Κεφάλαιο 1

Μετρικοί χώροι

Ομάδα Α΄

1.1. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι η νόρμα είναι άρτια συνάρτηση και ικανοποιεί την ανισότητα*

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x - y\|$$

για κάθε $x, y \in X$.

Υπόδειξη. Για κάθε $x \in X$ έχουμε $\|-x\| = \|(-1)x\| = |-1| \cdot \|x\| = \|x\|$. Συνεπώς, η νόρμα $\|\cdot\|$ είναι άρτια συνάρτηση.

Από την τριγωνική ανισότητα, για κάθε $x, y \in X$ έχουμε

$$\|x\| = \|(x-y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|, \ \text{ άρα } \ \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

και

$$\|y\| = \|(y-x) + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|, \ \text{ άρα } \ \|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|.$$

Έπεται ότι

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x - y\|.$$

1.2. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι:*

(α) $|\rho(x,z) - \rho(y,z)| \leq \rho(x,y)$ *για κάθε $x, y, z \in X$.*

(β) $|\rho(x,y) - \rho(z,w)| \leq \rho(x,z) + \rho(y,w)$ *για κάθε $x, y, z, w \in X$.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $x, y, z \in X$. Από την τριγωνική ανισότητα της μετρικής έχουμε

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) \Rightarrow \rho(x,z) - \rho(y,z) \leq \rho(x,y),$$
$$\rho(y,z) \leq \rho(y,x) + \rho(x,z) \Rightarrow \rho(y,z) - \rho(x,z) \leq \rho(y,x).$$

Συνδυάζοντας τις δυο ανισότητες παίρνουμε

$$|\rho(x,z) - \rho(y,z)| \leq \rho(x,y).$$

(β) Αν $x, y, z, \in X$, από την τριγωνική ανισότητα στο $\mathbb{R}$ έχουμε

$$|\rho(x,y) - \rho(z,w)| \leq |\rho(x,y) - \rho(z,y)| + |\rho(z,y) - \rho(z,w)|$$

Όμως, από το (α) ισχύει

$$|\rho(x,y) - \rho(z,y)| + |\rho(z,y) - \rho(z,w)| \leq \rho(x,z) + \rho(y,w).$$

1.3. *Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε τη συνάρτηση $\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\sigma(a,b) = \sqrt{|a-b|}$. Αποδείξτε ότι ο $(\mathbb{R}, \sigma)$ είναι μετρικός χώρος.*

Γενικότερα, δείξτε ότι: αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και αν θεωρήσουμε την $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με

$$d(x,y) = \sqrt{\|x-y\|}, \quad x, y \in X,$$

τότε ο (X, d) είναι μετρικός χώρος.

Υπόδειξη. Αποδεικνύουμε το γενικότερο αποτέλεσμα: αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα, η $d(x,y) = \sqrt{\|x-y\|}$ είναι μετρική στο X.

Οι πρώτες δύο ιδιότητες της μετρικής ελέγχονται άμεσα: για κάθε $x, y \in X$ έχουμε $d(x,y) = \sqrt{\|x-y\|} \geq 0$ και ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\|x-y\| = 0$, δηλαδή αν και μόνο αν $x = y$. Επίσης,

$$d(y,x) = \sqrt{\|y-x\|} = \sqrt{\|x-y\|} = d(x,y)$$

αφού η νόρμα είναι άρτια συνάρτηση: $\|y-x\| = \|x-y\|$.

Για την τριγωνική ανισότητα θα χρησιμοποιήσουμε την τριγωνική ανισότητα για τη νόρμα, το γεγονός ότι η $t \mapsto \sqrt{t}$ είναι αύξουσα στο $[0, \infty)$ και την ανισότητα $\sqrt{t+s} \leq \sqrt{t} + \sqrt{s}$, $t, s \geq 0$, η οποία αποδεικνύεται εύκολα με ύψωση στο τετράγωνο. Έστω $x, y, z \in X$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \sqrt{\|x-z\|} = \sqrt{\|(x-y)+(y-z)\|} \leq \sqrt{\|x-y\| + \|y-z\|} \\ &\leq \sqrt{\|x-y\|} + \sqrt{\|y-z\|} = d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

1.4. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $\rho_1 = \min\{d, 1\}$, $\rho_2 = \frac{d}{1+d}$ και $d_\alpha = d^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ είναι μετρικές στο X.*

Υπόδειξη. Ελέγχουμε μόνο την τριγωνική ανισότητα:

(α) Έστω $x, y, z \in X$. Έχουμε $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, άρα

$$\rho_1(x,z) = \min\{d(x,z), 1\} \leq \min\{d(x,y) + d(y,z), 1\}.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\min\{d(x,y)+d(y,z),1\} \leq \min\{d(x,y),1\}+\min\{d(y,z),1\}. \tag{1}$$

Παρατηρήστε ότι $\min\{t+s,1\} \leq \min\{t,1\}+\min\{s,1\}$ για κάθε $t,s \geq 0$ (αυτή εξασφαλίζει την (1)). Για την τελευταία ανισότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $t,s < 1$ (διότι το αριστερό μέλος είναι μικρότερο ή ίσο του 1). Όμως τότε, η ανισότητα παίρνει τη μορφή $\min\{t+s,1\} \leq t+s$, δηλαδή ισχύει και πάλι.

(β) Έστω $x,y,z \in X$. Έχουμε $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$, άρα

$$\rho_2(x,z) = \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \leq \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)},$$

διότι η συνάρτηση $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ είναι αύξουσα στο $[0,\infty)$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)}. \tag{2}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\frac{t+s}{1+t+s} = \frac{t}{1+t+s} + \frac{s}{1+t+s} \leq \frac{t}{1+t} + \frac{s}{1+s}$$

για κάθε $t,s \geq 0$ (αυτή εξασφαλίζει την (2)).

(γ) Έστω $x,y,z \in X$. Έχουμε $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$, άρα

$$d_\alpha(x,z) = d(x,z)^\alpha \leq (d(x,y)+d(y,z))^\alpha.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$(d(x,y)+d(y,z))^\alpha \leq d(x,y)^\alpha + d(y,z)^\alpha. \tag{3}$$

Δείξτε ότι $(x+1)^\alpha \leq x^\alpha + 1$ για $x > 0$ (μελετώντας κατάλληλη συνάρτηση). Από αυτήν έπεται η $(t+s)^\alpha \leq t^\alpha + s^\alpha$ για κάθε $t,s > 0$ (αν θέσουμε $x = t/s$) η οποία εξασφαλίζει την (3).

1.5. *Αν d_1, d_2 είναι μετρικές στο σύνολο X εξετάστε αν οι d_1+d_2, $\max\{d_1,d_2\}$, $\min\{d_1,d_2\}$ είναι μετρικές στο X. Αν η d είναι μετρική στο X, είναι η d^2 μετρική στο X;*

Υπόδειξη. Εύκολα ελέγχουμε ότι οι d_1+d_2 και $\max\{d_1,d_2\}$ είναι μετρικές στο X. Ας δούμε μόνο την τριγωνική ανισότητα για την $\rho = \max\{d_1,d_2\}$: έστω $x,y,z \in X$. Έχουμε $\rho(x,z) = d_1(x,z)$ ή $\rho(x,z) = d_2(x,z)$. Στην πρώτη περίπτωση γράφουμε

$$\rho(x,z) = d_1(x,z) \leq d_1(x,y) + d_1(y,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z),$$

ενώ στη δεύτερη,

$$\rho(x,z) = d_2(x,z) \leq d_2(x,y) + d_2(y,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z).$$

Η $d = \min\{d_1, d_2\}$ δεν είναι απαραίτητα μετρική. Ένα παράδειγμα είναι το εξής: στο $[0,\infty)$ θεωρούμε τις μετρικές $d_1(x,y) = |x-y|$ και $d_2(x,y) = |x^2-y^2|$ (η d_2 είναι η μετρική d_f που επάγει στο $[0,\infty)$ η 1-1 συνάρτηση $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(t) = t^2$). Θα δείξουμε ότι η τριγωνική ανισότητα δεν ικανοποιείται από την τριάδα $0, \frac{1}{2}, 2$: έχουμε

$$\begin{aligned} d(0,1/2) &= \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{4}, \\ d(1/2,2) &= \min\left\{\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right\} = \frac{3}{2}, \\ d(0,2) &= \min\{2,4\} = 2, \end{aligned}$$

άρα

$$d(0,2) = 2 > \frac{7}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = d(0,1/2) + d(1/2,2).$$

Αν η d είναι μετρική στο X, τότε η d^2 δεν είναι απαραίτητα μετρική στο X. Ένα παράδειγμα μας δίνει η συνήθης μετρική $d(x,y) = |x-y|$ στο $\mathbb{R}$. Αν η d^2 ήταν μετρική θα έπρεπε, για κάθε $x,y,z \in \mathbb{R}$ να ισχύει η ανισότητα

$$(x-z)^2 \leq (x-y)^2 + (y-z)^2.$$

Δοκιμάστε την τριάδα $x = 0$, $y = 2$, $z = 10$: θα παίρναμε $100 \leq 4 + 64$, το οποίο δεν ισχύει.

1.6. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Αποδείξτε τις ακόλουθες ιδιότητες της διαμέτρου:*
(α) $\mathrm{diam}(A) = 0$ *αν και μόνο αν* $A = \emptyset$ *ή το* A *είναι μονοσύνολο (δηλαδή,* $A = \{x\}$ *για κάποιο* $x \in X$*).*
(β) *Αν* $A \subseteq B \subseteq X$ *τότε* $\mathrm{diam}(A) \leq \mathrm{diam}(B)$.
(γ) *Αν* $A, B \subseteq X$ *τότε ισχύει η ανισότητα*

$$\mathrm{diam}(A \cap B) \leq \min\{\mathrm{diam}(A), \mathrm{diam}(B)\} \leq \max\{\mathrm{diam}(A), \mathrm{diam}(B)\} \leq \mathrm{diam}(A \cup B)$$

Ισχύει η ανισότητα

$$\mathrm{diam}(A \cup B) \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B)$$

για κάθε ζευγάρι υποσυνόλων A, B *του* X*;*
(δ) *Αν* (A_n) *είναι μια ακολουθία υποσυνόλων του* X *με* $\mathrm{diam}(A_n) \to 0$ *καθώς* $n \to \infty$, *δείξτε ότι το* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ *είναι το πολύ μονοσύνολο (έχει το πολύ ένα στοιχείο).*

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι $A \neq \emptyset$. Αν $A = \{x\}$ για κάποιο $x \in X$ τότε είναι φανερό ότι $\mathrm{diam}(A) = 0$. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x, y \in A$ με $x \neq y$. Τότε, $\mathrm{diam}(A) \geq \rho(x, y) > 0$.

(β) Αν $x, y \in A$ τότε $x, y \in B$, άρα $\rho(x, y) \leq \mathrm{diam}(B)$. Έπεται ότι $\mathrm{diam}(A) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\} \leq \mathrm{diam}(B)$.

(γ) Αφού $A \cap B \subseteq A$ και $A \cap B \subseteq B$, έχουμε $\mathrm{diam}(A \cap B) \leq \mathrm{diam}(A)$ και $\mathrm{diam}(A \cap B) \leq \mathrm{diam}(B)$ (από το (β)). Έπεται ότι

$$\mathrm{diam}(A \cap B) \leq \min\{\mathrm{diam}(A), \mathrm{diam}(B)\}.$$

Είναι προφανές ότι

$$\min\{\mathrm{diam}(A), \mathrm{diam}(B)\} \leq \max\{\mathrm{diam}(A), \mathrm{diam}(B)\}.$$

Για την τελευταία ανισότητα παρατηρούμε ότι $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$, άρα $\mathrm{diam}(A) \leq \mathrm{diam}(A \cup B)$ και $\mathrm{diam}(B) \leq \mathrm{diam}(A \cup B)$ (από το (β)). Έπεται ότι

$$\max\{\mathrm{diam}(A), \mathrm{diam}(B)\} \leq \mathrm{diam}(A \cup B).$$

Η ανισότητα $\mathrm{diam}(A \cup B) \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B)$ δεν ισχύει γενικά: θεωρήστε οποιονδήποτε μετρικό χώρο (X, d) που έχει τουλάχιστον δύο σημεία $x \neq y$. Αν θέσουμε $A = \{x\}$ και $B = \{y\}$ τότε $A \cup B = \{x, y\}$ και

$$\mathrm{diam}(A \cup B) = d(x, y) > 0 = \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B).$$

Σημείωση: Αν $A \cap B \neq \emptyset$ τότε η ανισότητα ισχύει: θεωρήστε $w \in A \cap B$. Αν $x \in A$ και $y \in B$ τότε

$$d(x, y) \leq d(x, w) + d(w, y) \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B).$$

Αν $x, y \in A$ ή $x, y \in B$, είναι προφανές ότι $d(x, y) \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B)$. Έπεται ότι

$$\mathrm{diam}(A \cup B) \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B).$$

(δ) Έστω $x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ με $x \neq y$. Τότε, $\mathrm{diam}(A_n) \geq \rho(x, y) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παίρνοντας το όριο καθώς το $n \to \infty$ καταλήγουμε στην $0 = \lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}(A_n) \geq \rho(x, y) > 0$, άτοπο.

1.7. *Δείξτε ότι ένα υποσύνολο A του μετρικού χώρου (X, ρ) είναι φραγμένο αν και μόνον αν υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r > 0$ ώστε $\rho(a, x_0) \leq r$ για κάθε $a \in A$.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το A είναι φραγμένο. Επιλέγουμε τυχόν $x_0 \in A$ και θέτουμε $r = \mathrm{diam}(A) + 1 > 0$. Τότε, για κάθε $a \in A$ έχουμε

$$\rho(a, x_0) \leq \mathrm{diam}(A) < r.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r > 0$ ώστε $\rho(a, x_0) \leq r$ για κάθε $a \in A$. Τότε, για κάθε $a, b \in A$ έχουμε

$$\rho(a, b) \leq \rho(a, x_0) + \rho(x_0, b) \leq r + r = 2r.$$

Συνεπώς, το A είναι φραγμένο και $\mathrm{diam}(A) \leq 2r$.

1.8. Έστω $A_1, \ldots, A_k$ φραγμένα μη κενά υποσύνολα του μετρικού χώρου (X, ρ). Δείξτε ότι το σύνολο $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ είναι επίσης φραγμένο.

Υπόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι αν A και B είναι φραγμένα μη κενά υποσύνολα του μετρικού χώρου (X, ρ) τότε το $A \cup B$ είναι φραγμένο. Στη συνέχεια, με επαγωγή βλέπουμε ότι κάθε πεπερασμένη ένωση φραγμένων συνόλων είναι φραγμένο σύνολο.

Σταθεροποιούμε $x_0 \in A$ και $y_0 \in B$. Τότε, αν $x \in A$ ισχύει $\rho(x, x_0) \leq \mathrm{diam}(A)$ και αν $y \in B$ ισχύει $\rho(y, y_0) \leq \mathrm{diam}(B)$. Θεωρούμε $x, y \in A \cup B$ και διακρίνουμε περιπτώσεις:

(i) Αν $x, y \in A$ τότε $\rho(x, y) \leq \mathrm{diam}(A)$.

(ii) Αν $x, y \in B$ τότε $\rho(x, y) \leq \mathrm{diam}(B)$.

(iii) Αν $x \in A$ και $y \in B$ τότε

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_0) + \rho(x_0, y_0) + \rho(y_0, y) \leq \mathrm{diam}(A) + \rho(x_0, y_0) + \mathrm{diam}(B).$$

Έπεται ότι: αν θέσουμε $M = \mathrm{diam}(A) + \rho(x_0, y_0) + \mathrm{diam}(B)$, τότε $\rho(x, y) \leq M$ για κάθε $x, y \in A \cup B$. Συνεπώς, το $A \cup B$ είναι φραγμένο.

Ομάδα Β′

1.9. (α) *Έστω $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ αύξουσα συνάρτηση με $f(0) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$. Υποθέτουμε επίσης ότι η f είναι υποπροσθετική, δηλ. $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \geq 0$. Δείξτε ότι: αν η d είναι μετρική στο X τότε και η $f \circ d$ είναι μετρική στο X.*

(β) *Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^+$ συνάρτηση. Αποδείξτε ότι καθεμιά από τις ακόλουθες ιδιότητες είναι ικανή να εξασφαλίσει την υποπροσθετικότητα της f:*

(i) Η f είναι κοίλη συνάρτηση.

(ii) Η συνάρτηση $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$ είναι φθίνουσα.

(γ) *Εφαρμογές: Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $\rho_1 = \min\{d, 1\}$, $\rho_2 = \frac{d}{1+d}$ και $d_\alpha = d^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ είναι μετρικές στο X.*

Υπόδειξη. (α) Από την υπόθεση έχουμε $f(t) \geq 0$ για κάθε $t \geq 0$ και $f(t) = 0$ αν και μόνο αν $t = 0$. Έπεται ότι, για κάθε $x, y \in X$, $(f \circ d)(x, y) = f(d(x, y)) \geq 0$ και ισχύει ισότητα αν και μόνο αν $d(x, y) = 0$ δηλαδή αν και μόνο αν $x = y$ (διότι η d είναι μετρική).

Η συμμετρική ιδιότητα είναι προφανής: για κάθε $x, y \in X$,

$$(f \circ d)(y,x) = f(d(y,x)) = f(d(x,y)) = (f \circ d)(x,y)$$

όπου η δεύτερη ισότητα δικαιολογείται από το γεγονός ότι $d(y,x) = d(x,y)$.

Για την τριγωνική ανισότητα χρησιμοποιούμε την τριγωνική ανισότητα για την d, την υπόθεση ότι η f είναι αύξουσα και την υπόθεση ότι η f είναι υποπροσθετική: για κάθε $x, y, z \in X$ έχουμε, διαδοχικά,

$$\begin{aligned}(f \circ d)(x,z) &= f(d(x,z)) \leq f(d(x,y) + d(y,z)) \\ &\leq f(d(x,y)) + f(d(y,z)) = (f \circ d)(x,y) + (f \circ d)(y,z).\end{aligned}$$

(β) Δείχνουμε πρώτα ότι αν η f είναι κοίλη συνάρτηση, τότε η συνάρτηση $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$ είναι φθίνουσα. Έστω $y > x > 0$. Από το «λήμμα των τριών χορδών» για την κοίλη συνάρτηση f στα σημεία $0, x, y$ παίρνουμε

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geq \frac{f(y) - f(0)}{y},$$

απ΄ όπου έπεται ότι

$$\frac{f(x)}{x} - \frac{f(y)}{y} \geq f(0)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \geq 0.$$

Η τελευταία ανισότητα δικαιολογείται από το γεγονός ότι $f(0) \geq 0$ και $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ (αφού $x < y$).

