Κεφάλαιο 7

Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων

7.1 Ακολουθίες συναρτήσεων: κατά σημείο σύγκλιση

Ορισμός 7.1.1. Έστω X σύνολο, (Y,ρ) μετρικός χώρος και $f_n, f : X \to Y$ $(n = 1,2,\ldots)$. Λέμε ότι η *ακολουθία συναρτήσεων* (f_n) συγκλίνει *κατά σημείο* (*pointwise*) στη συνάρτηση f αν για κάθε $x \in X$ ισχύει

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Ισοδύναμα, αν για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(x,\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ τότε $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. Γράφουμε τότε ότι $f_n \xrightarrow{pw} f$ ή $f_n \to f$ κατά σημείο ή ακόμη ότι $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in X$.

Παραδείγματα 7.1.2. (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και (x_n) ακολουθία στον X ώστε $x_n \to x$. Ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{R}$ με $f_n(t) = d(t,x_n)$ και $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(t) = d(t,x)$ για $t \in X$. Τότε, $f_n \to f$ κατά σημείο. Πράγματι, για κάθε $t \in X$ έχουμε

$$f_n(t) = d(t,x_n) \to d(t,x) = f(t)$$

όταν $n \to \infty$.

(β) Έστω $X \neq \emptyset$ και $f : X \to \mathbb{R}$. Αν θέσουμε $f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $f_n : X \to \mathbb{R}$ και $f_n \to f$ κατά σημείο: για κάθε $x \in X$ έχουμε $f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n} \to f(x)$.

(γ) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{x}{n}$. Τότε, $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή $f_n \to 0$ κατά σημείο.

(δ) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{n}{x+n^2}$. Τότε, $f_n \to 0$ κατά σημείο (εξηγήστε γιατί).

(ε) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = x^n$. Παρατηρούμε ότι: αν $x = 1$, τότε $f_n(1) = 1 \to 1$. Αν $0 \leq x < 1$, τότε $f_n(x) = x^n \to 0$. Άρα, $f_n \to f$ κατά σημείο, όπου η $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ορίζεται από την

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

(στ) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+nx}, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ \frac{nx}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι: αν $x = 0$, τότε $f_n(0) = 0 \to 0$. Αν $0 < x \leq 1$ τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n_0 \geq \frac{1}{x}$. Συνεπώς, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$. Έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} = 0.$$

Άρα, $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Δηλαδή $f_n \to 0$ κατά σημείο.

(ζ) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n+1)x-1}, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ n^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι: αν $x = 0$, τότε $f_n(0) = 0 \to 0$. Αν $0 < x \leq 1$, τότε αν το n είναι αρκετά μεγάλο ισχύει $\frac{1}{n} \leq x$, άρα $f_n(x) = \frac{1}{(n+1)x-1} \to 0$. Δηλαδή $f_n \to 0$ κατά σημείο.

Πρόταση 7.1.3. *Έστω X σύνολο, $f, g : X \to \mathbb{R}$ και (f_n), (g_n) ακολουθίες συναρτήσεων από το X στο $\mathbb{R}$. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο και $g_n \to g$ κατά σημείο, τότε:* (i) *για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$ ισχύει $tf_n + sg_n \to tf + sg$ κατά σημείο, και* (ii) *$f_n g_n \to fg$ κατά σημείο.*

Απόδειξη. Έστω $x \in X$. Τότε,

$$(tf_n + sg_n)(x) = tf_n(x) + sg_n(x) \to tf(x) + sg(x) = (tf + sg)(x)$$

και

$$(f_n g_n)(x) = f_n(x) g_n(x) \to f(x)g(x) = (fg)(x),$$

από τις αντίστοιχες ιδιότητες των ορίων ακολουθιών πραγματικών αριθμών. □

Όπως θα διαπιστώσουμε, η κατά σημείο σύγκλιση είναι ασθενής: δεν συμπεριφέρεται πάντοτε καλά σε σχέση με τη συνέχεια, το ολοκλήρωμα, την παραγώγιση και την εναλλαγή ορίων. Τα βασικά ερωτήματα που συζητάμε παρακάτω έχουν αρνητική απάντηση:

Πρόβλημα 1: Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $f_n, f : X \to \mathbb{R}$. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο και κάθε f_n είναι συνεχής συνάρτηση, είναι σωστό ότι η f είναι συνεχής;

Η απάντηση είναι αρνητική: ένα παράδειγμα μας δίνει η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = x^n$. Είδαμε ότι $f_n \to f$ κατά σημείο, όπου η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ορίζεται από την

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι η f είναι ασυνεχής στο σημείο $x_0 = 0$. Μπορούμε μάλιστα να δώσουμε παράδειγμα ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων η οποία συγκλίνει σε συνάρτηση με άπειρα το πλήθος σημεία ασυνέχειας: θεωρούμε το σύνολο $A = \{1/k : k = 1, 2, \ldots\}$ και, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε συνάρτηση $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ως εξής: με κέντρο καθένα από τα σημεία $1/k$, $k = 1, \ldots, n$ θεωρούμε το διάστημα $I_{k,n} = [\frac{1}{k} - \frac{1}{3n(n+1)}, \frac{1}{k} + \frac{1}{3n(n+1)}]$ και ορίζουμε την f_n να είναι «τριγωνική» σε κάθε $I_{k,n}$ ώστε στο σημείο $1/k$ να παίρνει την τιμή 1 και $f_n(x) = 0$ αν $x \notin \bigcup_{k=1}^{n} I_{k,n}$. Τότε, κάθε f_n είναι συνεχής και συγκλίνει (κατά σημείο) στη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in [0,1] \setminus A \end{cases}$$

η οποία είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του A.

Πρόβλημα 2: Έστω $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο, και κάθε f_n είναι Riemann–ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, είναι σωστό ότι η f είναι Riemann–ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ότι

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx\,;$$

Η απάντηση είναι αρνητική: για παράδειγμα, θεωρούμε την ακολουθία των συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ -2n^2\left(x - \frac{1}{n}\right), & \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι $f_n \to f \equiv 0$ κατά σημείο. Όμως,

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \not\to 0 \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Ένα άλλο παράδειγμα μας δίνει η ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$. Αν $x = 0$ τότε $f_n(0) = 0 \to 0$. Όμοια, αν $x = 1$ τότε $f_n(1) = 0 \to 0$. Στην περίπτωση $0 < x < 1$ εφαρμόζουμε το κριτήριο του λόγου:

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{(n+1)^2 x(1-x)^{n+1}}{n^2 x(1-x)^n} = \frac{(n+1)^2}{n^2}(1-x) \to 1-x < 1.$$

Συνεπώς, $f_n(x) \to 0$ όταν $n \to \infty$.

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι $f_n \to f \equiv 0$ κατά σημείο. Όμως,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x)\,dx &= n^2 \int_0^1 x(1-x)^n dx = n^2 \int_0^1 (1-t)t^n dt = n^2 \int_0^1 (t^n - t^{n+1})\,dt \\ &= n^2 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \to 1. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \to 1 \neq 0 = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

> *Πρόβλημα 3:* Έστω I διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $f_n, f : I \to \mathbb{R}$. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο και κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στο I, ισχύει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο I και ότι $f_n' \to f'$ κατά σημείο;

Όπως δείχνουν τα επόμενα παραδείγματα, η απάντηση είναι αρνητική:

(α) Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων (f_n), όπου η $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ορίζεται από την $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$. Τότε: (i) αν $x = 0$ έχουμε $f_n(0) = 0 \to 0$ και (ii) αν $x > 0$ έχουμε

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx} = \frac{1}{n} \frac{x}{\frac{1}{n} + x} \to 0.$$

Άρα, $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in [0,\infty)$. Συνεπώς, $f_n \to f \equiv 0$ κατά σημείο. Όμως, $f_n'(x) = \frac{1}{(1+nx)^2}$ και για $x = 0$ έχουμε $f_n'(0) = 1 \to 1$, ενώ για $x > 0$ ισχύει ότι $f_n'(x) \to 0$. Δηλαδή, η (f_n') δεν συγκλίνει κατά σημείο στην $f' \equiv 0$.

(β) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in [0, 2\pi]$ ισχύει $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \to 0$. Άρα, $f_n \to 0$ κατά σημείο.

Όμως, η ακολουθία $f_n' : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ με $f_n'(x) = \cos nx$ *δεν* συγκλίνει για καμιά τιμή του $x \in (0,\pi)$. Πράγματι· αν υπάρχει $x \in (0,\pi)$ ώστε $\cos nx \to \alpha \in \mathbb{R}$, τότε $\cos(3nx) \to \alpha$. Από την ταυτότητα

$$\cos(3nx) = 4\cos^3(nx) - 3\cos(nx)$$

βλέπουμε ότι $\alpha = 4\alpha^3 - 3\alpha$. Συνεπώς, $\alpha = 0$ ή $\alpha^2 = 1$. Αν $\alpha = 0$ τότε από την ταυτότητα $\sin^2(nx) + \cos^2(nx) = 1$ συμπεραίνουμε ότι $\sin^2(nx) \to 1$. Όμως,

$$\sin^2(nx) = \frac{1 - \cos(2nx)}{2}$$

οπότε $\cos(2nx) \to -1$, άτοπο. Αν $\alpha^2 = 1$, από την ταυτότητα $\sin^2(nx) + \cos^2(nx) = 1$ έχουμε ότι $\sin(nx) \to 0$. Τότε, από την

$$\sin(n+1)x = \sin(nx)\cos x + \sin x \cos(nx)$$

παίρνουμε

$$\sin x \cos(nx) \to 0$$

και επειδή $\sin x \neq 0$ για $x \in (0, \pi)$ έπεται ότι $\cos(nx) \to 0$, άτοπο.

(γ) Θεωρούμε την $g_n : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ με

$$g_n(t) = \begin{cases} t^{1+1/n}, & 0 \leq t < 1 \\ -(-t)^{1+1/n}, & -1 < t < 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $g_n(t) \to t$ για κάθε $t \in (-1, 1)$, αλλά $g_n'(0) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ενώ $g'(0) = 1$.

Σημείωση. Η κατά σημείο σύγκλιση δεν συμπεριφέρεται καλά ούτε ως προς την εναλλαγή ορίων: υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$ αλλά $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0} f_n(x) \neq f(0)$. Με άλλα λόγια δεν ισχύει η εναλλαγή των ορίων

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{t\to x} f_n(t) = \lim_{t\to x} \lim_{n\to\infty} f_n(t).$$

Ένα παράδειγμα μας δίνουν οι $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(t) = (1-t)^n$. Έχουμε $f_n(t) \to f(t)$ για κάθε $t \in [0, 1]$ όπου

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{t\to 0} f_n(t) = 1 \neq 0 = \lim_{t\to 0} f(t).$$

Πολύ περισσότερο, μπορούμε να έχουμε ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, η οποία να συγκλίνει σε μια συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ η οποία να μην έχει όριο στο σημείο 0. Για παράδειγμα, θεωρήστε τις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1/n \\ \sin(\pi/t), & 1/n \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι

$$f_n(t) \to f(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \sin(\pi/t), & 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

7.2 Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

Ορισμός 7.2.1. Έστω X σύνολο, (Y,ρ) μετρικός χώρος και $f_n, f : X \to Y$, $n = 1, 2, \ldots$. Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει *ομοιόμορφα* (*uniformly*) στην f αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in X$ να ισχύει $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. Γράφουμε τότε $f_n \to f$ ομοιόμορφα (στο X) ή $f_n \xrightarrow{uni} f$.

Ασχολούμαστε κυρίως με την περίπτωση που το X είναι μετρικός χώρος και (Y,ρ) είναι το $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική. Τότε, ο ορισμός της ομοιόμορφης σύγκλισης παίρνει την ακόλουθη μορφή:

> *Έστω $f_n, f : (X,\rho) \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$. Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in X$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.*

Υπενθυμίζουμε ότι $\ell_\infty(X)$ είναι ο χώρος των φραγμένων συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{R}$ με νόρμα την

$$\|g\|_\infty = \sup\{|g(x)| : x \in X\}.$$

Συνεπώς, ένας άλλος τρόπος να περιγράψουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση είναι ο εξής:

> *Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$.*

Σχόλια 7.2.2. (α) *Γεωμετρική ερμηνεία:* Ας υποθέσουμε ότι το X είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Η ανισότητα $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ σημαίνει ότι το γράφημα της f_n βρίσκεται ολόκληρο ανάμεσα στο γράφημα της $f - \varepsilon$ και το γράφημα της $f + \varepsilon$, δηλαδή μέσα στη ζώνη που δημιουργείται γύρω από το γράφημα της f και έχει κατακόρυφο πλάτος 2ε. Δηλαδή, $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X αν για κάθε $\varepsilon > 0$, από έναν δείκτη και πέρα, τα γραφήματα όλων των f_n βρίσκονται ολόκληρα μέσα στη ζώνη κατακόρυφου πλάτους 2ε γύρω από το γράφημα της f.

(β) *Σύγκριση με την κατά σημείο σύγκλιση:* Παρατηρήστε ότι, αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0, *το οποίο εξαρτάται από το* ε, ώστε $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ για όλα τα $n \geq n_0$ *και για όλα τα* $x \in X$. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο στο X τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $x \in X$ υπάρχει n_0, το οποίο εξαρτάται από το ε *και από το* x, ώστε $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ για όλα τα $n \geq n_0$.

