Κεφάλαιο 1

Υπακολουθίες και βασικές ακολουθίες

1.1 Υπακολουθίες

Ορισμός 1.1.1. Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Η ακολουθία (b_n) λέγεται *υπακολουθία* της (a_n) αν υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε

$$b_n = a_{k_n} \quad \text{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.1.1}$$

Με άλλα λόγια, οι όροι της (b_n) είναι οι $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_n}, \ldots$, όπου $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$. Γενικά, μια ακολουθία έχει πολλές (συνήθως άπειρες το πλήθος) διαφορετικές υπακολουθίες.

Παραδείγματα 1.1.2. Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών.

(α) Η υπακολουθία (a_{2n}) των «άρτιων όρων» της (a_n) έχει όρους τους

$$a_2, a_4, a_6, \ldots .$$

Εδώ, $k_n = 2n$.

(β) Η υπακολουθία (a_{2n-1}) των «περιττών όρων» της (a_n) έχει όρους τους

$$a_1, a_3, a_5, \ldots .$$

Εδώ, $k_n = 2n - 1$.

(γ) Η υπακολουθία (a_{n^2}) της (a_n) έχει όρους τους

$$a_1, a_4, a_9, \ldots .$$

Εδώ, $k_n = n^2$.

(δ) Κάθε τελικό τμήμα $(a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots)$ της (a_n) είναι υπακολουθία της (a_n). Εδώ, $k_n = m + n - 1$.

Παρατήρηση 1.1.3. Έστω (k_n) μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Τότε, $k_n \geq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Με επαγωγή: αφού ο k_1 είναι φυσικός αριθμός, είναι φανερό ότι $k_1 \geq 1$. Για το επαγωγικό βήμα υποθέτουμε ότι $k_m \geq m$. Αφού η (k_n) είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε $k_{m+1} > k_m$, άρα $k_{m+1} > m$. Αφού οι k_{m+1} και m είναι φυσικοί αριθμοί, έπεται ότι $k_{m+1} \geq m+1$ (θυμηθείτε ότι ανάμεσα στον m και στον $m+1$ δεν υπάρχει άλλος φυσικός). □

Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι αν μια ακολουθία συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό τότε όλες οι υπακολουθίες της είναι συγκλίνουσες και συγκλίνουν στον ίδιο πραγματικό αριθμό.

Πρόταση 1.1.4. *Αν $a_n \to a$ τότε για κάθε υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ισχύει $a_{k_n} \to a$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $a_n \to a$, υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την εξής ιδιότητα:

$$\text{Για κάθε } m \geq n_0 \text{ ισχύει } |a_m - a| < \varepsilon.$$

Από την Παρατήρηση 1.1.3 για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $k_n \geq n \geq n_0$. Θέτοντας λοιπόν $m = k_n$ στην προηγούμενη σχέση, παίρνουμε:

$$\text{Για κάθε } n \geq n_0 \text{ ισχύει } |a_{k_n} - a| < \varepsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $a_{k_n} \to a$: για το τυχόν $\varepsilon > 0$ βρήκαμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε όλοι οι όροι $a_{k_{n_0}}, a_{k_{n_0+1}}, \ldots$ της (a_{k_n}) να ανήκουν στο $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. □

Παρατήρηση 1.1.5. Η προηγούμενη Πρόταση είναι πολύ χρήσιμη αν θέλουμε να δείξουμε ότι μια ακολουθία (a_n) δεν συγκλίνει σε κανέναν πραγματικό αριθμό. Αρκεί να βρούμε δύο υπακολουθίες της (a_n) οι οποίες να έχουν διαφορετικά όρια.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την $(a_n) = (-1)^n$. Τότε, $a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \to 1$ και $a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1 \to -1$.

Ας υποθέσουμε ότι $a_n \to a$. Οι (a_{2n}) και (a_{2n-1}) είναι υπακολουθίες της (a_n), πρέπει λοιπόν να ισχύει $a_{2n} \to a$ και $a_{2n-1} \to a$. Από τη μοναδικότητα του ορίου της (a_{2n}) παίρνουμε $a = 1$ και από τη μοναδικότητα του ορίου της (a_{2n-1}) παίρνουμε $a = -1$. Δηλαδή, $1 = -1$. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα η (a_n) δεν συγκλίνει.

1.2 Θεώρημα Bolzano-Weierstrass

Θεώρημα 1.2.1 (Bolzano-Weierstrass). *Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μία υπακολουθία που συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.*

Θα δώσουμε δύο αποδείξεις αυτού του Θεωρήματος. Η πρώτη βασίζεται στο γεγονός ότι κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει. Για να βρούμε συγκλίνουσα υπακολουθία μιας φραγμένης ακολουθίας αρκεί να βρούμε μια μονότονη υπακολουθία της. Το τελευταίο ισχύει εντελώς γενικά, όπως δείχνει το επόμενο Θεώρημα:

Θεώρημα 1.2.2. *Κάθε ακολουθία έχει τουλάχιστον μία μονότονη υπακολουθία.*

Απόδειξη. Θα χρειαστούμε την έννοια του σημείου κορυφής μιας ακολουθίας.

Ορισμός 1.2.3. Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Λέμε ότι ο a_m είναι **σημείο κορυφής** της (a_n) αν $a_m \geq a_n$ για κάθε $n \geq m$.

[Για να εξοικειωθείτε με τον ορισμό ελέγξτε τα εξής. Αν η (a_n) είναι φθίνουσα τότε κάθε όρος της είναι σημείο κορυφής της. Αν η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα τότε δεν έχει κανένα σημείο κορυφής.]

Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) *Η (a_n) έχει άπειρα το πλήθος σημεία κορυφής.* Τότε, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε όλοι οι όροι $a_{k_1}, \ldots, a_{k_n}, \ldots$ να είναι σημεία κορυφής της (a_n) (εξηγήστε γιατί). Αφού $k_n < k_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η (a_{k_n}) είναι υπακολουθία της (a_n). Από τον ορισμό του σημείου κορυφής βλέπουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_{k_n} \geq a_{k_{n+1}}$ (έχουμε $k_{n+1} > k_n$ και ο a_{k_n} είναι σημείο κορυφής της (a_n)). Δηλαδή,

$$a_{k_1} \geq a_{k_2} \geq \cdots \geq a_{k_n} \geq a_{k_{n+1}} \geq \cdots . \tag{1.2.1}$$

Άρα, η υπακολουθία (a_{k_n}) είναι φθίνουσα.

(β) *Η (a_n) έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία κορυφής.* Τότε, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ με την εξής ιδιότητα: αν $m \geq N$ τότε ο a_m δεν είναι σημείο κορυφής της (a_n) (πάρτε $N = k + 1$ όπου a_k το τελευταίο σημείο κορυφής της (a_n) ή $N = 1$ αν δεν υπάρχουν σημεία κορυφής).

Με βάση τον ορισμό του σημείου κορυφής αυτό σημαίνει ότι: αν $m \geq N$ τότε υπάρχει $n > m$ ώστε $a_n > a_m$.

Εφαρμόζουμε διαδοχικά το παραπάνω. Θέτουμε $k_1 = N$ και βρίσκουμε $k_2 > k_1$ ώστε $a_{k_2} > a_{k_1}$. Κατόπιν βρίσκουμε $k_3 > k_2$ ώστε $a_{k_3} > a_{k_2}$ και ούτω καθεξής. Υπάρχουν δηλαδή $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε

$$a_{k_1} < a_{k_2} < \cdots < a_{k_n} < a_{k_{n+1}} < \cdots . \tag{1.2.2}$$

Τότε, η (a_{k_n}) είναι γνησίως αύξουσα υπακολουθία της (a_n). □

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass.

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.1. Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία. Από το Θεώρημα 1.2.2 η (a_n) έχει μονότονη υπακολουθία (a_{k_n}). Η (a_{k_n}) είναι μονότονη και φραγμένη, συνεπώς συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. □

1.2α΄ Απόδειξη με χρήση της αρχής του κιβωτισμού

Η δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος Bolzano-Weierstrass χρησιμοποιεί την αρχή των κιβωτισμένων διαστημάτων. Έστω (a_n) μια φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε, υπάρχει κλειστό διάστημα $[b_1, c_1]$ στο οποίο ανήκουν όλοι οι όροι a_n.

Χωρίζουμε το $[b_1, c_1]$ σε δύο διαδοχικά διαστήματα που έχουν το ίδιο μήκος $\frac{c_1 - b_1}{2}$: τα $\left[b_1, \frac{b_1+c_1}{2}\right]$ και $\left[\frac{b_1+c_1}{2}, c_1\right]$. Κάποιο από αυτά τα δύο διαστήματα περιέχει άπειρους το πλήθος όρους της (a_n). Παίρνοντας σαν $[b_2, c_2]$ αυτό το υποδιάστημα του $[b_1, c_1]$ έχουμε δείξει το εξής.

> Υπάρχει κλειστό διάστημα $[b_2, c_2] \subset [b_1, c_1]$ το οποίο περιέχει άπειρους όρους της (a_n) και έχει μήκος
>
> $$c_2 - b_2 = \frac{c_1 - b_1}{2}. \tag{1.2.3}$$

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο: χωρίζουμε το $[b_2, c_2]$ σε δύο διαδοχικά διαστήματα μήκους $\frac{c_2 - b_2}{2}$: τα $\left[b_2, \frac{b_2+c_2}{2}\right]$ και $\left[\frac{b_2+c_2}{2}, c_2\right]$. Αφού το $[b_2, c_2]$ περιέχει άπειρους όρους της (a_n), κάποιο από αυτά τα δύο διαστήματα περιέχει άπειρους το πλήθος όρους της (a_n). Παίρνοντας σαν $[b_3, c_3]$ αυτό το υποδιάστημα του $[b_2, c_2]$ έχουμε δείξει το εξής.

Υπάρχει κλειστό διάστημα $[b_3, c_3] \subset [b_2, c_2]$ το οποίο περιέχει άπειρους όρους της (a_n) και έχει μήκος

$$c_3 - b_3 = \frac{c_2 - b_2}{2} = \frac{c_1 - b_1}{2^2}. \tag{1.2.4}$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε ακολουθία $\big([b_m, c_m]\big)_{m\in\mathbb{N}}$ κλειστών διαστημάτων που ικανοποιεί τα εξής:

(i) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $[b_{m+1}, c_{m+1}] \subset [b_m, c_m]$.

(ii) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $c_m - b_m = (c_1 - b_1)/2^{m-1}$.

(iii) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) στο $[b_m, c_m]$.

Χρησιμοποιώντας την τρίτη συνθήκη, μπορούμε να βρούμε υπακολουθία (a_{k_m}) της (a_n) με την ιδιότητα: για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_{k_m} \in [b_m, c_m]$. Πράγματι, υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_{k_1} \in [b_1, c_1]$ – για την ακρίβεια, όλοι οι όροι της (a_n) βρίσκονται στο $[b_1, c_1]$. Τώρα, αφού το $[b_2, c_2]$ περιέχει άπειρους όρους της (a_n), κάποιος από αυτούς έχει δείκτη μεγαλύτερο από k_1. Δηλαδή, υπάρχει $k_2 > k_1$ ώστε $a_{k_2} \in [b_2, c_2]$. Με τον ίδιο τρόπο, αν έχουν οριστεί $k_1 < \cdots < k_m$ ώστε $a_{k_s} \in [b_s, c_s]$ για κάθε $s = 1, \ldots, m$, μπορούμε να βρούμε $k_{m+1} > k_m$ ώστε $a_{k_{m+1}} \in [b_{m+1}, c_{m+1}]$ (διότι, το $[b_{m+1}, c_{m+1}]$ περιέχει άπειρους όρους της (a_n)). Έτσι, ορίζεται μια υπακολουθία (a_{k_m}) της (a_n) που ικανοποιεί το ζητούμενο.

Θα δείξουμε ότι η (a_{k_m}) συγκλίνει. Από την αρχή των κιβωτισμένων διαστημάτων (και λόγω της (ii)) υπάρχει μοναδικός $a \in \mathbb{R}$ ο οποίος ανήκει σε όλα τα κλειστά διαστήματα $[b_m, c_m]$. Θυμηθείτε ότι

$$\lim_{m\to\infty} b_m = a = \lim_{m\to\infty} c_m.$$

Αφού $b_m \leq a_{k_m} \leq c_m$ για κάθε m, το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών δείχνει ότι $a_{k_m} \to a$. □

1.3 Ανώτερο και κατώτερο όριο ακολουθίας

Σκοπός μας σε αυτήν την Παράγραφο είναι να μελετήσουμε πιο προσεκτικά τις υπακολουθίες μιας φραγμένης ακολουθίας. Θυμηθείτε ότι αν η ακολουθία (a_n) συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό a τότε η κατάσταση είναι πολύ απλή. Αν (a_{k_n}) είναι τυχούσα υπακολουθία της (a_n), τότε $a_{k_n} \to a$. Δηλαδή, όλες οι υπακολουθίες μιας συγκλίνουσας ακολουθίας συγκλίνουν και μάλιστα στο όριο της ακολουθίας.

Ορισμός 1.3.1. Έστω (a_n) μια ακολουθία. Λέμε ότι ο $x \in \mathbb{R}$ είναι **οριακό σημείο** (ή **υπακολουθιακό όριο**) της (a_n) αν υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to x$.

Τα οριακά σημεία μιας ακολουθίας χαρακτηρίζονται από το επόμενο Λήμμα.