Δείχνουμε τώρα ότι αν η συνάρτηση $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$ είναι φθίνουσα τότε η f είναι υποπροσθετική. Έστω $x, y \geq 0$. Θα δείξουμε ότι $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$. Αν $x = 0$ ή $y = 0$, η ανισότητα ελέγχεται εύκολα (χρησιμοποιήστε και το γεγονός ότι $f(0) \geq 0$). Υποθέτουμε λοιπόν ότι $x > 0$ και $y > 0$. Τότε, $x + y > x$ και $x + y > y$, άρα

$$\frac{f(x+y)}{x+y} \leq \frac{f(x)}{x} \quad \text{και} \quad \frac{f(x+y)}{x+y} \leq \frac{f(y)}{y}.$$

Έπεται ότι

$$\frac{x}{x+y} f(x+y) \leq f(x) \quad \text{και} \quad \frac{y}{x+y} f(x+y) \leq f(y).$$

Προσθέτοντας τις δύο ανισότητες και παρατηρώντας ότι $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} = 1$ βλέπουμε ότι

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y).$$

Έτσι, αποδείξαμε ότι η (i) έχει ως συνέπεια την (ii), η οποία με τη σειρά της αρκεί για να εξασφαλίσουμε την υποπρσθετικότητα της f.

(γ) Εφαρμογές: Δίνεται ο μετρικός χώρος (X, d) και θέλουμε να δείξουμε ότι οι $\rho_1 = \min\{d, 1\}$, $\rho_2 = \frac{d}{1+d}$ και $d_\alpha = d^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ είναι μετρικές στο X. Σύμφωνα με τα προηγούμενα ερωτήματα, αρκεί να παρατηρήσετε ότι οι συναρτήσεις $f(t) = \min\{t, 1\}$,

$g(t) = \frac{t}{1+t}$ και $h_\alpha(t) = t^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ – ορισμένες στο $[0, \infty)$ – είναι κοίλες, αύξουσες, παίρνουν την τιμή 0 στο 0 και γνήσια θετικές τιμές για $t > 0$. Κάντε ένα σχήμα για καθεμιά από αυτές.

1.10. *(Ανισότητα Hölder για συναρτήσεις) Έστω $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις και p, q συζυγείς εκθέτες (δηλ. $p, q > 1$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Δείξτε ότι*

$$\int_0^1 |f(t)g(t)|\,dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \left(\int_0^1 |g(t)|^q\,dt\right)^{1/q}.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι

$$\|f\|_p^p = \int_0^1 |f(t)|^p\,dt = 1 \ \text{ και } \ \|g\|_q^q = \int_0^1 |g(s)|^q\,ds = 1.$$

Από την ανισότητα του Young, για κάθε $t \in [0,1]$ ισχύει

$$|f(t)g(t)| \leq \frac{1}{p}|f(t)|^p + \frac{1}{q}|g(t)|^q.$$

Ολοκληρώνοντας στο $[0,1]$ παίρνουμε

$$\int_0^1 |f(t)g(t)|\,dt \leq \frac{1}{p}\int_0^1 |f(t)|^p\,dt + \frac{1}{q}\int_0^1 |g(t)|^q\,dt = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \|g\|_q.$$

Στη γενική περίπτωση: μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f\|_p \neq 0$ και $\|g\|_q \neq 0$ (αλλιώς $f \equiv 0$ ή $g \equiv 0$ και το αριστερό μέλος της ζητούμενης ανισότητας μηδενίζεται, οπότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε). Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_1 = \frac{f}{\|f\|_p} \ \text{ και } \ g_1 = \frac{g}{\|g\|_q}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int_0^1 |f_1(t)|^p\,dt = \frac{1}{\|f\|_p^p}\int_0^1 |f(t)|^p\,dt = 1 \ \text{ και } \ \int_0^1 |g_1(t)|^q\,dt = \frac{1}{\|g\|_q^q}\int_0^1 |g(t)|^q\,dt = 1.$$

Από την ειδική περίπτωση της ανισότητας που δείξαμε παραπάνω, έχουμε

$$\int_0^1 |f_1(t)g_1(t)|\,dt \leq 1, \ \text{ δηλαδή, } \ \int_0^1 |f(t)g(t)|\,dt \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

1.11. *Έστω $1 \leq p < \infty$. Δείξτε ότι ο χώρος $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_p)$ με*

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

είναι χώρος με νόρμα.

Υπόδειξη. Δείχνουμε μόνο την τριγωνική ανισότητα (Minkowski): έστω $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f+g\|_p > 0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_0^1 |f(t)+g(t)|^p\,dt = \int_0^1 |f(t)+g(t)|^{p-1}|f(t)+g(t)|\,dt \\
&\leq \int_0^1 |f(t)+g(t)|^{p-1}|f(t)|\,dt + \int_0^1 |f(t)+g(t)|^{p-1}|g(t)|\,dt \\
&\leq \left(\int_0^1 |f(t)+g(t)|^{(p-1)q}\,dt\right)^{1/q} \|f\|_p + \left(\int_0^1 |f(t)+g(t)|^{(p-1)q}\,dt\right)^{1/q} \|g\|_p,
\end{aligned}$$

όπου, στο τελευταίο βήμα, εφαρμόσαμε την ανισότητα Hölder για τα ζευγάρια $f+g, f$ και $f+g, g$. Παρατηρούμε ότι $(p-1)q = p$ (οι p και q είναι συζυγείς εκθέτες). Συνεπώς,

$$\left(\int_0^1 |f(t)+g(t)|^{(p-1)q}\,dt\right)^{1/q} = \left(\int_0^1 |f(t)+g(t)|^p\,dt\right)^{1/q} = \|f+g\|_p^{p/q}.$$

Συνεπώς,

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f+g\|_p^{p/q}\left(\|f\|_p + \|g\|_p\right).$$

Χρησιμοποιώντας την $p - \frac{p}{q} = 1$ συμπεραίνουμε ότι

$$\|f+g\|_p = \frac{\|f+g\|_p^p}{\|f+g\|_p^{p/q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

1.12. *Θεωρούμε τον χώρο $\mathcal{S}$ όλων των ακολουθιών πραγματικών αριθμών. Έστω (m_n) ακολουθία θετικών αριθμών, με $\sum_n m_n < +\infty$. Ορίζουμε απόσταση d στον $\mathcal{S}$ ως εξής: αν $x = (x(n))$, $y = (y(n)) \in \mathcal{S}$, θέτουμε*

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n \frac{|x(n)-y(n)|}{1+|x(n)-y(n)|}.$$

Δείξτε ότι ο $(\mathcal{S}, d)$ είναι μετρικός χώρος, και υπολογίστε τη διάμετρό του.

Υπόδειξη. Η d είναι καλά ορισμένη, γιατί αν $x = (x(k))$ και $y = (y(k)) \in \mathcal{S}$, τότε

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{|x(k)-y(k)|}{1+|x(k)-y(k)|} \leq \sum_{k=1}^{\infty} m_k < +\infty.$$

Αυτό δείχνει επίσης ότι $\mathrm{diam}(\mathcal{S}, d) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m_k$.

Από τις ιδιότητες της μετρικής, η μόνη που χρειάζεται έλεγχο είναι η τριγωνική ανισότητα: αν $x = (x(k))$, $y = (y(k))$ και $z = (z(k)) \in \mathcal{S}$, τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $\frac{t}{1+t}$ είναι υποπροσθετική και $|x(k) - y(k)| \leq |x(k) - z(k)| + |z(k) - y(k)|$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, και προσθέτοντας ως προς k αφού πολλαπλασιάσουμε με τους θετικούς αριθμούς m_k, έχουμε

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{|x(k)-y(k)|}{1+|x(k)-y(k)|} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{|x(k)-z(k)|}{1+|x(k)-z(k)|} + \sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{|z(k)-y(k)|}{1+|z(k)-y(k)|} \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

Τέλος, αν πάρουμε $x_M = (M, \ldots, M, \ldots)$ όπου $M > 0$, και $y = (0, \ldots, 0, \ldots)$, έχουμε

$$\mathrm{diam}(\mathcal{S}, d) \geq d(x_M, y) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \frac{M}{1+M} = \frac{M}{1+M} \sum_{k=1}^{\infty} m_k,$$

και αφού $\frac{M}{1+M} \nearrow 1$ όταν το $M \to \infty$, παίρνουμε

$$\mathrm{diam}(\mathcal{S}, d) \geq \lim_{M\to\infty} d(x_M, y) = \lim_{M\to\infty} \frac{M}{1+M} \sum_{k=1}^{\infty} m_k = \sum_{k=1}^{\infty} m_k.$$

Δηλαδή, $\mathrm{diam}(\mathcal{S}, d) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k$.

1.13. *Έστω $\mathcal{P}$ το σύνολο των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές. Αν $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ είναι ένα πολυώνυμο από το $\mathcal{P}$, το ύψος του p είναι το*

$$h(p) = \max\{|a_i| : i = 0, 1, \ldots, n\}.$$

(α) *Δείξτε ότι ο $\mathcal{P}$ είναι γραμμικός χώρος με τις πράξεις κατά σημείο και η συνάρτηση $h : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ είναι νόρμα στον $\mathcal{P}$.*

(β) *Δείξτε ότι η συνάρτηση $\sigma : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, με*

$$\sigma(p) = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$$

είναι νόρμα στον $\mathcal{P}$.

(γ) *Δείξτε ότι $h(p) \leq \sigma(p) \leq (n+1) \cdot h(p)$ για κάθε πολυώνυμο p βαθμού το πολύ n.*

Υπόδειξη. (α) Ελέγχουμε εύκολα ότι αν p, q είναι πολυώνυμα και $t \in \mathbb{R}$, τότε οι συναρτήσεις $p + q$ και tp είναι πολυώνυμα. Συνεπώς, ο $\mathcal{P}$ είναι γραμμικός χώρος με τις πράξεις κατά σημείο. Δείχνουμε ότι η $h : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ είναι νόρμα στον $\mathcal{P}$: αν $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$

είναι ένα πολυώνυμο από το $\mathcal{P}$, είναι φανερό ότι $h(p) \geq 0$ και ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$, δηλαδή αν και μόνο αν $p \equiv 0$.

Αν $t \in \mathbb{R}$, τότε $(tp)(x) = (ta_0) + (ta_1)x + \cdots + (ta_n)x^n$. Άρα,

$$h(tp) = \max\{|ta_i| : i = 0, 1, \ldots, n\} = |t| \max\{|a_i| : i = 0, 1, \ldots, n\} = |t|\, h(p).$$

Για την τριγωνική ανισότητα, έστω $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ και $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ δύο πολυώνυμα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n \geq m$ και αν $n > m$ θέτουμε $b_{m+1} = \cdots = b_n = 0$. Παρατηρήστε ότι $h(q) = \max\{|b_i| : i = 0, 1, \ldots, n\}$. Τότε, $(p+q)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n$ και

$$h(p+q) = |a_j + b_j| \ \text{ για κάποιο } j \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Από την

$$|a_j + b_j| \leq |a_j| + |b_j| \leq h(p) + h(q)$$

έπεται ότι

$$h(p+q) \leq h(p) + h(q).$$

(β) Με τον ίδιο τρόπο: είναι φανερό ότι $\sigma(p) \geq 0$ και ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$, δηλαδή αν και μόνο αν $p \equiv 0$.

Αν $t \in \mathbb{R}$, τότε $(tp)(x) = (ta_0) + (ta_1)x + \cdots + (ta_n)x^n$. Άρα,

$$\sigma(tp) = |ta_0| + |ta_1| + \cdots + |ta_n| = |t|(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|) = |t|\, \sigma(p).$$

Για την τριγωνική ανισότητα, έστω $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ και $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ δύο πολυώνυμα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n \geq m$ και αν $n > m$ θέτουμε $b_{m+1} = \cdots = b_n = 0$. Παρατηρήστε ότι $\sigma(q) = |b_0| + |b_1| + \cdots + |b_n|$. Τότε, $(p+q)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n$ και

$$\sigma(p+q) = \sum_{j=0}^{n} |a_j + b_j| \leq \sum_{j=0}^{n} (|a_j| + |b_j|) = \sum_{j=0}^{n} |a_j| + \sum_{j=0}^{n} |b_j| = \sigma(p) + \sigma(q).$$

(γ) Αν $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ υπάρχει $0 \leq j \leq n$ ώστε $h(p) = |a_j|$. Τότε, $|a_i| \leq |a_j|$ για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n$ και είναι φανερό ότι

$$|a_j| \leq |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| \leq |a_j| + |a_j| + \cdots + |a_j| = (n+1)|a_j|,$$

δηλαδή

$$h(p) \leq \sigma(p) \leq (n+1)h(p).$$

1.14. *Θεωρούμε τον χώρο $(\mathcal{P}, h)$ της προηγούμενης άσκησης και τον $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : (\mathcal{P}, h) \to (c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ με*

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \xmapsto{f} f(p) := a = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$$

είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων που διατηρεί τις αποστάσεις. Δηλαδή, η f είναι 1-1, επί και ικανοποιεί τις σχέσεις

(i) $f(p+q) = f(p) + f(q)$

(ii) $f(\lambda p) = \lambda f(p)$

(iii) $\|f(p)\|_\infty = h(p)$

για κάθε $p, q \in \mathcal{P}$ *και* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Έστω $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ και $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ δύο πολυώνυμα. Μπορούμε να γράψουμε τα p, q στη μορφή $p(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ και $q(x) = \sum_{k=0}^\infty b_k x^k$, όπου $a_k = 0$ αν $k > n$ και $b_k = 0$ αν $k > m$. Τότε, $(p+q)(x) = \sum_{k=0}^\infty (a_k + b_k) x^k$, άρα

$$\begin{aligned} f(p+q) &= (a_0 + b_0, \ldots, a_k + b_k, \ldots) = (a_0, \ldots, a_k, \ldots) + (b_0, \ldots, b_k, \ldots) \\ &= f(p) + f(q). \end{aligned}$$

Τελείως ανάλογα, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε $(\lambda p)(x) = \sum_{k=0}^\infty (\lambda a_k) x^k$, άρα

$$f(\lambda p) = (\lambda a_0, \lambda a_1, \ldots, \lambda a_k, \ldots) = \lambda (a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots) = \lambda f(p).$$

Τέλος, αν $p \in \mathcal{P}$ και $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$,

$$\|f(p)\|_\infty = \sup\{|a_k| : k = 0, 1, 2, \ldots\} = \max\{|a_k| : k = 0, 1, \ldots, n\} = h(p).$$

Ομάδα Γ′

1.15. *Σταθεροποιούμε έναν πρώτο αριθμό* p *και θεωρούμε το σύνολο* $\mathbb{Z}$ *των ακεραίων. Αν* $m, n \in \mathbb{Z}$ *με* $m \neq n$, *θέτουμε* $p(n, m)$ *τη μεγαλύτερη δύναμη του* p *που διαιρεί τον* $|n - m|$, *δηλαδή αν* $m \neq n$, *τότε*

$$p(m, n) = \max\{k \geq 0 : m \equiv n \bmod p^k\}.$$

Ορίζουμε $\sigma_p : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *με*

$$\sigma_p(m, n) = \begin{cases} 2^{-p(m,n)}, & m \neq n \\ 0, & m = n \end{cases}$$

Δείξτε ότι η σ_p *είναι μετρική στο* $\mathbb{Z}$ *και ο* $(\mathbb{Z}, \sigma_p)$ *είναι φραγμένος μετρικός χώρος.*

Υπόδειξη. Αποδεικνύουμε μόνο την τριγωνική ανισότητα

$$\sigma_p(x, z) \leq \sigma_p(x, y) + \sigma_p(y, z) \quad \text{για κάθε } x, y, z \in \mathbb{Z}.$$

Αν $x = z$ τότε η ανισότητα ισχύει κατά προφανή τρόπο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $x \neq z$ και επομένως είτε $x \neq y$ ή $y \neq z$ (γιατί;). Αν είναι $x = y$ ή $y = z$ τότε η ανισότητα πάλι ισχύει κατά προφανή τρόπο. Ας είναι λοιπόν $x \neq y$ και $y \neq z$. Έστω $p(x, y) = a$, $p(x, z) = c$ και

$p(y,z)=b$. Τότε έχουμε ότι $x \equiv y \bmod p^a$ και $y \equiv z \bmod p^b$, άρα $z \equiv x \bmod p^{\min\{a,b\}}$ και από τον ορισμό του $p(x,z)$ έχουμε ότι $\min\{a,b\} \leq c$. Επειδή θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{2^c} \leq \frac{1}{2^a} + \frac{1}{2^b},$$

αρκεί ισοδύναμα να δείξουμε την

$$2^{c-a} + 2^{c-b} \geq 1$$

η οποία ισχύει διότι, από την $\min\{a,b\} \leq c$, έχουμε είτε $a \leq c$ ή $b \leq c$.

1.16. *Έστω $\emptyset \neq A \subseteq (0,+\infty)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μετρικός χώρος (X,ρ) ώστε*

$$A = \{\rho(x,y) : x,y \in X,\, x \neq y\}.$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε $X = A \cup \{0\}$ και $\rho(x,y) = \max\{x,y\}$ αν $x \neq y$ στο X, $\rho(x,y) = 0$ αν $x = y$ στο X. Ελέγχουμε πρώτα ότι η ρ ικανοποιεί τα αξιώματα της μετρικής:

(α) Αφού $x > 0$ για κάθε $x \in A$, είναι φανερό ότι $\rho(x,y) \geq 0$ για κάθε $x,y \in X$. Αν $x = y$ έχουμε $\rho(x,y) = 0$ ενώ αν $x \neq y$ τότε τουλάχιστον ένας από τους x,y είναι γνήσια θετικός (διότι ανήκει στο A), και συνεπώς, $\rho(x,y) = \max\{x,y\} > 0$. Ταυτόχρονα έχουμε ελέγξει ότι $\rho(x,y) = 0$ αν και μόνο αν $x = y$.

(β) Από την $\max\{x,y\} = \max\{y,x\}$ (για κάθε $x,y \in \mathbb{R}$) βλέπουμε εύκολα ότι $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ για κάθε $x,y \in X$.