Με άλλα λόγια, στην ομοιόμορφη σύγκλιση η επιλογή του n_0 εξαρτάται από το ε αλλά είναι «ομοιόμορφη» ως προς $x \in X$. Υπάρχει *κάποιο* n_0 που «δουλεύει» για *όλα* τα $x \in X$. Όμως, στην κατά σημείο σύγκλιση, για διαφορετικά x χρειάζεται ίσως να επιλέξουμε διαφορετικά n_0 (για το ίδιο $\varepsilon > 0$) ώστε να ικανοποιείται η $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

Συγκρίνοντας τους δύο ορισμούς βλέπουμε ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση είναι πιο ισχυρή από την κατά σημείο σύγκλιση:

Πρόταση 7.2.3. *Έστω $f_n, f : (X, \rho) \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X, τότε $f_n \to f$ κατά σημείο στο X.*

Απόδειξη. Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$,

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon.$$

Όμως,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty.$$

Άρα, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon.$$

Έπεται ότι $f_n(x) \to f(x)$. □

Σημείωση. Σύμφωνα με την πρόταση 7.2.3, προκειμένου να εξετάσουμε αν μια ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα κάνουμε δύο απλά βήματα:

(i) Εξετάζουμε αν υπάρχει f ώστε $f_n \to f$ κατά σημείο. Αυτό είναι εύκολο: για κάθε $x \in X$ έχουμε μια ακολουθία *αριθμών*, την $(f_n(x))$. Βρίσκουμε το όριό της, αν υπάρχει.

(ii) Αν το $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ υπάρχει για κάθε $x \in X$, ορίζουμε $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ και μένει να εξετάσουμε αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα. Πολύ συχνά, αυτό είναι επίσης απλό: θεωρούμε τη συνάρτηση $f_n - f$ και υπολογίζουμε την $\|f_n - f\|_\infty$. Έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση της (f_n) στην f αν και μόνο αν η ακολουθία *πραγματικών αριθμών* $(\|f_n - f\|_\infty)$ συγκλίνει στο 0 όταν $n \to \infty$.

Παραδείγματα 7.2.4. Παρακάτω εξετάζουμε ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση τα παραδείγματα της προηγούμενης παραγράφου (βλέπε §7.1.2).

(α) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και (x_n) ακολουθία στον X ώστε $x_n \to x$. Για την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{R}$ με $f_n(t) = d(t, x_n)$ είδαμε ότι $f_n \to f$ κατά σημείο, όπου $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(t) = d(t, x)$ για $t \in X$. Παρατηρούμε ότι $|f_n(t) - f(t)| = |d(t, x_n) - d(t, x)| \leq d(x_n, x)$ για κάθε $t \in X$. Συνεπώς,

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(t) - f(t)| : t \in X\} \leq d(x_n, x) \to 0.$$

Έπεται ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

(β) Έστω $X \neq \emptyset$ και $f : X \to \mathbb{R}$. Για την ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n}$ είδαμε ότι $f_n \to f$ κατά σημείο. Παρατηρούμε ότι $f_n - f \equiv \frac{1}{n}$, άρα

$$\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0.$$

Έπεται ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

(γ) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{x}{n}$. Είδαμε ότι $f_n \to 0$ κατά σημείο. Όμως,

$$\|f_n - 0\|_\infty = \sup\left\{\frac{|x|}{n} : x \in \mathbb{R}\right\} = +\infty$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

(δ) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{n}{x+n^2}$. Ελέγχουμε εύκολα ότι $f_n \to 0$ κατά σημείο. Το ίδιο ουσιαστικά επιχείρημα δείχνει ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη: για κάθε $x \geq 0$ έχουμε

$$|f_n(x)| = \frac{n}{x+n^2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Συνεπώς, $\|f_n - 0\|_\infty \leq \frac{1}{n} \to 0$.

(ε) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = x^n$. Είδαμε ότι $f_n \to f$ κατά σημείο, όπου

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\|f_n - f\|_\infty \geq \sup\{x^n : 0 \leq x < 1\} = \lim_{x\to 1^-} x^n = 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $\|f_n - f\|_\infty \not\to 0$, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

(στ) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+nx}, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ \frac{nx}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Είδαμε ότι $f_n \to 0$ κατά σημείο. Παρατηρούμε ότι

$$\|f_n - 0\|_\infty = f_n(1/n) = 1/2.$$

Αφού $\|f_n - 0\|_\infty \not\to 0$, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

(ζ) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n+1)x-1}, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ n^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Είδαμε ότι $f_n \to 0$ κατά σημείο. Παρατηρούμε ότι

$$\|f_n - 0\|_\infty = f_n(1/n) = n \to \infty.$$

Αφού $\|f_n - 0\|_\infty \not\to 0$, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

Ορισμός 7.2.5. Έστω $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) λέγεται *ομοιόμορφα φραγμένη στο* X αν υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f_n(x)| \leq M \text{ για κάθε } x \in X \text{ και για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Δηλαδή, αν ο M είναι κοινό φράγμα για όλες τις $|f_n|$.

