ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θεωρία Συνόλων

Ενότητα: Αντικατάσταση και άλλα αξιώματα

Γιάννης Μοσχοβάκης

Τμήμα Μαθηματικών

Σημειώματα

Σημείωμα ιστορικού εκδόσεων έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.1. Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη στο σύνδεσμο http://www.math.ucla.edu/ ynm/lectures/g.pdf

Σημείωμα αναφοράς

Σημείωμα αδειοδότησης

Διατήρηση σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΚΑΙ ΑΛΛΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ

Έχουμε σχεδόν φτάσει έναν από τους στόχους που θέσαμε στο Κεφάλαιο **4**, να αποδείξουμε όλα τα διαισθητικά αποτελέσματα του Κεφαλαίου **2** από τα αξιώματα του Zermelo. Μένουν μόνο δυο-τρία λεπτά σημεία, που τελικά όμως είναι σημαντικά: θα μας υποδείξουν ότι τα αξιώματα του Zermelo δεν φτάνουν, πρέπει να τα συμπληρώσουμε με ισχυρότερες αρχές κατασκευής συνόλων. Εδώ θα διατυπώσουμε και θα προσθέσουμε στην αξιωματική θεωρία **ZDC** το Αξιωμα Αντικαταστασης που ανακαλύφθηκε στις αρχές της δεκαετίας του '20, μια αρχή κατασκευής συνόλων τόσο αληθοφανή όσο και τα κατασκευαστικά αξιώματα (**I**) – (**VI**), αλλά πλούσια σε επακόλουθα. Επίσης θα εισαγάγουμε και θα διερευνήσουμε μερικές ακόμη αρχές κατασκευής συνόλων που συχνά περιλαμβάνονται ανάμεσα στα αξιώματα της συνολοθεωρίας. Με βάση μόνο ένα από τα ασθενέστερα πορίσματα του Αξιώματος Αντικατάστασης θα κατασκευάσουμε τον Ελαχιστο Κοσμο του Zermelo $\mathcal{Z}$, ένα απλούστατο σύνολο που περιέχει τους φυσικούς αριθμούς, το χώρο Baire, τους πραγματικούς αριθμούς και όλα τα σημαντικά αντικείμενα μελέτης των κλασικών μαθηματικών. Ό,τι έχουμε αποδείξει μέχρι στιγμής επιδέχεται ερμηνεία ως εάν το $\mathcal{Z}$ να αποτελούσε ολόκληρο τον κόσμο των μαθηματικών αντικειμένων, αν και στην πραγματικότητα το $\mathcal{Z}$ είναι απλώς ένα σύνολο—και μάλιστα σύνολο σχετικά μικρό και εύκολο στη σύλληψη! Ο κύριος στόχος μας σ' αυτό το κεφάλαιο είναι να καταλάβουμε το νόημα του Αξιώματος Αντικατάστασης, διερευνώντας τα πιο απλά και άμεσα πορίσματά του. Η μεγάλη δύναμη του πλήρους αξιώματος θα γίνει καταφανής στο επόμενο κεφάλαιο.

Από το (2) του **2.16**, αν το A είναι απαριθμητό σύνολο και για κάθε $n \geq 2$,

$$A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ φορές}},$$

τότε η ένωση $\bigcup_{n=2}^{\infty} A^n$ είναι επίσης απαριθμητό σύνολο. Ο προφανής τρόπος να αποδείξουμε αυτό από τα αξιώματα είναι να ορίσουμε πρώτα τα σύνολα A^n με την αναδρομή

$$\begin{aligned} f(0) &= A \times A, \\ f(n+1) &= f(n) \times A, \end{aligned} \tag{11-1}$$

έτσι ώστε $f(n) = A^{n+2}$ και

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A^{n+2} = \bigcup f[\mathbb{N}]. \tag{11-2}$$

Από το βασικό Θεώρημα του Cantor **2.10** συνάγεται (επαγωγικά) ότι κάθε $f(n) = A^{n+2}$ είναι απαριθμητό, και επομένως η ένωσή τους $\bigcup_{n=0}^{\infty} A^{n+2}$ είναι επίσης απαριθμητό σύνολο. Υπάρχει λάθος; Σίγουρα όχι με την επαγωγική απόδειξη, που είναι παρόμοια πολλών άλλων σ' αυτήν την περιοχή. Υπάρχει όμως κάποιο πρόβλημα με τον αναδρομικό ορισμό (11-1), που δεν δικαιολογείται με τη μορφή που του δώσαμε από το Θεώρημα Αναδρομής **5.6**. Για να εφαρμόσουμε το **5.6** χρειαζόμαστε ένα σύνολο E, μια συνάρτηση $h : E \to E$ στο E και κάποιο $a \in E$, τα οποία καθορίζουν τότε μία μοναδική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} f(0) &= a, \\ f(n+1) &= h(f(n)). \end{aligned} \tag{11-3}$$

Στην προκειμένη περίπτωση δεν υπάρχει προφανές E που περιέχει το A και όλα του τα γινόμενα A^n, και αντί της συνάρτησης h, έχουμε τον τελεστή

$$h(X) =_{\text{ορ}} X \times A, \tag{11-4}$$

που αντιστοιχίζει σε κάθε σύνολο X το γινόμενο $X \times A$ του X με το δοσμένο A. Για να δικαιολογήσουμε τον ορισμό (11-1), χρειαζόμαστε ένα θεώρημα αναδρομής που κυρώνει αναδρομικούς ορισμούς της μορφής (11-3), για κάθε αντικείμενο a και κάθε οριστικό τελεστή (μιας μεταβλητής) h. Μοιάζει αθώο, φυσική γενίκευση του Θεωρήματος Αναδρομής—και είναι ακριβώς αυτό— αλλά στην πραγματικότητα, τέτοιο αποτέλεσμα δεν μπορεί να αποδειχτεί αυστηρά από τα αξιώματα του Zermelo.

11.1. (**VIII**) **Αξίωμα Αντικατάστασης** (Replacement Axiom). *Για κάθε σύνολο A και κάθε οριστικό τελεστή μιας μεταβλητής H, η εικόνα*

$$H[A] =_{\text{ορ}} \{H(x) \mid x \in A\}$$

του A από τον H είναι σύνολο.