Λήμμα 1.3.2. *Ο x είναι οριακό σημείο της (a_n) αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \geq m$ ώστε $|a_n - x| < \varepsilon$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο x είναι οριακό σημείο της (a_n). Υπάρχει λοιπόν υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to x$.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $m \in \mathbb{N}$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_{k_n} - x| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Θεωρούμε τον $n_1 = \max\{m, n_0\}$. Τότε $k_{n_1} \geq n_1 \geq m$ και $n_1 \geq n_0$, άρα $|a_{k_{n_1}} - x| < \varepsilon$.

Αντίστροφα: Παίρνουμε $\varepsilon = 1$ και $m = 1$. Από την υπόθεση υπάρχει $k_1 \geq 1$ ώστε $|a_{k_1} - x| < 1$. Στη συνέχεια παίρνουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}$ και $m = k_1 + 1$. Εφαρμόζοντας την υπόθεση βρίσκουμε $k_2 \geq k_1 + 1 > k_1$ ώστε $|a_{k_2} - x| < \frac{1}{2}$.

Επαγωγικά βρίσκουμε $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ ώστε

$$|a_{k_n} - x| < \frac{1}{n}$$

(κάνετε μόνοι σας το επαγωγικό βήμα). Είναι φανερό ότι $a_{k_n} \to x$. □

Έστω (a_n) μια φραγμένη ακολουθία. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε $|a_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το σύνολο

$$K = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ είναι οριακό σημείο της } (a_n)\}. \tag{1.3.1}$$

1. *Το K είναι μη κενό.* Από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass υπάρχει τουλάχιστον μία υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) που συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Το όριο της (a_{k_n}) είναι εξ ορισμού στοιχείο του K.
2. *Το K είναι φραγμένο.* Αν $x \in K$, υπάρχει $a_{k_n} \to x$ και αφού $-M \leq a_{k_n} \leq M$ για κάθε n, έπεται ότι $-M \leq x \leq M$.

Από το αξίωμα της πληρότητας προκύπτει ότι υπάρχουν τα $\sup K$ και $\inf K$. Το επόμενο Λήμμα δείχνει ότι το K έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο.

Λήμμα 1.3.3. *Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία και*

$$K = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ είναι οριακό σημείο της } (a_n)\}.$$

Τότε, $\sup K \in K$ και $\inf K \in K$.

Απόδειξη. Έστω $a = \sup K$. Θέλουμε να δείξουμε ότι ο a είναι οριακό σημείο της (a_n), και σύμφωνα με το Λήμμα 1.3.2 αρκεί να δούμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \geq m$ ώστε $|a_n - a| < \varepsilon$.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $m \in \mathbb{N}$. Αφού $a = \sup K$, υπάρχει $x \in K$ ώστε $a - \frac{\varepsilon}{2} < x \leq a$. Ο x είναι οριακό σημείο της (a_n), άρα υπάρχει $n \geq m$ ώστε $|a_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε,

$$|a_n - a| \leq |a_n - x| + |x - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{1.3.2}$$

Με ανάλογο τρόπο δείχνουμε ότι $\inf K \in K$. □

Ορισμός 1.3.4. Έστω (a_n) μια φραγμένη ακολουθία. Αν

$$K = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ είναι οριακό σημείο της } (a_n)\},$$

ορίζουμε

(i) $\limsup a_n = \sup K$, το **ανώτερο όριο** της (a_n),

(ii) $\liminf a_n = \inf K$ το **κατώτερο όριο** της (a_n).

Σύμφωνα με το Λήμμα 1.3.3, το $\limsup a_n$ είναι το μέγιστο στοιχείο και το $\liminf a_n$ είναι το ελάχιστο στοιχείο του K αντίστοιχα:

Θεώρημα 1.3.5. *Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία. Το $\limsup a_n$ είναι ο μεγαλύτερος πραγματικός αριθμός x για τον οποίο υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) με $a_{k_n} \to x$. Το $\liminf a_n$ είναι ο μικρότερος πραγματικός αριθμός y για τον οποίο υπάρχει υπακολουθία (a_{l_n}) της (a_n) με $a_{l_n} \to y$.* □

Το ανώτερο και το κατώτερο όριο μιας φραγμένης ακολουθίας περιγράφονται μέσω των περιοχών τους ως εξής:

Θεώρημα 1.3.6. *Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών και έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε,*

(1) *$x \leq \limsup a_n$ αν και μόνο αν: για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < a_n\}$ είναι άπειρο.*

(2) *$x \geq \limsup a_n$ αν και μόνο αν: για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : x + \varepsilon < a_n\}$ είναι πεπερασμένο.*