Πρόταση 7.2.6. *Έστω X σύνολο, $f, g : X \to \mathbb{R}$ και (f_n), (g_n) ακολουθίες συναρτήσεων από το X στο $\mathbb{R}$ και $t, s \in \mathbb{R}$.*

(α) *Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα και $g_n \to g$ ομοιόμορφα στο X, τότε $tf_n + sg_n \to tf + sg$ ομοιόμορφα στο X.*

(β) *Αν, επιπλέον, οι $(f_n), (g_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες, τότε $f_n g_n \to fg$ ομοιόμορφα στο X.*

Απόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι

$$\|(tf_n+sg_n)-(tf+sg)\|_\infty = \|t(f_n-f)+s(g_n-g)\|_\infty \leq |t|\,\|f_n-f\|_\infty+|s|\,\|g_n-g\|_\infty \to 0.$$

(β) Υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n(x)| \leq M$ και $|g_n(x)| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in X$. Δηλαδή, $\|f_n\|_\infty \leq M$ και $\|g_n\|_\infty \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X, έχουμε $f_n \to f$ κατά σημείο. Άρα, για κάθε $x \in X$ ισχύει $|f(x)| = \lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x)| \leq M$. Δηλαδή, $\|f\|_\infty \leq M$. Τώρα γράφουμε

$$\|f_n g_n - fg\|_\infty \leq \|(f_n - f)g_n\|_\infty + \|f(g_n - g)\|_\infty \leq M\|f_n - f\|_\infty + M\|g_n - g\|_\infty \to 0,$$

χρησιμοποιώντας και την

$$\begin{aligned} \|(f_n - f)g_n\|_\infty &= \sup\{|f_n(x) - f(x)||g_n(x)| : x \in X\} \\ &\leq \sup M \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} \\ &= M\|f_n - f\|_\infty \end{aligned}$$

(όμοια βλέπουμε ότι $\|f(g_n - g)\|_\infty \leq M\|g_n - g\|_\infty$). □

7.2.1 Κριτήρια ομοιόμορφης σύγκλισης

Σε αυτή την παράγραφο συζητάμε χρήσιμες ικανές ή/και αναγκαίες συνθήκες για την ομοιόμορφη σύγκλιση μιας ακολουθίας συναρτήσεων (f_n).

Θεώρημα 7.2.7 (κριτήριο Cauchy). *Έστω $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε: αν $n, m \geq n_0$ τότε $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχει συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε, για κάθε $n \geq n_0$, $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon/2$. Συνεπώς, για κάθε $n, m \geq n_0$ έχουμε

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \|(f_n - f) + (f - f_m)\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε: αν $n, m \geq n_0$ τότε $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$. *Σταθεροποιούμε* $x \in X$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε: αν $n, m \geq n_0$ τότε

$$(*) \qquad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.$$

Άρα, η ακολουθία $(f_n(x))$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς, συγκλίνει σε κάποιον αριθμό, ο οποίος εξαρτάται από το x. Ορίζουμε $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Προφανώς, $f_n \to f$ κατά σημείο.

Αφήνοντας το $m \to \infty$ στην $(*)$ παρατηρούμε ότι (για τυχόν $\varepsilon > 0$ και το $n_0 = n_0(\varepsilon)$ που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως): για κάθε $x \in X$ και για κάθε $n, m \geq n_0$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Συνεπώς, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} \leq \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα. □

Πρόταση 7.2.8. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $f_n : X \to \mathbb{R}$ ακολουθία συναρτήσεων ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα, για κάποια συνεχή συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$. Τότε, για κάθε $x_0 \in X$ και κάθε $(x_n) \subseteq X$ με $x_n \to x_0$ ισχύει $f_n(x_n) \to f(x_0)$.*

Απόδειξη. Γράφουμε

$$|f_n(x_n) - f(x_0)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x_0)| \leq \|f_n - f\|_\infty + |f(x_n) - f(x_0)|.$$

Από την ομοιόμορφη σύγκλιση της (f_n) στην f έχουμε $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ και από τη συνέχεια της f στο x_0 (και την υπόθεση ότι $x_n \to x$) έχουμε $|f(x_n) - f(x_0)| \to 0$. Έπεται ότι $|f_n(x_n) - f(x_0)| \to 0$. □

Θεώρημα 7.2.9 (Dini). *Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος και $f_n : X \to \mathbb{R}$ μονότονη ακολουθία συνεχών συναρτήσεων, η οποία συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνεχή συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$. Τότε, $f_n \to f$ ομοιόμορφα στον X.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι $f = 0$ (διαφορετικά, θεωρούμε την $g_n = f_n - f$, η οποία είναι μονότονη ακολουθία συνεχών συναρτήσεων με $g_n \to 0$

κατά σημείο). Επίσης υποθέτουμε ότι η (f_n) είναι φθίνουσα (διαφορετικά θεωρούμε την $-f_n$). Συνεπώς, $0 \leq f_{n+1} \leq f_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πρώτη απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε την εξής άμεση συνέπεια του θεωρήματος 6.3.3: αν μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων ενός συμπαγούς μετρικού χώρου έχει κενή τομή, τότε κάποιο από αυτά τα σύνολα είναι κενό (άρα και όλα τα επόμενα).

Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε την ακολουθία των συνόλων

$$K_n = \{x \in X : f_n(x) \geq \varepsilon\}.$$

Κάθε K_n είναι κλειστό σύνολο από τη συνέχεια της f_n. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $K_{n+1} \subseteq K_n$ από τη μονοτονία της f_n (αν $x \in K_{n+1}$ τότε $f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \geq \varepsilon$, άρα $x \in K_n$). Επίσης $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$ (για κάθε $x \in X$ έχουμε $f_n(x) \to 0$, άρα $f_n(x) < \varepsilon$ τελικά· δηλαδή, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x \notin K_n$). Αφού ο (X, d) είναι συμπαγής, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $K_{n_0} = \emptyset$ και το ίδιο ισχύει για κάθε K_n, $n \geq n_0$. Δηλαδή, $0 \leq f_n(x) < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in X$. Έπεται ότι $\|f_n\|_\infty < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. □

Δεύτερη απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Ορίζουμε τα σύνολα

$$B_n(\varepsilon) = \{x \in X : f_n(x) < \varepsilon\}, \; n = 1, 2 \ldots$$

Η $(B_n(\varepsilon))$ είναι αύξουσα ακολουθία ανοικτών υποσυνόλων του X (διότι κάθε f_n είναι συνεχής και $f_n \geq f_{n+1}$). Επίσης, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(\varepsilon)$. Πράγματι· αν $x \in X$, από την $f_n(x) \to 0$ βλέπουμε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f_n(x) < \varepsilon$, δηλαδή $x \in B_n(\varepsilon)$. Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ ώστε $X = \bigcup_{j=1}^{k} B_{n_j}(\varepsilon) = B_{n_0}(\varepsilon)$, όπου $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Άρα, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $B_n(\varepsilon) = X$, δηλαδή $f_n(x) < \varepsilon$ για κάθε $x \in X$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $f_n \to 0$ ομοιόμορφα. □

Σημείωση: Η υπόθεση ότι η οριακή συνάρτηση f είναι κι αυτή συνεχής δεν μπορεί να παραλειφθεί. Αυτό φαίνεται από το παράδειγμα της *φθίνουσας* ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = x^n$. Έχουμε δει ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα (η οριακή συνάρτηση f είναι ασυνεχής στο σημείο $x_0 = 1$).

7.2.2 Συνέχεια, ολοκλήρωμα και παράγωγος

Στην παράγραφο §7.1 είδαμε ότι η κατά σημείο σύγκλιση δεν συμπεριφέρεται πάντοτε καλά σε σχέση με τη συνέχεια, το ολοκλήρωμα και την παραγώγιση. Όπως θα δούμε σε αυτή την παράγραφο, αν υποθέσουμε ομοιόμορφη σύγκλιση στη θέση της κατά σημείο σύγκλισης τότε έχουμε ισχυρά θετικά αποτελέσματα.

Θεώρημα 7.2.10. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $f, f_n : X \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in X$. Υποθέτουμε ότι:*

(i) *$f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X, και*

(ii) *κάθε f_n είναι συνεχής στο x_0.*

Τότε, η f είναι κι αυτή συνεχής στο x_0.

Ειδικότερα, αν κάθε f_n είναι συνεχής στο X, τότε η f είναι συνεχής στο X.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\|f_{n_0} - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Αφού η f_{n_0} είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: για κάθε $x \in B(x_0, \delta)$,

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Τότε, για κάθε $x \in B(x_0, \delta)$ γράφουμε

$$\begin{aligned} |f(x) - f(t_0)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \|f_{n_0} - f\|_\infty + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + \|f_{n_0} - f\|_\infty \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα, η f είναι συνεχής στο x_0. □

Σημείωση. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, αν μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων συγκλίνει κατά σημείο σε ασυνεχή συνάρτηση, τότε η σύγκλιση δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφη.

Θεώρημα 7.2.11. *Έστω (f_n) ακολουθία συναρτήσεων που είναι ορισμένες σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$. Υποθέτουμε ότι κάθε $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann–ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$. Τότε, η f είναι Riemann–ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και*

$$\int_a^b f_n(x)\, dx \to \int_a^b f(x)\, dx.$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$. Αυτό είναι δυνατό, διότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$.

Αφού η f_n είναι ολοκληρώσιμη, μπορούμε να βρούμε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b\}$ του $[a, b]$ ώστε

$$U(f_n, P) - L(f_n, P) = \sum_{k=0}^{m-1} (M_k(f_n) - m_k(f_n))(x_{k+1} - x_k) < \frac{\varepsilon}{2}$$

όπου $M_k = \sup\{f_n(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$ και $m_k = \inf\{f_n(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$ (θυμηθείτε το κριτήριο του Riemann). Χρησιμοποιώντας την $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$, ελέγχουμε ότι

$$m_k(f_n) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \leq m_k(f) \leq M_k(f) \leq M_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

για κάθε $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Έπεται ότι

$$U(f,P) - L(f,P) \leq U(f_n,P) - L(f_n,P) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_{k+1} - x_k) < \varepsilon.$$

Από το κριτήριο του Riemann, η f είναι ολοκληρώσιμη.

