Κεφάλαιο 7

Θεώρημα Taylor

7.1 Θεώρημα Taylor

Ορισμός 7.1.1. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in [a,b]$. Υποθέτουμε ότι η f είναι n φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Το **πολυώνυμο Taylor τάξης** n **της** f **στο** x_0 είναι το πολυώνυμο $T_{n,f,x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

$$T_{n,f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \tag{7.1.1}$$

δηλαδή,

$$T_{n,f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{7.1.2}$$

Το **υπόλοιπο Taylor τάξης** n **της** f **στο** x_0 είναι η συνάρτηση $R_{n,f,x_0} : [a,b] \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

$$R_{n,f,x_0}(x) = f(x) - T_{n,f,x_0}(x). \tag{7.1.3}$$

Όταν $x_0 = 0$, συνηθίζουμε να ονομάζουμε τα $T_{n,f,0}$ και $R_{n,f,0}$ πολυώνυμο MacLaurin και υπόλοιπο MacLaurin της f αντίστοιχα.

Παρατήρηση 7.1.2. Παραγωγίζοντας το T_{n,f,x_0} βλέπουμε ότι:

$$\begin{aligned}
T_{n,f,x_0}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \quad \text{άρα} \quad T_{n,f,x_0}(x_0) = f(x_0),\\
T'_{n,f,x_0}(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}, \quad \text{άρα} \quad T'_{n,f,x_0}(x_0) = f'(x_0),\\
T''_{n,f,x_0}(x) &= \sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!}(x-x_0)^{k-2}, \quad \text{άρα} \quad T''_{n,f,x_0}(x_0) = f''(x_0),\\
&\qquad\qquad \cdots \qquad\qquad \cdots\\
T^{(n)}_{n,f,x_0}(x) &= \sum_{k=n}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-n)!}(x-x_0)^{k-n}, \quad \text{άρα} \quad T^{(n)}_{n,f,x_0}(x_0) = f^{(n)}(x_0).
\end{aligned}$$

Δηλαδή, το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f στο x_0 ικανοποιεί τις

$$T^{(k)}_{n,f,x_0}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \qquad k = 0, 1, \dots, n \tag{7.1.3}$$

και είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού το πολύ ίσου με n που έχει αυτή την ιδιότητα (εξηγήστε γιατί).

Παρατήρηση 7.1.3. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in [a, b]$. Υποθέτουμε ότι η f είναι $n - 1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και n φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Παρατηρήστε ότι

$$T'_{n,f,x_0}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k-1} \tag{7.1.4}$$

και

$$T_{n-1,f',x_0}(x) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{f^{(s+1)}(x_0)}{s!}(x - x_0)^{s}. \tag{7.1.5}$$

Θέτοντας $k = s + 1$ στην (7.1.5) συμπεραίνουμε ότι

$$T'_{n,f,x_0} = T_{n-1,f',x_0}. \tag{7.1.6}$$

Έπεται ότι

$$R'_{n,f,x_0} = R_{n-1,f',x_0}. \tag{7.1.7}$$

Πρόταση 7.1.4. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in [a, b]$. Υποθέτουμε ότι η f είναι $n - 1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και n φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε,*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_{n,f,x_0}(x)}{(x - x_0)^n} = 0. \tag{7.1.8}$$

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς n. Για $n = 1$ έχουμε

$$R_{1,f,x_0}(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0),$$

άρα

$$\frac{R_{1,f,x_0}(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \to 0 \tag{7.1.9}$$

όταν $x \to x_0$, από τον ορισμό της παραγώγου στο σημείο x_0.

Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n = m$ και για κάθε συνάρτηση που ικανοποιεί τις υποθέσεις. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, m φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και $m + 1$ φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε,

$$\lim_{x \to x_0} R_{m+1,f,x_0}(x) = \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^{m+1} = 0 \tag{7.1.10}$$

και

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R'_{m+1,f,x_0}(x)}{[(x - x_0)^{m+1}]'} = \lim_{x \to x_0} \frac{R_{m,f',x_0}(x)}{(m+1)(x - x_0)^m} = 0 \tag{7.1.11}$$

από την επαγωγική υπόθεση για την f'. Εφαρμόζοντας τον κανόνα l'Hospital ολοκληρώνουμε το επαγωγικό βήμα. □

Λήμμα 7.1.5. *Έστω p πολυώνυμο βαθμού το πολύ ίσου με n το οποίο ικανοποιεί την*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{(x-x_0)^n} = 0. \tag{7.1.12}$$

Τότε, $p \equiv 0$.

