ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ

16 Ιουλίου 2007

1. (2μ) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι **αληθείς ή ψευδείς** (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ κοίλη συνάρτηση με $f(a) = f(b)$. Τότε, $f(x) \geq f(a)$ για κάθε $x \in [a,b]$.

(β) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

2. (1.5μ) Εξετάστε (με αιτιολόγηση) αν συγκλίνει ή αποκλίνει κάθε μια από τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n \qquad \text{και} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^2} \ \text{ για τις διάφορες τιμές του } a > 0.$$

3. (1.5μ) Δίδονται συναρτήσεις $f, g, p : (a,b) \to \mathbb{R}$ με f, g δύο φορές παραγωγίσιμες, ώστε για κάθε $x \in (a,b)$ να ισχύουν οι σχέσεις $f''(x) + p(x)f(x) = 0$ και $g''(x) + p(x)g(x) = 0$.

(ι) Δείξτε ότι η συνάρτηση $w(x) = f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$ είναι σταθερή.

(ιι) Αν επιπλέον $w \neq 0$ και υπάρχουν $x_1, x_2 \in (a,b)$ με $x_1 < x_2$ ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$, δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [x_1, x_2]$ ώστε $g(\xi) = 0$. [Υπόδειξη: Αν όχι, θεωρείστε την $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.]

4. (1.5μ) Αποδείξτε πλήρως ότι η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x\,, & \text{αν } x \neq \frac{1}{2} \\ \pi\,, & \text{αν } x = \frac{1}{2} \end{cases}$ είναι ολοκληρώσιμη.

5. (1.5μ) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ και $f(\frac{1}{2}) > 0$. Αποδείξτε πλήρως ότι

$$\int_0^1 f(x)dx > 0.$$

6. (1μ) Υπολογίστε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx \qquad \text{και} \qquad \int x\,\text{τοξεφ}x\,dx.$$

7. (1.5μ) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ για $x \in [a,b]$.

(α) Αποδείξτε πλήρως ότι η F είναι παραγωγίσιμη και $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$.

(β) Αν $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και $G'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ δείξτε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $G = F + c$.

8. (1.5μ) Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε $f(xy) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y > 0$ και $f'(1) = 1$. Αποδείξτε πλήρως ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και επί του $\mathbb{R}$.

Μπορείτε να γράψετε όσα θέματα θέλετε. Όποιος συγκεντρώσει συνολική βαθμολογία πάνω από 10, βαθμολογείται με 10. Σημειώστε τους αριθμούς των θεμάτων που απαντήσατε (βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο αριθμό). Μαζί με το γραπτό σας να παραδίδετε και τα θέματα.

Καλή επιτυχία!