Ως αρχή κατασκευής συνόλων, το Αξίωμα Αντικατάστασης είναι σχεδόν προφανές, διαισθητικά τόσο αληθοφανές όσο και το Αξίωμα Διαχωρισμού. Αν ήδη έχουμε δεχτεί το A ως τελειωμένη ολότητα και ο H αντιστοιχίζει με οριστικό και αναμφισβήτητο τρόπο ένα αντικείμενο σε κάθε $x \in A$, τότε «κατασκευάζουμε» την εικόνα $H[A]$ «αντικαθιστώντας» κάθε $x \in A$ με το αντίστοιχο $H(x)$.

11.2. Αξιωματικά. Το αξιωματικό σύστημα **ZFDC** της **Θεωρίας Zermelo-Fraenkel** με **Εξαρτημένες Επιλογές** αποτελείται από τα αξιώματα της **ZDC** και το Αξίωμα Αντικατάστασης (**VIII**), συμβολικά

$$\mathbf{ZFDC} = \mathbf{ZDC} + \text{Αντικατάσταση} = (\mathbf{I}) - (\mathbf{VIII}).$$

Από δω και στο εξής θα χρησιμοποιούμε όλα τα αξιώματα της **ZFDC** χωρίς ιδιαίτερη μνεία. Θα εξακολουθήσουμε να σημειώνουμε με το σημάδι (**AC**) τα αποτελέσματα που οι αποδείξεις τους χρειάζονται το πλήρες Αξίωμα Επιλογής.[29]

Μέχρι τώρα έχουμε χρησιμοποιήσει απλούς οριστικούς τελεστές, αυτούς που μας δίνουν αμέσως τα αξιώματα όπως οι $\mathcal{P}(A)$ και $\bigcup\mathcal{E}$, και ρητούς συνδυασμούς τους, π.χ. το ζεύγος $(x, y) =_{\text{ορ}} \{\{x\},\ \{x, y\}\}$ του Kuratowski. Αφού όμως δεχτούμε το Αξίωμα Αντικατάστασης, οι οριστικοί τελεστές αρχίζουν να παίζουν πιο σημαντικό ρόλο στις αποδείξεις και θα αναφερθούμε σε μερικούς απ' αυτούς που δεν επιδέχονται τόσο απλούς ορισμούς. Στην επόμενη, τετριμμένη Πρόταση περιγράφουμε τη βασική μέθοδο ορισμού τελεστών που χρειαζόμαστε, κυρίως για να τονίσουμε τη σημασία της.

11.3. Πρόταση. *Αν οι C και P είναι οριστικές συνθήκες n και $n+1$ μεταβλητών αντιστοίχως και*

$$(\forall \vec{x})[C(\vec{x}) \Longrightarrow (\exists! w)P(\vec{x}, w)], \tag{11-5}$$

τότε ο n-αδικός τελεστής

$$F(\vec{x}) =_{\text{ορ}} \begin{cases} \text{το μοναδικό } w \text{ τέτοιο ώστε } P(\vec{x}, w), & \text{αν } C(\vec{x}), \\ \emptyset, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{11-6}$$

είναι επίσης οριστικός.

Στις εφαρμογές επικαλούμαστε αυτή την παρατήρηση απλώς θέτοντας

$$F(\vec{x}) =_{\text{ορ}} \text{το μοναδικό } w \text{ τέτοιο ώστε } P(\vec{x}, w) \quad (C(\vec{x})), \tag{11-7}$$

αφού πρώτα επαληθεύσουμε την (11-5), χωρίς να προσδιορίσουμε την άσχετη τιμή του F έξω από το πεδίο που μας ενδιαφέρει. Οι εφαρμογές του Αξιώματος Αντικατάστασης συχνά χρειάζονται στην απόδειξη του (11-5) για συγκεκριμένα C και P.

11.4. Άσκηση. *Για κάθε μονομελή οριστικό τελεστή F, ο τελεστής*

$$G(X) =_{\text{ορ}} F[X] = \{F(x) \mid x \in X\} \quad (\mathrm{Set}(X))$$

είναι επίσης οριστικός.

Το επόμενο θεμελιακό αποτέλεσμα του Αξιώματος Αντικατάστασης γενικεύει το Θεώρημα Υπερπεπερασμένης Αναδρομής με δύο τρόπους: επιτρέποντας οριστικό τελεστή όπου το ασθενέστερο θεώρημα δεχόταν μόνο συνάρτηση και εδραιωμένο γράφημα όπου το ασθενέστερο θεώρημα δεχόταν μόνο καλά διατεταγμένο χώρο. Η δεύτερη γενίκευση δεν χρειάζεται το Αξίωμα Αντικατάστασης από μόνη της, Πρόβλημα **x8.11**.

[29] Το Αξίωμα Αντικατάστασης διατυπώθηκε ανεξάρτητα από τους Thoralf Skolem και Abraham Fraenkel στη δεκαετία 1920 – 30.

11.5. Θεώρημα Εδραιωμένης Αναδρομής. *Για κάθε εδραιωμένο γράφημα G με σχέση ακμών $\to$ και κάθε οριστικό τελεστή H, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f : G \to f[G]$ που ικανοποιεί την εξίσωση*

$$f(x) = H(f \restriction \{y \in G \mid x \to y\}, x).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Όπως και στην απόδειξη του **7.24**, θα δείξουμε πρώτα ένα λήμμα που θα μας δώσει το κατάλληλο σύνολο προσεγγίσεων της συνάρτησης που θέλουμε. Αντί για τα αρχικά τμήματα του G (που δεν έχουν νόημα στο τυχόν γράφημα), αυτές οι προσεγγίσεις έχουν πεδία ορισμού τα «κλειστά προς τα κάτω» υποσύνολα του G. Θα αναφερθούμε στην κληρονομική κλειστότητα $\Rightarrow$ του G, ορισμένη στο **6.34**, παραλείποντας στο συμβολισμό τους δείκτες, εφόσον εργαζόμαστε μόνο με ένα γράφημα. Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης τα αντίστροφα βέλη,

$$u \leftarrow t \iff_{\text{ορ}} t \to u \iff u \text{ είναι ακριβώς κάτω από το } t, \quad (11\text{-}8)$$
$$x \Leftarrow t \iff_{\text{ορ}} t \Rightarrow x \iff x \text{ είναι κάτω από το } t. \quad (11\text{-}9)$$

