Πραγματική Ανάλυση (2010–11)
Πλήρεις μετρικοί χώροι – Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Στο σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών θεωρούμε τις μετρικές $d(m,n) = |m-n|$ και $\rho(m,n) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|$.
(α) Δείξτε ότι ο $(\mathbb{N}, d)$ είναι πλήρης αλλά ο $(\mathbb{N}, \rho)$ δεν είναι πλήρης.
(β) Δείξτε ότι κάθε μονοσύνολο $\{n\}$ είναι d-ανοικτό και ρ-ανοικτό.
(γ) Δείξτε ότι οι μετρικές ρ και d είναι ισοδύναμες (άρα, οι $(\mathbb{N}, d)$ και $(\mathbb{N}, \rho)$ είναι ομοιομορφικοί).

2. Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με μετρική την $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$. Δείξτε ότι η d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική του $\mathbb{R}$ αλλά ο $(\mathbb{R}, d)$ δεν είναι πλήρης.

3. Θεωρούμε δύο μετρικές d_1 και d_2 στο ίδιο σύνολο X. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $a, b > 0$ ώστε: για κάθε $x, y \in X$,
$$ad_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq bd_1(x,y).$$
Δείξτε ότι μια ακολουθία (x_n) στον X είναι βασική στον (X, d_1) αν και μόνο αν είναι βασική στον (X, d_2).

4. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και D πυκνό υποσύνολο του X. Δείξτε ότι: αν κάθε βασική ακολουθία (x_n) στοιχείων του D συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$, τότε ο X είναι πλήρης.

5. Δείξτε ότι ένας μετρικός χώρος (X, ρ) είναι πλήρης αν και μόνον αν κάθε κλειστή μπάλα
$$\hat{B}(x, \varepsilon) = \{z \in X : \rho(z, x) \leq \varepsilon\},$$
όπου $x \in X$ και $\varepsilon > 0$, είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος του X.

6. Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και D πυκνό υποσύνολο του X ώστε το $X \setminus D$ να είναι επίσης πυκνό. Δείξτε ότι τουλάχιστον ένα από τα D, $X \setminus D$ δεν είναι σύνολο F_σ.

7. Δείξτε ότι: αν (L_n) είναι ακολουθία ευθειών στο $\mathbb{R}^2$ τότε $\mathrm{int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n\right) = \emptyset$.

Ομάδα Β΄

8. (α) Δείξτε ότι ο $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p < \infty$ είναι πλήρης.
(β) Δείξτε ότι ο κύβος του Hilbert $\mathcal{H}^\infty$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.
(γ) Δείξτε ότι ο $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι πλήρης.

9. Θεωρούμε τον $\mathcal{C}([0,1])$ με μετρική την
$$\rho_1(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt.$$
Δείξτε ότι η $(f_n)_{n\geq 2}$ με
$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ n\left(x - \frac{1}{2}\right) & , \frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 1 & , \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq t \leq 1, \end{cases}$$
είναι ακολουθία Cauchy ως προς την ρ_1 αλλά δεν είναι συγκλίνουσα.

10. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι ο X είναι πλήρης αν και μόνον αν κάθε *αριθμήσιμο*, κλειστό υποσύνολο του X είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος.

11. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι ο (X,ρ) είναι πλήρης αν και μόνο αν κάθε ακολουθία φραγμένης κύμανσης στον X είναι συγκλίνουσα.

12. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, (x_n) ακολουθία στον X και $x \in X$ ώστε $x_n \to x$. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\} \cup \{x\}$. Αποδείξτε ότι ο $(A, \rho|_A)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

13. Έστω ρ μετρική στο $\mathbb{R}$ ώστε: (i) ο $(\mathbb{R},\rho)$ είναι πλήρης και (ii) η ρ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική. Δείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\mathrm{diam}_\rho([n,\infty)) \geq \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

14. Έστω X πλήρης χώρος με νόρμα και $\hat{B}(x_n, r_n)$ φθίνουσα ακολουθία από κλειστές μπάλες. Αποδείξτε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{B}(x_n, r_n) \neq \emptyset$.

15. Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι αν (E_n) είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X, με $\mathrm{diam}(E_n) \to 0$, τότε

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(E_n).$$

16. Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και G μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\sigma(x,y) = \rho(x,y) + \left|\frac{1}{\mathrm{dist}(x, X \setminus G)} - \frac{1}{\mathrm{dist}(y, X \setminus G)}\right|$$

στο $G \times G$. Δείξτε ότι ο (G,σ) είναι πλήρης μετρικός χώρος και ότι η σ είναι ισοδύναμη με την $\rho|_G$.

17. Έστω (G_n) ακολουθία ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι το $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι υπεραριθμήσιμο.

18. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι ασυνεχής σε ένα σύνολο πρώτης κατηγορίας αν και μόνο αν είναι συνεχής σε ένα πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

19. Δείξτε ότι δεν υπάρχει μετρική d στο $\mathbb{Q}$ ώστε η d να είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική και ο $(\mathbb{Q}, d)$ να είναι πλήρης.

20. Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και δυο συναρτήσεις $f, g : X \to X$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε η $f^k = f \circ \cdots \circ f$ να είναι συστολή, τότε υπάρχει μοναδικό σημείο $x \in X$ ώστε $f(x) = x$.

(β) Αν η f είναι συστολή και $f \circ g = g \circ f$, τότε υπάρχει μοναδικό $x \in X$ ώστε $f(x) = g(x) = x$.

21. Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος, E πυκνό και G_δ–υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι για κάθε ομοιομορφισμό $h : X \to X$ ισχύει $E \cap h(E) \neq \emptyset$.

Ομάδα Γ′

22. Δείξτε ότι δεν υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιοτητα

$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x).$$

23. (α) Έστω $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$F_A(x) = \sum_{\{n : a_n \leq x\}} 2^{-n}$$

είναι αύξουσα, συνεχής από δεξιά παντού και ασυνεχής ακριβώς στα σημεία του A.

(β) Έστω A αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε το σύνολο των σημείων ασυνέχειας $D(g)$ της g να είναι το $\mathbb{R} \setminus A$.

(γ) Έστω E κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Θέτουμε $G = E^\circ \cap \mathbb{Q}$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $h(x) = \chi_E(x) - \chi_G(x)$. Αποδείξτε ότι $D(h) = E$.

(δ) Έστω $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ένα F_σ–υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $f_E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f_E(x) = \begin{cases} \frac{1}{\min\{n : x \in E_n\}}, & x \in \mathbb{Q} \cap E \\ -\frac{1}{\min\{n : x \in E_n\}}, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap E \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus E \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι $D(f_E) = E$.

24. Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ανοικτό διάστημα $(a, b) \subseteq [0, \infty)$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $y \in (a, b)$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} f(ny) = 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

25. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n_x \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n \geq n_x$, $f^{(n)}(x) = 0$. Δείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο.