X = \{-m : m \in \mathbb{N}\} \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} [2n, 2n+1) \right), \quad Y = X \cup \{1\}$$

με τη συνήθη μετρική. Τότε, οι συναρτήσεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to X$ με

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq -2 \\ 1, & x = -1 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x, & x \leq -1 \\ \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x-1}{2}, & 2 \leq x < 3 \\ x-2, & x \geq 4 \end{cases}$$

είναι συνεχείς 1-1 και επί. Παρ' όλα αυτά οι X, Y δεν είναι ομοιομορφικοί. Πράγματι· αν υπάρχει $h : Y \to X$ ομοιομορφισμός τότε, η $h|_{[0,1]} : [0, 1] \to Y$ είναι συνεχής και 1-1. Από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής το $h([0, 1])$ είναι κλειστό και φραγμένο (μη τετριμμένο) διάστημα. Οπότε υπάρχει $n \geq 0$ ώστε $f([0, 1]) \subseteq [2n, 2n+1)$. Έστω $f([0, 1]) = [a, b] \subseteq [2n, 2n+1)$. Τότε υπάρχει $b < c < 2n+1$. Για τον ίδιο λόγο η h^{-1} απεικονίζει το $[b, c]$ σε κλειστό και φραγμένο διάστημα, όμως διαφορετικό από το $[0, 1]$ (εξηγήστε γιατί). Έστω $m \geq 1$ ώστε $h^{-1}([b, c]) \subseteq [2m, 2m+1)$. Τότε η $h^{-1}|_{[a,c]} : [a, c] \to [0, 1] \cup [2m, 2m+1)$ είναι συνεχής και το σύνολο τιμών της δεν είναι διάστημα. Αυτό είναι άτοπο σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής.