Κεφάλαιο 1

Μετρικοί χώροι

1.1 Ορισμός και παραδείγματα

Ορισμός 1.1.1 (μετρική). Έστω X ένα μη κενό σύνολο. *Μετρική* στο X λέγεται κάθε συνάρτηση $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) $\rho(x,y) \geq 0$ για κάθε $x,y \in X$ και $\rho(x,y) = 0$ αν και μόνον αν $x = y$ (η ρ είναι μη αρνητική).

(ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ για κάθε $x,y \in X$ (συμμετρική ιδιότητα).

(iii) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ για κάθε $x,y,z \in X$ (τριγωνική ανισότητα).

Αν ρ είναι μια μετρική στο X τότε το ζεύγος (X,ρ) λέγεται *μετρικός χώρος*. Τα στοιχεία του X θα λέγονται και *σημεία*.

Παραδείγματα 1.1.2. (α) Η *συνήθης μετρική* στο $\mathbb{R}$ είναι η

$$d(x,y) = |x-y|, \quad x,y \in \mathbb{R}.$$

(β) Η *Ευκλείδεια μετρική* στον $\mathbb{R}^m$, τον χώρο των διατεταγμένων m-άδων $\vec{x} = (x_1,\dots,x_m)$ πραγματικών αριθμών, ορίζεται ως εξής: αν $\vec{x} = (x_1,\dots,x_m)$ και $\vec{y} = (y_1,\dots,y_m) \in \mathbb{R}^m$, τότε

$$\rho_2(\vec{x},\vec{y}) = \left(\sum_{i=1}^{m}(x_i - y_i)^2\right)^{1/2}.$$

Πρέπει φυσικά να ελεγχθεί η τριγωνική ανισότητα (βλέπε §1.3).

(γ) Κάθε μη κενό σύνολο X μπορεί να γίνει μετρικός χώρος κατά «τετριμμένο τρόπο»: Θεωρούμε τη συνάρτηση $\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ με

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

ως μετρική (ελέγξτε ότι ικανοποιεί τις (i), (ii) και (iii) του ορισμού). Αυτή η μετρική λέγεται *διακριτή μετρική στο* X.

(δ) Στο ίδιο σύνολο X μπορούμε να ορίσουμε πολλές διαφορετικές μετρικές: Αν έχουμε μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ η οποία είναι 1-1, τότε αυτή επάγει μια μετρική d_f στο X ως εξής:

$$d_f(x,y) = |f(x) - f(y)|, \quad x, y \in X.$$

Εύκολα ελέγχεται ότι η d_f είναι μετρική στο X.

(ε) *Ο n-διάστατος κύβος του Hamming.* Θεωρούμε το σύνολο

$$H_n = \{0,1\}^n = \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i = 0 \text{ ή } 1,\ i = 1, \ldots, n\big\}.$$

Θεωρούμε την $h : H_n \times H_n \to \mathbb{R}$, όπου $h(x,y)$ είναι το πλήθος των θέσεων στις οποίες διαφέρουν οι n-άδες $x = (x_1, \ldots, x_n)$ και $y = (y_1, \ldots, y_n)$, δηλαδή

$$h(x,y) = \mathrm{card}\big(\{1 \le i \le n : x_i \ne y_i\}\big).$$

Αφήνεται σαν άσκηση για τον αναγνώστη να δείξει ότι η h είναι μετρική στο H_n. Ο $\big(H_n, h\big)$ λέγεται κύβος του Hamming και η h μετρική του Hamming.

Ορισμός 1.1.3 (σχετική μετρική)**.** Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος. Αν A είναι οποιοδήποτε μη κενό υποσύνολο του X, η απεικόνιση $\rho_A : A \times A \to \mathbb{R}$ με

$$\rho_A(x,y) = \rho(x,y), \qquad x, y \in A$$

(ο περιορισμός δηλαδή της ρ στο $A \times A$) είναι μετρική στο σύνολο A. Η μετρική ρ_A είναι η *σχετική μετρική* που επάγεται από την ρ στο A.