Λήμμα. *Για κάθε κόμβο $t \in G$, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση σ με πεδίο ορισμού το σύνολο $\{x \in G \mid x \Leftarrow t\}$ και τέτοια ώστε*

$$\sigma(x) = H(\sigma \restriction \{y \in G \mid y \leftarrow x\}, x) \quad (x \Leftarrow t). \quad (11\text{-}10)$$

Απόδειξη. Προς απαγωγή σε άτοπο, έστω t ελαχιστικός κόμβος του G όπου το Λήμμα δεν αληθεύει. Επομένως, για κάθε $u \leftarrow t$, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση σ_u που ικανοποιεί την ταυτότητα

$$\sigma_u(x) = H(\sigma_u \restriction \{y \in G \mid y \leftarrow x\}, x) \quad (x \Leftarrow u). \quad (11\text{-}11)$$

Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$[x \Leftarrow u \leftarrow t \,\&\, x \Leftarrow v \leftarrow t] \Longrightarrow \sigma_u(x) = \sigma_v(x); \quad (11\text{-}12)$$

επειδή αν το x ήταν ελαχιστικό αντιπαράδειγμα της (11-12) στο G, τότε

$$\begin{aligned} \sigma_u(x) &= H(\sigma_u \restriction \{y \in G \mid y \leftarrow x\}, x) && \text{από την (11-11)}, \\ &= H(\sigma_v \restriction \{y \in G \mid y \leftarrow x\}, x) && \text{από την επιλογή του } x, \\ &= \sigma_v(x) && \text{από την (11-11) για το } \sigma_v. \end{aligned}$$

Ο τελεστής $u \mapsto \sigma_u$ που αντιστοιχίζει αυτήν την σ_u σε κάθε κόμβο $u \leftarrow t$ είναι οριστικός και επομένως η εικόνα του είναι σύνολο από το Αξίωμα Αντικατάστασης. Θέτουμε

$$\sigma_1 =_{\text{ορ}} \bigcup \{\sigma_u \mid u \leftarrow t\},$$

και παρατηρούμε ότι το σ_1 είναι συνάρτηση από την (11-12), και επιπλέον, από τον ορισμό της,

$$\sigma_1(x)\downarrow \iff (\exists u)[x \Leftarrow u \leftarrow t].$$

Με μια ακόμη εφαρμογή του Αξιώματος Αντικατάστασης, το

$$\sigma_2 =_{\text{ορ}} \{(v, H(\sigma_v \restriction \{x \mid x \leftarrow v\}), x) \mid v \leftarrow t \,\&\, \neg(\exists u)[v \Leftarrow u \leftarrow t]\}$$

είναι σύνολο, και από τον ορισμό του είναι και αυτό συνάρτηση με πεδίο ορισμού ξένο απ' αυτό της σ_1. Άρα το

$$\sigma =_{\text{ορ}} \sigma_1 \cup \sigma_2$$

είναι συνάρτηση, και

$$\begin{aligned} \sigma(x)\downarrow &\iff (\exists u)[t \to u \,\&\, u \Rightarrow x] \vee t \to u \\ &\iff t \Rightarrow x \quad (\text{από το } \mathbf{6.35}). \end{aligned}$$

Επιπλέον, η σ ικανοποιεί την ταυτότητα (11-10) επειδή την ικανοποιούν ξεχωριστά οι σ_1 και σ_2. Τελικά, με το ίδιο επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη της (11-12), μπορούμε να δείξουμε ότι το πολύ μία συνάρτηση σ με πεδίο ορισμού το $\{x \in G \mid x \Leftarrow t\}$ μπορεί να ικανοποιεί την (11-10), και αυτό τελειώνει την απόδειξη του Λήμματος. ⊣ (Λήμμα)

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα, όπως αποδείξαμε και την **7.24**, εφαρμόζουμε το Λήμμα στο «επόμενο γράφημα»

$$\begin{aligned} \text{Succ}(G) &=_{\text{ορ}} G \cup \{t^*\}, \\ x \to_{\text{Succ}(G)} y &\iff_{\text{ορ}} x \to y \vee [x = t^* \,\&\, y \in G], \end{aligned}$$

που έχει ακριβώς έναν κόμβο περισσότερο από το G, στην κορυφή. ⊣

11.6. Πόρισμα. (1) *Για κάθε καλά διατεταγμένο χώρο U και κάθε διμελή οριστικό τελεστή H, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f : U \to f[U]$ που ικανοποιεί την ταυτότητα*

$$f(x) = H(f \restriction \mathbf{seg}(x), x) \quad (x \in U). \tag{11-13}$$

(2) *Για κάθε αντικείμενο a και κάθε μονομελή οριστικό τελεστή F, υπάρχει ακριβώς μία ακολουθία $(n \mapsto a_n)$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις*

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = F(a_n) \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{11-14}$$

Η $(n \mapsto a_n)$ είναι η **τροχιά** (orbit) του a από τον F.

Απόδειξη. Για το (1) εφαρμόζουμε το **11.5** στο γράφημα $(\text{Field}(U), >_U)$, και για το (2) στο γράφημα $(\mathbb{N}, \to)$, όπου

$$n \to m \iff_{\text{ορ}} n = m + 1. \quad ⊣$$

11.7. Άσκηση. *Ποιον οριστικό τελεστή H χρησιμοποιούμε για να δείξουμε το μέρος (2) του Πορίσματος;*

Η τροχιά ενός συνόλου A από τον τελεστή της ένωσης φανερώνει την κρυμμένη $\in$-δομή του A, φέρνοντας στην επιφάνεια τα μέλη του A, τα μέλη των μελών του A, τα μέλη αυτών κ.λπ.

11.8. Ορισμός. Μια κλάση (ή σύνολο) M είναι **μεταβατική** (transitive) αν $\bigcup M \subseteq M$, ή ισοδύναμα

$$(\forall x \in M)(\forall t \in x)[t \in M],$$

ή ακόμη απλούστερα $x \in M \Longrightarrow x \subseteq M$.

11.9. Άσκηση. *Τα σύνολα* $\emptyset$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, *το σύνολο*

$$\mathbb{N}_0 = \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\{\emptyset\}\},\ \dots\ \} \tag{11-15}$$

που απαιτείται από το Αξίωμα Απείρου και κάθε κλάση που περιέχει μόνο άτομα είναι μεταβατικά.

11.10. Θεώρημα Μεταβατικής Κλειστότητας. *Κάθε σύνολο A είναι μέλος μεταβατικού συνόλου M, και μάλιστα υπάρχει ελάχιστο* (για την $\subseteq$) *μεταβατικό σύνολο $M = \mathrm{TC}(A)$ τέτοιο ώστε $A \in \mathrm{TC}(A)$.* Το $\mathrm{TC}(A)$ είναι η **μεταβατική κλειστότητα** του A.

Απόδειξη. Από το (2) του **11.6**, υπάρχει μοναδική ακολουθία $n \mapsto \mathrm{TC}_n(A)$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \mathrm{TC}_0(A) &= \{A\}, \\ \mathrm{TC}_{n+1}(A) &= \bigcup \mathrm{TC}_n(A), \end{aligned} \tag{11-16}$$

και θέτουμε

$$\mathrm{TC}(A) =_{\text{ορ}} \textstyle\bigcup_n \mathrm{TC}_n(A). \tag{11-17}$$

Προφανώς $A \in \mathrm{TC}(A)$ και το $\mathrm{TC}(A)$ είναι μεταβατικό, επειδή

$$u \in \mathrm{TC}_n(A) \Longrightarrow u \subseteq \bigcup \mathrm{TC}_n(A) = \mathrm{TC}_{n+1}(A).$$

Αν το M είναι μεταβατικό και $A \in M$, τότε $\mathrm{TC}_0(A) = \{A\} \subseteq M$, και επαγωγικά

$$\mathrm{TC}_n(A) \subseteq M \Longrightarrow \mathrm{TC}_{n+1}(A) = \bigcup \mathrm{TC}_n(A) \subseteq \bigcup M \subseteq M,$$

έτσι ώστε τελικά $\mathrm{TC}(A) = \bigcup_n \mathrm{TC}_n(A) \subseteq M$. $\dashv$

11.11. Άσκηση. *Αν το A είναι μεταβατικό, τότε* $\mathrm{TC}(A) = A \cup \{A\}$.

Για να καταλάβουμε καλύτερα τη φράση «φανερώνει την κρυμμένη $\in$-δομή» της A που χρησιμοποιήσαμε πιο πάνω, θεωρούμε τις εξής φυσικές έννοιες.

11.12. Ορισμός. Το σύνολο A είναι *κληρονομικά ελεύθερο από άτομα* ή **αγνό** (pure) αν ανήκει σε κάποιο μεταβατικό σύνολο που δεν περιέχει άτομα, ισοδύναμα αν η μεταβατική του κλειστότητα $\mathrm{TC}(A)$ δεν περιέχει άτομα. Το σύνολο A είναι **κληρονομικά πεπερασμένο** (hereditarily finite) αν ανήκει σε κάποιο μεταβατικό, πεπερασμένο σύνολο· ισοδύναμα αν το $\mathrm{TC}(A)$ είναι πεπερασμένο. Το σύνολο A είναι **κληρονομικά απαριθμητό** αν ανήκει σε κάποιο μεταβατικό, απαριθμητό σύνολο· ισοδύναμα αν το $\mathrm{TC}(A)$ είναι απαριθμητό.

Η ουσία αυτών των ορισμών είναι ότι το $\{\{a\}\}$ είναι μεν σύνολο αλλά όχι αγνό σύνολο αν το a είναι άτομο, επειδή χρειαζόμαστε το a για να το κατασκευάσουμε· το $\{\mathbb{N}\}$ είναι πεπερασμένο αλλά όχι κληρονομικά πεπερασμένο επειδή χρειαζόμαστε όλους τους φυσικούς αριθμούς για να το κατασκευάσουμε· το $\{\mathcal{N}\}$ είναι απαριθμητό αλλά όχι κληρονομικά απαριθμητό, επειδή πρέπει να «συμπεριλάβουμε σε ολότητα» την αναπαρίθμητη συλλογή των σημείων του $\mathcal{N}$ πριν κατασκευάσουμε το μονοσύνολο $\{\mathcal{N}\}$ με μια τελευταία, τετριμμένη πράξη συλλογής. Να το πούμε διαφορετικά, το $\{\mathcal{N}\}$ δεν είναι κληρονομικά απαριθμητό επειδή «η έννοιά του περιέχει» αναπαρίθμητο πλήθος αντικειμένων, τα μέλη του μοναδικού του μέλους, $\mathcal{N}$.

11.13. Άσκηση. *Η Αρχή Αγνότητας* **3.25** *είναι ισοδύναμη με τον ισχυρισμό ότι όλα τα σύνολα είναι αγνά.*

11.14. Άσκηση. *Ένα μεταβατικό σύνολο είναι κληρονομικά πεπερασμένο ακριβώς αν είναι πεπερασμένο, και κληρονομικά απαριθμητό ακριβώς αν είναι απαριθμητό.*

Θεωρούμε τώρα τη σύγχρονη κλειστότητα συνόλου για τους τελεστές της ένωσης και του δυναμοσυνόλου.

11.15. Θεώρημα (Βασικό Λήμμα Κλειστότητας). *Για κάθε σύνολο I και κάθε φυσικό αριθμό n, έστω $M_n = M_n(I)$ το σύνολο που ορίζεται με την αναδρομή*

$$M_0 = I, \quad M_{n+1} = M_n \cup \bigcup M_n \cup \mathcal{P}(M_n). \tag{11-18}$$

Η **βασική κλειστότητα** *του I είναι η ένωση*

$$M = M(I) =_{\text{ορ}} \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n(I), \tag{11-19}$$

και έχει τις εξής ιδιότητες:

(1) Το M είναι μεταβατικό σύνολο που περιέχει το κενό $\emptyset$ και το I, είναι κλειστό για τους τελεστές του ζεύγους $\{x, y\}$, της ένωσης $\bigcup \mathcal{E}$ και του δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(A)$ και περιέχει κάθε υποσύνολο καθενός από τα μέλη του.

(2) Το M είναι το ελάχιστο (για την $\subseteq$) *μεταβατικό σύνολο που περιέχει το I και είναι κλειστό για τους τελεστές $\{x, y\}$, $\bigcup \mathcal{E}$ και $\mathcal{P}(X)$.*

(3) Αν το I είναι αγνό και μεταβατικό, τότε κάθε M_n είναι επίσης αγνό και μεταβατικό, και ικανοποιεί την εξίσωση

$$M_{n+1} = \mathcal{P}(M_n). \tag{11-20}$$

Έπεται ότι το M είναι αγνό, μεταβατικό σύνολο.

Αποδειξη. (1) Από τον ορισμό, $\emptyset, I \in M_1 \subseteq M$. Αν $x, y \in M$, τότε από το προφανές $M_n \subseteq M_{n+1}$, υπάρχει κάποιο m τέτοιο ώστε $\{x, y\} \subseteq M_m$, άρα $\{x, y\} \in M_{m+1}$. Το κλειδί για τα υπόλοιπα είναι η συμπερίληψη

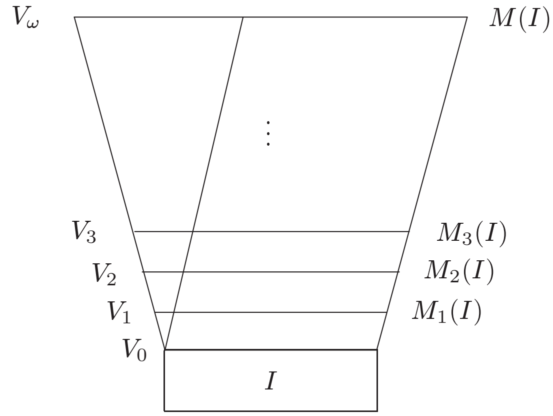
$$x \in M_n \Longrightarrow x \subseteq \bigcup M_n \subseteq M_{n+1} \subseteq M,$$

από την οποία συνάγεται αμέσως ότι το M είναι μεταβατικό. Με την ίδια μέθοδο,

$$x \in M_n \Longrightarrow \bigcup x \subseteq \bigcup M_{n+1} \subseteq M_{n+2},$$

άρα $x \in M_n \Longrightarrow \bigcup x \in M_{n+3} \subseteq M$ και το M είναι κλειστό για τον τελεστή $\bigcup x$. Το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι το M είναι κλειστό για τον $\mathcal{P}(X)$, και η τελευταία πρόταση προκύπτει απ' αυτή την κλειστότητα και τη μεταβατικότητα.

[30] Η απεικόνιση κόσμων συνόλων με κώνους είναι παραδοσιακή αλλά παραπλανητική: τα διαδοχικά δυναμοσύνολα μεγαλώνουν «υπερεκθετικά» στο πλήθος, έτσι που θα ήταν πιο κοντά στην αλήθεια να τα απεικονίζαμε σαν κώνους με καμπύλες, υπερεκθετικές πλευρές.



Διαγραμμα **11.1**. Λογαριθμικές[30] αποδόσεις των $M(I)$ και V_ω.

(2) Κάθε M' κλειστό για τους $\{x,y\}$ και $\bigcup\mathcal{E}$ είναι επίσης κλειστό για τον $A\cup B = \bigcup\{A,B\}$· και αν το M' είναι επίσης κλειστό για τον $\mathcal{P}(X)$, τότε επαγωγικά (εύκολα) κάθε $M_n \in M'$, και άρα $M \subseteq M'$ από τη μεταβατικότητα του M'.

(3) Αν το I είναι μεταβατικό χωρίς άτομα, τότε κάθε M_n είναι επίσης μεταβατικό χωρίς άτομα, με μια τετριμμένη επαγωγή στο n. Απ' αυτό προκύπτει ότι το M είναι μεταβατικό χωρίς άτομα, άρα αγνό, αλλά επίσης και ότι $M_n \cup \bigcup M_n \subseteq \mathcal{P}(M_n)$, έτσι ώστε $M_{n+1} = \mathcal{P}(M_n)$. ⊣

11.16. Άσκηση. *Σωστό ή λάθος; Για κάθε μεταβατικό σύνολο X, $X \subseteq \mathcal{P}(X)$.*

11.17. Άσκηση. *Αν $I \subseteq J$, τότε για κάθε n, $M_n(I) \subseteq M_n(J)$, και επομένως*

$$I \subseteq J \Longrightarrow M(I) \subseteq M(J).$$

11.18. Τα εδραιωμένα, αγνά, κληρονομικά πεπερασμένα σύνολα (Pure, grounded, hereditarily finite sets). Η ελάχιστη βασική κλειστότητα είναι αυτή του κενού συνόλου, $M(\emptyset) \subseteq M(I)$, για κάθε I. Με τον κλασικό συμβολισμό (που θα εξηγήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο), $M_n(\emptyset) = V_n$, έτσι ώστε τα V_n και η ένωσή τους προσδιορίζονται από τις εξισώσεις

$$V_0 = \emptyset, \quad V_{n+1} = \mathcal{P}(V_n), \quad V_\omega =_{\text{ορ}} \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n = M(\emptyset). \tag{11-21}$$

Για παράδειγμα, $\emptyset \in V_1$, $\{\emptyset\} \in V_2$ και $\{\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\} \in V_4$! Τα σύνολα αυτά απεικονίζονται στα αριστερά στο Διάγραμμα **11.1**. Το σύνολο V_ω είναι εδραιωμένο, αγνό και μεταβατικό, κάθε V_n είναι πεπερασμένο με εύκολη επαγωγή, έτσι που κάθε σύνολο στο V_ω είναι εδραιωμένο, αγνό και κληρονομικά πεπερασμένο, και βέβαια το V_ω είναι απαριθμητό. Αυτά είναι τα σύνολα που κατασκευάζονται «από το τίποτα» (κυριολεκτικά, από το κενό σύνολο) με πεπερασμένη επανάληψη της συμπερίληψης σε ολότητα (περιτύλιξης με αγκύλες!) μερικών από τα αντικείμενα που έχουν ήδη κατασκευαστεί.

