ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θεωρία Συνόλων

Ενότητα: Διατακτικοί αριθμοί

Γιάννης Μοσχοβάκης

Τμήμα Μαθηματικών

Σημειώματα

Σημειώμα ιστορικού εκδόσεων έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.1. Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη στο σύνδεσμο http://www.math.ucla.edu/ ynm/lectures/g.pdf

Σημείωμα αναφοράς

Σημείωμα αδειοδότησης

Διατήρηση σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

ΔΙΑΤΑΚΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Το Αξίωμα Αντικατάστασης βρίσκει τις σημαντικότερες εφαρμογές του στην όμορφη θεωρία Διατακτικών Αριθμών του von Neumann και στην κατασκευή της Συσσωρευτικής Ιεραρχίας των αγνών, εδραιωμένων συνόλων. Μπορεί κανείς να επιβιώσει χωρίς να γνωρίζει τους διατακτικούς αριθμούς, βεβαίως, αλλά όχι τόσο ευχάριστα: προσφέρουν πολλά, εν οις και αληθινούς πληθικούς αριθμούς που δίνουν πραγματικότητα και ουσία στην «εικονική» θεωρία ισοπληθικότητας στην οποία (αναγκαστικά) έχουμε περιοριστεί. Η Συσσωρευτική Ιεραρχία επεκτείνει την επανάληψη του τελεστή δυναμοσυνόλου με την οποία φτιάξαμε το V_ω «όσο πάει», και τελικά παριστάνει τα αγνά, εδραιωμένα σύνολα στην πιο επιτακτική, διαισθητική κατανόηση έννοιας συνόλου. Δεν είναι τόσο σίγουρο ότι μπορεί κανείς να ζήσει χωρίς να καταλάβει αυτή την εικόνα, οπωσδήποτε όχι ανάμεσα σε συνολοθεωρητικούς.

Ο Cantor περιγράφει την έννοια των «διατακτικών τύπων» μόλις μερικές σελίδες μετά τον ορισμό πληθαρίθμων που αποκόψαμε στο **4.19**, και με παρόμοιο τρόπο.

> Κάθε διατεταγμένο σύνολο U έχει καθορισμένο 'διατακτικό τύπο', [...] τον οποίο συμβολίζουμε $\overline{U}$. Με αυτό εννοούμε τη γενική έννοια που απορρέει από το U όταν αποσύρουμε από τα στοιχεία u μόνο την ιδιαίτερή τους φύση, και κρατήσουμε τη διάταξη ή το προβάδισμα μεταξύ τους. Έτσι ο διατακτικός τύπος $\overline{U}$ είναι και αυτός διατεταγμένο σύνολο, με στοιχεία μονάδες που έχουν αναμεταξύ τους το ίδιο προβάδισμα όπως και τα αντίστοιχα μέλη του U, από τα οποία έχουν δημιουργηθεί με αφαίρεση. ... Ένα απλό επιχείρημα πείθει ότι δύο διατεταγμένα σύνολα έχουν τον ίδιο διατακτικό τύπο τότε και μόνον αν είναι όμοια, έτσι ώστε οι δύο εξισώσεις $U =_o V$ και $\overline{U} = \overline{V}$ είναι ισοδύναμες.

Ο Cantor αναφέρεται σε γραμμικά διατεταγμένους χώρους, γενικά, αλλά εδώ θα θεωρήσουμε το ειδικότερο πρόβλημα ορισμού «διατακτικών τύπων» μόνο για καλά διατεταγμένους χώρους. Ισχυρίζεται ρητά την πρώτη χαρακτηριστική ιδιότητα

$$U =_o \overline{U} \tag{12-1}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\square \arrow[d] & \circ \arrow[d] & \circ \arrow[d] & \circ \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \blacksquare \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
\emptyset & \{\emptyset\} & \{\emptyset,\{\emptyset\}\} & \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\} & \cdots & \omega & \omega\cup\{\omega\}
\end{tikzcd}$$

Διαγραμμα **12.1**. Ο επιμορφισμός von Neumann του

$$U \ : \ 0_U, 1_U, 2_U, \ldots, \omega_U, S_U(\omega_U).$$

του τελεστή ανάθεσης διατακτικών αριθμών και επιχειρηματολογεί για τη συνεπαγωγή

$$U =_o V \Longrightarrow \overline{U} = \overline{V}. \tag{12-2}$$

Ο «απλός ισχυρισμός» που υπαινίσσεται ο Cantor για την (12-2) θα πρέπει να δικαιώνει επίσης την ισχυρότερη συνεπαγωγή

$$U \leq_o V \Longrightarrow \overline{U} \sqsubseteq \overline{V}\cdot \tag{12-3}$$

τουλάχιστον για καλά διατεταγμένους χώρους, όπου η θέση σημείου x στο χώρο εξαρτάται μόνο από τα σημεία που προηγούνται του x, έτσι ώστε η «μονάδα» $\overline{x}$ που δημιουργείται με αφαίρεση από το x και κωδικοποιεί αυτή τη θέση στο U, λογικά πρέπει επίσης να εξαρτάται μόνο από το αρχικό τμήμα $\mathbf{seg}_U(x)$. Έτσι το πρόβλημα της πιστής απεικόνισης στην αξιωματική συνολοθεωρία της έννοιας διατακτικών αριθμών του Cantor καταλήγει στο εξής: *μπορούμε να αντιστοιχίσουμε έναν καλά διατεταγμένο χώρο $\overline{U}$ σε κάθε καλά διατεταγμένο χώρο U, έτσι που να ισχύουν οι* (12-1) *και* (12-3). Η πρωτότυπη ιδέα του von Neumann είναι να ορίσουμε τον $\overline{U}$ αντικαθιστώντας *αναδρομικά* κάθε μέλος του U με το σύνολο των προηγούμενών του.

12.1. Διατακτικοί Αριθμοί (Ordinal Numbers). Ο **von Neumann επιμορφισμός** ενός καλά διατεταγμένου χώρου U είναι ο μοναδική διακόσμηση του αντίστοιχου εδραιωμένου γραφήματος $(\mathrm{Field}(U), >_U)$, έτσι ώστε από την (11-29),

$$\mathbf{v}_U(x) = \{\mathbf{v}_U(y) \mid y <_U x\}, \quad (x \in \mathrm{Field}(U)). \tag{12-4}$$

Ο **διατακτικός αριθμός** του U είναι η εικόνα

$$\mathrm{ord}(U) =_{\text{ορ}} \mathbf{v}_U[\mathrm{Field}(U)] \tag{12-5}$$

του U από τον von Neumann επιμορφισμό του, και

$$\mathrm{ON} = \{\alpha \mid (\exists \text{ καλά διατεταγμένος χώρος } U)[\alpha = \mathrm{ord}(U)]\} \tag{12-6}$$

είναι η κλάση των διατακτικών αριθμών. Ως συνήθως, γράφουμε ισοδύναμα,

$$\mathrm{ON}(\alpha) \iff \alpha \in \mathrm{ON}.$$

Για παράδειγμα, έστω

$$U \ : \ 0_U, 1_U, 2_U, \ldots, \omega_U, S_U(\omega_U)$$

καλά διατεταγμένος χώρος με ελάχιστο σημείο 0_U, επόμενο 1_U, ... , πρώτο οριακό σημείο ω_U, και αμέσως μετά το τελευταίο (μέγιστο) σημείο $S_U(\omega_U)$. Υπολογίζουμε τις τιμές του von Neumann επιμορφισμού με επανειλημμένες εφαρμογές της (12-5) (παραλείποντας τους δείκτες):

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(0_U) &= \{\mathbf{v}(x) \mid x < 0_U\} &&= \emptyset &&= 0,\\
\mathbf{v}(1_U) &= \{\mathbf{v}(x) \mid x < 1_U\} &&= \{\emptyset\} &&= 1,\\
\mathbf{v}(2_U) &= \{\mathbf{v}(x) \mid x < 2_U\} &&= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} &&= 2,\\
\mathbf{v}(3_U) &= \{\mathbf{v}(x) \mid x < 3_U\} &&= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} &&= 3,\\
&\vdots\\
\mathbf{v}(\omega_U) &= \{\mathbf{v}(x) \mid x < \omega_U\} &&= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots\} &&= \omega\\
\mathbf{v}(S_U(\omega_U)) &= \{\mathbf{v}(x) \mid x < S_U(\omega_U)\} &&= \omega \cup \{\omega\}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{v}[U] = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega \cup \{\omega\}\}.$$

Οι υπολογισμοί αυτοί είναι ειδικές περιπτώσεις των παρακάτω γενικών προτάσεων:

12.2. Άσκηση. *Αν 0_U είναι το ελάχιστο σημείο ενός καλά διατεταγμένου χώρου U, τότε $\mathbf{v}_U(0_U) = \emptyset$· και αν $S(x)$ είναι ο επόμενος του x στον U, τότε*

$$\mathbf{v}_U(S(x)) = \mathbf{v}_U(x) \cup \{\mathbf{v}_U(x)\}.$$

12.3. Άσκηση. *Αν το x είναι οριακό σημείο ενός καλά διατεταγμένου χώρου U, τότε $\emptyset \in \mathbf{v}_U(x)$ και*

$$\alpha \in \mathbf{v}_U(x) \Longrightarrow \alpha \cup \{\alpha\} \in \mathbf{v}_U(x).$$

12.4. Άσκηση. *Αν ω_U είναι το πρώτο οριακό σημειό σε έναν καλά διατεταγμένο χώρο U, τότε*

$$\omega = \mathbf{v}_U(\omega_U) = \bigcap\{X \mid \emptyset \in X \,\&\, (\forall \alpha \in X)[\alpha \cup \{\alpha\} \in X]\}, \tag{12-7}$$

και, ειδικότερα, το $\omega = \mathbf{v}_U(\omega_U)$ είναι ανεξάρτητο από το συγκεκριμένο καλά διατεταγμένο χώρο U που χρησιμοποιούμε για να το υπολογίσουμε.

Η άσκηση αυτή, διασαφηνίζει για το ω_U, κάτι που είναι προφανές για τα $0_U, 1_U, \dots$ στο Διάγραμμα **12.1**· η τιμή $\mathbf{v}_U(x)$ είναι ανεξάρτητη από το σημείο $x \in U$ και εξαρτάται μόνο από τη θέση του x στο U, αν είναι το πρώτο σημείο, το πέμπτο, το πρώτο οριακό σημείο κ.λπ. Η γενική αλήθεια αυτής της ιδιότητας του $\mathbf{v}$ εκφράζεται ως εξής.

12.5. Λήμμα (Πρώτη Ιδιότητα Διατακτικών Αριθμών). *Για κάθε αρχική ομοιότητα $\pi : U \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \pi[U] \sqsubseteq V$ από έναν καλά διατεταγμένο χώρο U σε κάποιον άλλο V, το Διάγραμμα* **12** *είναι αντιμεταθετικό, δηλαδή*

$$\mathbf{v}_V(\pi(x)) = \mathbf{v}_U(x) \quad (x \in U). \tag{12-8}$$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "\pi"] \arrow[d, "\mathbf{v}_U"'] & & V \arrow[d, "\mathbf{v}_V"] \\
\mathrm{ord}(U) \arrow[rr, "id(x) = x"] & & \mathrm{ord}(V)
\end{tikzcd}$$

Διαγραμμα **12.2**. Ο επιμορφισμός von Neumann και αρχικές ομοιότητες.

Αποδειξη. Προς άτοπο, έστω x ελάχιστο στο U τέτοιο που $\mathbf{v}_V(\pi(x)) \neq \mathbf{v}_U(x)$. Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_V(\pi(x)) &= \{\mathbf{v}_V(y) \mid y <_V \pi(x)\} && \text{εξ ορισμού,} \\
&= \{\mathbf{v}_V(\pi(t)) \mid t <_U x\} && \text{επειδή η } \pi \text{ είναι αρχική,} \\
&= \{\mathbf{v}_U(t) \mid t <_U x\} && \text{από την επιλογή του } x, \\
&= \mathbf{v}_U(x),
\end{aligned}$$

που αντιτίθεται στην επιλογή του x. Το κλειδί της απόδειξης είναι το δεύτερο βήμα, όπου χρησιοποιούμε το γεγονός ότι η εικόνα μιας αρχικής ιδιότητας «δεν έχει τρύπες», έτσι που κάθε $y <_V \pi(x)$ είναι ένα $\pi(t)$ για κάποιο $t <_U x$. ⊣

12.6. Άσκηση. *Αν οι U και V είναι καλά διατεταγμένοι χώροι, τότε*

$$U \leq_o V \Longrightarrow \mathrm{ord}(U) \subseteq \mathrm{ord}(V).$$

Έπεται ότι αν $U =_o V$, τότε $\mathrm{ord}(U) = \mathrm{ord}(V)$.

12.7. Λήμμα (Δεύτερη Ιδιότητα Διατακτικών Αριθμών). *Για κάθε καλά διατεταγμένο χώρο U και κάθε $y \in U$,*

$$\mathbf{v}_U(x) = \mathrm{ord}(\mathbf{seg}_U(x)). \tag{12-9}$$

Έπεται ότι κάθε von Neumann τιμή $\mathbf{v}_U(x)$ είναι διατακτικός αριθμός, και αντιστρόφως, κάθε διατακτικός αριθμός α είναι η von Neumann τιμή $\mathbf{v}_U(x)$ κάποιου σημείου, σε κάποιο καλά διατεταγμένο χώρο.

Απλούστερα: κάθε μέλος διατακτικού αριθμού είναι διατακτικός αριθμός και κάθε διατακτικός αριθμός είναι μέλος διατακτικού αριθμού.

Αποδειξη. Εφαρμόζοντας το Λήμμα **12.5** με $\mathbf{seg}_U(x)$ για U, U για V και την ταυτοτική αρχική ομοιότητα $\pi : \mathbf{seg}_U(x) \rightarrowtail U$, συνάγουμε ότι

$$\mathbf{v}_{\mathbf{seg}_U(x)}(y) = \mathbf{v}_{\mathbf{seg}_U(x)}(\pi(y)) = \mathbf{v}_U(y) \qquad (y <_U x),$$

έτσι που, τελικά

$$\mathbf{v}_U(x) = \{\mathbf{v}_U(y) \mid y <_U x\} = \{\mathbf{v}_{\mathbf{seg}_U(x)}(y) \mid y <_U x\} = \mathrm{ord}(\mathbf{seg}_U(x)).$$

Για τον δεύτερο ισχυρισμό, ας είναι $V = \mathrm{Succ}(U)$ ο επόμενος καλά διατεταγμένος χώρος του U, με ένα νέο t στην κορυφή, όπως στο **7.16**: τώρα $U = \mathbf{seg}_V(t)$, έτσι που $\mathrm{ord}(U) = \mathbf{v}_V(t)$. ⊣

Έτσι οι διατακτικοί αριθμοί απεικονίζουν εξίσου μήκη καλά διατεταγμένων χώρων αλλά και θέσεις σημείων σε κάποιο καλά διατεταγμένο χώρο. Η δεύτερη ερμηνεία συμφωνεί καλύτερα με τη χρήση διατακτικών αριθμών στην καθημερινή γλώσσα, όπου «πρώτος», «δεύτερος», ... τυπικά καθορίζουν τη θέση κάποιου αντικειμένου σε μια σειρά.

12.8. Άσκηση (Οι πεπερασμένοι von Neumann διατακτικοί αριθμοί). *Αν $\leq_{\mathbb{N}}$ είναι η συνηθισμένη διάταξη των φυσικών $\mathbb{N}$, τότε*

$$\mathrm{ord}(\mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}}) = \omega,$$

όπως το ω ορίστηκε στο (12-7). *Επιπλέον, αν θέσουμε*

$$S_\omega(n) = n \cup \{n\} \quad (n \in \omega),$$

τότε το $(\omega, \emptyset, S_\omega)$ είναι σύστημα Peano, και ο $\mathbf{v}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \omega$ είναι ο μοναδικός (από το Θεώρημα **5.4**) *ισομορφισμός των φυσικών αριθμών με το ω.*

Συνηθίζεται στην προχωρημένη συνολοθεωρία να θεωρούμε το $(\omega, \emptyset, S)$ ως *το* σύστημα Peano που σταθεροποιήσαμε στο **5.9**, δηλαδή να ταυτίζουμε το $\mathbb{N}$ με το ω. Αυτό διευκολύνει ορισμένα πράγματα, αλλά δεν είναι ούτε απαραίτητο, ούτε ιδιαίτερα φυσιολογικό—δύσκολα βρίσκουμε πειστικά επιχειρήματα ότι το $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ είναι καλύτερη αναπαράσταση του αριθμού 2, από αυτήν του Zermelo, $\{\{\emptyset\}\}$ που είδαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος **5.3**, ή αλλιώς το τρίτο μέλος οποιουδήποτε συστήματος Peano.

Ακολουθεί το βασικό αποτέλεσμα για τους διατακτικούς αριθμούς.

12.9. Λήμμα (Τρίτη Ιδιότητα Διατακτικών Αριθμών). *Κάθε διατακτικός αριθμός α είναι καλά διατεταγμένος από τη σχέση*

$$u \leq_\alpha v \iff_{\text{ορ}} u = v \vee u \in v \quad (u, v \in \alpha)\cdot \tag{12-10}$$

και αν $\alpha = \mathrm{ord}(U)$ για κάποιο χώρο U, τότε ο von Neumann επιμορφισμός $\mathbf{v}_U : U \twoheadrightarrow \alpha$ είναι ομοιότητα.

Έπεται ότι κάθε καλά διατεταγμένος χώρος είναι όμοιος με κάποιον διατακτικό αριθμό, και κάθε καλά διατάξιμο σύνολο είναι ισοπληθικό με κάποιον διατακτικό.

Απόδειξη. Αρχικά, από το Λήμμα **11.36**, κάθε $\alpha = \mathbf{v}_U[U]$ είναι μεταβατικό, αγνό και εδραιωμένο σύνολο, και (γράφοντας $\mathbf{v}$ αντί για $\mathbf{v}_U$),

$$x <_U y \Longrightarrow \mathbf{v}(x) \in \mathbf{v}(y). \tag{12-11}$$

Επιπλέον,

$$x \neq y \Longrightarrow \mathbf{v}(x) \neq \mathbf{v}(y), \quad (x, y \in U)\cdot$$

επειδή αν $x \neq y$, τότε είτε $x <_U y$ είτε $y <_U$, έτσι που από τη (12-11), είτε $\mathbf{v}(x) \in \mathbf{v}(y)$ είτε $\mathbf{v}(y) \in \mathbf{v}(x)\cdot$ και σε κάθε περίπτωση, δεν μπορεί να ισχύει η $\mathbf{v}(x) = \mathbf{v}(y)$ εφόσον το α είναι εδραιωμένο σύνολο. Έτσι η $\mathbf{v} : U \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \alpha$ είναι μονομορφισμός, άρα αντιστοιχία, και η σχέση $\leq_\alpha$ είναι η εικόνα της $\leq_U$ από τη $\mathbf{v}$, δηλαδή,

$$x \leq_U y \iff \mathbf{v}(x) \leq_\alpha \mathbf{v}(y) \quad (x, y \in U)\cdot$$

έπεται ότι η $\leq_\alpha$ είναι καλή διάταξη του α και η $\mathbf{v}$ είναι ομοιότητα.

Ο τελευταίος ισχυρισμός ισχύει επειδή οι ομοιότητες είναι αντιστοιχίες. ⊣

Το αξιοσημείωτο αυτό αποτέλεσμα βεβαιώνει ότι υπάρχουν αρκετά μακριές $\in$-αλυσίδες ώστε να μας δίνουν αντίγραφα κάθε καλής διάταξης, και είναι χαρακτηριστικό επακόλουθο του Αξιώματος Αντικατάστασης. Όπως πάντα με δομημένα σύνολα, «ο διατακτικός αριθμός α» θα είναι διφορούμενα το σύνολο α ή ο διατεταγμένος χώρος $(\alpha, \leq_\alpha)$, έτσι που, για παράδειγμα, το Λήμμα **12.9** εκφράζεται απλά από την

$$U =_o \mathrm{ord}(U).$$

12.10. Άσκηση. *Για κάθε διατακτικό αριθμό α, $\mathrm{ord}(\alpha) = \alpha$.*

12.11. Πόρισμα (Χαρακτηρισμός των διατακτικών). *Το σύνολο α είναι διατακτικός αριθμός αν και μόνον αν είναι μεταβατικό, αγνό, εδραιωμένο και $\in$-συνεκτικό, δηλαδή,*

$$x = y \vee x \in y \vee y \in x \qquad (x, y \in \alpha).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κάθε διατακτικός έχει αυτές τις ιδιότητες, από τα Λήμματα **11.36** και **12.9**. Για το αντίστροφο, δεχόμαστε ότι το A είναι μεταβατικό, αγνό, εδραιωμένο και $\in$-συνεκτικό και θέτουμε (σαν να είναι το A διατακτικός)

$$x \leq_A y \iff x = y \vee x \in y, \quad (x, y \in A).$$

Η σχέση αυτή είναι (εύκολα) καλή διάταξη του A· έστω $\mathbf{v}_A : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathrm{ord}(A, \leq_A)$ η αντίστοιχη απεικόνιση von Neumann. Ισχυριζόμαστε ότι η $\mathbf{v}_A$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση: αν όχι και x είναι το $\leq_A$-ελάχιστο τέτοιο που $\mathbf{v}_A(x) \neq x$, τότε

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_A(x) &= \{\mathbf{v}(y) \mid y <_A x\} \\
&= \{y \mid y <_A x\} && (\text{από την επιλογή του } x) \\
&= \{y \mid y \in x\} && (\text{από τον ορισμό της } \leq_A) \\
&= x && (\text{επειδή το } x \text{ δεν περιέχει άτομα}),
\end{aligned}$$

που αντιτίθεται στην επιλογή του x. Έπεται ότι $\mathrm{ord}(A, \leq_A) = \mathbf{v}_A[A] = A$, και το A είναι διατακτικός. ⊣

Ο χαρακτηρισμός αυτός των διατακτικών αριθμών είναι ιδιαίτερα απλός αν δεχτούμε ότι όλα τα σύνολα είναι εδραιωμένα και αγνά, τα επιπρόσθετα αξιώματα της **ZFC**: *ένα σύνολο είναι διατακτικός ακριβώς αν και μόνον αν είναι μεταβατικό και $\in$-συνεκτικό.*

Οι τρεις βασικές ιδιότητες των διατακτικών αριθμών δίνουν επίσης ικανοποιητική λύση στο πρόβλημα της πιστής απεικόνισης των διατακτικών τύπων καλά διατεταγμένων χώρων του Cantor, όπως το περιγράφαμε στις (12-1) – (12-3).

12.12. Θεώρημα. *Ο οριστικός τελεστής* $U \mapsto \mathrm{ord}(U)$ *στους καλά διατεταγμένους χώρους ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:*

$$U =_o \mathrm{ord}(U), \tag{12-12}$$

$$U \leq_o V \Longrightarrow \mathrm{ord}(U) \sqsubseteq \mathrm{ord}(V), \tag{12-13}$$

$$\mathrm{ON}(\alpha) \Longrightarrow \alpha = \{\beta \in \mathrm{ON} \mid \beta <_o \alpha\}. \tag{12-14}$$

Απόδειξη. Η πρώτη ιδιότητα (12-12) είναι επανάληψη του Λήμματος **12.9**.

Για να δείξουμε τη (12-13), έστω $\pi : U \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \pi[U] \sqsubseteq V$ αρχική ομοιότητα. Από το Λήμμα **12.7**, παίρνοντας τις εικόνες,

$$\mathbf{v}_V[\pi[U]] = \mathbf{v}_U[U] = \mathrm{ord}(U)\cdot$$

αλλά η $\mathbf{v}_V$ είναι ομοιότητα του V με τον $\mathrm{ord}(V)$ και μεταφέρει αρχικά τμήματα σε αρχικά τμήματα, άρα

$$\mathrm{ord}(U) = \mathbf{v}_U[U] = \mathbf{v}_V[\pi[U]] \sqsubseteq \mathrm{ord}(V).$$

Τελικά, για τη (12-14), αν $\alpha = \mathrm{ord}(U)$, τότε:

$$\begin{aligned} \alpha &= \{\mathbf{v}_U(y) \mid y \in U\} \\ &= \{\mathrm{ord}(\mathbf{seg}_U(y)) \mid y \in U\} \quad (\text{από το Λήμμα } \mathbf{12.7}) \\ &= \{\beta \in \mathrm{ON} \mid \beta <_o \alpha\}, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία εξίσωση ισχύει επειδή οι καλά διατεταγμένοι χώροι που είναι $<_o U$ είναι ακριβώς αυτοί που είναι όμοιοι με μη τετριμμένα, αρχικά τμήματα του U. ⊣

12.13. Άσκηση. *Αν οι* U *και* V *καλά διατεταγμένοι χώροι, τότε*

$$U =_o V \iff \mathrm{ord}(U) = \mathrm{ord}(V),$$

και έτσι για κάθε καλά διατεταγμένο χώρο U*, υπάρχει μοναδικός διατακτικός αριθμός* α *τέτοιος που* $U =_o \alpha$*.*

Οι συνθήκες (12-12) και (12-13) είναι ακριβώς οι (12-1) και (12-3) του Cantor. Η πιο σημαντική, τελευταία συνθήκη (12-14) είναι χαρακτηριστική του διατακτικού τελεστή του von Neumann και έχει ως επακόλουθο τη μοναδικότητά του, Πρόβλημα **x12.4**. Είναι ενδιαφέρον αυτό το αποτέλεσμα· παραλείπουμε την απόδειξη μόνο επειδή είναι ωραίο πρόβλημα και δεν θα το χρειαστούμε για περαιτέρω αποτελέσματα. Είναι όμως εύκολο να χαθεί κανείς στην απόδειξη πληθώρας ιδιοτήτων των διατακτικών αριθμών, μερικές απ' αυτές χρήσιμες άλλες απλώς περίπλοκες, και οι αποδείξεις κατευθείαν από τον ορισμό τείνουν προς το μυστηριώδες: δεν είναι τελείως φυσικό να θεωρούμε τη σχέση $\in$ ως διάταξη. Μια καλή τακτική, τουλάχιστον στην αρχή, είναι να στηρίζουμε τις αποδείξεις ιδιοτήτων των διατακτικών αριθμών στις τρεις χαρακτηριστικές τους ιδιότητες.

12.14. Λήμμα (Σύγκριση διατακτικών). *Για όλους τους διατακτικούς αριθμούς* α, β,

$$\alpha \leq_o \beta \iff \alpha = \beta \vee \alpha \in \beta \iff \alpha \sqsubseteq \beta \iff \alpha \subseteq \beta.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Δείχνουμε με τη σειρά, κυκλικά, τις αντίστοιχες, αυστηρές συνεπαγωγές.

(1) $\alpha <_o \beta \Longrightarrow \alpha \in \beta$ προκύπτει αμέσως από τις (12-12) και (12-14), αφού η υπόθεση σημαίνει ότι $\alpha = \mathrm{ord}(U)$ και $\beta = \mathrm{ord}(V)$ με $U <_o V$.

Το (2) $\alpha \in \beta \Longrightarrow \alpha \subsetneqq \beta$ και το (3) $\alpha \subsetneqq \beta \Longrightarrow \alpha \subsetneq \beta$ έπονται εξίσου εύκολα από τις (12-12) και (12-14) και θα παραλείψουμε τις λεπτομέρειες.

(4) $\alpha \subsetneq \beta \Longrightarrow \alpha <_o \beta$. Η υπόθεση μας δίνει κάποιο μονομορφισμό από το α στο β (τον ταυτοτικό!), έτσι που $\alpha \leq_o \beta$ από το Πόρισμα **7.32**· όμως από το $\alpha =_o \beta$, σύμφωνα με την Άσκηση **12.6** παίρνουμε $\alpha = \beta$ που αντιτίθεται στην αυστηρή συμπερίληψη $\alpha \subsetneq \beta$ που υποθέσαμε, και έτσι $\alpha <_o \beta$. ⊣

Συνηθίζεται να χρησιμοποιούμε για τη διάταξη των διατακτικών αριθμών τον απλούστατο συμβολισμό

$$\alpha \leq \beta \iff_{\text{oρ}} \alpha \leq_o \beta \quad (\alpha, \beta \in \mathrm{ON}), \tag{12-15}$$

χωρίς βέβαια να ξεχνάμε τους ισοδύναμούς του χαρακτηρισμούς στο Λήμμα (12.14). Οι βασικές ιδιότητες αυτής της συνθήκης είναι (τώρα) εύκολες.

12.15. Θεώρημα (Η διάταξη του ON). (1) *Η κλάση ON των διατακτικών αριθμών είναι καλά διατεταγμένη από τη συνθήκη $\alpha \leq \beta$, με την εξής αυστηρή έννοια:*

$$\alpha \leq \alpha, \quad \alpha \leq \beta \,\&\, \beta \leq \gamma \Longrightarrow \alpha \leq \gamma, \quad \alpha \leq \beta \,\&\, \beta \leq \alpha \Longrightarrow \alpha = \beta,$$
$$\alpha < \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta < \alpha,$$

και για κάθε οριστική συνθήκη P,

$$(\exists \alpha \in \mathrm{ON})P(\alpha) \Longrightarrow (\exists \alpha \in \mathrm{ON})[P(\alpha) \,\&\, (\forall \beta < \alpha)\neg P(\beta)].$$

Ειδικότερα, δεν υπάρχει άπειρη, φθίνουσα αλυσίδα διατακτικών αριθμών,

$$\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \Longrightarrow (\exists n)[\alpha_n = \alpha_{n+1}]. \tag{12-16}$$

Όταν ισχύει η $P(\alpha)$ για κάποιο α, θέτουμε

$$(\mu\alpha \in \mathrm{ON})P(\alpha) = \min\{\alpha \in \mathrm{ON} \mid P(\alpha)\}. \tag{12-17}$$

(2) *Για κάθε διατακτικό αριθμό, υπάρχει ο επόμενος*

$$S(\alpha) =_{\text{oρ}} (\mu\beta \in \mathrm{ON})[\alpha < \beta] = \alpha \cup \{\alpha\}. \tag{12-18}$$

(3) *Κάθε σύνολο διατακτικών αριθμών A έχει ελάχιστο άνω φράγμα,*

$$\sup A =_{\text{oρ}} (\mu\beta \in \mathrm{ON})(\forall \alpha \in A)[\alpha \leq \beta] = \bigcup A, \tag{12-19}$$

που είναι το μέγιστο του A (αν το A έχει μέγιστο) και το 0 αν $A = \emptyset$.

Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ αφήνεται για τα προβλήματα, **x12.1** – **x12.3**. ⊣

12.16. Άσκηση. *Για κάθε μη κενό σύνολο διατακτικών αριθμών $\mathcal{E}$,*

$$(\mu\alpha \in \mathrm{ON})[\alpha \in \mathcal{E}] = \bigcap \mathcal{E}.$$

Οι **επόμενοι διατακτικοί αριθμοί** (successor ordinals) είναι αυτοί της μορφής $S(\alpha)$, και οι **οριακοί διατακτικοί αριθμοί** (limit ordinals) είναι αυτοί που δεν είναι ούτε επόμενοι ούτε το 0, έτσι που $\alpha < \lambda \Longrightarrow S(\alpha) < \lambda$· οι οριακοί διατακτικοί προφανώς χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα

$$\mathrm{Limit}(\lambda) \iff \lambda \neq 0 \,\&\, \lambda = \sup\{\alpha \mid \alpha < \lambda\}. \tag{12-20}$$

Επίσης μπορούμε να αποδείξουμε ιδιότητες των διατακτικών αριθμών με *υπερπεπερασμένη επαγωγή* και να ορίσουμε τελεστές σ' αυτούς με *υπερπεπερασμένη αναδρομή*, ως εξής.

12.17. Θεώρημα (Διατακτική επαγωγή). *Για κάθε μονομελή οριστική συνθήκη P,*

$$(\forall\alpha)[(\forall\xi < \alpha)P(\xi) \Longrightarrow P(\alpha)] \implies (\forall\alpha)P(\alpha).$$

Απόδειξη. Προς άτοπο, έστω α ο ελάχιστος διατακτικός τέτοιος που $\neg P(\alpha)$· έπεται ότι η $P(\xi)$ ισχύει για κάθε $\xi < \alpha$, και επομένως και η $P(\alpha)$ ισχύει από την υπόθεση, που είναι άτοπο. ⊣

12.18. Θεώρημα (Διατακτική αναδρομή). *Για κάθε διμελή οριστικό τελεστή H, υπάρχει μονομελής οριστικός τελεστής F, που ικανοποιεί την εξίσωση*

$$F(\alpha) = H(F{\restriction}\alpha, \alpha) \quad (\alpha \in \mathrm{ON}). \tag{12-21}$$

Εδώ η $F{\restriction}\alpha$ είναι η συνάρτηση $\{(\xi, F(\xi)) \mid \xi \in \alpha\}$, ο περιορισμός της $F(\xi)$ στο $\alpha = \{\xi \mid \xi < \alpha\}$.

Όμοια, με παραμέτρους, για δοσμένο $H(w, \alpha, x)$, υπάρχει $F(\alpha, x)$ έτσι ώστε για κάθε διατακτικό α και κάθε x,

$$F(\alpha, x) = H(\{(\xi, F(\xi, x)) \mid \xi < \alpha\}, \alpha, x) \quad (\alpha \in \mathrm{ON}).$$

Απόδειξη της απλής εκδοχής, χωρίς παραμέτρους.

Για κάθε β, από το Πόρισμα **11.6** στον καλά διατεταγμένο χώρο $(\beta, \leq_\beta)$, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f_\beta : \beta \twoheadrightarrow E_\beta$ που ικανοποιεί την εξίσωση

$$\begin{aligned} f_\beta(\alpha) &= H(f_\beta{\restriction}\{x \in \beta \mid x <_\beta \alpha\}, \alpha) \quad (\alpha < \beta), \\ &= H(f_\beta{\restriction}\alpha, \alpha), \end{aligned} \tag{12-22}$$

επειδή η $<_\beta$ είναι ο περιορισμός της $\in$ στο β και τα μέλη του β είναι διατακτικοί αριθμοί. Υποστηρίζουμε ότι:

$$\text{αν } \alpha < \beta \text{ και } \alpha < \gamma, \text{ τότε } f_\beta(\alpha) = f_\gamma(\alpha)\cdot$$

αν όχι, τότε υπάρχει ελάχιστο α για το οποίο αυτό δεν ισχύει για κάποια β και γ και τότε η (12-22) οδηγεί αμέσως σε άτοπο. Αν λοιπόν θέσουμε

$$F(\alpha) = f_{S(\alpha)}(\alpha),$$

τότε $F(\alpha) = f_\beta(\alpha)$ για κάθε $\beta > \alpha$ και η (12-22) συνεπάγεται την ταυτότητα που θέλουμε για τον F.

Η απόδειξη για την έκδοση με παραμέτρους παρουσιάζει μονό τεχνικές δυσκολίες στους συμβολισμούς. ⊣

Με αυτό το θεώρημα μπορούμε να ορίσουμε αριθμητικές πράξεις στο ON και να μελετήσουμε τη δομή τους. Θα αφήσουμε τα περισσότερα απ' αυτά για προβλήματα, αλλά αξίζει να διατυπώσουμε εδώ δύο βασικούς ορισμούς αυτού του είδους, ως παραδείγματα εφαρμογής του Θεωρήματος **12.18** και για να έχουμε στη διάθεσή μας ονόματα των απλούστερων διατακτικών αριθμών.

12.19. Θεώρημα (Διατακτική πρόσθεση και πολλαπλασιασμός). *Υπάρχουν διμελείς, οριστικοί τελεστές $\alpha+\beta$ και $\alpha\cdot\beta$ στους διατακτικούς αριθμούς με τις εξής ιδιότητες:*

$$\begin{aligned} \alpha + 0 &= \alpha, \\ \alpha + S(\beta) &= S(\alpha+\beta), \\ \alpha + \lambda &= \sup\{\alpha+\beta \mid \beta < \lambda\}, \text{ αν } \mathrm{Limit}(\lambda). \end{aligned} \tag{12-23}$$

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 0 &= 0, \\ \alpha \cdot S(\beta) &= (\alpha\cdot\beta)+\alpha, \\ \alpha \cdot \lambda &= \sup\{\alpha\cdot\beta \mid \beta < \lambda\}, \text{ αν } \mathrm{Limit}(\lambda). \end{aligned} \tag{12-24}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θέτουμε $\alpha+\beta = F(\beta,\alpha)$, όπου ο $F(\beta,\alpha)$ ορίζεται με την ακόλουθη αναδρομή στο $\beta \in \mathrm{ON}$, με παράμετρο το α:

$$F(\beta,\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \beta = 0, \\ S(F(\gamma,\alpha)), & \text{αν } \beta = S(\gamma), \text{ για κάποιο } \gamma, \\ \sup\{F(\xi,\alpha) \mid \xi < \beta\}, & \text{αν } \mathrm{Limit}(\beta). \end{cases}$$

Αφήνουμε τον πολλαπλασιασμό για το Πρόβλημα **x12.6**. ⊣

Έχουμε ήδη αναφερθεί στον ω στη (12-7), και αποδείξαμε στην Άσκηση **12.8** ότι $\omega = \mathrm{ord}(\mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}})$. Οι διατακτικοί αριθμοί που τον ακολουθούν αμέσως είναι προφανώς οι

$$\omega+1 = S(\omega),\ \omega+2 = S(\omega+1),\ \omega+3 = S(\omega+2), \dots$$

και αμέσως μετά απ' αυτούς έρχεται ο

$$\omega+\omega = \sup\{\omega+n \mid n \in \omega\} = \omega\cdot 2. \tag{12-25}$$

Αυτός είναι ο δεύτερος οριακός διατακτικός, ο πρώτος μετά τον ω. Κάθε $\omega\cdot n$ κατασκευάζεται αθροίζοντας τον ω με τον εαυτό του n φορές, κατευθείαν από τον ορισμό. Αμέσως μετά έρχεται ο

$$\omega^2 = \sup\{\omega\cdot n \mid n < \omega\},$$

μετά από λίγο ο $\omega^3 = \omega^2\cdot\omega$, κ.λπ.

Πολλές από τις ιδιότητες της διατακτικής πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού έπονται από τις ιδιότητες των τελεστών αυτών σε (καλά διατεταγμένους) χώρους, όπως ορίστηκαν στα **7.37** και **7.38**, χρησιμοποιώντας τις επόμενες τρεις ασκήσεις.

12.20. Άσκηση. *Για κάθε διατακτικό α,*

$$\alpha+1 = \mathrm{ord}(\mathrm{Succ}(\alpha)),$$

από τον ορισμό του επόμενου μερικά διατεταγμένου χώρου $\mathrm{Succ}(P)$ *στο* **7.16**.

12.21. Άσκηση. *Για όλους τους διατακτικούς α, β,*

$$\alpha + \beta = \mathrm{ord}(\alpha +_o \beta),$$

από τον ορισμό της πρόσθεσης μερικά διατεταγμένων χώρων στο **7.37**. *Έπεται ότι η πρόσθεση διατακτικών είναι προσεταιριστική αλλά όχι μεταθετική.*

$$\beta < \gamma \Longrightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma. \tag{12-26}$$

12.22. Άσκηση. *Για όλους τους διατακτικούς α, β,*

$$\alpha \cdot \beta = \mathrm{ord}(\alpha \cdot_o \beta),$$

με τον πολλαπλασιασμό μερικά διατεταγμένων χώρων που ορίστηκε στο **7.38**. *Έπεται ότι ο πολλαπλασιασμός των διατακτικών είναι προσεταιριστικός αλλά όχι μεταθετικός, και ότι*

$$0 < \alpha \,\&\, \beta < \gamma \Longrightarrow \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma. \tag{12-27}$$

Από την άλλη μεριά, μερικές από τις ιδιότητες της διατακτικής αριθμητικής αποδεικνύονται ευκολότερα με διατακτική επαγωγή, κατευθείαν από τους αναδρομικούς τους ορισμούς:

12.23. Άσκηση (Επιμεριστική ιδιότητα προς τα δεξιά). *Για όλους τους διατακτικούς α, β, γ,*

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.$$

Αφήνουμε για προβλήματα μερικές επιπρόσθετες ιδιότητες της πρόσθεσης διατακτικών, που αποδεικνύονται με παρόμοιους τρόπους. Πρόσεξε ότι πέρα από τη μεταθετικότητα, πολλές ακόμη ιδιότητες της συνηθισμένης αριθμητικής δεν ισχύουν για τους διατακτικούς, όπως για παράδειγμα η επιμεριστική ιδιότητα από δεξιά, Πρόβλημα **x12.13**.

12.24. Όρια ακολουθιών διατακτικών. Για κάθε μονοτονική ακολουθία διατακτικών αριθμών $\alpha_0 \le \alpha_1 \le \cdots$, θέτουμε

$$\lim_n \alpha_n = \sup\{\alpha_n \mid n = 0, 1, \dots\}.$$

Ο συμβολισμός είναι χρήσιμος, όμως πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί μιας και αυτά τα όρια δεν ικανοποιούν τα συνηθισμένα θεωρήματα του απειροστικού λογισμού, βλ. Πρόβλημα **x12.9**.

Μια από τις πιο σημαντικές εφαρμογές των διατακτικών αριθμών είναι η επόμενη, κομψή λύση που έδωσε ο von Neumann στο πρόβλημα *ανάθεσης πληθαρίθμων* **4.20**, για καλά διατάξιμα σύνολα. Η λύση βασίζεται στο ότι κάθε καλά διατάξιμο σύνολο είναι ισοπληθικό με κάποιον διατακτικό αριθμό, Λήμμα **12.9**.

12.25. Ορισμός (Πληθάριθμοι von Neumann). Θέτουμε

$$|A| = \begin{cases} (\mu\xi \in \mathrm{ON})[A =_c \xi], & \text{αν το } A \text{ είναι καλά διατάξιμο,} \\ A, & \text{αλλιώς,} \end{cases} \tag{12-28}$$

και από δώ και πέρα θεωρούμε ότι ο τελεστής ανάθεσης πληθαρίθμου που σταθεροποιήσαμε στο **4.21** του Κεφαλαίου **3** είναι αυτός. Οι τιμές του $|A|$ για καλά διατάξιμα A είναι οι **πληθάριθμοι του von Neumann**,

$$\mathrm{Card}_v(\kappa) \iff \text{για κάποιο καλά διατάξιμο } A, \kappa = |A|, \tag{12-29}$$

και εύκολα χαρακτηρίζονται ως **αρχικοί διατακτικοί αριθμοί**:

12.26. Άσκηση. $\mathrm{Card}_v(\kappa) \iff \mathrm{ON}(\kappa)\,\&\,(\forall\alpha < \kappa)[\kappa \neq_c \alpha]$, *και για κάθε* $\kappa \in \mathrm{Card}_v$, $|\kappa| = \kappa$.

Από το Λήμμα **9.11**,

$$\mathrm{Card}_v(\kappa) \Longrightarrow \mathrm{Card}_v(\kappa^+),$$

και από τα Λήμματα **9.18** και **9.20**, αν το $\mathcal{E}$ είναι μη κενό σύνολο πληθαρίθμων, τότε

$$(\forall\kappa \in \mathcal{E})\mathrm{Card}_v(\kappa) \Longrightarrow \mathrm{Card}_v(\inf_c(\mathcal{E})) \text{ και } \mathrm{Card}_v(\sup_c(\mathcal{E}))\cdot$$

για την ακρίβεια, αμέσως από τη (12-19) και το **12.16**, αν το $\mathcal{E}$ είναι μη κενό σύνολο πληθαρίθμων von Neumann, τότε

$$\inf_c(\mathcal{E}) = \min(\mathcal{E}) = \bigcap\mathcal{E}, \quad \sup_c(\mathcal{E}) = \sup\mathcal{E} = \bigcup\mathcal{E}.$$

Η κατασκευή του von Neumann μας δίνει έναν ισχυρό τελεστή πληθικότητας (βλ. **4.21**) στην κλάση των καλά διατάξιμων συνόλων:

12.27. Άσκηση. *Αν τα A και B είναι καλά διατάξιμα, τότε*

$$A =_c |A|, \text{ και } A =_c B \iff |A| = |B|. \tag{12-30}$$

Επιπλέον, για κάθε σύνολο $\mathcal{E}$ από σύνολα, η κλάση $\{|X| \mid X \in \mathcal{E}\}$ είναι σύνολο.

Η πιό χρήσιμη ιδιότητα των πληθαρίθμων von Neumann είναι η απλούστατη:

$$\text{αν } \kappa, \lambda \in \mathrm{Card}_v, \text{ τότε } \kappa =_c \lambda \iff \kappa = \lambda\cdot$$

αυτό έπεται αμέσως από τις τελευταίες δύο ασκήσεις και μετατρέπει όλες τις ισοπληθικότητες πληθαρίθμων von Neumann σε εξισώσεις της πληθικής αριθμητικής. Επιτέλους, για καλά διατάξιμους πληθάριθμους, μπορούμε να γράφουμε

$$\kappa\cdot(\lambda+\mu) = \kappa\cdot\lambda + \kappa\cdot\mu, \quad \left(\kappa^\lambda\right)^\mu = \kappa^{\lambda\cdot\mu},$$

κ.λπ., χωρίς τον ενοχλητικό δείκτη $_c$.

12.28. Πληθάριθμοι, Επιλογή και Αντικατάσταση. Μπορεί κανείς να υποστηρίξει με κάποια σοβαροφάνεια ότι οι *μονάδες* του Cantor στη διαισθητική περιγραφή των πληθαρίθμων που αποσπάσαμε στο **4.19** απεικονίζονται πιστά από τους διατακτικούς αριθμούς του von Neumann, και η περικοπή

> ο $\overline{\overline{A}}$ αναπτύσσεται (ας το πούμε έτσι) από το A, με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε στοιχείο του A να δημιουργεί μια ειδική μονάδα

περιγράφει ακριβώς την κατασκευή του $|A| = \mathrm{ord}(A) = \mathbf{v}[A]$ από κάποια άριστη διάταξη του A, Πρόβλημα **x12.28**. Όποια αξία κι αν έχει ή δεν έχει η αναλογία, σίγουρα η κατασκευή του von Neumann είναι πολύ χρήσιμη: μεταξύ άλλων, μετατρέπει το «λογισμό ισοπληθικότητας» που έχουμε αναπτύξει σε μια αυθεντική αριθμητική πληθαρίθμων — τουλάχιστον αν δεχτούμε το Αξίωμα Επιλογής, έτσι ώστε όλα τα σύνολα να έχουν von Neumann πληθαρίθμους.

Ήμασταν πολύ προσεκτικοί στη διατύπωση αποτελεσμάτων για πληθαρίθμους να αποφύγουμε το Αξίωμα Επιλογής όπου αυτό ήταν εφικτό, αλλά βέβαια το κύριο αποτέλεσμα ήταν να φανεί πεντακάθαρα πόσο φτωχή είναι η πληθική αριθμητική χωρίς επιλογές. Το κύριο εμπόδιο είναι η ισοδυναμία της συγκρισιμότητας πληθαρίθμων με το **AC**: δεν έχουμε ουσιαστική αριθμητική χωρίς συγκρισιμότητα, και δεν μπορούμε να έχουμε συγκρισιμότητα χωρίς να δεχτούμε (αναγκαστικά) το πλήρες Αξίωμα Επιλογής.

Αν δεχτούμε το **AC**, πόσο σημαντική είναι η ύπαρξη «αληθινών πληθικών αριθμών» που ικανοποιούν την (12-30), και που απαιτούν εκτός από το **AC** και το Αξίωμα Αντικατάστασης για την κατασκευή τους; Όχι και πολύ μεγάλη, παρά μόνο γι' αυτούς που έχουν αλλεργία στους δείκτες. Θα μπορούσε ίσως κανείς να θεωρήσει τη λύση του von Neumann στο Πρόβλημα Ανάθεσης Πληθαρίθμων κυρίως σαν άσκηση μαθηματικής κομψότητας, και υπάρχει κάποια δόση αλήθειας σε μια τέτοια άποψη. Δεν πρέπει όμως να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι το Αξίωμα Αντικατάστασης είναι ασήμαντο για την πληθική αριθμητική επειδή οι βασικές της ταυτότητες είναι θεωρήματα της **ZDC+AC**. Το κύριο πρόβλημα είναι ότι η **ZDC+AC** δεν μπορεί να αποδείξει την ύπαρξη πληθαρίθμων πάνω από την πρώτη, άπειρη ακολουθία

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots ,$$

και μάλιστα δεν μπορεί να αποδείξει καν ότι αυτή η ακολουθία $(n \mapsto \aleph_n)$ υπάρχει, Πρόβλημα **xB.10**. Ειδικότερα, η ύπαρξη ιδιαζόντων πληθαρίθμων δεν είναι θεώρημα της **ZDC+AC**, και επομένως ολόκληρη η θεωρία ομοτελικότητας παραμένει πιθανόν κενή περιεχομένου χωρίς Αντικατάσταση.

Το συμπέρασμα είναι ότι για τη δημιουργία άξιας πληθικής αριθμητικής πρέπει να δεχτούμε και τα δύο αξιώματα Επιλογής και Αντικατάστασης, δηλαδή να εργαστούμε στην **ZFDC+AC**, ή κάποια ακόμη ισχυρότερη αξιωματική συνολοθεωρία. Μερικοί ισχυρίζονται επίσης, ότι και η Αρχή Θεμελίωσης είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την πληθική αριθμητική, αλλά αυτό δεν είναι σωστό—αν και μερικές από τις πιο σημαντικές εφαρμογές των πληθαρίθμων είναι στη δομή του κόσμου $\mathcal{V}$ του von Neumann, των εδραιωμένων, αγνών συνόλων.

12.29. Πρόταση (Τα «άλεφ»). *Με αναδρομή στο διατακτικό αριθμό $\alpha \in \mathrm{ON}$, θέτουμε*

$$\begin{aligned} \aleph_0 &= |\mathbb{N}| = \omega, \\ \aleph_{\beta+1} &= \aleph_\beta^+, \\ \aleph_\lambda &= \sup\{\aleph_\beta \mid \beta < \lambda\}, \ \text{αν } \mathrm{Limit}(\lambda). \end{aligned} \tag{12-31}$$

Κάθε $\aleph_\alpha$ είναι πληθάριθμος του von Neumann,

$$\alpha < \beta \Longrightarrow \aleph_\alpha <_c \aleph_\beta \quad (\alpha, \beta \in \mathrm{ON}),$$

και κάθε von Neumann πληθάριθμος είναι $\aleph_\alpha$ για κάποιο α.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για να δείξουμε ότι η $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$ είναι γνησίως αύξουσα σε πληθικότητα, σταθεροποιούμε το α και (προς άτοπο) επιλέγουμε το ελάχιστο β έτσι ώστε $\alpha < \beta$ και $\aleph_\alpha =_c \aleph_\beta$: τώρα $\beta \neq \alpha+1$, μιας και $\aleph_\alpha <_c \aleph_\alpha^+ = \aleph_{\alpha+1}$· $\beta = \gamma+1$ για κάποιο $\gamma > \alpha$ άρα $\aleph_\alpha <_c \aleph_\gamma <_c \aleph_\beta$ (από την επιλογή του β), που είναι άτοπο· και αν το β είναι οριακό, τότε $\alpha + 1 < \beta$, και έτσι $\aleph_\alpha <_c \aleph_{\alpha+1} <_c \aleph_\beta$, που είναι και πάλι άτοπο.

Έπεται ότι κάθε $\aleph_\alpha$ είναι πληθάριθμος von Neumann: αυτό είναι άμεσο για το 0 και τους επόμενους διατακτικούς· όσον αφορά το όριο λ, αν το $\aleph_\lambda$ δεν είναι πληθάριθμος, τότε $\aleph_\lambda \leq_c \aleph_\beta$ για κάποιο $\beta < \lambda$, που αντιτίθεται στο $\aleph_\beta <_c \aleph_\lambda$.

Τέλος, για να δείξουμε ότι κάθε πληθάριθμος von Neumann είναι κάποιο $\aleph_\alpha$, έστω (προς άτοπο) κ το ελάχιστο αντιπαράδειγμα. Αμέσως από τον ορισμό, $\kappa \neq \omega$ και $\kappa \neq_c \lambda^+$ για οποιοδήποτε διατακτικό $\lambda < \kappa$, μιας και από αυτό έπεται ότι $\kappa = |\lambda|^+$, το $|\lambda|$ είναι κάποιο άλεφ από την επιλογή του κ, και έτσι το κ είναι επίσης άλεφ. Έστω

$$\beta = \{\alpha \leq \kappa \mid \aleph_\alpha <_c \kappa\}.$$

Αυτό είναι διατακτικός, αφού είναι κλειστό για το $<$· είναι οριακός διατακτικός, επειδή $\aleph_\alpha < \kappa \Longrightarrow \aleph_{\alpha+1} < \kappa$· και από τον ορισμό του,

$$\alpha < \beta \Longrightarrow \aleph_\beta < \kappa.$$

Από την άλλη μεριά, αν ο λ είναι πληθάριθμος και $\lambda < \kappa$, τότε $\lambda = \aleph_\alpha$ για κάποιο $\alpha < \beta$, από την επιλογή του κ, έτσι που τελικά

$$\kappa = \sup\{\aleph_\alpha \mid \alpha < \beta\} = \aleph_\beta. \qquad \dashv$$

Ο τελεστής $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$ προσφέρει ένα χρήσιμο συμβολισμό για την πληθική αριθμητική, ακόμη περισσότερο αν δεχτούμε το Αξίωμα Επιλογής.

12.30. Άσκηση. *Το Αξίωμα Επιλογής* **AC** *είναι ισοδύναμο με τον ισχυρισμό ότι «κάθε άπειρος πληθάριθμος είναι άλεφ»,*

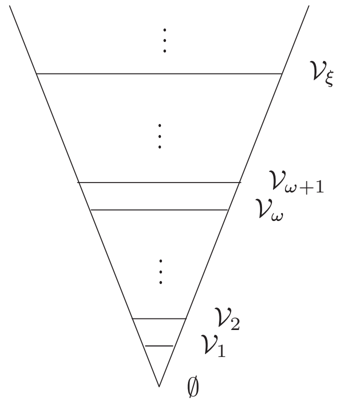
$$\mathbf{AC} \iff (\forall \text{ άπειρο } A)(\exists \alpha \in \mathrm{ON})[A =_c |A| = \aleph_\alpha].$$

12.31. Άσκηση. (**AC**) *Η Γενικευμένη Υπόθεση του Συνεχούς είναι ισοδύναμη με την εξίσωση πληθικής αριθμητικής*

$$\mathbf{GCH} \iff 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} \quad (\alpha \in \mathrm{ON}).$$

12.32. Η Συσσωρευμένη Ιεραρχία των Αγνών, Εδραιωμένων Συνόλων (Cumulative Hierarchy). Για κάθε διατακτικό αριθμό α ορίζουμε το σύνολο $\mathcal{V}_\alpha$ με την ακόλουθη αναδρομή στο ON:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0 &= \emptyset, \\ \mathcal{V}_{\alpha+1} &= \mathcal{P}(\mathcal{V}_\alpha), \\ \mathcal{V}_\lambda &= \bigcup\nolimits_{\alpha<\lambda} \mathcal{V}_\alpha, \quad \text{αν } \mathrm{Limit}(\lambda). \end{aligned}$$



Διαγραμμα **12.3**. Λογαριθμική απόδοση των αγνών, εδραιωμένων συνόλων.

Ο **κόσμος του von Neumann** είναι η ένωση όλων των $\mathcal{V}_\alpha$,

$$\mathcal{V} =_{\text{ορ}} \bigcup_{\alpha \in \mathrm{ON}} \mathcal{V}_\alpha = \{x \mid \text{για κάποιο } \alpha \in \mathrm{ON}, x \in \mathcal{V}_\alpha\}, \tag{12-32}$$

και σε κάθε μέλος του $\mathcal{V}$ αντιστοιχίζουμε την **τάξη** του (rank) με τον τελεστή

$$\mathrm{Rank}(x) = (\mu\alpha \in \mathrm{ON})[x \in \mathcal{V}_{\alpha+1}] \quad (x \in \mathcal{V}). \tag{12-33}$$

Έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει το συμβολισμό $\mathcal{V}$ για την κλάση των αγνών εδραιωμένων συνόλων, επειδή ισχύει το εξής:

12.33. Θεώρημα. (1) *Κάθε $\mathcal{V}_\alpha$ είναι αγνό, μεταβατικό, εδραιωμένο σύνολο και*

$$\alpha \leq \beta \Longrightarrow \mathcal{V}_\alpha \subseteq \mathcal{V}_\beta.$$

(2) *Κάθε $\mathcal{V}_\lambda$ με οριακό $\lambda \geq \omega \cdot 2$ είναι κόσμος του Zermelo.*

(3) *Για κάθε αγνό A, $A \subseteq \mathcal{V} \Longrightarrow A \in \mathcal{V}$.*

(4) *Ο κόσμος $\mathcal{V}$ του von Neumann αποτελείται ακριβώς από τα αγνά, εδραιωμένα σύνολα.*

Αποδειξη. Τα (1) και (2) αποδεικνύονται με τα ίδια επιχειρήματα που χρησιμοποιήσαμε για να δείξουμε τις ανάλογες ιδιότητες των βασικών κλειστοτήτων $M(I)$ για μεταβατικό I στο Λήμμα **x9.6**, και δεν θα τα επαναλάβουμε.

(3) Έστω $A \subseteq \mathcal{V}$ και $\mathrm{Rank}[A] = \{\mathrm{Rank}(x) \mid x \in A\}$ η εικόνα του A από τον τελεστή τάξης. Αυτό είναι σύνολο διατακτικών αριθμών, άρα υπάρχει διατακτικός αριθμός κ γνήσια μεγαλύτερος απ' όλα τα μέλη του,

$$x \in A \Longrightarrow \mathrm{Rank}(x) < \kappa \Longrightarrow x \in \mathcal{V}_\kappa,$$

και (χρησιμοποιώντας την αγνότητα του A),

$$A = \{x \in \mathcal{V}_\kappa \mid x \in A\} \in \mathcal{V}_{\kappa+1}.$$

(4) Θα επικαλεστούμε το λεγόμενο «αντιθετοαντίστροφο» της συνεπαγωγής (3), την πρόταση δηλαδή ότι για κάθε αγνό A,

$$A \notin \mathcal{V} \Longrightarrow (\exists x \in A)[x \notin \mathcal{V}]. \tag{12-34}$$

Υποθέτουμε πρώτα ότι το M είναι αγνό, μεταβατικό και εδραιωμένο σύνολο αλλά $M \notin \mathcal{V}$. Η μεταβατικότητα του M και η (12-34) μας δίνουν την

$$(\forall x \in M \setminus \mathcal{V})(\exists y \in M \setminus \mathcal{V})[y \in x],$$

και το **DC** τώρα συνεπάγεται την ύπαρξη φθίνουσας $\in$-αλυσίδας, ενάντια στην υπόθεση ότι το M είναι εδραιωμένο. Άρα κάθε αγνό, μεταβατικό, εδραιωμένο σύνολο ανήκει στον $\mathcal{V}$, επομένως, για κάθε αγνό, εδραιωμένο A, η μεταβατική κλειστότητα $\mathrm{TC}(A) \in \mathcal{V}\cdot$ και τελικά $A \in \mathcal{V}$, αφού $A \in \mathrm{TC}(A)$ και η $\mathcal{V}$ είναι μεταβατική. $\dashv$

Θυμίσου ότι από το Θεώρημα **11.34**, το $\mathcal{V}$ είναι **ZFDC**-κόσμος, και μάλιστα **ZFC**-κόσμος αν δεχτούμε το **AC**.

12.34. Η διαισθητική έννοια του αγνού, εδραιωμένου συνόλου. Σχολιάζοντας την Αρχή Θεμελίωσης στο **11.32**, ισχυριστήκαμε ότι ο ορισμός του ελάχιστου κόσμου $\mathcal{Z}$ του Zermelo και οι αποδείξεις των βασικών του ιδιοτήτων κατανοούνται άμεσα, απλά, όπως συνήθως καταλαβαίνουμε τα μαθηματικά, και προσφέρουν μια πειστική, διαισθητική περιορισμένη έννοια «συνόλου» που δικαιώνει τα αξιώματα της **ZDC+AC** και την Αρχή Θεμελίωσης. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η «κατασκευή» του κόσμου $\mathcal{V}$ του von Neumann στο **12.32** και στο Θεώρημα **12.33** κατανοείται άμεσα και απλά, ξέχωρα από τις λεπτομέρειες οποιασδήποτε συγκεκριμένης αξιωματοποίησης, και ότι προτείνει μια φυσική, διαισθητική έννοια «αγνού, εδραιωμένου συνόλου» που δικαιώνει τα αξιώματα της **ZFC**. Τα επιχειρήματα αυτά αξίζουν μια πιο προσεκτική εξέταση.

Η κατασκευή του $\mathcal{Z}$ ξεκινά με το άπειρο σύνολο

$$\mathbb{N}_0 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$$

και επαναλαμβάνει τον τελεστή δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(A)$ άπειρα πολλές φορές. Εφόσον το «άπειρο» των επαναλήψεων δεν είναι ούτε περισσότερο ούτε λιγότερο από το «άπειρο» που περιέχεται στο αρχικό σύνολο $\mathbb{N}_0$, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι *για να συλλάβουμε το* $\mathcal{Z}$ *πρέπει να συλλάβουμε δύο άπειρα πράγματα: το σύνολο* $\mathbb{N}_0$ (βασικά τους φυσικούς αριθμούς) *και τον τελεστή του δυναμοσυνόλου.*

Η κατασκευή του $\mathcal{V}$ αρχίζει με το τίποτα, το κενό, αλλά επαναλαμβάνει τον τελεστή του δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(A)$ σε όλους τους διατακτικούς αριθμούς. Με την ίδια ανάλυση, μπορούμε να πούμε ότι *για να συλλάβουμε το* $\mathcal{V}$ *πρέπει να συλλάβουμε την κλάση των διατακτικών αριθμών* ON *και τον τελεστή δυναμοσυνόλου.* Μπορούμε βέβαια να επιχειρήσουμε περαιτέρω «εύγλωττη» ανάλυση της έννοιας του «διατακτικού αριθμού» και να προσπαθήσουμε να τη «δικαιώσουμε», όπως μπορούμε επίσης να προσπαθήσουμε να δικαιώσουμε τις έννοιες των φυσικών και του δυναμοσυνόλου. Θα πρέπει να είναι καταφανές όμως ότι οι διατακτικοί αριθμοί αποτελούν μια διαφορετική, νέα πρώτη ύλη που είναι απαραίτητη για τη διαισθητική κατανόηση του $\mathcal{V}$, και που δεν μπορεί να αναχθεί στο $\mathbb{N}_0$ και τα δυναμοσύνολα. Απ' αυτή τη σκοπιά, η δικαίωση των αξιωμάτων της **ZFC** που προσφέρει αυτή η διαισθητική κατασκευή είναι σημαντικά ασθενέστερη της δικαίωσης της **ZDC+AC** από το $\mathcal{Z}$.

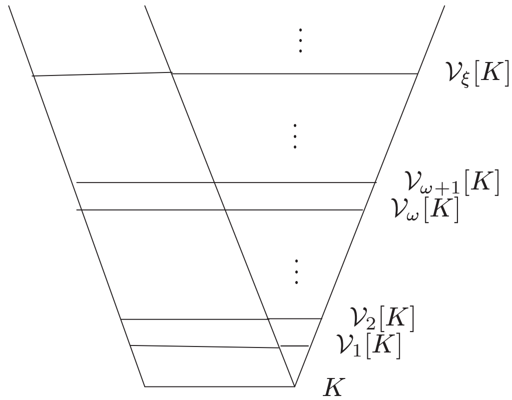
Στο Παράρτημα **B** θα εισαγάγουμε εναλλακτικούς κόσμους συνόλων, και σε πιο προχωρημένα βιβλία μπορεί κανείς να βρει μια πληθώρα από γοητευτικά πρότυπα της συνολοθεωρίας, κατασκευασμένα (κυρίως) με παραλλαγές και επεκτάσεις των μεθόδων κατασκευασιμότητας του Gödel και αναγκασμού του Cohen. Ένας από τους λόγους που εργαστήκαμε εδώ με τα σχετικά ασθενή αξιωματικά συστήματα **ZDC** και **ZFDC**, είναι για να βεβαιώσουμε ότι τα στοιχειώδη αποτελέσματα του κλάδου που καλύψαμε έχουν άμεση εφαρμογή σε όλα (σχεδόν) αυτά τα πρότυπα. Όμως όλα αυτά τα πρότυπα κατασκευάζονται με βάση κάποιο «δοσμένο» πρότυπο της **ZFC**, και δεν φαίνεται εφικτή η δημιουργία ξεχωριστών, διαισθητικών εννοιών του **τι είναι σύνολο** που να δικαιώνουν άμεσα τα αξιώματα τα οποία ικανοποιούν.

Φαίνεται ότι (τουλάχιστον μέχρι τώρα), η διαισθητική έννοια του **αγνού, εδραιωμένου συνόλου** που γεννιέται από τη μαθηματική ανάλυση των **12.32** και **12.33**, είναι οπωσδήποτε η πλέον φυσική εναλλακτική έννοια που έχουμε για την απεριόριστη (και αντιφατική) «συμπερίληψη σε ολότητα οριστικών και διακεκριμένων αντικειμένων» του Cantor.

12.35. Σχετικά με άτομα και εφαρμογές. Στο **3.25** υποστηρίξαμε (μαζί με το Zermelo) ότι είναι χρήσιμο να επιτρέψουμε άτομα στην αξιωματική συνολοθεωρία, έτσι που τα θεωρήματά μας να εφαρμόζονται κατευθείαν σε σύνολα από πλανήτες ή βατράχια, καθώς επίσης και στα αγνά, εδραιωμένα σύνολα που φτιάχνουμε από το τίποτα. Μπορεί η γενικά αποδεκτή, καθιερωμένη θεωρία **ZFC** που απαγορεύει την ύπαρξη ατόμων να δικαιολογίσει τις εφαρμογές της συνολοθεωρίας; Υπάρχουν δύο αξιόλογες απαντήσεις σε αυτό το ερώτημα.

Πρώτον, μπορούμε να *μοντελοποιήσουμε* τα φυσικά αντικείμενα και τις σχέσεις ανάμεσα τους με *δομές* από αγνά σύνολα, όπως μοντελοποιούμε (μέχρι ισομορφισμούς) τα διατεταγμένα ζεύγη, τις συναρτήσεις, τους φυσικούς αριθμούς, κ.λπ. Για παράδειγμα, για να μελετήσουμε τη συμπεριφορά ενός συστήματος ουρανίων σωμάτων $P_1, \dots, P_k$ που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με τη βαρύτητα, μπορούμε να αναπαραστήσουμε καθένα από αυτά με μια συνάρτηση $\overline{P}_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^7$, που αναθέτει σε κάθε πραγματικό αριθμό $t \in \mathbb{R}$ τη μάζα, τη θέση και την ταχύτητα του P_i, με κάποιο σταθερό σύστημα αναφοράς, αξώνων και μονάδων. Οι νόμοι της κίνησης θα καθορίσουν τις συναρτήσεις αυτές· και τον φυσικό δεν τον ενδιαφέρει αν τα συνολοθεωρητικά αντικείμενα που μοντελοποιούν τις συναρτήσεις $\overline{P}_1, \dots, \overline{P}_k$ είναι αγνά ή όχι—αυτό που τον νοιάζει είναι οι μεταξύ τους σχέσεις, που μπορούν τότε να ερμηνευτούν σαν σχέσεις ανάμεσα σε πλανήτες τις οποίες είναι σε θέση να ελέγξει με παρατηρήσεις και πειράματα.

Δεύτερον, αν μας ενδιαφέρει να μπορούμε να μιλάμε για πλανήτες κατευθείαν μέσα στη συνολοθεωρία, μπορούμε να επιτρέψουμε μια κλάση ατόμων K και



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **12.4**. Απόδοση των εδραιωμένων συνόλων στο K.

να αντικαταστήσουμε το $\mathcal{V}$ με την κλάση $\mathcal{V}[K]$ των εδραιωμένων συνόλων που στηρίζονται από το K όπως το ορίστηκε στο **11.38**. Αυτή η κλάση είναι **ZFDC**-κόσμος από το Πρόβλημα **x11.22**· ικανοποιεί το Αξίωμα Επιλογής· και, στην ενδιαφέρουσα περίπτωση όπου το K είναι σύνολο, μοιάζει πάρα πολύ με το $\mathcal{V}$ και έχει ουσιαστικά όλες τις ιδιότητές του, και μάλιστα με τις ίδιες αποδείξεις, βλ. **x12.32**. Μπορεί να κατασκευαστεί στη **ZFDC** με τη διατακτική αναδρομή

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_0[K] &= K,\\
\mathcal{V}_{\alpha+1}[K] &= \mathcal{P}(\mathcal{V}_\alpha[K]),\\
\mathcal{V}_\lambda[K] &= \textstyle\bigcup_{\alpha<\lambda}\mathcal{V}_\alpha[K], \quad \text{αν Limit}(\lambda),\\
\mathcal{V}[K] &= \textstyle\bigcup_{\alpha}\mathcal{V}_\alpha[K].
\end{aligned}$$

Το θέμα είναι ότι ο φυσικός δεν ενδιαφέρεται για τη διαφορά ανάμεσα στις δύο αυτές προσεγγίσεις, και πιθανότατα ούτε καν την αντιλαμβάνεται: γιατί το μόνο που έχει σημασία στη συγκεκριμένη εφαρμογή των μαθηματικών, είναι οι συναρτήσεις $\overline{P}_i$ που κωδικοποιούν τις ιδιότητες των πλανητών, όπως ακριβώς το μόνο που έχει σημασία για τους φυσικούς αριθμούς είναι ότι αποτελούν σύστημα Peano—το τι ακριβώς *είναι* δεν επηρεάζει τίποτα. Και έτσι, εν τέλει, είναι χρησιμότερο να «απαγορεύσουμε» τα άτομα και να δεχθούμε την απλούστερη **ZFC** σαν τη 'standard' αξιωματική συνολοθεωρία, που γίνεται σχεδόν χωρίς εξαίρεση σε προχωρημένο επίπεδο στη θεωρία συνόλων.

Προβλήματα για το Κεφάλαιο 12

x12.1. Δείξε το (1) του Θεωρήματος **12.15**.

x12.2. Δείξε το (2) του Θεωρήματος **12.15**.

x12.3. Δείξε το (3) του Θεωρήματος **12.15**.