Για παράδειγμα, κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι μετρικός χώρος με τον περιορισμό της συνήθους μετρικής σε αυτό.

Ορισμός 1.1.4 (διάμετρος)**.** (α) Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος. Ο (X,ρ) λέγεται *φραγμένος* αν υπάρχει $C > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in X$ να ισχύει $\rho(x,y) \le C$. Ισοδύναμα, αν

$$\sup\{\rho(x,y) : x, y \in X\} < \infty.$$

Αν αυτό συμβαίνει, τότε η *διάμετρος* του (X,ρ) είναι ο αριθμός

$$\mathrm{diam}(X) := \sup\{\rho(x,y) : x, y \in X\}.$$

(β) Ένα μη κενό υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου (X,ρ) λέγεται φραγμένο αν ο μετρικός χώρος (A, ρ_A) είναι φραγμένος. Ισοδύναμα, αν

$$\sup\{\rho(x,y) : x, y \in A\} < \infty.$$

Αν αυτό συμβαίνει, τότε η *διάμετρος* του A είναι ο αριθμός

$$\mathrm{diam}(A) := \sup\{\rho(x,y) : x, y \in A\}.$$

Συμφωνούμε ότι το κενό σύνολο (ως υποσύνολο οποιουδήποτε μετρικού χώρου) έχει μηδενική διάμετρο.

Παραδείγματα 1.1.5. (α) Το $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική $d(x,y) = |x-y|$ δεν είναι φραγμένος μετρικός χώρος.

(β) Το $\mathbb{R}$ με τη μετρική που επάγει η $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, δηλαδή

$$\rho(x,y) = |\arctan x - \arctan y|, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

είναι φραγμένος μετρικός χώρος και μάλιστα $\mathrm{diam}\,(\mathbb{R}, \rho) = \pi$. Για την ανισότητα $\mathrm{diam}\,(\mathbb{R}, \rho) \geq \pi$ παρατηρήστε ότι

$$\mathrm{diam}\,(\mathbb{R}, \rho) \geq |\arctan n - \arctan(-n)|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\mathrm{diam}\,(\mathbb{R}, \rho) \geq \lim_{n\to\infty} |\arctan n - \arctan(-n)| = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Η άλλη ανισότητα προκύπτει εύκολα από το γεγονός ότι $|\arctan t| < \frac{\pi}{2}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ (εξηγήστε γιατί).

(γ) Το $\mathbb{R}$ με τη μετρική

$$\sigma(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

είναι επίσης φραγμένος μετρικός χώρος, αφού $\sigma(x,y) < 1$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\mathrm{diam}\,(\mathbb{R}, \sigma) = 1$.

(δ) Αν δ είναι η διακριτή μετρική σε ένα σύνολο X, τότε ο μετρικός χώρος (X, δ) είναι φραγμένος (και, αν έχει περισσότερα από ένα σημεία, η διάμετρός του είναι ίση με 1).

1.2 Χώροι με νόρμα

Πολλοί από τους κλασικούς μετρικούς χώρους που θα συναντήσουμε σε αυτό το μάθημα είναι ταυτόχρονα γραμμικοί χώροι. Επιπλέον, η μετρική τους συνδέεται φυσιολογικά με τη γραμμική τους δομή. Όπως λέμε, «επάγεται από μια νόρμα».

Ορισμός 1.2.1 (νόρμα)**.** Έστω X ένας πραγματικός γραμμικός χώρος. *Νόρμα* στον X είναι κάθε συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) $\|x\| \geq 0$ για κάθε $x \in X$ και $\|x\| = 0$ αν και μόνον αν $x = \vec{0}$ (μη αρνητική).

(β) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $x \in X$ (θετικά ομογενής).

(γ) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x, y \in X$ (τριγωνική ανισότητα).

Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον X, τότε το ζεύγος $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται *χώρος με νόρμα*.