Η σύγκλιση των ολοκληρωμάτων είναι τώρα άμεση συνέπεια της $\|f_n - f\|_\infty \to 0$: παρατηρούμε ότι

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty dx = (b-a)\|f_n - f\|_\infty \to 0,$$

απ' όπου έπεται το θεώρημα. □

Το παράδειγμα της ακολουθίας συναρτήσεων (f_n) στο $(0,\pi)$ με $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ δείχνει ότι δεν μπορούμε να περιμένουμε ανάλογα καλή συμπεριφορά για τις παραγώγους: έχουμε $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $(0,\pi)$, αλλά η ακολουθία $f_n'(x) = \cos(nx)$ δεν συγκλίνει για καμία τιμή του $x \in (0,\pi)$. Παρ' όλα αυτά, ισχύει το εξής:

Θεώρημα 7.2.12. *Έστω $f_n, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και ότι η παράγωγός της, f_n', είναι συνεχής στο $[a,b]$. Υποθέτουμε επίσης ότι:*

(i) *$f_n' \to g$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$, και*

(ii) *υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ ώστε η $(f_n(x_0))$ να είναι συγκλίνουσα σε κάποιον $\xi \in \mathbb{R}$.*

Τότε, η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και $f' \equiv g$.

Απόδειξη. Από το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού,

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(s)\,ds, \qquad x \in [a,b].$$

Από το προηγούμενο θεώρημα συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{x_0}^x f_n'(s)\,ds \to \int_{x_0}^x g(s)\,dx, \qquad x \in [a,b].$$

Συνεπώς,

$$f_n(x) \to \xi + \int_{x_0}^x g(s)\,ds.$$

Ορίζουμε

$$f(x) = \xi + \int_{x_0}^x g(s)\,ds.$$

Από το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έχουμε $f'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Μένει να δείξουμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(s)\,ds - \xi - \int_{x_0}^x g(s)\,ds \right| \\ &\leq |f_n(x_0) - \xi| + \left| \int_{x_0}^x (f_n'(s) - g(s))\,ds \right| \\ &\leq |f_n(x_0) - \xi| + |x - x_0|\,\|f_n' - g\|_\infty \\ &\leq |f_n(x_0) - \xi| + |b - a|\,\|f_n' - g\|_\infty . \end{aligned}$$

Έπεται ότι $\|f_n - f\|_\infty \leq |f_n(x_0) - \xi| + |b-a|\,\|f_n' - g\|_\infty \to 0$. □

Αν κάνουμε την ισχυρότερη υπόθεση ότι η (f_n) συγκλινει κατά σημείο σε κάποια συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ τότε το προηγούμενο θεώρημα παίρνει την εξής απλούστερη μορφή.

Θεώρημα 7.2.13. *Αν $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις, ώστε $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ και $f_n' \to g$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο την g.*

Απόδειξη. Λόγω της *ομοιόμορφης* σύγκλισης $f_n' \to g$, για κάθε $x \in [a,b]$ έχουμε

$$\int_a^x f_n'(t)dt \to \int_a^x g(t)dt.$$

Αλλά από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έχουμε

$$\int_a^x f_n'(t)dt = f_n(x) - f_n(a).$$

Επειδή $f_n(x) \to f(x)$ και $f_n(a) \to f(a)$ έπεται ότι

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)dt.$$

Αλλά η g είναι συνεχής συνάρτηση, ως *ομοιόμορφο* όριο συνεχών συναρτήσεων. Κατά συνέπεια το αόριστο ολοκλήρωμά της είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με παράγωγο την g. Δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη και $f' = g$. □

7.3 Σειρές Συναρτήσεων

Ορισμός 7.3.1. Έστω $f_k : X \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη συνάρτηση $s_n : X \to \mathbb{R}$ με

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x).$$

Αν υπάρχει συνάρτηση $s : X \to \mathbb{R}$ ώστε $s_n \to s$ κατά σημείο στο X, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *συγκλίνει κατά σημείο στην* s *στο* X και γράφουμε

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} f_k.$$

Αν, επιπλέον, $s_n \to s$ ομοιόμορφα στο A, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στην* s *στο* X.

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς, η σύγκλιση μιας σειράς συναρτήσεων ανάγεται στη σύγκλιση μιας ακολουθίας συναρτήσεων, της ακολουθίας (s_n) των μερικών αθροισμάτων.