(γ) Για την τριγωνική ανισότητα, θεωρούμε $x,y,z \in X$ και δείχνουμε ότι $\rho(x,z) \leq \rho(x,y)+\rho(y,z)$: αν $x = z$ τότε το αριστερό μέλος είναι ίσο με μηδέν και η ανισότητα ισχύει. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $x \neq z$, και χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x < z$, άρα $\rho(x,z) = z$. Αν $y \neq z$ έχουμε $\rho(y,z) = \max\{y,z\} \geq z = \rho(x,z)$, άρα

$$\rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(y,z) \geq \rho(x,z).$$

Αν $y = z$ τότε η ζητούμενη ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,z) + \rho(z,z) = \rho(x,z),$$

δηλαδή ισχύει πάλι, αυτή τη φορά ως ισότητα. Συνεπώς, η τριγωνική ανισότητα ισχύει για κάθε τριάδα x,y,z στο X.

Τώρα, ορίζουμε $B = \{\rho(x,y) : x,y \in X,\, x \neq y\}$ και αποδεικνύουμε ότι $A = B$. Έστω $x \in A$. Τότε, $x = \max\{0,x\} = \rho(0,x)$, δηλαδή $x \in B$. Αυτό αποδεικνύει ότι $A \subseteq B$. Αντίστροφα, αν $b \in B$ έχουμε $b = \rho(x,y) = \max\{x,y\}$ για κάποια $x \neq y$ στο $X = A \cup \{0\}$. Αφού $b > 0$, ο μεγαλύτερος από τους x και y είναι θετικός αριθμός, άρα ο b ανήκει στο A. Αυτό αποδεικνύει ότι $B \subseteq A$.

1.17. *Θεωρούμε τους χώρους ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$ και c_0.*

(α) *Δείξτε ότι: αν $1 \le p < q \le \infty$ τότε $\ell_p \subseteq \ell_q$ και ότι ο εγκλεισμός είναι γνήσιος.*

(β) *Δείξτε ότι: αν $1 \le p < \infty$ τότε $\ell_p \subseteq c_0$ και ότι ο εγκλεισμός είναι γνήσιος.*

(γ) *Να βρεθεί ακολουθία $x = (x(n))$ που συγκλίνει στο 0 αλλά δεν ανήκει σε κανέναν ℓ_p, $1 \le p < \infty$. Με άλλα λόγια, ο c_0 περιέχει γνήσια την ένωση $\bigcup\{\ell_p : 1 \le p < \infty\}$.*

(δ) *Να βρεθεί ακολουθία $x = (x(n))$ ώστε $x \notin \ell_1$ αλλά $x \in \ell_p$ για κάθε $p > 1$.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $x = (x(n)) \in \ell_p$. Τότε, $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < +\infty$, άρα $|x(n)|^p \to 0$. Δηλαδή, $|x(n)| \to 0$. Έπεται ότι: υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|x(n)| < 1$ για κάθε $n \ge n_0$. Αφού $p < q$, για κάθε $n \ge n_0$ έχουμε $|x(n)|^q \le |x(n)|^p$. Από το κριτήριο σύγκρισης, $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^q < +\infty$, δηλαδή $x \in \ell_q$. Αυτό αποδεικνύει ότι $\ell_p \subseteq \ell_q$.

Ο εγκλεισμός είναι γνήσιος: αν θεωρήσουμε την ακολουθία $x = (x(n))$ με $x(n) = \frac{1}{n^{1/p}}$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \ \text{ ενώ } \ \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{q/p}} < +\infty$$

διότι $q/p > 1$. Άρα, $x \in \ell_q \setminus \ell_p$.

(β) Έστω $x = (x(n)) \in \ell_p$. Τότε, $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < +\infty$, άρα $|x(n)|^p \to 0$. Δηλαδή, $|x(n)| \to 0$. Άρα, $x \in c_0$. Μια μηδενική ακολουθία που δεν ανήκει στον ℓ_p είναι η $x = (x(n))$ με $x(n) = \frac{1}{n^{1/p}}$ (δείτε παραπάνω).

(γ) Θεωρούμε την ακολουθία $x = (x(n))$ με $x(n) = \frac{1}{\log(n+1)}$. Αφού $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n+1)} = 0$, έχουμε $x \in c_0$.

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $p \ge 1$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x(n)|^p}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{[\log(n+1)]^p} = +\infty.$$

Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει στο $+\infty$, το κριτήριο σύγκρισης μας εξασφαλίζει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p = +\infty, \ p \ge 1.$$

Δηλαδή, για κάθε $p \ge 1$ ισχύει $x \notin \ell_p$.

(δ) Ελέγξτε ότι η ακολουθία $x = (x(n))$ με $x(n) = \frac{1}{n}$ έχει αυτή την ιδιότητα.

1.18. *Ο κύβος* του Hilbert $\mathcal{H}^{\infty}$ *είναι το σύνολο όλων των ακολουθιών $x = (x(n))$ με $|x(n)| \le 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

(α) *Δείξτε ότι η*

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |x(n) - y(n)|$$

ορίζει μετρική στο $\mathcal{H}^{\infty}$.

(β) *Αν* $x, y \in \mathcal{H}^\infty$ *και* $k \in \mathbb{N}$, *θέτουμε* $M_k = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x(k) - y(k)|\}$. *Δείξτε ότι*

$$2^{-k} M_k \leq d(x,y) \leq 2^{-k+1} + M_k.$$

Υπόδειξη. (α) Η d ορίζεται καλά: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x, y \in \mathcal{H}^\infty$ έχουμε

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x(n) - y(n)|}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n} = 2 < +\infty$$

διότι $|x(n) - y(n)| \leq |x(n)| + |y(n)| \leq 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Είναι φανερό ότι $d(x,y) \geq 0$ για κάθε $x, y \in \mathcal{H}^\infty$. Επίσης, $d(x,y) = 0$ αν και μόνο αν $|x(n) - y(n)| = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή αν και μόνο αν $x(n) = y(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή αν και μόνο αν $x = y$.

