Απειροστικός Λογισμός ΙΙ (2010-11)

Επαναληπτικές Ασκήσεις

1. Δώστε παράδειγμα ακολουθίας (a_n) η οποία δεν συγκλίνει, αλλά ικανοποιεί το εξής: για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+k} - a_n) = 0.$$

2. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία (x_n) στο $\mathbb{R}$ ώστε η ακολουθία $(f(x_n))$ να συγκλίνει.

3. Έστω (a_n) μια ακολουθία. Αν $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 1$ και $a_n \neq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει γνησίως αύξουσα υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to 1$.

4. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Αν $\inf A = 0$, δείξτε ότι η (a_n) έχει φθίνουσα υπακολουθία που συγκλίνει στο 0.

5. Έστω (a_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $0 < b < 1$ ώστε: $|a_{n+1} - a_n| \leq b^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η (a_n) συγκλίνει.

6. Να βρεθούν τα $\liminf$ και $\limsup$ των παρακάτω ακολουθιών:

$$\alpha_n = \cos\frac{\pi n}{3}, \qquad \beta_n = ((-1)^n + 1)n^2$$
$$\gamma_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi n}{2}, \qquad \delta_n = \frac{n}{3} - \left[\frac{n}{3}\right]$$
$$\epsilon_n = n\sin\frac{\pi n}{3}, \qquad \zeta_n = \sin\frac{\pi n}{2}\cos\frac{\pi n}{2}.$$

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

7. Έστω (b_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\liminf b_n = -5$ και $\limsup b_n = 10$. Εξετάστε αν συγκλίνει η ακολουθία

$$\gamma_n = \frac{b_n}{1 + \ln n}.$$

8. Έστω $\{q_n : n = 1, 2, \ldots\}$ μια αρίθμηση των ρητών αριθμών του $(0, 1)$ (θυμηθείτε ότι το $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$ είναι αριθμήσιμο). Δείξτε ότι κάθε $x \in [0, 1]$ είναι οριακό σημείο της ακολουθίας (q_n).

9. Έστω (a_n), (b_n) δύο φραγμένες ακολουθίες. Αν $a_n \to a$ δείξτε ότι:

$$\limsup(a_n + b_n) = a + \limsup b_n \ \text{ και } \ \liminf(a_n + b_n) = a + \liminf b_n.$$

10. Κάθε φυσικός αριθμός n γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $n = 2^{s-1}(2k - 1)$, όπου $s, k \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε

$$x_n = \frac{1}{s} + \frac{1}{k}.$$

Να βρεθούν όλα τα οριακά σημεία της (x_n), το $\limsup x_n$ και το $\liminf x_n$.

11. Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει καθεμία από τις παρακάτω σειρές:

$$(\alpha)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{10}}{10^k},\qquad (\beta)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!},\qquad (\gamma)\ \sum_{k=1}^{\infty}e^{-\sqrt{k}}$$

$$(\delta)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-\sqrt{k}}{k^2+1},\qquad (\varepsilon)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}},\qquad (\sigma\tau)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kx)}{k^2},\ \ x\in\mathbb{R}$$

$$(\zeta)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k+k},\qquad (\eta)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k k!}{k^k},\qquad (\vartheta)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k k!}{k^k}.$$

12. Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει καθεμία από τις παρακάτω σειρές:

$$(\alpha)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k},\qquad (\beta)\ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln k)^6},\qquad (\gamma)\ \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{\ln k}$$

$$(\delta)\ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k},\qquad (\varepsilon)\ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(\ln k)^2},\qquad (\sigma\tau)\ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln k)^k}$$

$$(\zeta)\ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln k)^{\ln k}},\qquad (\eta)\ \sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln(\ln k))^{\ln k}},\qquad (\vartheta)\ \sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{k^p}\right),\ p>0.$$

13. Εξετάστε για ποιές τιμές του $x\in\mathbb{R}$ συγκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\frac{x^k}{1-x^k}\ \ ,\ \ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{x^2-k^2}.$$