Παράδειγμα 7.3.2. Η γεωμετρική σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$. Έχουμε

$$f_k(x) = x^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Γνωρίζουμε ότι στο διάστημα $(-1, 1)$ η σειρά συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $s(x) = \frac{1}{1-x}$. Δηλαδή,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$. Εξετάζουμε αν η σύγκλιση της σειράς είναι ομοιόμορφη στο $(-1, 1)$. Για κάθε $x \in (-1, 1)$ έχουμε

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$$

και

$$s_n(x) - s(x) = -\frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{|x|^{n+1}}{1-x} = +\infty,$$

άρα

$$\sup\{|s_n(x) - s(x)| : x \in (-1, 1)\} = +\infty$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, η σύγκλιση της (s_n) στην s δεν είναι ομοιόμορφη.

Πρόταση 7.3.3. *Έστω* $f_k : X \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. *Αν η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στην* s *στο* X, *τότε συγκλίνει κατά σημείο στην* s *στο* X.

Απόδειξη. Αρκεί να θυμηθούμε ότι αν $s_n \to s$ ομοιόμορφα τότε $s_n \to s$ κατά σημείο. □

Πρόταση 7.3.4. *Έστω* $f_k, g_k : X \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ *και* $a, b \in \mathbb{R}$. *Αν* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = s$ *και* $\sum_{k=1}^{\infty} g_k = t$ *ομοιόμορφα στο* X, *τότε* $\sum_{k=1}^{\infty}(af_k + bg_k) = as + bt$ *ομοιόμορφα στο* X. *Το ίδιο ισχύει για την κατά σημείο σύγκλιση.*

Απόδειξη. Άμεση από τις αντίστοιχες προτάσεις για ακολουθίες συναρτήσεων. □

Πρόταση 7.3.5 (κριτήριο Cauchy). *Έστω $f_k : X \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα (σε κάποια συνάρτηση) στο X αν και μόνον αν ισχύει το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n > m \geq n_0$ και για κάθε $x \in X$,*

$$|f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το κριτήριο Cauchy στην ακολουθία συναρτήσεων (s_n). Παρατηρήστε ότι: αν $n > m$ τότε $s_n - s_m = f_{m+1} + \cdots + f_n$. □

Θεώρημα 7.3.6 (κριτήριο Weierstrass). *Έστω $f_k : X \to \mathbb{R}$ φραγμένες συναρτήσεις, $k \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι*

$$\sup\{|f_k(x)| : x \in X\} \leq M_k, \qquad k \in \mathbb{N}$$

δηλαδή ότι ο M_k είναι άνω φράγμα της $|f_k|$, και ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k < +\infty.$$

Τότε, η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο X.

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι, για κάθε $x \in X$ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ συγκλίνει απολύτως, αφού

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} M_k < +\infty.$$

Συνεπώς, η σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει κατά σημείο στο X. Θέτουμε $s = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\begin{aligned} |s(x) - s_n(x)| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k. \end{aligned}$$

Από την $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < +\infty$ έχουμε

$$\|s - s_n\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \to 0$$

όταν $n \to \infty$. Άρα, η σύγκλιση της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ είναι ομοιόμορφη. □

Παράδειγμα 7.3.7. Θεωρούμε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε Εδώ $f_k(x) = \frac{\sin(kx)}{k^2}$, οπότε

$$|f_k(x)| \leq \frac{1}{k^2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, άρα η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

Τα επόμενα τρία θεωρήματα προκύπτουν άμεσα από τα θεωρήματα 7.2.10, 7.2.11 και 7.2.12 (αν τα εφαρμόσουμε για την ακολουθία των συναρτήσεων $s_n = f_1 + \cdots + f_n$).

Θεώρημα 7.3.8. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $f, f_k : X \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in X$. Υποθέτουμε ότι:*

(i) *η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο X, και*

(ii) *κάθε f_k είναι συνεχής στο x_0.*

Τότε, η f είναι κι αυτή συνεχής στο x_0.

Ειδικότερα, αν κάθε f_k είναι συνεχής στο X, τότε η f είναι συνεχής στο X.

Θεώρημα 7.3.9. *Έστω (f_k) ακολουθία συναρτήσεων που είναι ορισμένες σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$. Υποθέτουμε ότι κάθε $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann–ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $[a, b]$. Τότε, η f είναι Riemann=-ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx.$$

Θεώρημα 7.3.10. *Έστω $f_k, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_k είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και ότι η παράγωγός της, f_k', είναι συνεχής στο $[a, b]$. Υποθέτουμε επίσης ότι:*

(i) *η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην g στο $[a, b]$, και*

(ii) *υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ να συγκλίνει σε κάποιον $\xi \in \mathbb{R}$.*

Τότε, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και $f' \equiv g$. Δηλαδή,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'.$$