Παρατηρήσεις 1.2.2. (α) Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον X, τότε η συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με

$$d(x,y) = \|x-y\|, \qquad x,y \in X$$

είναι μετρική (η μετρική που επάγεται στον X από τη νόρμα). Πράγματι,

- $d(x,y) = \|x-y\| \geq 0$ για κάθε $x,y \in X$ και ισχύει $d(x,y) = \|x-y\| = 0$ αν και μόνο αν $x - y = \vec{0}$ δηλαδή αν και μόνο αν $x = y$.
- $d(y,x) = \|y-x\| = \|(-1)(x-y)\| = |-1| \cdot \|x-y\| = \|x-y\|$ για κάθε $x,y \in X$.
- Αν $x,y,z \in X$ τότε

$$d(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z).$$

Επιπλέον, η d είναι συμβατή με τη γραμμική δομή του χώρου:

- Η d είναι αναλλοίωτη ως προς μεταφορές, δηλαδή $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ για κάθε $x,y,z \in X$.
- Η d είναι ομογενής, δηλαδή $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$ για κάθε $x,y \in X$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Παρατηρήστε ότι οι τελευταίες δύο ιδιότητες δεν έχουν νόημα σε όλους τους μετρικούς χώρους, αφού στην διατύπωσή τους εμπλέκονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού. Με άλλα λόγια, μια μετρική που επάγεται σε έναν γραμμικό χώρο από μια νόρμα έχει πρόσθετες ιδιότητες και ο μετρικός χώρος που προκύπτει έχει πολύ πιο πλούσια δομή από αυτήν του «γενικού» μετρικού χώρου.

(β) Χρήσιμο είναι να τονίσουμε ότι η κλάση των χώρων με νόρμα είναι γνήσια υποκλάση της κλάσης των μετρικών χώρων. Παρατηρήστε ότι κάθε γραμμικός χώρος $X \neq \{0\}$ έχει άπειρα το πλήθος σημεία: αν $x \in X$, $x \neq 0$, τότε ο υπόχωρος $\mathrm{span}(\{x\}) = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\}$ του X έχει άπειρα το πλήθος σημεία (για την ακρίβεια, είναι ισοπληθικός με το $\mathbb{R}$). Από την άλλη πλευρά, κάθε πεπερασμένο μη κενό σύνολο γίνεται μετρικός χώρος με τη διακριτή μετρική.

Παρατηρήστε επίσης ότι σε κάθε (μη μηδενικό) γραμμικό χώρο X μπορούμε να ορίσουμε μετρική η οποία δεν επάγεται από νόρμα. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε στον X τη διακριτή μετρική δ, τότε δεν υπάρχει νόρμα $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ ώστε $\delta(x,y) = \|x-y\|$. Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού είναι απλή: αν υπήρχε τέτοια νόρμα, παίρνοντας $x \in X$, $x \neq 0$, θα είχαμε

$$n\|x\| = \|nx\| = \delta(nx, 0) = 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ή ισοδύναμα $\|x\| = 1/n$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, που είναι προφανώς άτοπο.

Στο υπόλοιπο αυτού του Κεφαλαίου ορίζουμε μερικούς κλασικούς χώρους με νόρμα.

1.2.1 Χώροι πεπερασμένης διάστασης

1. Στον $\mathbb{R}^m$ ορίζουμε την supremum νόρμα $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ως εξής: αν $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ τότε

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_i| : i = 1, \ldots, m\}.$$

Αποδεικνύουμε μόνο την τριγωνική ανισότητα. Έχουμε

$$\|x+y\|_\infty = |x_{i_0} + y_{i_0}|$$

για κάποιον $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$. Για το συγκεκριμένο i_0,

$$|x_{i_0} + y_{i_0}| \leq |x_{i_0}| + |y_{i_0}| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Συνεπώς,

$$\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Ο χώρος $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_\infty)$ συμβολίζεται με ℓ_∞^m.