14. Προσδιορίστε το σύνολο των $x\in\mathbb{R}$ για τους οποίους συγκλίνει η δυναμοσειρά:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k x^k}{k},\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{\sqrt{k}},\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{(k+1)^2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}k!x^k,\qquad \sum_{k=0}^{\infty}k!x^{k!},\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k^2}}{k!}.$$

15. Έστω $(a_k),(b_k)$ δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2$ και $\sum_{k=1}^{\infty}b_k^2$ συγκλίνουν, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k$ συγκλίνει απολύτως.

16. Έστω (a_k) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2$ συγκλίνει και αν $p>1/2$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{n^p}$ συγκλίνει απολύτως.

17. Προσδιορίστε τις τιμές των a, b, c για τις οποίες συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a^k}{k^b (\ln k)^c}.$$

18. Προσδιορίστε τις τιμές των $a, b, c > 0$ για τις οποίες συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^a \sin\left(\frac{1}{k^b}\right) \cos\left(\frac{1}{k^c}\right).$$

19. Έστω (a_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $\lim\limits_{k\to\infty} a_k > 1$. Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{a_k}}$$

συγκλίνει.

20. Έστω (a_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με την ιδιότητα $0 < a_k \leq a_{2k} + a_{2k+1}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

21. Έστω (a_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η (a_n) συγκλίνει.

22. Έστω (a_k) ακολουθία μη αρνητικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε $\liminf(ka_k) = 0$.

23. Έστω $(a_k), (b_k)$ δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει και αν η (b_k) είναι μονότονη και φραγμένη, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

24. Έστω (a_k), (b_k) δύο ακολουθίες. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}|$ συγκλίνει, δείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

25. Έστω (a_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $a_k \to 0$. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (a_{s_k}) της (a_k) με την ιδιότητα $\sum_{k=1}^{\infty} 3^k a_{s_k} < +\infty$.

26. Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

27. Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

1. $f : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$.
2. $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x} \ln x$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x \cos x$.
4. $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}$.

28. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $0 < b < 1$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[b,1]$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

29. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση, η οποία είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[r,q]$, όπου $r,q \in \mathbb{Q}$. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[a,b]$, όπου $a,b \in \mathbb{R}$.

30. Δείξτε ότι η συνάρτηση $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

31. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$g(x) = 1 + \int_0^x g(t)dt$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Βρείτε την g.

32. Έστω $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$. Δείξτε ότι

$$[f(x)]^2 \leq x \int_0^x [f'(t)]^2 dt$$

για κάθε $x \in [0,a]$.

33. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν

$$a_n = \int_0^1 x^n f(x)\, dx,$$

δείξτε ότι $a_n \to 0$.

34. Έστω $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής και αύξουσα. Δείξτε ότι η $G : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $G(x) = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\, dt$ είναι αύξουσα.

35. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$. Υποθέτουμε ότι η f έχει συνεχή παράγωγο και ότι $0 < f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0,1]$. Δείξτε ότι

$$\int_0^1 [f(x)]^3 dx \leq \left(\int_0^1 f(x)\, dx \right)^2 .$$

36. Έστω $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι

$$\int_0^a |f(t)f'(t)|\, dt \leq \frac{a}{2} \int_0^a |f'(t)|^2 dt.$$

37. Έστω $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε

$$F(x) = \int_1^x f\left(\frac{x}{t}\right) dt.$$

Βρείτε την F'.

38. Βρείτε το όριο

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^4} \int_0^{x^2} e^t \sin t \, dt.$$

39. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+\sqrt{x}} \frac{t}{1+t^2} \, dt.$$

40. Ορίζουμε $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$G(x) = \int_0^x e^t \cos(x-t) \, dt.$$

Υπολογίστε την G'.