(3) *$x \geq \liminf a_n$ αν και μόνο αν: για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : a_n < x + \varepsilon\}$ είναι άπειρο.*

(4) *$x \leq \liminf a_n$ αν και μόνο αν: για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : a_n < x - \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.*

(5) *$x = \limsup a_n$ αν και μόνο αν: για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : x - \varepsilon < a_n\}$ είναι άπειρο και το $\{n \in \mathbb{N} : x + \varepsilon < a_n\}$ είναι πεπερασμένο.*

(6) *$x = \liminf a_n$ αν και μόνο αν: για κάθε $\varepsilon > 0$ το $\{n \in \mathbb{N} : a_n < x + \varepsilon\}$ είναι άπειρο και το $\{n \in \mathbb{N} : a_n < x - \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.*

Απόδειξη. (1:$\Rightarrow$) Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) με $a_{k_n} \to \limsup a_n$, άρα υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$

$$a_{k_n} > \limsup a_n - \varepsilon \geq x - \varepsilon. \tag{1.3.3}$$

Έπεται ότι το $\{n : a_n > x - \varepsilon\}$ είναι άπειρο.

(2:$\Rightarrow$) Έστω $\varepsilon > 0$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ με $a_{k_n} > x + \varepsilon$. Τότε, η υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) έχει όλους τους όρους της μεγαλύτερους από $x+\varepsilon$. Μπορούμε να βρούμε συγκλίνουσα υπακολουθία $(a_{k_{s_n}})$ της (a_{k_n}) (από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass) και τότε $a_{k_{s_n}} \to y \geq x + \varepsilon$. Όμως τότε, η $(a_{k_{s_n}})$ είναι υπακολουθία της (a_n) (εξηγήστε γιατί), οπότε

$$\limsup a_n \geq y \geq x + \varepsilon \geq \limsup a_n + \varepsilon. \tag{1.3.4}$$

Αυτό είναι άτοπο. Άρα, το $\{n : a_n > x + \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

(1: $\Leftarrow$) Έστω ότι $x > \limsup a_n$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε αν $y = x - \varepsilon$ να έχουμε $x > y > \limsup a_n$. Από την υπόθεσή μας, το $\{n \in \mathbb{N} : y < a_n\}$ είναι άπειρο. Όμως $y > \limsup a_n$ οπότε από την (2: $\Rightarrow$) το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : y < a_n\}$ είναι πεπερασμένο (γράψτε $y = \limsup a_n + \varepsilon_1$ για κάποιο $\varepsilon_1 > 0$). Οι δύο ισχυρισμοί έρχονται σε αντίφαση.

(2:$\Leftarrow$) Όμοια, υποθέτουμε ότι $x < \limsup a_n$ και βρίσκουμε y ώστε $x < y < \limsup a_n$. Αφού $y > x$, συμπεραίνουμε ότι το $\{n \in \mathbb{N} : y < a_n\}$ είναι πεπερασμένο (αυτή είναι η υπόθεσή μας) και αφού $y < \limsup a_n$ συμπεραίνουμε ότι το $\{n \in \mathbb{N} : y < a_n\}$ είναι άπειρο (από την (1:$\Rightarrow$).) Έτσι καταλήγουμε σε άτοπο.

Η (5) είναι άμεση συνέπεια των (1) και (2).

Για τις (3), (4) και (6) εργαζόμαστε όμοια. □

Μια εναλλακτική περιγραφή των $\limsup a_n$ και $\liminf a_n$ δίνεται από το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 1.3.7. *Εστω (a_n) φραγμένη ακολουθία.*

(α) *Θέτουμε* $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$. *Τότε,* $\limsup a_n = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(β) *Θέτουμε* $\gamma_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$. *Τότε,* $\liminf a_n = \sup\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι οι αριθμοί $\inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ και $\sup\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορίζονται καλά:

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $\gamma_n \leq a_n \leq b_n$ (εξηγήστε γιατί). Επίσης, η (b_n) είναι φθίνουσα, ενώ η (a_n) είναι αύξουσα (εξηγήστε γιατί). Αφού η (a_n) είναι φραγμένη, έπεται ότι η (b_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, ενώ η (γ_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Από το θεώρημα σύγκλισης μονότονων ακολουθιών συμπεραίνουμε ότι $b_n \to \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\} := b$ και $\gamma_n \to \sup\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\} := \gamma$.