Οι ιδιότητες κλειστότητας του $M(I)$ που απαριθμήσαμε στο (1) του **11.15** είναι ακριβώς αυτές που απαιτούν τα αξιώματα (**II**) – (**V**) από τον κόσμο $\mathcal{W}$, σύμφωνα με την ανάλυση στο **3.26**, και αν το σύνολο $\mathbb{N}_0$ της (11-15) που εγγυάται το Αξίωμα Απείρου (**VI**) είναι υποσύνολο του I, τότε επίσης $\mathbb{N}_0 \in M(I)$. Και επειδή το $M(I)$ είναι μεταβατικό, για όλα τα $A, B \in M(I)$,

$$A \neq B \Longrightarrow (\exists t \in M(I))[t \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)], \tag{11-22}$$

δηλαδή ισχύει στο $M(I)$ ακριβώς αυτό που το Αξίωμα Έκτασης απαιτεί από τον κόσμο $\mathcal{W}$ σύμφωνα με την (3-12). Αυτά προτείνουν ότι αν αλλάξουμε το νόημα του «αντικειμένου» έτσι ώστε να σημαίνει «μέλος του $M(I)$» για κάποιο $I \supseteq \mathbb{N}_0$, τότε κάθε απόδειξη από τα αξιώματα (**I**) – (**VI**) μπορεί να ερμηνευτεί ως επιχείρημα για τα μέλη του $M(I)$ αντί για όλα τα αντικείμενα, που στο τέλος αποδείχνει κάποιο θεώρημα για το $M(I)$ αντί του $\mathcal{W}$. Είναι σημαντική ιδέα, που αξίζει γενίκευση και όνομα.

11.19. Ορισμός. Η μεταβατική κλάση M είναι **κόσμος του Zermelo** αν είναι κλειστή για τους τελεστές ζεύγους $\{x, y\}$, ένωσης $\bigcup \mathcal{E}$ και δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(X)$ και περιέχει το σύνολο $\mathbb{N}_0$ ορισμένο από την (11-15). Ο ελάχιστος κόσμος του Zermelo είναι ο $\mathcal{Z} = M(\mathbb{N}_0)$, που καθορίζεται από τις εξισώσεις

$$\mathcal{Z}_0 = \mathbb{N}_0, \quad \mathcal{Z}_{n+1} = \mathcal{P}(\mathcal{Z}_n), \quad \mathcal{Z} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{Z}_n. \tag{11-23}$$

11.20. Άσκηση. *Ο κόσμος $\mathcal{W}$ όλων των αντικειμένων είναι κόσμος του Zermelo. Κάθε κόσμος του Zermelo περιέχει το κενό σύνολο και κάθε υποσύνολο καθενός από τα μέλη του.*

Κάθε κόσμος M του Zermelo είναι *πρότυπο* των αξιωμάτων (**I**) – (**VI**), και μάλιστα πολύ ειδικό πρότυπο εφόσον αποδίδει τις φυσικές ερμηνείες στις βασικές έννοιες του «τι είναι σύνολο» και του «ανήκειν»—περιορίζει μόνο το πεδίο αντικειμένων στο οποίο ερμηνεύουμε αξιώματα και θεωρήματα. Ο ισχυρισμός ότι λογικά επακόλουθα των αξιωμάτων (**I**) – (**VI**) αληθεύουν όταν τα ερμηνεύουμε σε οποιονδήποτε κόσμο του Zermelo καλείται *μεταθεώρημα*, θεώρημα που αφορά θεωρήματα. Για να διατυπώσουμε με ακρίβεια και να αποδείξουμε με αυστηρότητα γενικά αποτελέσματα αυτού του είδους, χρειαζόμαστε μεθόδους και αποτελέσματα από τη *Μαθηματική Λογική*. Σε συγκεκριμένα παραδείγματα όμως, λήμμα προς λήμμα και πρόταση με πρόταση, είναι συνήθως απλό να δούμε ακριβώς για ποια ιδιότητα του κόσμου $\mathcal{W}$ συζητάμε και να αποδείξουμε κατευθείαν την ερμηνεία της σε κάθε κόσμο του Zermelo: επειδή, πράγματι, χρησιμοποιούμε στις αποδείξεις μας τα αξιώματα ως ιδιότητες κλειστότητας του κόσμου $\mathcal{W}$, για τον οποίο δεν έχουμε αποδεχτεί τίποτα περισσότερο από το ότι έχει αυτές τις ιδιότητες.

11.21. Πρόταση. *Κάθε κόσμος του Zermelo M είναι κλειστός για τον τελεστή ζεύγους του Kuratowski (x, y) που ορίστηκε στην* (4-1)*, και για τους τελεστές Καρτεσιανού γινομένου $A \times B$, συναρτησιακού χώρου $(A \to B)$, και* *χώρου μερικών συναρτήσεων* $(A \rightharpoonup B)$, *αν αυτοί οριστούν από το ζεύγος Kuratowski. Επιπλέον, αν* $A \in M$ *και* $\eta \sim$ *είναι σχέση ισοδυναμίας στο* A, *τότε η* $\sim$ *και το πηλίκο* $[\![A/{\sim}]\!]$ (βλ. **4.12**) *επίσης ανήκουν στο* M.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το ζεύγος Kuratowski $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ δύο στοιχείων του M είναι προφανώς στο M, χρησιμοποιώντας τρεις φορές την υπόθεση ότι το M είναι κλειστό για τον $\{x, y\}$. Αν $A, B \in M$, τότε $A \cup B = \bigcup\{A, B\}$, και ακολουθώντας την απόδειξη του **4.2**

$$A \times B \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \in M,$$

έτσι ώστε $A \times B \in M$. Τα υπόλοιπα αποδείχνονται με παρόμοιο τρόπο. ⊣

11.22. Άσκηση. *Κάθε κόσμος του Zermelo* M *περιέχει σύστημα Peano, σύμφωνα με τον ορισμό στο* **5.1**.

