Απειροστικός Λογισμός ΙΙ - Ιούνιος '10

Θέμα 1. (α) Έστω K το σύνολο των οριακών σημείων (σημείων συσσωρεύσεως) μίας φραγμένης ακολουθίας a_n, $n \in \mathbf{N}$. Να δειχθεί ότι αν x_k, $k \in \mathbf{N}$, είναι ακολουθία στοιχείων του K με $\lim x_k = x \in \mathbf{R}$, τότε $x \in K$.
(β) Δώστε ένα παράδειγμα ακολουθίας η οποία δεν συγκλίνει και για την οποία ισχύει ότι για κάθε $p \in \mathbf{N}$

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+p} - a_n) = 0\,.$$

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την αρμονική σειρά.
Θεμά 2. (α) Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω ότι υπάρχει $a > 0$ ώστε η f να είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$. Να δειχθεί ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, \infty)$.
(β) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[n]{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$.
Θέμα 3. (α) Εξετάστε τη σύγκλιση της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}\,.$$

Χρησιμοποιώντας καταρχήν το κριτήριο λόγου τι συμπεραίνετε; Κατόπιν εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας. Τι συμπεραίνετε;
(β) Να εξεταστεί αν συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(1 - \text{συν}\frac{1}{n})\,.$$

Θέμα 4. (α) Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

είναι Lipschitz συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.
(β) Έστω $f, g : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε άρρητο $x \in [\alpha, \beta]$. Να δειχθεί ότι

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta g(x)dx\,.$$

Θέμα 5. (α) Να υπολογιστεί η σειρά Taylor της συνάρτησης

$$f(x) = \ln(\frac{1+x}{1-x})\ , \quad -1 < x < 1\,.$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιείστε τη σειρά Taylor της συνάρτησης $\ln(1 + x)$.
(β) Να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)7^{2n}}\,.$$

Θέμα 6. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\text{(i)} \quad \int \frac{\ln x}{x^2}dx \qquad \text{(ii)} \quad \int \frac{\text{τοξεφ}\, x}{1+x^2}dx \qquad \text{(iii)} \int \frac{\sqrt[3]{x+8}}{x}dx\,.$$