Θα δείξουμε ότι $\limsup a_n = b$. Από το Λήμμα 1.3.3 υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) με $a_{k_n} \to \limsup a_n$. Όμως, $a_{k_n} \leq b_{k_n}$ και $b_{k_n} \to b$ (εξηγήστε γιατί). Άρα,

$$\limsup a_n = \lim a_{k_n} \leq \lim b_{k_n} = b. \tag{1.3.5}$$

Για την αντίστροφη ανισότητα δείχνουμε ότι ο b είναι οριακό σημείο της (a_n). Έστω $\varepsilon > 0$ και έστω $m \in \mathbb{N}$. Αφού $b_n \to b$, υπάρχει $n \geq m$ ώστε $|b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Αλλά, $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$, άρα υπάρχει $k \geq n \geq m$ ώστε $b_n \geq a_k > b_n - \frac{\varepsilon}{2}$ δηλαδή $|b_n - a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Έπεται ότι

$$|b - a_k| \leq |b - b_n| + |b_n - a_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{1.3.6}$$

Από το Λήμμα 1.3.2 ο b είναι οριακό σημείο της (a_n), και συνεπώς, $b \leq \limsup a_n$.

Με ανάλογο τρόπο δείχνουμε ότι $\liminf a_n = \gamma$. □

Κλείνουμε με έναν χαρακτηρισμό της σύγκλισης για φραγμένες ακολουθίες.

Θεώρημα 1.3.8. *Εστω (a_n) φραγμένη ακολουθία. Η (a_n) συγκλίνει αν και μόνο αν* $\limsup a_n = \liminf a_n$.

Απόδειξη. Αν $a_n \to a$ τότε για κάθε υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) έχουμε $a_{k_n} \to a$. Επομένως, ο a είναι το μοναδικό οριακό σημείο της (a_n). Έχουμε $K = \{a\}$, άρα

$$\limsup a_n = \liminf a_n = a.$$

Αντίστροφα: έστω $\varepsilon > 0$. Από το Θεώρημα 1.3.6 ο αριθμός $a = \limsup a_n = \liminf a_n$ έχει την εξής ιδιότητα:

> Τα σύνολα $\{n \in \mathbb{N} : a_n < a - \varepsilon\}$ και $\{n \in \mathbb{N} : a_n > a + \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένα.

Δηλαδή, το σύνολο

$$\{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| > \varepsilon\} \tag{1.3.7}$$

είναι πεπερασμένο. Ισοδύναμα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \geq n_0$,

$$|a_n - a| \leq \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $a_n \to a$. □

Παρατήρηση 1.3.9. Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία (a_n) δεν είναι φραγμένη. Αν η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to +\infty$ (άσκηση). Με άλλα λόγια, ο $+\infty$ είναι «οριακό σημείο» της (a_n). Σε αυτήν την περίπτωση είναι λογικό να ορίσουμε $\limsup a_n = +\infty$. Εντελώς ανάλογα, αν η (a_n) δεν είναι κάτω φραγμένη, τότε υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to -\infty$ (άσκηση). Δηλαδή, ο $-\infty$ είναι «οριακό σημείο» της (a_n). Τότε, ορίζουμε $\liminf a_n = -\infty$.

1.4 Ακολουθίες Cauchy

Ο ορισμός της ακολουθίας Cauchy έχει σαν αφετηρία την εξής παρατήρηση: ας υποθέσουμε ότι $a_n \to a$. Τότε, οι όροι της (a_n) είναι τελικά «κοντά» στο a, άρα είναι τελικά και «μεταξύ τους κοντά». Για να εκφράσουμε αυστηρά αυτή την παρατήρηση, ας θεωρήσουμε τυχόν $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε, για κάθε $n, m \geq n_0$ έχουμε

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{1.4.1}$$

Ορισμός 1.4.1. Μια ακολουθία (a_n) λέγεται **ακολουθία Cauchy** (ή **βασική ακολουθία**) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$\textit{αν } m, n \geq n_0(\varepsilon), \ \textit{τότε} \quad |a_n - a_m| < \varepsilon. \tag{1.4.2}$$

Παρατήρηση 1.4.2. Αν η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\text{αν } n \geq n_0(\varepsilon), \ \text{τότε} \quad |a_n - a_{n+1}| < \varepsilon. \tag{1.4.3}$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει: αν, από κάποιον δείκτη και πέρα, διαδοχικοί όροι είναι κοντά, δεν έπεται αναγκαστικά ότι η ακολουθία είναι Cauchy. Για παράδειγμα, θεωρήστε την

$$a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{1.4.4}$$

Τότε,

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0 \tag{1.4.5}$$

όταν $n \to \infty$, όμως

$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \geq \frac{n}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \to +\infty \tag{1.4.6}$$

όταν $n \to \infty$, απ' όπου βλέπουμε ότι η (a_n) δεν είναι ακολουθία Cauchy. Πράγματι, αν η (a_n) ήταν ακολουθία Cauchy, θα έπρεπε (εφαρμόζοντας τον ορισμό με $\varepsilon = 1$) για μεγάλα $n, m = 2n$ να ισχύει

$$|a_{2n} - a_n| < 1 \ \text{ δηλαδή } \ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} < 1, \tag{1.4.7}$$

το οποίο οδηγεί σε άτοπο.