11.23. Πρόταση. (1) *Το Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών αληθεύει σε κάθε κόσμο του Zermelo* M, *με την εξής ερμηνεία: αν* $a \in A \in M$, $P \subseteq A \times A$, $P \in M$, *και* $\mathbb{N} \in M$ *είναι κάποιο σύστημα Peano στο* M, *τότε*

$$a \in A \,\&\, (\forall x \in A)(\exists y \in A)P(x, y)$$
$$\Longrightarrow (\exists f : \mathbb{N} \to A)[f \in M \,\&\, f(0) = a \,\&\, (\forall n \in \mathbb{N})P(f(n), f(n+1))].$$

(2) (**AC**) *Το Αξίωμα Επιλογής αληθεύει σε κάθε κόσμο του Zermelo* M, *με την εξής ερμηνεία, κατά την* **8.4**: *για κάθε οικογένεια* $\mathcal{E} \in M$ *μη κενών και ξένων ανα δύο συνόλων, υπάρχει κάποιο σύνολο* $S \in M$ *που είναι σύνολο επιλογής για την* $\mathcal{E}$, *δηλαδή*

$$S \subseteq \bigcup \mathcal{E}, \quad (\forall X \in \mathcal{E})(\exists u)[S \cap X = \{u\}].$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) Αν ισχύει η υπόθεση της συνεπαγωγής που θέλουμε να αποδείξουμε, τότε από το **DC** υπάρχει κάποια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$ τέτοια ώστε $f(0) = a$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $P(f(n), f(n+1))$. Επειδή $(\mathbb{N} \to A) \in M$, έχουμε επίσης $f \in M$ από τη μεταβατικότητα.

Το (2) αποδεικνύεται με ανάλογο τρόπο. ⊣

Επιλέξαμε συγκεκριμένες εκδοχές των αρχών επιλογής για την ευκολία της απόδειξης, αλλά όλες οι ισοδύναμες εκδοχές τους επίσης αληθεύουν σε κάθε κόσμο του Zermelo M. Αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε κατ' ευθείαν, ή παρατηρώντας ότι οι αποδείξεις ισοδυναμίας που δώσαμε «επιδέχονται ερμηνεία μέσα στο M».

11.24. Άσκηση. (**AC**) *Για κάθε κόσμο του Zermelo* M, *αν* $A, B \in M$ *και* P *είναι οποιαδήποτε διμελής οριστική συνθήκη, τότε*

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)P(x, y)$$
$$\Longrightarrow (\exists f \in M)[f : A \to B \,\&\, (\forall x \in A)P(x, f(x))]. \quad (11\text{-}24)$$

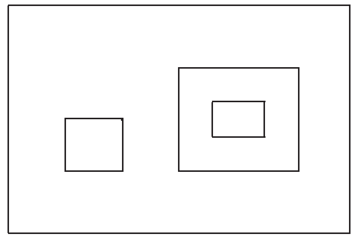
11.25. Ο ελάχιστος κόσμος του Zermelo $\mathcal{Z}$. Για να διασαφηνίσουμε το ζήτημα, θεωρούμε τον συγκεκριμένο, ελάχιστο κόσμο του Zermelo, $\mathcal{Z}$. Πρόκειται για ένα αγνό, μεταβατικό σύνολο, που κατασκευάσαμε ξεκινώντας με το απλούστατο $\mathbb{N}_0$ και επαναλαμβάνοντας άπειρες φορές την πράξη του δυναμοσυνόλου, κάπως όπως κατασκευάζουμε και τους φυσικούς αριθμούς ξεκινώντας με το 0 και επαναλαμβάνοντας άπειρες φορές την πράξη του επόμενου. Μπορούμε να κατανοήσουμε τα μέλη του $\mathcal{Z}$ ως ακριβώς τα αντικείμενα που εγγυώνται τα αξιώματα (**I**) – (**VI**), τα οποία εκφράζουν ιδιότητες κλειστότητας που ικανοποιεί το $\mathcal{Z}$. Οι φυσικές ερμηνείες των **DC** και **AC** επίσης αληθεύουν στο $\mathcal{Z}$, η δεύτερη, βέβαια, αν δεχτούμε ότι αληθεύει στον κόσμο $\mathcal{W}$. Με βάση τις ιδιότητες κλειστότητας των κόσμων του Zermelo που έχουμε ήδη αποδείξει, αν ξανακοιτάξουμε τις αποδείξεις στα Κεφάλαια **5**, **6** και **10** και στο Παράρτημα **A** θα δούμε ότι το $\mathcal{Z}$ περιέχει όχι μόνο το συγκεκριμένο σύστημα φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ που κατασκευάσαμε στο Κεφάλαιο **5**, αλλά και το χώρο Baire που ορίζεται με αυτό το $\mathbb{N}$ και τα συγκεκριμένα συστήματα ρητών και πραγματικών αριθμών που ορίζονται στο Παράρτημα **A**. Από τα θεωρήματα μοναδικότητας που συνοδεύουν αυτές τις κατασκευές, καθένα απ' αυτά τα συστήματα απεικονίζει την ανάλογη διαισθητική έννοια τόσο πιστά όσο και κάθε άλλο, έτσι ώστε μπορούμε να πούμε ότι το $\mathcal{Z}$ περιέχει τους φυσικούς, το χώρο Baire, τους ρητούς και τους πραγματικούς.

Αν συνδυάσουμε τώρα αυτές τις παρατηρήσεις με γνωστά συμπεράσματα και προτάσεις των κλασικών μαθηματικών, δεν είναι δύσκολο να κατασκευάσουμε ένα πειστικό επιχείρημα ότι *όλα τα αντικείμενα μελέτης της κλασικής άλγεβρας, της ανάλυσης, της συναρτησιακής ανάλυσης, της τοπολογίας, της πιθανοθεωρίας, των διαφορικών εξισώσεων κ.λπ. μπορούν να βρεθούν (μέχρις ισομορφισμού) στο* $\mathcal{Z}$. Πολλά από τα θεμελιακά αντικείμενα της γενικής συνολοθεωρίας επίσης υπάρχουν στο $\mathcal{Z}$, όλα όσα έχουμε κατασκευάσει πριν απ' αυτό το κεφάλαιο, π.χ. στην ανάπτυξη της θεωρίας μερικά και καλά διατεταγμένων χώρων. Σαν σύνθημα: **τα κλασικά μαθηματικά και η απαραίτητη για τη μελέτη τους θεωρία συνόλων, επιδέχονται ερμηνεία σαν όλα τα μαθηματικά αντικείμενα να ήταν μέλη του** $\mathcal{Z}$.