* **x12.4. Χαρακτηρισμός των διατακτικών αριθμών του von Neumann**. Έστω οριστικός τελεστής $\phi(V)$ στους καλά διατεταγμένους χώρους που ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

$$V =_o \phi(V),$$
$$U \leq_o V \Longrightarrow \phi(U) \sqsubseteq \phi(V),$$
$$\text{Field}(\phi(V)) = \{\text{Field}(\phi(U)) \mid U <_o V\}.$$

Δείξε ότι $\text{ord}(V) = \alpha \Longrightarrow \phi(V) = (\alpha, \leq_\alpha)$.

x12.5. Η κλάση ON δεν είναι σύνολο.

x12.6. Δικαιολόγησε τον ορισμό του πολλαπλασιασμού στους διατακτικούς, του Θεωρήματος **12.19**.

x12.7. Για όλους τους διατακτικούς α, β, γ, δ,

$$0 + \alpha = \alpha, \text{ και } \omega \leq \alpha \Longrightarrow 1 + \alpha = \alpha,$$
$$0 < \beta \Longrightarrow \alpha < \alpha + \beta,$$
$$\alpha \leq \beta \,\&\, \gamma \leq \delta \Longrightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \delta,$$
$$\alpha \leq \beta \,\&\, \gamma < \delta \Longrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \delta.$$

Δείξε επίσης ότι, γενικά,

$$\text{η } \alpha < \beta \text{ δεν συνεπάγεται την } \alpha + \gamma < \beta + \gamma.$$

x12.8. Έστω $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots$ μια αυστηρά αύξουσα ακολουθία διατακτικών. Τότε το όριο $\lim_n \alpha_n$ είναι οριακός διατακτικός.

x12.9. Δώσε παραδείγματα ακολουθιών διατακτικών που να είναι αυστηρά αύξουσες και τέτοιες που

$$\lim_n(\alpha_n + \beta) \neq \lim_n \alpha_n + \beta,$$
$$\lim_n(\alpha_n + \beta_n) \neq \lim_n \alpha_n + \lim_n \beta_n.$$

x12.10. Για όλους τους διατακτικούς α, β, γ, δ,

$$0 \cdot \alpha = 0$$
$$0 < \alpha \,\&\, 1 < \beta \Longrightarrow \alpha < \alpha \cdot \beta$$
$$\alpha \leq \beta \,\&\, \gamma \leq \delta \Longrightarrow \alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \delta$$
$$0 < \alpha \leq \beta \,\&\, \gamma < \delta \Longrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta.$$

Δείξε ότι ακόμα κι αν $\gamma > 0$, γενικά,

$$\text{η } \alpha < \beta \text{ δεν συνεπάγεται την } \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma.$$

x12.11 (Νόμοι απλοποίησης)**.** Για όλους τους διατακτικούς α, β, γ,

$$\begin{aligned} \alpha + \beta < \alpha + \gamma &\Longrightarrow \beta < \gamma, \\ \alpha + \beta = \alpha + \gamma &\Longrightarrow \beta = \gamma, \\ \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma &\Longrightarrow \beta < \gamma, \\ 0 < \alpha \,\&\, \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma &\Longrightarrow \beta = \gamma. \end{aligned}$$

Δείξε επίσης ότι, γενικά,

$$\text{η } 0 < \alpha \,\&\, \beta \cdot \alpha = \gamma \cdot \alpha \text{ δεν συνεπάγεται την } \beta = \gamma.$$

x12.12. Για όλα τα $\alpha \geq \omega$ και $n < \omega$,

$$\begin{aligned} & n + \alpha = \alpha, \\ & (\alpha + 1) \cdot n = \alpha \cdot n + 1 \quad (n > 1), \\ & (\alpha + 1) \cdot \omega = \alpha \cdot \omega. \end{aligned}$$

x12.13. Βρες τρεις διατακτικούς αριθμούς α, β, γ, με την ιδιότητα

$$(\alpha + \beta) \cdot \gamma \neq \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma.$$

Υποδειξη. Χρησιμοποίησε το προηγούμενο πρόβλημα.

x12.14. Αν $n < m$, τότε $\omega^n + \omega^m = \omega^m$.

x12.15 (Αφαίρεση διατακτικών)**.** Αν $\alpha \leq \gamma$, τότε υπάρχει μοναδικός διατακτικός β τέτοιος που $\gamma = \alpha + \beta$.

x12.16. Κάθε διατακτικός αριθμός $\alpha < \omega^2$ μπορεί να γραφτεί με μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$\alpha = \omega \cdot x + y \qquad (x, y < \omega).$$

* **x12.17.** Για κάθε διατακτικό $\alpha < \omega^N$, υπάρχουν μοναδικά $n < N$, $x < \omega$, $\beta < \omega^n$ έτσι ώστε $\alpha = \omega^n \cdot x + \beta$. Υποδειξη. Πάρε το μεγαλύτερο n με $\omega^n \leq \alpha$, και το μεγαλύτερο x με $\omega^n \cdot x \leq \alpha$.

x12.18. Αν $N > 0$, κάθε $\alpha < \omega^N$ γράφεται μοναδικά στη μορφή

$$\alpha = \omega^{n_1} \cdot x_1 + \omega^{n_2} \cdot x_2 + \cdots + \omega^{n_s} \cdot x_s + x_{s+1}, \tag{12-35}$$

με $N > n_1 > n_2 > \cdots > n_s$ και $x_1, \ldots, x_{s+1} < \omega$. Υποδειξη. Χρησιμοποίησε επαγωγή στο N και το προηγούμενο πρόβλημα.

12.36. Ορισμός (Φυσιολογικοί τελεστές)**.** Ο μονομελής, οριστικός τελεστής F στους διατακτικούς είναι **φυσιολογικός** (normal), αν είναι αυστηρά αύξων,

$$\alpha < \beta \Longrightarrow F(\alpha) < F(\beta),$$

και συνεχής στους οριακούς διατακτικούς, δηλαδή

$$F(\lambda) = \sup\{F(\beta) \mid \beta < \lambda\}, \text{ αν } \mathrm{Limit}(\lambda).$$

x12.19. Αν ο $F : \mathrm{ON} \to \mathrm{ON}$ είναι φυσιολογικός τελεστής, τότε για κάθε α, $\alpha \leq F(\alpha)$, και για κάθε οριακό διατακτικό λ, το $F(\lambda)$ είναι οριακός διατακτικός.

x12.20. Για κάθε α, οι τελεστές

$$S_\alpha(\beta) = \alpha + \beta, \quad P_\alpha(\beta) = \alpha \cdot \beta$$

του "προσθέτοντας στο" και "πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με το" α είναι φυσιολογικοί.

x12.21. Η σύνθεση $F(\alpha) = G(H(\alpha))$ φυσιολογικών τελεστών είναι φυσιολογικός τελεστής.

x12.22. Δώσε αυστηρό ορισμό της διατακτικής δύναμης (ordinal exponentation) α^β (για $\alpha > 1$), έτσι ώστε

$$\begin{aligned} \alpha^0 &= 1, \\ \alpha^{S(\beta)} &= \alpha^\beta \cdot \alpha, \\ \alpha^\lambda &= \sup\{\alpha^\beta \mid \beta < \lambda\}, \text{ αν } \mathrm{Limit}(\lambda). \end{aligned}$$

Δείξε τα ακόλουθα:

(1) Αν $\beta < \gamma$, τότε $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$.

(2) Για κάθε $\alpha > 1$, ο τελεστής $E_\alpha(\beta) = \alpha^\beta$ είναι φυσιολογικός.

(3) $\alpha^{(\beta+\gamma)} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$.

(4) $\left(\alpha^\beta\right)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$.

Υποδειξη. Οι Ασκήσεις **x12.20** και **x12.21** και το (2) απλοποιούν αρκετά τις αποδείξεις των (3) και (4).

***x12.23.** Αν $\alpha > 0$, τότε υπάρχει μέγιστο β με $\omega^\beta \leq \alpha$, και για αυτό το β, $\alpha = \omega^\beta + \gamma$ με κάποιο $\gamma < \alpha$. Υποδειξη. Χρησιμοποίησε το Πρόβλημα **x12.15** για να βρεις το γ, και δείξε ότι $\gamma < \omega^{\beta+1}$, που αντιτίθεται στο $\gamma \geq \alpha$.

***x12.24.** (1) Αν $\beta < \gamma$, τότε $\omega^\beta + \omega^\gamma = \omega^\gamma$.

(2) Κάθε διατακτικός $\alpha > 0$ μπορεί να γραφτεί με μοναδικό τρόπο στη μορφή $\alpha = \omega^\beta + \gamma$ με $\gamma < \alpha$.

***x12.25 (Η κανονική μορφή Cantor).** Κάθε διατακτικός $\alpha > 0$ μπορεί να γραφτεί μοναδικά σαν πεπερασμένο άθροισμα από φθίνουσες δυνάμεις του ω, συμβολικά

$$\alpha = \omega^{\beta_1} + \omega^{\beta_2} + \cdots + \omega^{\beta_s} \quad (\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_s), \tag{12-36}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot n_1 + \omega^{\beta_2} \cdots n_2 + \cdot + \omega^{\beta_t} \cdot n_t$$
$$(\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_t, n_i < \omega, n_i \neq 0). \tag{12-37}$$

Υποδειξη. Για τη μοναδικότητα, δείξε πρώτα ότι

$$\text{αν } \beta \geq \beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_s \text{ και } \gamma = \omega^{\beta_1} + \omega^{\beta_2} + \cdots + \omega^{\beta_s},$$
$$\text{τότε } \gamma < \omega^\beta + \gamma,$$

με επαγωγή στο s.

Στην περίπτωση που το ϵ_0 είναι το ελάχιστο σταθερό σημείο του φυσιολογικού τελεστή $(\alpha \mapsto \omega^\alpha)$, η κανονική μορφή Cantor του είναι η άχρηστη

$$\epsilon_0 = \omega^{\varepsilon_0} = \omega^{\omega^{\varepsilon_0}} = \cdots .$$

Όμως οι διατακτικοί που είναι μικρότεροι από τον ε_0 έχουν μη τετριμμένες κανονικές μορφές Cantor που δίνουν απλές και (μερικές φορές) χρήσιμες αναπαραστάσεις τους.

x12.26. Βρες τη κανονική μορφή Cantor του $\omega \cdot (\omega^\omega + 1) + (\omega^\omega + 1) \cdot \omega$.

* **x12.27.** Οι μόνοι διατακτικοί αριθμοί που ανήκουν στον ελάχιστο κόσμο του Zermelo $\mathcal{Z}$ είναι οι πεπερασμένοι.

x12.28. Αν η $\leq$ είναι άριστη διάταξη του A, τότε $|A| = \mathbf{v}_U[A]$, δηλαδή ο πληθάριθμος $|A|$ είναι ο διατακτικός αριθμός που αντιστοιχίζεται στον καλά διατεταγμένο χώρο $(A, \leq)$ από τη von Neumann απεικόνισή του.

x12.29. Η κλάση Card_v των von Neumann πληθαρίθμων δεν είναι σύνολο.

x12.30. (**AC**) Ο οριστικός τελεστής $\beth_\alpha$ (το $\beth$ διαβάζεται «μπεθ») ορίζεται με την εξής αναδρομή στο ON:

$$\begin{aligned} \beth_0 &= \aleph_0 = |\mathbb{N}| = \omega, \\ \beth_{\beta+1} &= 2^{\beth_\beta}, \\ \beth_\lambda &= \sup\{\beth_\beta \mid \beta < \lambda\}, \text{ αν } \mathrm{Limit}(\lambda). \end{aligned} \tag{12-38}$$

Δείξε ότι για κάθε διατακτικό αριθμό α,

$$|\mathcal{V}_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha.$$

x12.31. Για κάθε διατακτικό αριθμό α, $\mathrm{Rank}(\alpha) = \alpha$.

x12.32. Για κάθε σύνολο από άτομα K, η ιεραρχία $(\alpha \mapsto \mathcal{V}_\alpha[K])$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(1) Κάθε $\mathcal{V}_\alpha[K]$ είναι μεταβατικό και εδραιωμένο σύνολο, στηρίζεται από το K, και

$$\alpha \leq \beta \Longrightarrow \mathcal{V}_\alpha[K] \subseteq \mathcal{V}_\beta[K].$$

(2) Αν ο λ είναι οριακός διατακτικός, $\lambda \geq \omega \cdot 2$, τότε το $\mathcal{V}_\lambda[K]$ είναι κόσμος του Zermelo.

(3) Για κάθε σύνολο A που στηρίζεται από K, $A \subseteq \mathcal{V}[K] \Longrightarrow A \in \mathcal{V}[K]$.