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς n. Για το επαγωγικό βήμα παρατηρούμε πρώτα ότι

$$p(x_0) = \lim_{x\to x_0} p(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{(x-x_0)^n}(x-x_0)^n = 0, \tag{7.1.13}$$

Συνεπώς, $p(x_0) = 0$. Άρα,

$$p(x) = (x-x_0)p_1(x), \tag{7.1.14}$$

όπου p_1 πολυώνυμο βαθμού το πολύ ίσου με $n-1$ το οποίο ικανοποιεί την

$$\lim_{x\to x_0} \frac{p_1(x)}{(x-x_0)^{n-1}} = \lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{(x-x_0)^n} = 0. \tag{7.1.15}$$

Αν υποθέσουμε ότι η Πρόταση ισχύει για τον $n-1$, τότε $p_1 \equiv 0$ άρα $p \equiv 0$. □.

Η Πρόταση 7.1.4 και το Λήμμα 7.1.5 αποδεικνύουν τον εξής χαρακτηρισμό του πολυωνύμου Taylor T_{n,f,x_0}:

Θεώρημα 7.1.6. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in [a,b]$. Υποθέτουμε ότι η f είναι $n-1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και n φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε, το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f στο x_0 είναι το μοναδικό πολυώνυμο T βαθμού το πολύ ίσου με n το οποίο ικανοποιεί την*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T(x)}{(x-x_0)^n} = 0. \tag{7.1.16}$$

Απόδειξη. Η Πρόταση 7.1.4 δείχνει ότι το T_{n,f,x_0} ικανοποιεί την (7.1.16). Για τη μοναδικότητα αρκεί να παρατηρήσετε ότι αν δύο πολυώνυμα T_1, T_2 βαθμού το πολύ ίσου με n ικανοποιούν την (7.1.16), τότε το πολυώνυμο $p := T_1 - T_2$ ικανοποιεί την (7.1.12). Από το Λήμμα 7.1.5 συμπεραίνουμε ότι $T_1 \equiv T_2$. □

Παρατήρηση 7.1.7. Το Θεώρημα 7.1.6 μας δίνει έναν έμμεσο τρόπο για να βρίσκουμε το πολυώνυμο Taylor τάξης n μιας συνάρτησης f σε κάποιο σημείο x_0. Αρκεί να βρούμε ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ ίσου με n το οποίο ικανοποιεί την (7.1.16).

(i) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1-x}$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και έχουμε δει ότι

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \text{ για κάθε } |x| < 1.$$

Θα δείξουμε ότι, για κάθε n,

$$T_{n,f,0}(x) = T_n(x) := 1 + x + \cdots + x^n.$$

Παρατηρούμε ότι

$$f(x) - T_n(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Άρα,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-T_n(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-x}=0,$$

και το ζητούμενο προκύπτει από το Θεώρημα 7.1.6.

(ii) Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και έχουμε δει ότι

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots \text{ για κάθε } |x|<1.$$

Θα δείξουμε ότι, για κάθε n,

$$T_{2n,f,0}(x)=T_{2n+1,f,0}(x)=T_{2n}(x):=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$f(x)-T_n(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1-(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}=\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

Άρα,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-T_{2n}(x)}{x^{2n+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{(-1)^{n+1}x}{1+x^2}=0,$$

και (προφανώς)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-T_{2n}(x)}{x^{2n}}=\lim_{x\to 0}\frac{(-1)^{n+1}x^2}{1+x^2}=0,$$

οπότε το ζητούμενο προκύπτει από το Θεώρημα 7.1.6.

Το Θεώρημα Taylor δίνει εύχρηστες εκφράσεις για το υπόλοιπο Taylor R_{n,f,x_0} τάξης n μιας συνάρτησης f σε κάποιο σημείο x_0.