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy. Η απόδειξη γίνεται σε τρία βήματα.

Πρόταση 1.4.3. *Κάθε ακολουθία Cauchy είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω (a_n) ακολουθία Cauchy. Πάρτε $\varepsilon = 1 > 0$ στον ορισμό: υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - a_m| < 1$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Ειδικότερα, $|a_n - a_{n_0}| < 1$ για κάθε $n > n_0$. Δηλαδή,

$$|a_n| < 1 + |a_{n_0}| \quad \text{για κάθε} \quad n > n_0. \tag{1.4.8}$$

Θέτουμε $M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0}|, 1 + |a_{n_0}|\}$ και εύκολα επαληθεύουμε ότι

$$|a_n| \leq M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Πρόταση 1.4.4. *Αν μια ακολουθία Cauchy (a_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, τότε η (a_n) συγκλίνει.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy και ότι η υπακολουθία (a_{k_n}) συγκλίνει στο $a \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι $a_n \to a$.
Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $a_{k_n} \to a$, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_1$,

$$|a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.4.9}$$

Αφού η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n, m \geq n_2$

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.4.10}$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Έστω $n \geq n_0$. Τότε $k_n \geq n \geq n_0 \geq n_1$, άρα

$$|a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.4.11}$$

Επίσης $k_n, n \geq n_0 \geq n_2$, άρα

$$|a_{k_n} - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.4.12}$$

Έπεται ότι

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{1.4.13}$$

Δηλαδή, $|a_n - a| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Αυτό σημαίνει ότι $a_n \to a$. □

Θεώρημα 1.4.5. *Μια ακολουθία (a_n) συγκλίνει αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy.*

Απόδειξη. Η μία κατεύθυνση αποδείχτηκε στην εισαγωγή αυτής της παραγράφου: αν υποθέσουμε ότι $a_n \to a$ και αν θεωρήσουμε τυχόν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε, για κάθε $n, m \geq n_0$ έχουμε

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{1.4.14}$$

Άρα, η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση: έστω (a_n) ακολουθία Cauchy. Από την Πρόταση 1.4.3, η (a_n) είναι φραγμένη. Από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass, η (a_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Τέλος, από την Πρόταση 1.4.4 έπεται ότι η (a_n) συγκλίνει. $\square$

Αυτό το κριτήριο σύγκλισης είναι πολύ χρήσιμο. Πολλές φορές θέλουμε να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη ορίου για μια ακολουθία χωρίς να μας ενδιαφέρει η τιμή του ορίου. Αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία είναι Cauchy, δηλαδή ότι οι όροι της είναι «κοντά» για μεγάλους δείκτες, κάτι που δεν απαιτεί να μαντέψουμε εκ των προτέρων ποιό είναι το όριο. Αντίθετα, για να δουλέψουμε με τον ορισμό του ορίου, πρέπει ήδη να ξέρουμε ποιό είναι το υποψήφιο όριο (συγκρίνετε τους δύο ορισμούς: «$a_n \to a$» και «(a_n) ακολουθία Cauchy».)

1.5 *Παράρτημα: συζήτηση για το αξίωμα της πληρότητας

Όλη μας η δουλειά ξεκινάει με την «παραδοχή» ότι το $\mathbb{R}$ είναι ένα διατεταγμένο σώμα που ικανοποιεί το αξίωμα της πληρότητας: κάθε μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολό του έχει ελάχιστο άνω φράγμα. Χρησιμοποιώντας την ύπαρξη supremum δείξαμε την Αρχιμήδεια ιδιότητα:

> $(*)$ Αν $a \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n\varepsilon > a$.