2. Στον $\mathbb{R}^m$ ορίζουμε την 1-νόρμα $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_m| = \sum_{i=1}^m |x_i|.$$

Η τριγωνική ανισότητα είναι άμεση συνέπεια της τριγωνικής ανισότητας για την απόλυτη τιμή στο $\mathbb{R}$. Ο χώρος $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1)$ συμβολίζεται με ℓ_1^m.

3. Στον $\mathbb{R}^m$ ορίζουμε την Ευκλείδεια νόρμα $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^2\right)^{1/2}.$$

Όλες οι ιδιότητες της νόρμας είναι τετριμμένες εκτός από την τριγωνική ανισότητα για την απόδειξη της οποίας απαιτείται η ανισότητα Cauchy–Schwarz.

Πρόταση 1.2.3 (Ανισότητα Cauchy–Schwarz). *Έστω $x_1, \ldots, x_m$ και $y_1, \ldots, y_m$ πραγματικοί αριθμοί. Τότε, ισχύει η ανισότητα*

$$\sum_{i=1}^m |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^m |y_i|^2\right)^{1/2}.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη που παραθέτουμε οφείλεται στον Schwarz. Θέτουμε $B = \sum_{i=1}^m |x_i y_i|$, $A = \sum_{i=1}^m |x_i|^2$ και $C = \sum_{i=1}^m |y_i|^2$. Πρέπει να δείξουμε ότι $B^2 \leq AC$ ή ισοδύναμα $(2B)^2 \leq 4AC$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$p(\lambda) := (\lambda|x_1| + |y_1|)^2 + \cdots + (\lambda|x_m| + |y_m|)^2 \geq 0,$$

η οποία μετά από πράξεις παίρνει τη μορφή

$$p(\lambda) = A\lambda^2 + 2B\lambda + C \geq 0$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν $A = 0$ τότε $x_i = 0$ για $i = 1, \ldots, m$ και προφανώς η αρχική ανισότητα ισχύει (ως ισότητα). Υποθέτουμε λοιπόν ότι $A > 0$ και τότε η $p(\lambda)$ είναι τριώνυμο το οποίο είναι μη αρνητικό για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Από τη θεωρία του τριωνύμου πρέπει να ισχύει $(2B)^2 - 4AC \leq 0$, το οποίο δίνει και τη ζητούμενη ανισότητα. $\square$

Επιστρέφουμε τώρα στην απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας για την Ευκλείδεια νόρμα. Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_2^2 &= \sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^2 \\
&= \sum_{i=1}^m |x_i|^2 + 2\sum_{i=1}^m x_i y_i + \sum_{i=1}^m |y_i|^2 \\
&\leq \|x\|_2^2 + 2\sum_{i=1}^m |x_i y_i| + \|y\|_2^2 \\
&\leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Cauchy–Schwarz. Έτσι,

$$\|x+y\|_2^2 \leq (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \Longrightarrow \|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2.$$

Ο χώρος $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$ λέγεται Ευκλείδειος χώρος και συμβολίζεται με ℓ_2^m.

4. Γενικότερα, στον $\mathbb{R}^m$ μπορούμε να θεωρήσουμε την p-νόρμα, $1 < p < \infty$, όπου

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

Αποδεικνύουμε και σ' αυτή την περίπτωση μόνο την τριγωνική ανισότητα η οποία δεν είναι άμεση. Για την απόδειξη θα χρειασθούμε δύο ανισότητες.

Πρόταση 1.2.4 (Ανισότητα Hölder). *Αν $x_1,\dots,x_m$ και $y_1,\dots,y_m$ είναι πραγματικοί αριθμοί και $p,q>1$ ώστε*[1] $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, *τότε ισχύει η ανισότητα*

$$\sum_{i=1}^m |x_iy_i| \le \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^m |y_i|^q\right)^{1/q}.$$

Απόδειξη. Από το γεγονός ότι η συνάρτηση $\log:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι κοίλη, για κάθε $x,y>0$ έχουμε

$$\log\left(\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q\right)\ge \frac{1}{p}\log(x^p)+\frac{1}{q}\log(y^q)$$