Θεώρημα 7.1.8 (Θεώρημα Taylor). *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση $n+1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και έστω $x_0\in[a,b]$. Τότε, για κάθε $x\in[a,b]$,*

(i) **Μορφή Cauchy του υπολοίπου Taylor:** *Υπάρχει ξ μεταξύ των x_0 και x ώστε*

$$R_{n,f,x_0}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0). \tag{7.1.17}$$

(ii) **Μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor:** *Υπάρχει ξ μεταξύ των x_0 και x ώστε*

$$R_{n,f,x_0}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{7.1.18}$$

(iii) **Ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου Taylor:** *Αν η $f^{(n+1)}$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε*

$$R_{n,f,x_0}(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt. \tag{7.1.19}$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε το $x \in [a,b]$ και ορίζουμε $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$\phi(t) = R_{n,f,t}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k. \tag{7.1.20}$$

Παραγωγίζοντας ως προς t βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} \right) \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n, \end{aligned}$$

αφού το μεσαίο άθροισμα είναι τηλεσκοπικό. Παρατηρήστε επίσης ότι

$$\phi(x_0) = R_{n,f,x_0}(x) \text{ και } \phi(x) = R_{n,f,x}(x) = 0. \tag{7.1.21}$$

(i) Για την μορφή Cauchy του υπολοίπου εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την ϕ στο διάστημα με άκρα x και x_0: Υπάρχει ξ μεταξύ των x_0 και x ώστε

$$R_{n,f,x_0}(x) = \phi(x_0) - \phi(x) = \phi'(\xi)(x_0 - x).$$

Από την

$$\phi'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$$

έπεται ότι

$$R_{n,f,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0).$$

(ii) Για την μορφή Lagrange του υπολοίπου εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy για την ϕ και για την $g(t) = (x-t)^{n+1}$ στο διάστημα με άκρα x και x_0: Υπάρχει ξ μεταξύ των x_0 και x ώστε

$$\frac{R_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{\phi(x_0) - \phi(x)}{g(x_0) - g(x)} = \frac{\phi'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Έπεται ότι

$$R_{n,f,x_0}(x) = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{-(n+1)(x-\xi)^n}(x-x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

(iii) Για την ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου παρατηρούμε ότι (από την υπόθεσή μας) η ϕ' είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα με άκρα x και x_0, οπότε εφαρμόζεται το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού:

$$\begin{aligned} R_{n,f,x_0}(x) &= \phi(x_0) - \phi(x) = \int_x^{x_0} \phi'(t)\, dt \\ &= -\int_x^{x_0} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\, dt \\ &= \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\, dt. \end{aligned}$$

Έτσι, έχουμε τις τρεις μορφές για το υπόλοιπο $R_{n,f,x_0}(x)$. □

Στην επόμενη Παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Taylor για να βρουμε το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά των βασικών υπερβατικών συναρτήσεων.

7.2 Δυναμοσειρές και αναπτύγματα Taylor

7.2α′ Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x$

Παρατηρούμε ότι $f^{(k)}(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $k = 0, 1, 2, \ldots$. Ειδικότερα, $f^{(k)}(0) = 1$ για κάθε $k \geq 0$. Συνεπώς,

$$T_n(x) := T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}. \tag{7.2.1}$$

Έστω $x \neq 0$. Χρησιμοποιώντας την μορφή Lagrange του υπολοίπου παίρνουμε

$$R_n(x) := R_{n,f,0}(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1} \tag{7.2.2}$$

για κάποιο ξ μεταξύ των 0 και x. Για να εκτιμήσουμε το υπόλοιπο διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

- Αν $x > 0$ τότε
$$|R_n(x)| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1} \leq \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}.$$
- Αν $x < 0$, τότε $\xi < 0$ και $e^{\xi} < 1$, άρα
$$|R_n(x)| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Σε κάθε περίπτωση,

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|} |x|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{7.2.3}$$

Έστω $x \neq 0$. Εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου για την ακολουθία $a_n := \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ βλέπουμε ότι

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|}{n+2} \to 0,$$

άρα

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0.$$

Συνεπώς,

$$e^x = \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{7.2.4}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

7.2β′ Η συνάρτηση $f(x) = \cos x$

Παρατηρούμε ότι $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x$ και $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $k = 0, 1, 2, \ldots$. Ειδικότερα, $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$ και $f^{(2k+1)}(0) = 0$. Συνεπώς,

$$T_{2n}(x) := T_{2n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}. \tag{7.2.5}$$

