**Απειροστικός Λογισμός ΙΙ – 28/7/2014**

**1. (2 μονάδες)** (α) Έστω $(\alpha_n)$ ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $\alpha_n \to 0$. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία $(\alpha_{k_n})$ της $(\alpha_n)$ ώστε η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \alpha_{k_n}$ να συγκλίνει.

(β) Έστω $(\beta_n)$, $(\gamma_n)$ φραγμένες ακολουθίες. Αν $\beta_n \to \beta \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι $\liminf(\beta_n + \gamma_n) = \beta + \liminf \gamma_n$.

**2. (2.5 μονάδες)** (α) Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k} \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \text{εφ}\frac{1}{k} \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k^2} .$$

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με περίοδο 1 (δηλαδή, $f(x+1) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$). Δείξτε ότι η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

**3. (2 μονάδες)** Έστω $(\alpha_k)$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Αν $k^2 \alpha_k \to 0$ τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει.

(β) Αν $k \alpha_k \to 0$ τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει.

(γ) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k)^2$ συγκλίνει.

(δ) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει απολύτως τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k)^2$ συγκλίνει.

**4. (2.5 μονάδες)** (α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(β) Για κάθε $n \geq 1$ ορίζουμε

$$\alpha_n = \int_1^n \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

Δείξτε ότι για κάθε $m > n \geq 1$ ισχύει $|\alpha_m - \alpha_n| \leq \frac{1}{n}$ και συμπεράνατε ότι η $(\alpha_n)$ συγκλίνει. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω και ολοκλήρωση κατά μέρη (ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο) δείξτε ότι υπάρχει το

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

**5. (2 μονάδες)** Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx, \qquad \int (\ln x)^3 dx, \qquad \int \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\, dx.$$

**6. (2 μονάδες)** Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί τις $g'' = g$ και $g(0) = 1$, $g'(0) = 0$.

(α) Δείξτε ότι η $g$ έχει παράγωγο κάθε τάξης: είναι $n$-φορές παραγωγίσιμη για κάθε $n \geq 1$.

(β) Δείξτε ότι, για κάθε $n \geq 1$, το $2n$-οστό πολυώνυμο Taylor $T_{2n,g,0}$ της $g$ με κέντρο το 0 είναι το $T_{2n,g,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$.

(γ) Δείξτε ότι για κάθε $R > 0$ υπάρχει $M_R > 0$ ώστε, για κάθε $x \in [-R, R]$, $\max\{|g(x)|, |g'(x)|\} \leq M_R$.

(δ) Χρησιμοποιώντας το (γ) και οποιονδήποτε τύπο υπολοίπου, δείξτε ότι $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**Καλή Επιτυχία!**