ή ισοδύναμα

$$\log(xy)\le \log\left(\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q\right).$$

Από το γεγονός ότι η συνάρτηση log είναι γνησίως αύξουσα έπεται ότι

$$(*)\qquad xy\le \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\quad \text{για κάθε } x,y\ge 0.$$

Έστω τώρα $x_1,\dots,x_m$ και $y_1,\dots,y_m$ πραγματικοί αριθμοί. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $(|x_1|^p+\cdots+|x_m|^p)^{1/p}\neq 0$ και $(|y_1|^q+\cdots+|y_m|^q)^{1/q}\neq 0$. Αλλιώς ισχύει $x_1=\cdots=x_m=0$ ή $y_1=\cdots=y_m=0$ και αυτό σημαίνει ότι $\sum_{i=1}^m|x_iy_i|=0$ οπότε η ζητούμενη ανισότητα ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο.

Θεωρούμε τους αριθμούς

$$a_i=\frac{|x_i|}{(|x_1|^p+\cdots+|x_m|^p)^{1/p}},\quad i=1,\dots,m$$

και

$$b_i=\frac{|y_i|}{(|y_1|^q+\cdots+|y_m|^q)^{1/q}},\quad i=1,\dots,m$$

για τους οποίους ισχύει $a_i,b_i\ge 0$ και

$$\sum_{i=1}^m a_i^p=\sum_{i=1}^m b_i^q=1.$$

Αν λοιπόν εφαρμόσουμε την $(*)$ για κάθε ζεύγος a_i,b_i έχουμε ότι

$$a_ib_i\le \frac{a_i^p}{p}+\frac{b_i^q}{q}$$

[1] Οι p και q λέγονται συζυγείς εκθέτες.

και αθροίζοντας ως προς $i = 1, \dots, m$ βλέπουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i \le \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{m} a_i^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{m} b_i^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ισοδύναμα,

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} |x_i||y_i|}{(|x_1|^p + \cdots + |x_m|^p)^{1/p}(|y_1|^q + \cdots + |y_m|^q)^{1/q}} \le 1,$$

που δίνει το ζητούμενο:

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i y_i| \le (|x_1|^p + \cdots + |x_m|^p)^{1/p}(|y_1|^q + \cdots + |y_m|^q)^{1/q}.$$

□

Σημείωση 1.2.5. Παρατηρήστε ότι η ανισότητα Hölder αποτελεί γενίκευση της ανισότητας Cauchy–Schwarz: η δεύτερη είναι ειδική περίπτωση της πρώτης για $p = q = 2$.

Πρόταση 1.2.6 (Ανισότητα Minkowski). *Αν $x_1, \dots, x_m$ και $y_1, \dots, y_m$ είναι πραγματικοί αριθμοί και $p > 1$, τότε ισχύει η ανισότητα*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^p > 0$, αλλιώς δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε.

Έχουμε διαδοχικά

$$(+)\quad \sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1}|x_i + y_i| \le \sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1}|x_i| + \sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1}|y_i|.$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder στο άθροισμα $\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1}|x_i|$ παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1}|x_i| \le \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{q(p-1)}\right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

όπου q ο συζυγής εκθέτης του p, δηλαδή $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ή $q(p-1) = p$. Άρα, η προηγούμενη ανισότητα γράφεται

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1}|x_i| \le \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p}\right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

Με ανάλογο τρόπο παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^{p-1}|y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^p\right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

Τελικά, από την (+) έχουμε

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^p \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^p\right)^{1/q} \left[\left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^p\right)^{1/p}\right]$$

ή

$$\left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^p\right)^{1-1/q} \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

Το ζητούμενο προκύπτει από την $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$. □

Παρατηρήστε τώρα ότι η τριγωνική ανισότητα $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ για την p-νόρμα είναι ακριβώς η ανισότητα Minkowski (όπου $x = (x_1, \dots, x_m)$ και $y = (y_1, \dots, y_m)$). Ο χώρος $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_p)$ συμβολίζεται με ℓ_p^m.