Έστω $x \neq 0$. Χρησιμοποιώντας την μορφή Lagrange του υπολοίπου παίρνουμε

$$R_{2n}(x) := R_{2n,f,0}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}x^{2n+1} \tag{7.2.6}$$

για κάποιο ξ μεταξύ των 0 και x. Για να εκτιμήσουμε το υπόλοιπο παρατηρούμε ότι $|f^{(2n+1)}(\xi)| \leq 1$ (είναι κάποιο ημίτονο ή συνημίτονο), άρα

$$|R_{2n}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{7.2.7}$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου για την ακολουθία $a_n := \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ βλέπουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} |R_{2n}(x)| = 0.$$

Συνεπώς,

$$\cos x = \lim_{n\to\infty} T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \tag{7.2.8}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

7.2γ΄ Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$

Παρατηρούμε ότι $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x$ και $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $k = 0, 1, 2, \ldots$. Ειδικότερα, $f^{(2k)}(0) = 0$ και $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$. Συνεπώς,

(7.2.9)

$$T_{2n+1}(x) := T_{2n+1,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Έστω $x \neq 0$. Χρησιμοποιώντας την μορφή Lagrange του υπολοίπου παίρνουμε

$$R_{2n+1}(x) := R_{2n+1,f,0}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}x^{2n+2} \tag{7.2.10}$$

για κάποιο ξ μεταξύ των 0 και x. Για να εκτιμήσουμε το υπόλοιπο παρατηρούμε ότι $|f^{(2n+2)}(\xi)| \leq 1$ (είναι κάποιο ημίτονο ή συνημίτονο), άρα

$$|R_{2n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}. \tag{7.2.11}$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου για την ακολουθία $a_n := \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$ βλέπουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} |R_{2n+1}(x)| = 0.$$

Συνεπώς,

$$\sin x = \lim_{n\to\infty} T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{7.2.12}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

7.2δ′ Η συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1,1]$

Παρατηρούμε ότι $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ για κάθε $x > -1$ και $k = 1, 2, \ldots$. Ειδικότερα, $f(0) = 0$ και $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ για κάθε $k \geq 1$. Συνεπώς,

$$T_n(x) := T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}. \tag{7.2.13}$$

Έστω $x > -1$. Χρησιμοποιώντας την ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου παίρνουμε

$$R_n(x) := R_{n,f,0}(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\, dt. \tag{7.2.14}$$

Θέτουμε $u = \frac{x-t}{1+t}$. Τότε, το u μεταβάλλεται από x ως 0 και $\frac{dt}{1+t} = \frac{-du}{1+u}$ (ελέγξτε το). Συνεπώς,

$$R_n(x) = \int_x^0 \frac{-u^n}{1+u}\, du. \tag{7.2.15}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $-1 < x < 0$ τότε
$$|R_n(x)| \leq \int_x^0 \frac{|u|^n}{1+u}\, du \leq \frac{1}{1+x} \int_0^{|x|} u^n\, du = \frac{1}{1+x} \frac{|x|^{n+1}}{n+1}.$$
- Αν $0 < x \leq 1$ τότε
$$|R_n(x)| = \int_0^x \frac{u^n}{1+u}\, du \leq \int_0^x u^n\, du = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)}.$$

Σε κάθε περίπτωση,
$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0.$$

Συνεπώς,

$$\ln(1+x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} \tag{7.2.16}$$

για κάθε $x \in (-1,1]$ (**σειρά Mercator**).

Ειδικότερα, για $x = 1$ παίρνουμε τον **τύπο του Leibniz**

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots. \tag{7.2.17}$$

Δεύτερος τρόπος: Από τη σχέση

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \quad (t \neq -1) \tag{7.2.18}$$

έχουμε, για κάθε $x > -1$,

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt. \tag{7.2.19}$$

Αν ονομάσουμε $F_n(x)$ τη διαφορά

$$\ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right) \tag{7.2.20}$$

έχουμε

$$F_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt\,. \tag{7.2.21}$$

Εκτιμώντας το ολοκλήρωμα όπως πριν, βλέπουμε ότι

$$|F_n(x)| \leq \max\left\{1, \frac{1}{x+1}\right\}\frac{|x|^{n+1}}{n+1} \tag{7.2.22}$$

για κάθε $-1 < x \leq 1$. Συνεπώς, $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = 0$. Έπεται ότι

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \tag{7.2.23}$$

για $x \in (-1,1]$. Παρατηρήστε επίσης ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F_n(x)}{x^n} = 0$, το οποίο αποδεικνύει ότι $F_n(x) = R_{n,f,0}(x)$.

