Κεφάλαιο 7

Θεώρημα Taylor

1. *Έστω $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ πολυώνυμο βαθμού n και έστω $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχουν $b_0, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$ ώστε*

$$p(x) = b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι

$$b_k = \frac{p^{(k)}(a)}{k!}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Υπόδειξη. Με επαγωγή. Για $n = 1$ μπορούμε να γράψουμε $p(x) = a_0 + a_1x = a_0 + a_1a + a_1(x-a) = p(a) + a_1(x-a)$ και να θέσουμε $b_0 = p(a)$, $b_1 = a_1$.

Για το επαγωγικό βήμα παρατηρήστε ότι $p(x) - p(a) = (a_1x + \cdots + a_nx^n) - (a_1a + \cdots + a_na^n) = (x-a)p_1(x)$, όπου p_1 πολυώνυμο βαθμού $n-1$. Το p_1 γράφεται στη μορφή $b_1 + b_2(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^{n-1}$ (από την επαγωγική υπόθεση) οπότε $p(x) = p(a) + (x-a)p_1(x) = b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n$, με $b_0 = p(a)$.

Παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι $p^{(k)}(x) = \sum_{s=k}^{n} s(s-1)\cdots(s-k+1)b_s(x-a)^{s-k}$, οπότε $p^{(k)}(a) = [k(k-1)\cdots 1]b_k = k!b_k$.

2. *Γράψτε καθένα από τα παρακάτω πολυώνυμα στη μορφή $b_0 + b_1(x-3) + \cdots + b_n(x-3)^n$:*

$$p_1(x) = x^2 - 4x - 9, \quad p_2(x) = x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1, \qquad p_3(x) = x^5.$$

3. *Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις, να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,a}$ που υποδεικνύεται.*

$$\begin{aligned}
(T_{3,f,0}) &\quad : \quad f(x) = \exp(\sin x).\\
(T_{2n+1,f,0}) &\quad : \quad f(x) = (1+x^2)^{-1}.\\
(T_{n,f,0}) &\quad : \quad f(x) = (1+x)^{-1}.\\
(T_{4,f,0}) &\quad : \quad f(x) = x^5 + x^3 + x.\\
(T_{6,f,0}) &\quad : \quad f(x) = x^5 + x^3 + x.\\
(T_{5,f,1}) &\quad : \quad f(x) = x^5 + x^3 + x.
\end{aligned}$$

4. *Έστω $n \geq 1$ και $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις n φορές παραγωγίσιμες στο $x_0 \in (a,b)$ ώστε $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $g(x_0) = g'(x_0) = \cdots = g^{(n-1)}(x_0) = 0$ και $g^{(n)}(x_0) \neq 0$. Δείξτε ότι*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $T_{n,f,x_0}(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ και $T_{n,g,x_0}(x) = \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. Επίσης, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_{n,g,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0$. Συνεπώς,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{R_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}}{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{R_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

5. *Έστω $n \geq 2$ και $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση n φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a,b)$ ώστε $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ και $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Δείξτε ότι:*

(α) *Αν ο n είναι άρτιος και $f^{(n)}(x_0) > 0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.*

(β) *Αν ο n είναι άρτιος και $f^{(n)}(x_0) < 0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.*

(γ) *Αν ο n είναι περιττός, τότε η f δεν έχει τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο στο x_0, αλλά το x_0 είναι σημείο καμπής για την f.*

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $T_{n,f,x_0}(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, συνεπώς,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{T_{n,f,x_0}(x) + R_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

(α) Αν $f^{(n)}(x_0) > 0$, τότε η f κοντά στο x_0 έχει το ίδιο πρόσημο με την $(x-x_0)^n$ και αφού ο n είναι άρτιος συμπεραίνουμε ότι $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0. Αφού $f(x_0) = 0$, η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

(β) Αν $f^{(n)}(x_0) < 0$, τότε η f κοντά στο x_0 έχει αντίθετο πρόσημο από την $(x-x_0)^n$ και αφού ο n είναι άρτιος συμπεραίνουμε ότι $f(x) \leq 0$ κοντά στο x_0. Αφού $f(x_0) = 0$, η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.

