# **Απειροστικός Λογισμός ΙΙ – 2/6/2012**

**1.** (α) Έστω $(\alpha_n)$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι

$$\alpha_{2n} \to \alpha, \quad \alpha_{2n-1} \to \beta \quad \text{και} \quad \alpha_{n+1} - \alpha_n \to 0.$$

Δείξτε ότι $\alpha = \beta$ και $\alpha_n \to \alpha$.

(β) Έστω $(\gamma_n)$ ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\gamma_n \to 0$. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία $(\gamma_{k_n})$ της $(\gamma_n)$ ώστε $n^2\gamma_{k_n} \to 0$. **(2 μονάδες)**

**2.** (α) Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[k]{k} - 1\right)^k, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}.$$

(β) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(i) Αν $a_k \in \mathbb{R}$ και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

(ii) Αν $a_k > 0$ και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ συγκλίνει.

(ii) Αν $\delta_k > 1$ για κάθε $k$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\delta_k}}$ συγκλίνει.

**(4 μονάδες)**

**3.** (α) Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση και έστω $(x_n)$ βασική ακολουθία στο $A$. Δείξτε ότι η $(f(x_n))$ είναι βασική ακολουθία.

(β) Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς (να αναφέρετε τα κριτήρια που χρησιμοποιείτε):

1. $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{1}{x}$.
2. $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με $g(x) = \sqrt{x}$.

**(2 μονάδες)**

**4.** (α) Δείξτε ότι κάθε αύξουσα συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(β) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$, δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

(γ) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $x \in (a, b)$,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt \leq \frac{1}{b-x} \int_x^b f(t)\, dt.$$

**(4 μονάδες)**

**Καλή Επιτυχία!**