Όταν $|x| > 1$ η σειρά αποκλίνει (αφού η ακολουθία $\left(\frac{x^n}{n}\right)$ δεν τείνει στο 0) και για $x = -1$ επίσης αποκλίνει (αρμονική σειρά).

7.2ε΄ Η διωνυμική συνάρτηση $f(x) = (1+x)^a$, $x > -1$

Η f ορίζεται από την $f(x) = \exp(a\ln(1+x))$. Αν $a > 0$, το όριο $\lim_{x\to -1} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με 0, διότι $\ln(1+x) = y \to -\infty$ και $\exp(ay) \to 0$. Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να επεκτείνουμε το πεδίο ορισμού της f στο $[-1,\infty)$ θέτοντας $f(-1) = 0$. Παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= a(a-1)\cdots(a-k+1)(1+x)^{a-k} \\ f^{(k)}(0) &= a(a-1)\cdots(a-k+1). \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$T_n(x) := T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}x^k \tag{7.2.24}$$

όπου

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}. \tag{7.2.25}$$

Παρατηρήστε ότι αν $a \in \mathbb{N}$ τότε $\binom{a}{k} = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ με $k > a$, οπότε

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}x^k. \tag{7.2.26}$$

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $a \notin \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι, όταν $|x| < 1$, τότε $T_{n,f,0}(x) \to f(x)$. Χρησιμοποιούμε τη μορφή Cauchy του υπολοίπου: υπάρχει ξ ανάμεσα στο 0 και στο x ώστε

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n x = \frac{a(a-1)\dots(a-n)}{n!}(1+\xi)^{a-(n+1)}(x-\xi)^n x \\ &= \frac{a(a-1)\dots(a-n)}{n!}\left(\frac{x-\xi}{1+\xi}\right)^n (1+\xi)^{a-1} x \end{aligned}$$

Για να δείξουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ όταν $|x| < 1$, παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right| \le |x| \quad \text{όταν } \ |x| < 1. \tag{7.2.27}$$

Πράγματι, αν $0 \le \xi \le x$ έχουμε

$$\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right| = \frac{x-\xi}{1+\xi} \le \frac{x}{1+\xi} \le x = |x|. \tag{7.2.28}$$

Αν $-1 < x \le \xi \le 0$ θεωρούμε την συνάρτηση $g_x : [x, 0] \to \mathbb{R}$ με

$$g_x(\xi) = \frac{x-\xi}{1+\xi} = \frac{x+1}{\xi+1} - 1 \tag{7.2.29}$$

η οποία είναι φθίνουσα (αφού $x + 1 > 0$) άρα έχει μέγιστη τιμή την $g_x(x) = 0$ και ελάχιστη την $g_x(0) = x$ οπότε για κάθε $t \in [x, 0]$ έχουμε $g_x(\xi) \le 0$ άρα

$$\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right| = -g_x(\xi) \le -g_x(0) = -x = |x|. \tag{7.2.30}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left|\frac{a(a-1)\dots(a-n)}{n!}\left(\frac{x-\xi}{1+\xi}\right)^n (1+\xi)^{a-1} x\right| \\ &\le \left|\frac{a(a-1)\dots(a-n)}{n!} x^n\right| \left|(1+\xi)^{a-1} x\right| \\ &\le \left|\frac{a(a-1)\dots(a-n)}{n!} x^n\right| M(x) \end{aligned}$$

όπου $M(x) = |x| \max(1, (1+x)^{a-1})$ (άσκηση), άρα αρκεί να δείξουμε ότι

$$y_n \equiv \left|\frac{a(a-1)\dots(a-n)}{n!} x^n\right| \to 0$$

καθώς $n \to \infty$. Έχουμε

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \left|\frac{a(a-1)\dots(a-n)(a-(n+1))}{a(a-1)\dots(a-n)} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \left|\frac{a-n+1}{n+1} x\right| .$$

Για κάθε $n \ge a - 1$ έχουμε $|a - (n+1)| = n + 1 - a$, άρα

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \left|\frac{a-(n+1)}{n+1} x\right| = \frac{n+1-a}{n+1}|x| \to |x| < 1 \tag{7.2.31}$$

όταν $n \to \infty$, άρα $y_n \to 0$. Δείξαμε ότι αν $|x| < 1$ τότε $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Άρα,

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \tag{7.2.32}$$

για $-1 < x < 1$.