(γ) Υποθέτουμε ότι $f^{(n)}(x_0) > 0$. Δουλεύοντας όπως στα (α) και (β), και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι ο n είναι περιττός, βλέπουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(x) < 0$ στο $(x_0 - \delta)$ και $f(x) > 0$ στο $(x_0, x_0 + \delta)$. Άρα, η f δεν έχει τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο στο x_0.

Το ίδιο ακριβώς ισχύει για την f''. Παρατηρήστε πρώτα ότι $n \geq 3$ (είναι περιττός και μεγαλύτερος ή ίσος του 2). Θεωρώντας την $g = f''$ βλέπουμε ότι $g^{(n-2)}(x_0) > 0$ και όλες οι προηγούμενες παράγωγοι της g μηδενίζονται στο x_0. Άρα, η $g = f''$ έχει διαφορετικό πρόσημο σε περιοχές αριστερά και δεξιά του x_0, το οποίο σημαίνει ότι το x_0 είναι σημείο καμπής για την f.

6. *Αν $f(x) = \ln x$, $x > 0$, βρείτε την πλησιέστερη ευθεία και την πλησιέστερη παραβολή στο γράφημα της f στο σημείο $(e,1)$.*

Υπόδειξη. Ζητάμε τα $T_{1,f,e}(x)$ και $T_{2,f,e}(x)$. Αφού $f(e) = 1$, $f'(e) = \frac{1}{e}$ και $f''(e) = -\frac{1}{e^2}$, συμπεραίνουμε ότι $T_{1,f,e}(x) = 1 + \frac{x-e}{e} = \frac{x}{e}$ και $T_{2,f,e}(x) = \frac{x}{e} - \frac{1}{e^2}(x-e)^2$.

7. *Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,0}$ για τη συνάρτηση*

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Υπόδειξη. Από το ανάπτυγμα της εκθετικής συνάρτησης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} + g_n(t)$$

όπου

$$|g_n(t)| \leq \frac{e^{t^2}}{(n+1)!}(t^2)^{n+1}.$$

Άρα,

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^x t^{2k} dt + \int_0^x g_n(t) dt.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\left| \int_0^x g_n(t)\, dt \right| \leq \frac{e^{x^2}}{(n+1)!} \left| \int_0^x t^{2n+2} dt \right| \leq \frac{e^{x^2}|x|^{2n+3}}{(n+1)!(2n+3)}.$$

Θέτουμε

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$$

Τότε,

$$\left| \frac{f(x) - P_{2n+1}(x)}{x^{2n+2}} \right| = \left| \frac{1}{x^{2n+2}} \int_0^x g_n(t)\, dt \right| \leq \frac{e^{x^2}|x|^{2n+3}}{|x|^{2n+2}(n+1)!(2n+3)} \to 0$$

όταν $x \to 0$. Από τον χαρακτηρισμό του πολυωνύμου Taylor $T_{s,f,0}$ έπεται ότι

$$T_{2n+1,f,0}(x) = T_{2n+2,f,0}(x) = P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$$

8. *Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,0}$ για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής: $f(0) = 0$ και*

$$f(x) = e^{-1/x^2}, \qquad x \neq 0.$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$ και

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} e^{-1/x^2} = \lim_{y \to \pm\infty} \frac{y}{e^{y^2}} = 0.$$

(β) Η δεύτερη παράγωγος της f, αλλά και κάθε παράγωγος της f είναι της μορφής

$$f^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}, \quad x \neq 0$$

όπου P_k πολυώνυμο. Δείξτε το με επαγωγή.