(4) Ο κόσμος $\mathcal{V}[K]$ αποτελείται ακριβώς από τα εδραιωμένα σύνολα που στηρίζει το K.

x12.33. Για κάθε σύνολο ατόμων K και κάθε διατακτικό αριθμό α,

$$\mathcal{V}_\alpha = \mathcal{V}_\alpha[K] \cap \{x \mid \text{το } x \text{ είναι αγνό}\}.$$

* **x12.34.** Έστω $\pi : K \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow K$ μια μετάθεση κάποιου συνόλου ατόμων K. Δείξε ότι υπάρχει μοναδική επέκταση $\pi^* : \mathcal{V}[K] \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{V}[K]$ της π, που να είναι **αυτομορφισμός** στο $\mathcal{V}[K]$, δηλαδή,

$$x \in y \iff \pi^*(x) \in \pi^*(y) \qquad (x, y \in \mathcal{V}[K]).$$

12.37. Ορισμός (Κλειστές μη φραγμένες κλάσεις)**.** Μια κλάση διατακτικών $M \subseteq$ ON είναι **μη φραγμένη** (unbounded) αν

$$(\forall \xi \in \mathrm{ON})(\exists \alpha \in \mathrm{ON})[\xi < \alpha \,\&\, \alpha \in M]\cdot$$

και **κλειστή** (closed) αν για κάθε σύνολο διατακτικών $A \neq \emptyset$,

$$A \subseteq M \Longrightarrow \sup A \in M.$$

12.38. Άσκηση. *Έστω M μια κλειστή κλάση διατακτικών και*

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots \qquad (\alpha_n \in M)$$

μια αυστηρά αύξουσα ακολουθία διατακτικών στη M. Δείξε ότι $\lim_n \alpha_n \in M$.

* **x12.35.** Η τομή $M_1 \cap M_2$ δύο κλειστών και μη φραγμένων κλάσεων M_1 και M_2 είναι επίσης κλειστή και μη φραγμένη.

* **x12.36.** Κάθε φυσιολογικός τελεστής στους διατακτικούς έχει σταθερό σημείο, δηλαδή για κάποιο διατακτικό α, $F(\alpha) = \alpha\cdot$ για την ακρίβεια, η κλάση

$$\mathrm{fp}(M) = \{\alpha \in \mathrm{ON} \mid F(\alpha) = \alpha\}$$

των σταθερών σημείων του F είναι κλειστή και μη φραγμένη. ΥΠΟΔΕΙΞΗ. Για να βρεις ένα σταθερό σημείο, θέσε $\alpha_0 = 0$, $\alpha_{n+1} = F(\alpha_n)$, και δείξε ότι $F(\lim_n \alpha_n) = \lim_n \alpha_n$.

x12.37. (1) Υπάρχει πληθάριθμος von Neumann κ, με

$$\kappa = \aleph_\kappa.$$

(2) (**AC**) Υπάρχει πληθάριθμος von Neumann λ, με

$$\lambda = \beth_\lambda.$$

12.39. Ορισμός. Υποθέτουμε ότι οι $\lambda \leq \kappa$ είναι άπειροι, οριακοί διατακτικοί αριθμοί. Μια συνάρτηση $f : \alpha \to \beta$ είναι **ομοτελική** (cofinal) αν

$$\sup\{f(\xi) \mid \xi < \alpha\} = \beta.$$

Για παράδειγμα, η ταυτοτική ($\xi \mapsto \xi$) είναι ομοτελική συνάρτηση για κάθε οριακό διατακτικό αριθμό, αλλά και η ($n \mapsto \aleph_n$) είναι ομοτελική, από τον ω στον $\aleph_\omega$.

Το επόμενο πρόβλημα μας δίνει ένα χρήσιμο χαρακτηρισμό του τελεστή ομοτελικότητας (βλ. **9.23**), που σε πολλά βιβλία εισάγεται με αυτό τον τρόπο.

x12.38. Για κάθε πληθάριθμο von Neumann κ,

$$\mathrm{cf}(\kappa) = \min\{\alpha \mid \text{υπάρχει ομοτελική } f : \alpha \to \kappa\}.$$

x12.39. Δείξε ότι για όλους τους von Neumann πληθαρίθμους $\lambda \leq \kappa$, υπάρχει ομοτελική συνάρτηση $f : \lambda \to \kappa$ αν και μόνον αν $\mathrm{cf}(\lambda) = \mathrm{cf}(\kappa)$.

x12.40. Για κάθε κανονικό λ, $\mathrm{cf}(\aleph_\lambda) = \lambda$, και επομένως υπάρχουν πληθάριθμοι κάθε κανονικής ομοτελικότητας.

* **x12.41.** Δείξε ότι υπάρχουν ιδιάζοντες, von Neumann πληθάριθμοι κάθε κανονικής ομοτελικότητας.

x12.42. Για κάθε von Neumann πληθάριθμο λ με $\mathrm{cf}(\lambda) \geq \aleph_1$, το σύνολο $\mathcal{V}_\lambda$ είναι κόσμος του Zermelo, που επιπλέον ικανοποιεί την εξής ειδική περίπτωση του Αξιώματος Αντικατάστασης: για κάθε μονομελή, οριστικό τελεστή F, αν $x \in \mathcal{V}_\lambda \Longrightarrow F(x) \in \mathcal{V}_\lambda$, τότε η εικόνα $F[A]$ κάθε απαριθμητού $A \in \mathcal{V}_\lambda$ επίσης ανήκει στο $\mathcal{V}_\lambda$.

12.40. Ορισμός. (**AC**) Ο αναπαρίθμητος πληθάριθμος κ είναι **ισχυρά απρόσιτος** (strongly inaccessible) αν είναι κανονικός και

$$\lambda < \kappa \Longrightarrow 2^\lambda < \kappa.$$

* **x12.43.** (**AC**) Αν ο κ είναι ισχυρά απρόσιτος, τότε το $\mathcal{V}_\kappa$ είναι **ZFC**-κόσμος.

* **x12.44.** (**AC**) Αν το αγνό και εδραιωμένο σύνολο M είναι **ZFDC**-κόσμος, τότε $M = \mathcal{V}_\kappa$, για κάποιον ισχυρά απρόσιτο πληθάριθμο κ.

12.41. Πληθάριθμοι κατά τον Frege. Σύμφωνα με τον Cantor, τον οποίο έχουμε ακολουθήσει, η βασική ιδιότητα των πληθαρίθμων είναι ότι είναι σύνολα, και ότι για κάθε A,

$$A =_c |A|. \tag{12-39}$$

Υπάρχει και μια άλλη πρόσβαση στην έννοια του πληθαρίθμου, αυτή του Frege, με την οποία ο πληθάριθμος $|A|$ δεν είναι σύνολο «μονάδων» ισοπληθικό με το A, αλλά η αφηρημένη έννοια του «είναι ισοπληθικό με το A». Ο Frege, π.χ. θεωρεί τον αριθμό 1 ως την κοινή ιδιότητα όλων των μονοσυνόλων. Για να απεικονίσουμε στη συνολοθεωρία αυτή την έννοια, δεν είναι απαραίτητο να ορίσουμε τον $|A|$ έτσι που να είναι ισοπληθικός με το A, και μάλιστα δεν είναι καν απαραίτητο για τον $|A|$ να είναι σύνολο! Η μόνη σημαντική ιδιότητα πληθαρίθμων είναι η τελευταία,

$$A =_c B \iff |A| = |B|, \tag{12-40}$$

που (πρακτικά) απαιτεί να είναι ο τελεστής $|A|$ «προσδιοριστικός επιμορφισμός» της «συνθήκης ισοδυναμίας» $=_c$, και η κλάση των πληθαρίθμων να είναι το «πηλίκο» της $=_c$, με τη φυσική επέκταση της ορολογίας του **x4.5** σε συνθήκες. Ο Frege προσπάθησε να ορίσει αυστηρά αυτή την έννοια θέτοντας

$$|A| = \{X \mid X =_c A\}, \tag{12-41}$$

αλλά η κλάση $\{X \mid X =_c A\}$ δεν είναι σύνολο (αν $A \neq \emptyset$, εύκολα) και η (απαραίτητη για τη θεωρία) υπόθεση του Frege ότι είναι τον οδήγησε σε αντινομία.

Οι πληθάριθμοι του von Neumann έχουν και τις δύο βασικές ιδιότητες (12-39) και (12-40), και μ' αυτό τον τρόπο απεικονίζουν συγχρόνως τις διαισθήσεις του Cantor και του Frege, αλλά ο ορισμός τους στηρίζεται και στα δύο αξιώματα Επιλογής και Αντικατάστασης. Το Πρόβλημα **x12.46** υποδεικνύει μια εναλλακτική πρόσβαση στο θέμα, του Scott, που δίνει ικανοποιητικό ορισμό των *πληθαρίθμων κατά τον Frege* χωρίς επίκληση του Αξιώματος Επιλογής, αν και (ουσιαστικά) μόνο για τα αγνά, εδραιωμένα σύνολα. Η κατασκευή του Scott είναι σημαντική, όχι τόσο επειδή «απαλλάσσει» την ιδέα του Frege από το **AC** (η πληθική αριθμητική χωρίς το Αξίωμα Επιλογής είναι πενιχρή), αλλά για την απλότητα και την κομψότητα της μεθόδου, που έχει πολλές εφαρμογές άσχετες με τους πληθαρίθμους. Εξηγούμε πρώτα τη γενική μέθοδο, και μετά την εφαρμογή της στους πληθαρίθμους Frege.

12.42. Ορισμός. Συνθήκη ισοδυναμίας (equivalence condition) σε μια κλάση A είναι μια διμελής οριστική συνθήκη $\sim$ που έχει τις ιδιότητες σχέσης ισοδυναμίας, δηλαδή για όλα τα αντικείμενα $x, y, z \in A$

$$x \sim x,\ x \sim y \Longrightarrow y \sim x,\ x \sim y \,\&\, y \sim z \Longrightarrow x \sim z.$$

Ο μονομελής οριστικός τελεστής F είναι **προσδιοριστικός για την** $\sim$, αν

$$x \sim y \iff F(x) = F(y) \quad (x, y \in A)\cdot$$

η κλάση τιμών του F για τιμές της μεταβλητής του στην A είναι η **κλάση πηλίκου** (το πηλίκο) της A από τη συνθήκη $\sim$, που προσδιορίζεται από τον F

$$F[A] =_{\text{ορ}} \{F(x) \mid x \in A\}.$$

Π.χ. η συνθήκη ομοιότητας $=_o$ είναι συνθήκη ισοδυναμίας στην κλάση των καλά διατεταγμένων χώρων, και ο τελεστής του von Neumann $\mathrm{ord}(U)$ είναι προσδιοριστικός γι' αυτήν, με πηλίκο την κλάση ON των διατακτικών αριθμών. Η ισοπληθικότητα $=_c$ είναι συνθήκη ισοδυναμίας στην κλάση των καλά διατάξιμων συνόλων, και ο τελεστής του von Neumann $|A|$ είναι προσδιοριστικός γι' αυτήν, με πηλίκο την κλάση των von Neumann πληθαρίθμων.

Η πρόθεσή μας είναι να μελετήσουμε μια συνθήκη ισοδυναμίας $\sim$ στην κλάση A, σαν να ήταν η A σύνολο και η $\sim\ \subseteq A \times A$ σχέση ισοδυναμίας σ' αυτό. Δεν υπάρχει όμως εύκολος τρόπος να ορίσουμε προσδιοριστικό τελεστή για την $\sim$, επειδή η κλασική κατασκευή των κλάσεων ισοδυναμίας του **4.12** πράγματι οδηγεί σε «κλάσεις» σ' αυτή τη γενίκευση, κλάσεις που δεν είναι σύνολα: αυτό ακριβώς είναι το πρόβλημα με τον ορισμό του Frege για τον αριθμό 1 που παραθέσαμε πιο πάνω.

x12.45. (Scott) Έστω $\sim$ συνθήκη ισοδυναμίας σε μια κλάση A αγνών, εδραιωμένων συνόλων, και για κάθε $x \in A$, έστω

$$\begin{aligned}\rho(x) &=_{\text{ορ}} (\mu\alpha \in \mathrm{ON})(\exists y \in \mathcal{V}_\alpha)[y \sim x],\\ F(x) &=_{\text{ορ}} \{y \in \mathcal{V}_{\rho(x)} \mid y \sim x\}.\end{aligned}$$

Δείξε ότι ο F είναι προσδιοριστικός τελεστής για την $\sim$ στο A.

x12.46. (Scott) Δώσε ορισμό του **πληθαρίθμου Scott** $|A|_s$ για κάθε σύνολο A που είναι ισοπληθικό με κάποιο αγνό, εδραιωμένο σύνολο, έτσι που για όλα τα σύνολα A kai B με αυτήν την ιδιότητα,

$$A =_c B \iff |A|_s = |B|_s.$$