41. Ορίζουμε $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \, dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} \, dt.$$

Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

42. Έστω $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι

$$\int_0^x f(t) \, dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) \, dt = x f(x)$$

για κάθε $x > 0$.

43. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)} \, dx, \qquad \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} \, dx, \qquad \int \frac{x+1}{x^2 + 4x + 5} \, dx.$$

44. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \neq b$. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{x}{(x-a)^2(x-b)} \, dx, \qquad \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \, dx, \qquad \int \frac{x^2 - a^2}{x(x^2+a^2)^2} \, dx.$$

45. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \cos^4 x \, dx, \qquad \int \frac{\cos^4 x}{\sin x} \, dx, \qquad \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \, dx, \qquad \int \frac{1}{4 + 3\tan x} \, dx.$$

46. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}\,dx, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}\,dx, \qquad \int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}\,dx$$

47. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \qquad \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx, \qquad \int (x+1)\sqrt{x^2+1}\,dx.$$

48. Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int x\cos^2 x\,dx, \qquad \int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx, \qquad \int \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}\,dx.$$

49. Έστω $f_0 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $k = 1, 2, \ldots$ ορίζουμε $f_k : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f_k(x) = \int_0^x f_{k-1}(t)\,dt.$$

Δείξτε ότι

$$f_k(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^x f(t)(x-t)^{k-1}dt.$$

50. Έστω $f : [0,\infty) \to (0,\infty)$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty f(x)\,dx$ είναι πεπερασμένο. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

51. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $f(a) = f(b) = 0$. Υποθέτουμε ότι η f' είναι συνεχής και ότι $\int_a^b [f(x)]^2 dx = 1$. Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες δείξτε ότι

$$\int_a^b x f(x) f'(x)\,dx = -\frac{1}{2},$$

και, χρησιμοποιώντας το παραπάνω, δείξτε ότι

$$\left(\int_a^b x^2[f(x)]^2\,dx\right)\left(\int_a^b [f'(x)]^2 dx\right) \geq \frac{1}{4}.$$

52. Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2}\int_a^b \left[\int_a^b (f(y)-f(x))(g(y)-g(x))\,dy\right] dx$$

$$= (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx - \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right).$$

Αν οι f και g είναι αύξουσες, χρησιμοποιώντας το παραπάνω δείξτε ότι

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right) \leq (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

53. Έστω $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι, για κάθε $k\in\mathbb{N}$,

$$f(k) = \int_k^{k+1} f(x)\,dx - \int_k^{k+1}(k+1-x)f'(x)\,dx.$$

54. (α) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^{n-1}f(x)\,dx = 0.$$

(β) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^{n-1}f(x)\,dx = f(1).$$

55. (α) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{1/\sqrt{n}} nf(x)e^{-nx}\,dx = f(0).$$

(β) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nf(x)e^{-nx}\,dx = f(0).$$

56. Έστω $(a_k)_{k\geq 0}$ φραγμένη ακολουθία. Υποθέτουμε ότι η $\sum_{k=0}^\infty a_k$ αποκλίνει. Δείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ ισούται με 1.

57. Έστω $(a_k)_{k\geq 0}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι η $\sum_{k=0}^\infty a_k$ συγκλίνει υπό συνθήκη. Δείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ ισούται με 1.

58. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0)=f(1)=0$. Υποθέτουμε ότι $|f''(x)|\leq M$ για κάθε $x\in(0,1)$. Δείξτε ότι $|f'(x)|\leq M/2$ για κάθε $x\in[0,1]$.

59. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $M_k=\sup\{|f^{(k)}(x)| : x\in\mathbb{R}\}$, $k=0,1,2$, δείξτε ότι

$$M_1 \leq \sqrt{2M_0M_1}.$$

60. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία υπάρχει η $f''(0)$. Χρησιμοποιώντας κατάλληλο πολυώνυμο Taylor της f, δείξτε ότι

$$f''(0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t)+f(-t)-2f(0)}{t^2}.$$