(γ) Δείξτε ότι $\lim_{y\to\pm\infty} P(y)e^{-y^2} = 0$ για κάθε πολυώνυμο $P(y)$ και, από το (β), συμπεράνατε ότι $f^{(k)}(0) = 0$ για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots$. Πράγματι,

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = \lim_{y\to\pm\infty} yP_k(y)e^{-y^2}$$

και η συνάρτηση $y \mapsto yP_k(y)$ είναι πολυώνυμο.

Έπεται ότι $T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

9. *Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης* $\arctan x$ $(-1 \leq x \leq 1)$ *υπολογίστε το άθροισμα*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n(2n+1)}.$$

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ αν $-1 \leq x \leq 1$. Συνεπώς,

$$\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n\sqrt{3}} \frac{1}{2n+1}.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n(2n+1)} = \sqrt{3} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}.$$

10. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f''' = f$ και $f(0) = 1$, $f'(0) = f''(0) = 0$.*

(α) *Έστω $R > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $M = M(R) > 0$ ώστε: για κάθε $x \in [-R, R]$ και για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots$,*

$$|f^{(k)}(x)| \leq M.$$

(β) *Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_{3n,f,0}$ και, χρησιμοποιώντας το (α) και οποιονδήποτε τύπο υπολοίπου, δείξτε ότι*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{(3k)!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. (α) Από την υπόθεση ότι $f''' = f$ βλέπουμε ότι, για κάθε $k = 0, 1, 2 \ldots$, η $f^{(k)}$ είναι κάποια από τις f, f', f''. Οι τρεις αυτές συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες, άρα συνεχείς. Συνεπώς, αν σταθεροποιήσουμε $R > 0$ τότε καθεμία από τις f, f', f'' είναι φραγμένη στο $[-R, R]$. Δηλαδή, υπάρχει $M = M(R) > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$, $|f'(x)| \leq M$ και $|f''(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [-R, R]$. Έπεται ότι, για κάθε $x \in [-R, R]$ και για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$$|f^{(k)}(x)| \leq M.$$

(β) Έχουμε $f^{(3k)}(0) = 1$, $f^{(3k+1)}(0) = 0$ και $f^{(3k+2)}(0) = 0$ για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots$. Άρα,

$$T_{3n,f,0}(x) = \sum_{s=0}^{3n} \frac{f^{(s)}(0)}{s!} x^s = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(3k)!} x^{3k}.$$

Έστω $x \in \mathbb{R}$. Σταθεροποιούμε $R > |x|$ και θεωρούμε την σταθερά $M = M(R)$ από το (α). Ισχύει

$$|R_{3n,f,0}(x)| = \left| \frac{f^{(3n+1)}(\xi)}{(3n+1)!} x^{3n+1} \right|$$

για κάποιο ξ μεταξύ των 0 και x. Αφού $|\xi| \leq |x| < R$, έχουμε $|f^{(3n+1)}(\xi)| \leq M$. Άρα,

$$|R_{3n,f,0}(x)| \leq \frac{M}{(3n+1)!} |x|^{3n+1}.$$

Με το κριτήριο του λόγου βλέπουμε ότι η ακολουθία του δεξιού μέλους συγκλίνει στο 0. Άρα, $R_{3n,f,0}(x) \to 0$ όταν $n \to \infty$. Έπεται ότι

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_{3n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{(3k)!}.$$

Το $x \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, οπότε έχουμε το ζητούμενο.

11. *Βρείτε προσεγγιστική τιμή, με σφάλμα μικρότερο του 10^{-6}, για καθέναν από τους αριθμούς*

$$\sin 1, \quad \sin 2, \quad \sin \frac{1}{2}, \quad e, \quad e^2.$$

12. (α) *Δείξτε ότι*

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$

και

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}.$$

(β) *Δείξτε ότι $\pi = 3.14159\cdots$ (με άλλα λόγια, βρείτε προσεγγιστική τιμή για τον αριθμό π με σφάλμα μικρότερο του 10^{-6}).*