Απειροστικός Λογισμός ΙΙ – 19/6/2013

1. (α) Έστω (α_n), (β_n) φραγμένες ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Αν $\alpha_n \to \alpha$ δείξτε ότι $\limsup(\alpha_n + \beta_n) = \alpha + \limsup \beta_n$.

(β) Έστω (γ_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\gamma_n \to 0$. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (γ_{k_n}) της (γ_n) με την ιδιότητα $|\gamma_{k_n}| \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \geq 1$, και συμπεράνατε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{k_n}$ συγκλίνει.

(2 μονάδες)

2. (α) Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ημ} \frac{1}{k}.$$

(β) Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor $T_{2,f,0}(x)$ βαθμού 2 της $f(x) = \ln(1+x)$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - T_{2,f,0}(x)}{x^2} = 0$ εξετάστε αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)$ συγκλίνει ή αποκλίνει.

(2.5 μονάδες)

3. (α) Έστω (α_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

1. Αν οι $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k}$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k-1}$ συγκλίνουν τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει.
2. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει τότε οι $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k}$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k-1}$ συγκλίνουν.

(β) Έστω $(a_k), (b_k)$ δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει και αν η (b_k) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

(2 μονάδες)

4. (α) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $0 < \delta < 1$ υπάρχουν $0 < a < b < 1$ ώστε: $b - a < \delta$ και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, a]$ και στο $[b, 1]$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

(β) Έστω $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^{n-1} g(x)\, dx = 0$. Χρησιμοποιώντας το, δείξτε ότι αν $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση με συνεχή παράγωγο τότε

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 x^{n-1} f(x)\, dx = f(1).$$

(2 μονάδες)

5. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \cos^3 x \sin^2 x\, dx, \qquad \int \frac{e^{2x} - 1}{e^x}\, dx, \qquad \int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 4}}\, dx.$$

(2 μονάδες)

6. (α) Δείξτε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Έστω $f_1, f_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ αύξουσες συναρτήσεις. Θεωρούμε την $g = f_1 - f_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε διαμέριση $P = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\}$ του $[0, 1]$,

$$\sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| \leq M.$$

(2 μονάδες)

Καλή Επιτυχία!