Για τη συμμετρική ιδιότητα της d παρατηρούμε ότι, αν $x, y \in \mathcal{H}^\infty$,

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x(n) - y(n)|}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y(n) - x(n)|}{2^n} = d(y,x).$$

Για την τριγωνική ανισότητα, θεωρούμε $x, y, z \in \mathcal{H}^\infty$ και παρατηρούμε ότι

$$d(x,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x(n) - z(n)|}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x(n) - y(n)|}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y(n) - z(n)|}{2^n} = d(x,y) + d(y,z)$$

διότι $|x(n) - z(n)| \leq |x(n) - y(n)| + |y(n) - z(n)|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Έστω $x, y \in \mathcal{H}^\infty$ και $k \in \mathbb{N}$. Γράφουμε

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{k} \frac{|x(n) - y(n)|}{2^n} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{|x(n) - y(n)|}{2^n}.$$

Υπάρχει $1 \leq j \leq k$ ώστε

$$|x_j - y_j| = M_k = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x(k) - y(k)|\}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{M_k}{2^k} \leq \frac{M_k}{2^j} = \frac{|x_j - y_j|}{2^j} \leq \sum_{n=1}^{k} \frac{|x(n) - y(n)|}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{k} \frac{M_k}{2^n} = M_k \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} < M_k$$

και

$$0 \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{|x(n) - y(n)|}{2^n} \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Προσθέτοντας, συμπεραίνουμε ότι

$$2^{-k} M_k \leq d(x,y) \leq 2^{-k+1} + M_k.$$

1.19. *Θεωρούμε τη μοναδιαία Ευκλείδεια σφαίρα* $S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|_2 = 1\}$ *στον* $\mathbb{R}^m$. *Ορίζουμε «απόσταση»* $\rho(x,y)$ *δύο σημείων* $x, y \in S^{m-1}$ *να είναι η κυρτή γωνία* xoy *στο επίπεδο που ορίζεται από την αρχή των αξόνων* o *και τα* x, y. *Δείξτε ότι: αν* $\rho(x,y) = \theta$ *τότε*

$$\|x-y\|_2 = 2\sin\frac{\theta}{2}$$

και συμπεράνατε ότι

$$\frac{2}{\pi}\rho(x,y) \leq \|x-y\|_2 \leq \rho(x,y), \qquad x, y \in S^{m-1}.$$

Είναι η ρ *μετρική στην* S^{m-1};

Υπόδειξη. Θεωρούμε το τρίγωνο xoy στο επίπεδο που ορίζεται από την αρχή των αξόνων o και τα x, y. Αν z είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $[x,y]$, το μήκος του $[x,z]$ ή του $[z,y]$ ισούται με

$$\frac{\|x-y\|_2}{2} = \sin\left(\frac{\rho(x,y)}{2}\right).$$

Συνεπώς,

$$\rho(x,y) = 2\arcsin\left(\frac{\|x-y\|_2}{2}\right).$$

Από την ανισότητα

$$\frac{2t}{\pi} \leq \sin t \leq t, \qquad t \in [0, \pi/2]$$

είναι φανερό ότι, για κάθε $x, y \in S^{m-1}$,

$$\|x-y\|_2 = 2\sin\left(\frac{\rho(x,y)}{2}\right) \leq \rho(x,y)$$

και

$$\|x-y\|_2 = 2\sin\left(\frac{\rho(x,y)}{2}\right) \geq \frac{4}{\pi}\frac{\rho(x,y)}{2} = \frac{2}{\pi}\rho(x,y).$$

Η ρ είναι μετρική στην S^{m-1} (η «γεωδαισιακή» μετρική). Η μόνη ιδιότητα της μετρικής που χρειάζεται έλεγχο είναι η τριγωνική ανισότητα: παρατηρούμε πρώτα ότι, αν θέσουμε $\theta = \rho(x,y)$, τότε

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2) = 1 - 2\frac{\|x-y\|_2^2}{4} = \frac{2 - \|x\|_2^2 + 2\langle x,y\rangle - \|y\|_2^2}{2} = \langle x,y\rangle,$$

όπου $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^m x_i y_i$, το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^m$. Συνεπώς, η ρ μπορεί να εκφραστεί και στην ακόλουθη μορφή:

$$\rho(x,y) = \arccos(\langle x,y\rangle), \qquad x, y \in S^{m-1}.$$

Πρέπει να δείξουμε ότι: αν $x, y, z \in S^{m-1}$ τότε

$$\arccos(\langle x, z\rangle) \leq \arccos(\langle x, y\rangle) + \arccos(\langle y, z\rangle).$$

Θέτουμε $\phi = \arccos(\langle x, y\rangle)$ και $\psi = \arccos(\langle y, z\rangle)$. Αν $\phi + \psi \geq \pi$ η ανισότητα ισχύει, υποθέτουμε λοιπόν ότι $0 \leq \phi + \psi < \pi$. Θυμηθείτε ότι η συνάρτηση $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ είναι φθίνουσα. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\langle x, z\rangle \geq \cos(\phi + \psi) = \cos\phi \cos\psi - \sin\phi \sin\psi,$$

δηλαδή

$$\langle x, z\rangle \geq \langle x, y\rangle\langle y, z\rangle - \sqrt{1 - \langle x, y\rangle^2}\sqrt{1 - \langle y, z\rangle^2}.$$

Δείχνουμε ότι

$$|\langle x, y\rangle\langle y, z\rangle - \langle x, z\rangle| \leq \sqrt{1 - \langle x, y\rangle^2}\sqrt{1 - \langle y, z\rangle^2}$$

ως εξής: μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα x, y είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αλλιώς $x = y$ και η ανισότητα προκύπτει ως ισότητα διότι τα δύο μέλη μηδενίζονται. Με κατάλληλη επιλογή ορθοκανονικής βάσης $\{e_1, e_2\}$ στον υπόχωρο που παράγουν τα x, y έχουμε $y = e_1$ και $x = t_1e_1 + t_2e_2$ με $t_1^2 + t_2^2 = 1$. Το z γράφεται κι αυτό στη μορφή $z = s_1e_1 + s_2e_2 + s_3e_3$, όπου το e_3 είναι μοναδιαίο και κάθετο στα e_1, e_2 αν το z είναι γραμμικώς ανεξάρτητο από τα x, y (αλλιώς $s_3 = 0$) και $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$. Τώρα, η ανισότητα που ζητάμε γράφεται στη μορφή

$$|t_1s_1 - (t_1s_1 + t_2s_2)| \leq \sqrt{1 - t_1^2}\,\sqrt{1 - s_1^2},$$

δηλαδή

$$t_2^2s_2^2 \leq (1 - t_1^2)(1 - s_1^2).$$

Όμως,

$$(1 - t_1^2)(1 - s_1^2) = t_2^2(s_2^2 + s_3^2) \geq t_2^2s_2^2$$

και αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.