Για $|x| > 1$ η σειρά αποκλίνει (κριτήριο λόγου). Για $|x| = 1$ η συμπεριφορά εξαρτάται από την τιμή του a. Για παράδειγμα, όταν $a = -1$, η σειρά αποκλίνει και στα δύο άκρα (γεωμετρική σειρά με λόγο x). Αποδεικνύεται ότι όταν $a = -1/2$ η σειρά συγκλίνει για $x = 1$ και αποκλίνει για $x = -1$, και όταν $a = 1/2$ (και γενικότερα όταν $a > 0$), η σειρά συγκλίνει και στα δύο άκρα.

7.2ϛ′ Η συνάρτηση $f(x) = \arctan x$, $|x| \leq 1$

Ξεκινάμε από την

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Αντί να παραγωγίσουμε n φορές την arctan στο 0, είναι ευκολότερο να ολοκληρώσουμε την

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} \tag{7.2.33}$$

οπότε

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt. \tag{7.2.34}$$

Αν ορίσουμε

$$p_n(x) = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \tag{7.2.35}$$

έχουμε

$$|f(x) - p_n(x)| = \left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| \leq \int_0^{|x|} t^{2n+2} dt \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \tag{7.2.36}$$

οπότε, όταν $|x| \leq 1$, βλέπουμε ότι $\lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x)$, δηλαδή

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots \tag{7.2.37}$$

για $x \in [-1, 1]$.

7.3 Συναρτήσεις παραστάσιμες σε δυναμοσειρά

Στην Παράγραφο 2.4 συζητήσαμε για πρώτη φορά τις δυναμοσειρές. Είδαμε ότι αν $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ είναι μια δυναμοσειρά με συντελεστές a_k, τότε το σύνολο των σημείων στα οποία συγκλίνει η δυναμοσειρά είναι «ουσιαστικά» ένα διάστημα συμμετρικό ως προς το 0 (ή, ενδεχομένως, το $\{0\}$ ή το $\mathbb{R}$). Αν ορίσουμε

$$R := \sup\{|x| : \text{ η δυναμοσειρά συγκλίνει στο } x\},$$

τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως σε κάθε $x \in (-R, R)$ και αποκλίνει σε κάθε x με $|x| > R$. Το διάστημα $(-R, R)$ ονομάζεται *διάστημα σύγκλισης* της δυναμοσειράς. Το *σύνολο σύγκλισης* της δυναμοσειράς, δηλαδή το σύνολο όλων των σημείων στα οποία συγκλίνει, προκύπτει από το $(-R, R)$ με την προσθήκη (ίσως) του R ή του $-R$ ή των $\pm R$. Στην περίπτωση που $R = +\infty$, η δυναμοσειρά συγκλίνει σε κάθε $x \in R$. Στην περίπτωση που $R = 0$, η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο στο σημείο $x = 0$.

Η επόμενη Πρόταση δίνει έναν «τύπο» για την ακτίνα σύγκλισης.

Πρόταση 7.3.1. *Έστω $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ μια δυναμοσειρά με συντελεστές a_k. Η ακτίνα σύγκλισής της δίνεται από την*

$$R = \frac{1}{\limsup |a_k|^{1/k}}.$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι αν $|x| \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει απολύτως. Πράγματι, αν θεωρήσουμε $s > 0$ με $|x| \limsup \sqrt[k]{|a_k|} < s < 1$, τότε από τον χαρακτηρισμό του $\limsup$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_k x^k| \leq s^k$ για κάθε $k \geq N$, και το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο σύγκρισης.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι αν $|x| \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Πράγματι, αν θεωρήσουμε $s > 0$ με $|x| \limsup \sqrt[k]{|a_k|} > s > 1$, τότε από τον χαρακτηρισμό του $\limsup$, υπάρχουν άπειροι δείκτες $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε $|a_{k_n} x^{k_n}| \geq s^{k_n} > 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, $a_k x^k \not\to 0$ και εφαρμόζεται το κριτήριο απόκλισης.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι – αναγκαστικά – το $(-R, R)$, όπου $R = \frac{1}{\limsup |a_k|^{1/k}}$. □

Ορισμός 7.3.2. *Λέμε ότι μια συνάρτηση $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ είναι παραστάσιμη σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0 αν υπάρχει ακολουθία $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ πραγματικών αριθμών ώστε*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

για κάθε $x \in (-R, R)$.