5. Αξίζει τον κόπο να δούμε τη μορφή που παίρνουν οι επαγόμενες μετρικές $d_p(x, y) = \|x - y\|_p$ στον $\mathbb{R}^m$. Αν $x = (x_1, \dots, x_m)$ και $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, τότε

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$$

αν $1 \leq p < \infty$ και

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \dots, m\}.$$

1.2.2 Χώροι ακολουθιών

1. Ο χώρος $\ell_\infty \equiv \ell_\infty(\mathbb{N})$ των φραγμένων ακολουθιών $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, δηλαδή

$$\ell_\infty = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \text{υπάρχει } M \equiv M(x) > 0 : \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ ισχύει } |x(n)| \leq M\}$$

είναι πραγματικός γραμμικός χώρος με τις κατά σημείο πράξεις. Στον ℓ_∞ ορίζουμε την supremum νόρμα $\|\cdot\|_\infty : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_\infty := \sup\{|x(n)| : n = 1, 2, \dots\}.$$

Αποδεικνύουμε ότι η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα:

(α) Είναι $\|x\|_\infty \geq 0$ για κάθε $x \in \ell_\infty$. Αν $\|x\|_\infty = 0$, τότε $|x(n)| \leq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $x(n) = 0$ για $n = 1, 2, \ldots$. Συνεπώς, $x = 0$.
(β) Ισχύει $\|\lambda x\|_\infty = \sup_n |\lambda x(n)| = |\lambda| \sup_n |x(n)| = |\lambda| \cdot \|x\|_\infty$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
(γ) Έστω $x, y \in \ell_\infty$ και $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$|x(n) + y(n)| \leq |x(n)| + |y(n)| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Παίρνοντας supremum ως προς n συμπεραίνουμε ότι

$$\|x + y\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |x(n) + y(n)| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

2. Ο χώρος $c_0 \equiv c_0(\mathbb{N})$ των μηδενικών ακολουθιών, δηλαδή

$$c_0 = \Big\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\Big|\; \lim_{n \to \infty} x(n) = 0 \Big\}$$

είναι επίσης γραμμικός χώρος (και μάλιστα γραμμικός υπόχωρος του ℓ_∞ αφού κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη) με τις κατά σημείο πράξεις. Σε αυτόν θεωρούμε την supremum νόρμα που κληρονομεί από τον ℓ_∞.

3. Ο χώρος $\ell_1 \equiv \ell_1(\mathbb{N})$ των 1-αθροίσιμων ακολουθιών[2] δηλαδή,

$$\ell_1 = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| < +\infty \right\}$$

είναι γραμμικός υπόχωρος του c_0. Πράγματι, γνωρίζουμε ότι αν $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| < +\infty$ τότε $\lim\limits_{n \to \infty} x(n) = 0$. Ορίζουμε τη νόρμα $\| \cdot \|_1 : \ell_1 \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|.$$

4. Γενικότερα, αν $1 \leq p < \infty$, ο χώρος $\ell_p \equiv \ell_p(\mathbb{N})$ των p-αθροίσιμων ακολουθιών αποτελείται από όλες τις ακολουθίες $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < +\infty$. Στον ℓ_p ορίζουμε την p–νόρμα

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p}.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Minkowski για πεπερασμένα αθροίσματα και περνώντας στο όριο, αποδείξτε ότι η $\| \cdot \|_p$ ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα (οι άλλες ιδιότητες της νόρμας ελέγχονται εύκολα).

[2] Μιλάμε λοιπόν για τις ακολουθίες των οποίων η σειρά είναι απολύτως συγκλίνουσα.

5. Θεωρούμε τον χώρο $c_{00} \equiv c_{00}(\mathbb{N})$ των τελικά μηδενικών ακολουθιών. Δηλαδή, $x \in c_{00}$ αν και μόνον αν υπάρχει $n_0 \equiv n_0(x) \in \mathbb{N}$ ώστε $x(n) = 0$ για κάθε $n \geq n_0$. Σε αυτό το χώρο μπορούμε να ορίσουμε οποιαδήποτε από τις p–νόρμες, $1 \leq p \leq \infty$.