Χρησιμοποιώντας και πάλι το αξίωμα της πληρότητας, δείξαμε ότι κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει. Σαν συνέπεια πήραμε το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass: κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Αυτό με τη σειρά του μας επέτρεψε να δείξουμε την «ιδιότητα Cauchy» των πραγματικών αριθμών:

> $(**)$ Κάθε ακολουθία Cauchy πραγματικών αριθμών συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Σε αυτήν την παράγραφο θα δείξουμε ότι το αξίωμα της πληρότητας είναι λογική συνέπεια των $(*)$ και $(**)$. Αν δηλαδή δεχτούμε το $\mathbb{R}$ σαν ένα διατεταγμένο σώμα που έχει την Αρχιμήδεια ιδιότητα και την ιδιότητα Cauchy, τότε μπορούμε να αποδείξουμε το «αξίωμα της πληρότητας» σαν θεώρημα:

Θεώρημα 1.5.1. *Έστω $\mathbb{R}^*$ ένα διατεταγμένο σώμα που περιέχει το $\mathbb{Q}$ και έχει, επιπλέον, τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. *Αν $a \in \mathbb{R}^*$ και $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$, $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n\varepsilon > a$.*
2. *Κάθε ακολουθία Cauchy στοιχείων του $\mathbb{R}^*$ συγκλίνει σε στοιχείο του $\mathbb{R}^*$.*

Τότε, κάθε μη κενό και άνω φραγμένο $A \subset \mathbb{R}^*$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

Απόδειξη. Έστω A μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^*$.

Ξεκινάμε με τυχόν στοιχείο $a_0 \in A$ (υπάρχει αφού $A \neq \emptyset$). Έστω b άνω φράγμα του A. Από την Συνθήκη 1, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ για τον οποίο $a_0 + k > b$. Δηλαδή, υπάρχει φυσικός k με την ιδιότητα

$$\text{για κάθε } \ a \in A, \ \ a < a_0 + k. \tag{1.5.1}$$

Από την αρχή του ελαχίστου έπεται ότι υπάρχει ελάχιστος τέτοιος φυσικός. Ας τον πούμε k_1. Τότε,

- Για κάθε $a \in A$ ισχύει $a < a_0 + k_1$.
- Υπάρχει $a_1 \in A$ ώστε $a_0 + (k_1 - 1) \leq a_1$.

Επαγωγικά θα βρούμε $a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots$ στο A και $k_n \in \mathbb{N}$ που ικανοποιούν τα εξής:

- Για κάθε $a \in A$ ισχύει $a < a_{n-1} + \frac{k_n}{2^{n-1}}$.
- $a_{n-1} + \frac{k_n - 1}{2^{n-1}} \leq a_n$.

Απόδειξη του επαγωγικού βήματος: Έχουμε $a_n \in A$ και από την Συνθήκη 1 υπάρχει ελάχιστος φυσικός k_{n+1} με την ιδιότητα: για κάθε $a \in A$,

$$a < a_n + \frac{k_{n+1}}{2^n}. \tag{1.5.2}$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει a_{n+1} με

$$a_n + \frac{k_{n+1} - 1}{2^n} \leq a_{n+1}. \tag{1.5.3}$$

Ισχυρισμός 1: Η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy.
Πράγματι, έχουμε

$$a_{n-1} + \frac{k_n - 1}{2^{n-1}} \leq a_n < a_{n-1} + \frac{k_n}{2^{n-1}}, \tag{1.5.4}$$

άρα

$$|a_n - a_{n-1}| < \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{1.5.5}$$

Αν λοιπόν $n, m \in \mathbb{N}$ και $n < m$, τότε

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \\ &< \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-2}} + \cdots + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Αν τα n, m είναι αρκετά μεγάλα, αυτό γίνεται όσο θέλουμε μικρό. Πιο συγκεκριμένα, αν μας δώσουν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $1/2^{n_0 - 1} < \varepsilon$, οπότε για κάθε $n, m \geq n_0$ έχουμε $|a_m - a_n| < \varepsilon$. □

Αφού το $\mathbb{R}^*$ έχει την ιδιότητα Cauchy, υπάρχει ο $a^* = \lim a_n$.
Ισχυρισμός 2: Ο a^* είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A.
(α) Ο a^* είναι άνω φράγμα του A: ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $a \in A$ με $a > a^*$. Μπορούμε να βρούμε $\varepsilon > 0$ ώστε $a > a^* + \varepsilon$. Όμως,

$$a < a_{n-1} + \frac{k_n}{2^{n-1}} \leq a_n + \frac{1}{2^{n-1}} \tag{1.5.6}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\begin{aligned} & a^* + \varepsilon < a_n + \frac{1}{2^{n-1}} \\ \Longrightarrow\ & a^* + \varepsilon \leq \lim \left(a_n + \frac{1}{2^{n-1}} \right) \\ \Longrightarrow\ & a^* + \varepsilon \leq a^*, \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο.

(β) Αν a^{**} είναι άνω φράγμα του A, τότε $a^{**} \geq a^*$: έχουμε $a^{**} \geq a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$a^{**} \geq \lim a_n = a^*. \tag{1.5.7}$$

Από τα (α) και (β) είναι σαφές ότι $a^* = \sup A$. □