Το θεώρημα που ακολουθεί δείχνει ότι αν μια συνάρτηση είναι παραστάσιμη σε δυναμοσειρά στο $(-R, R)$, τότε είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και οι παράγωγοί της υπολογίζονται με παραγώγιση των όρων της δυναμοσειράς. Ανάλογα, υπολογίζεται το ολοκλήρωμά της σε κάθε υποδιάστημα του $(-R, R)$.

Θεώρημα 7.3.3 (θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειρών). *Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ μια δυναμοσειρά που συγκλίνει στο $(-R, R)$ για κάποιον $R > 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ με*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Τότε, η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη: για κάθε $k \geq 0$ και για κάθε $|x| < R$ ισχύει

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

Επίσης,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

και, για κάθε $|x| < R$, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, x]$ και

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι, για κάθε $x \in (-R, R)$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \tag{1}$$

Αφού $|x| < R$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|x| + \delta < R$. Έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(|x| + \delta)^n < +\infty.$$

Έστω $0 < |t| < \delta$. Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} |(x+t)^n - x^n - nx^{n-1}t| &= \left| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} t^k \right| = t^2 \left| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} t^{k-2} \right| \\ &\leq \frac{t^2}{\delta^2} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} t^{k-2} \delta^2 \leq \frac{t^2}{\delta^2} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} \delta^k \\ &\leq \frac{t^2}{\delta^2} (|x| + \delta)^n. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(x+t)^n - x^n - nx^{n-1}t}{t} \right| \\ &\leq \frac{|t|}{\delta^2} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(|x| + \delta)^n. \end{aligned}$$

Παίρνοντας το όριο καθώς το $t \to 0$, βλέπουμε ότι

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

το οποίο αποδεικνύει την (1).

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 7.3.1 βλέπουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$ έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης με την $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ (εξηγήστε γιατί). Εφαρμόζοντας λοιπόν τον ίδιο συλλογισμό για την f' στη θέση της f, βλέπουμε ότι

$$f^{(2)}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, αποδεικνύουμε ότι η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και ότι για κάθε $k \geq 0$ και για κάθε $|x| < R$ ισχύει

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k}. \tag{2}$$

Θέτοντας $x = 0$ στην (2) βλέπουμε ότι

$$f^{(k)}(0) = k!a_k$$

για κάθε $k \geq 0$ (παρατηρήστε ότι: αν θέσουμε $x = 0$ στο δεξιό μέλος της (2), τότε όλοι οι όροι του αθροίσματος μηδενίζονται, εκτός από εκείνον που αντιστοιχεί στην τιμή $n = k$ και ισούται με $k(k-1)\cdots 2 \cdot 1 \cdot a_kx^0 = k!a_k$).

Για τον τελευταίο ισχυρισμό, παρατηρούμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης με την $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ (εξηγήστε γιατί) και παραγωγίζοντας όρο προς όρο την

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

στο $(-R, R)$ παίρνουμε

$$F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = f(x).$$

Από το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έπεται ότι

$$\int_0^x f(t)\,dt = F(x) - F(0) = F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

για κάθε $x \in (-R, R)$. □

Πόρισμα 7.3.4 (θεώρημα μοναδικότητας). *Εστω (a_k), (b_k) ακολουθίες πραγματικών αριθμών με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $R > 0$ ώστε*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_kx^k$$

για κάθε $x \in (-R, R)$. Τότε,

$$a_k = b_k \ \text{ για κάθε } k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 7.3.3, για τη συνάρτηση $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_kx^k$$

έχουμε

$$f^{(k)}(0) = k!a_k = k!b_k$$

για κάθε $k \geq 0$. Συνεπώς, $a_k = b_k$ για κάθε $k \geq 0$. □