1.2.3 Χώροι συναρτήσεων

1. Ο χώρος $\mathcal{C}([0,1])$ των συνεχών συναρτήσεων επί του $[0,1]$ είναι το σύνολο

$$\mathcal{C}([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \ \mid \ f \text{ συνεχής}\}$$

το οποίο είναι γραμμικός χώρος με τις κατά σημείο πράξεις. Στον $\mathcal{C}([0,1])$ ορίζουμε την $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$, με

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\}.$$

Παρατηρήστε ότι το sup όντως υπάρχει, αφού η $|f| : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, και μάλιστα είναι max διότι κάθε συνεχής συνάρτηση, που είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα, παίρνει μέγιστη τιμή. Ελέγξτε ότι η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα.

2. Στον $\mathcal{C}([0,1])$ μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε την 1-νόρμα

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\, dt$$

και γενικότερα, για κάθε $1 \leq p < \infty$, την p–νόρμα

$$\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p}.$$

Για να δείξουμε ότι η $\|\cdot\|_p$ ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι οι ανισότητες Hölder και Minkowski ισχύουν και για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

Ανισότητα Hölder για συναρτήσεις. *Αν $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, $1 < p < \infty$ και q είναι ο συζυγής εκθέτης του p (δηλαδή, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), τότε*

$$\int_0^1 |f(t)g(t)|\, dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \left(\int_0^1 |g(t)|^q dt\right)^{1/q}.$$

Η απόδειξη της ανισότητας Hölder είναι εντελώς ανάλογη με αυτήν της αντίστοιχης ανισότητας για πεπερασμένες ακολουθίες. Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι

$$(*) \qquad |f(t)g(t)| \leq \frac{1}{p}|f(t)|^p + \frac{1}{q}|g(t)|^q$$

για κάθε $t \in [0,1]$. Αν κάνουμε την πρόσθετη υπόθεση ότι $\int_0^1 |f(t)|^p dt = \int_0^1 |g(t)|^q dt = 1$, τότε παίρνοντας ολοκληρώματα στην $(*)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(t)g(t)|\,dt &\leq \frac{1}{p}\int_0^1 |f(t)|^p dt + \frac{1}{q}\int_0^1 |g(t)|^q dt \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\ &= \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \left(\int_0^1 |g(t)|^q dt\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Στη γενική περίπτωση, «κανονικοποιούμε» τις f και g, θεωρώντας τις $f_1 := f/\|f\|_p$ και $g_1 := g/\|g\|_q$.

Κατόπιν, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder για συναρτήσεις και ακολουθώντας βήμα προς βήμα την απόδειξη της ανισότητας Minkowski για πεπερασμένες ακολουθίες, μπορούμε να δείξουμε την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_p$:

Ανισότητα Minkowski για συναρτήσεις. *Αν $f,g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και $1 \leq p < \infty$, τότε*

$$\left(\int_0^1 |f(t)+g(t)|^p dt\right)^{1/p} \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 |g(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

3. Στον $\mathcal{C}^1([0,1])$, τον χώρο των συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που έχουν συνεχή παράγωγο, μπορούμε να θεωρήσουμε τη νόρμα

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Παρατηρήστε ότι η

$$\|f\|' := \|f'\|_\infty$$

δεν είναι νόρμα (και δεν επάγει μετρική) στον $\mathcal{C}^1([0,1])$.

4. Αξίζει τον κόπο να δούμε τη μορφή που παίρνουν οι επαγόμενες μετρικές $d_p(f,g) = \|f-g\|_p$ στον $\mathcal{C}([0,1])$. Αν $f,g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, τότε

$$d_p(f,g) = \left(\int_0^1 |f(t)-g(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

αν $1 \leq p < \infty$ και

$$d_\infty(f,g) = \max\{|f(t)-g(t)| : t \in [0,1]\}.$$