Το ίδιο ισχύει βέβαια για κάθε κόσμο του Zermelo, αλλά ο συγκεκριμένος, απλός ορισμός του $\mathcal{Z}$ μας επιτρέπει να αναλύσουμε τη δομή του και να μελετήσουμε τις ειδικές ιδιότητες των μελών του. Για παράδειγμα, κανένα μέλος του $\mathcal{Z}$ δεν ανήκει στον εαυτό του: επειδή κανένα $X \in \mathbb{N}_0$ δεν ικανοποιεί την $X \in X$ (εύκολα), και αν (προς απαγωγή σε άτοπο) το n είναι ελάχιστο ώστε να υπάρχει κάποιο $X \in X \in \mathcal{Z}_{n+1}$, τότε $X \in X \subseteq \mathcal{Z}_n$ από τον ορισμό, έτσι ώστε $X \in \mathcal{Z}_n$, ενάντια στην επιλογή του n. Αυτό μάλλον ευχάριστο είναι, είχαμε προβλήματα με σύνολα που ανήκουν στον εαυτό τους· όμως η επαναληπτική κατασκευή του $\mathcal{Z}$ συνεπάγεται μια πολύ ισχυρότερη ιδιότητα για τα μέλη του που ανακάλυψε ο von Neumann.

11.26. Ορισμός. Ένα αντικείμενο x είναι **κακά θεμελιωμένο** (ill founded) αν κάποια φθίνουσα $\in$-αλυσίδα αρχίζει με αυτό, δηλαδή αν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ τέτοια ώστε

$$x = f(0) \ni f(1) \ni f(2) \ni \cdots .$$



Διαγραμμα **11.2**. Το $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ σαν απογοητευτικό δώρο.

Αντικείμενα που δεν είναι κακά θεμελιωμένα καλούνται **καλά θεμελιωμένα** (well founded) ή **εδραιωμένα** (grounded). Αν $X \in X$, τότε $X \ni X \ni X \ni \cdots$, και επομένως το X είναι κακά θεμελιωμένο. Το Πρόβλημα **x11.14** δίνει χαρακτηρισμό των κακά θεμελιωμένων συνόλων κατευθείαν από τη σχέση $\in$, με τρόπο που μοιάζει γενίκευση της ιδιότητας $X \in X$.

11.27. Άσκηση. *Τα άτομα, το κενό $\emptyset$ και το $\mathbb{N}_0$ είναι εδραιωμένα. Ένα σύνολο X είναι εδραιωμένο αν και μόνον αν κάθε μέλος του X είναι εδραιωμένο, αν και μόνον αν το δυναμοσύνολό του είναι εδραιωμένο. Η κλάση όλων των εδραιωμένων συνόλων είναι μεταβατική.*

11.28. Πρόταση. *Η βασική κλειστότητα $M(I)$ κάθε εδραιωμένου συνόλου I είναι εδραιωμένη. Ειδικότερα, ο ελάχιστος κόσμος του Zermelo $\mathcal{Z}$ και όλα του τα μέλη είναι εδραιωμένα.*

Αποδειξη. Δεχόμαστε ότι το I είναι εδραιωμένο και ότι (προς απαγωγή σε άτοπο) το n είναι ελάχιστο ώστε το M_n να είναι κακά θεμελιωμένο και έστω $M_n \ni x_1 \ni \cdots$ φθίνουσα $\in$-αλυσίδα. Από την υπόθεση, $n > 0$. Επειδή οι υποθέσεις $x_1 \in M_{n-1}$ και $x_1 \in y \in M_{n-1}$ αντιτίθενται στην επιλογή του n, πρέπει να ισχύει το $x_1 \subseteq M_{n-1}$, άρα $x_2 \in M_{n-1}$ και η ύπαρξη της φθίνουσας $\in$-αλυσίδας $M_{n-1} \ni x_2 \ni \cdots$ αντιτίθεται πάλι στην επιλογή του n. Προκύπτει ότι το M είναι εδραιωμένο, επειδή κάθε φθίνουσα αλυσίδα $M \ni x_1 \ni \cdots$ θα έδειχνε επίσης ότι κάποιο M_n είναι κακά θεμελιωμένο, συγκεκριμένα το M_n που περιέχει το x_1. Το πόρισμα για το $\mathcal{Z}$ ισχύει επειδή το $\mathbb{N}_0$ είναι εδραιωμένο.$\dashv$

Στη γνωστή, σαχλή φάρσα, ενθουσιασμένος ο Γιαννάκης στη γιορτή του ανοίγει το τεράστιο κουτί με το δώρο του, μόνο για να βρει μέσα ένα άλλο κουτί, και σ' αυτό μέσα ακόμη ένα κουτί κ.λπ. μέχρις ότου φτάσει στο τελευταίο, μικροσκοπικό κουτάκι που είναι άδειο: το δώρο του είναι τα κουτιά. Μπορούμε να συλλάβουμε τα αγνά, εδραιωμένα σύνολα σαν αφηρημένες απεικονίσεις τέτοιων απογοητευτικών δώρων, όπου όμως το κάθε κουτί μπορεί να περιλαμβάνει περισσότερα από ένα εσωτερικά κουτιά: όποιο κουτί και ν' ανοίξει ο Γιαννάκης κάθε φορά, τελικά θα βρει το άδειο κουτί, το κενό $\emptyset$. Οι περισσότερες αξιωματοποιήσεις της συνολοθεωρίας δέχονται την εξής αρχή του von Neumann, που απαγορεύει τα κακά θεμελιωμένα σύνολα απαρχής.

11.29. Αρχή Θεμελίωσης (Principle of Foundation). *Κάθε σύνολο είναι εδραιωμένο.* Αυτό καλείται επίσης αρχή (ή Αξίωμα) της *Κανονικότητας* (Regularity).

Υπάρχει και η εξής εναλλακτική, κάπως δυσνόητη αλλά χρήσιμη έκφραση της Αρχής Θεμελίωσης.

11.30. Πρόταση. *Η Αρχή Θεμελίωσης ισχύει αν και μόνον αν για κάθε μη κενό σύνολο X, υπάρχει κάποιο $m \in X$ τέτοιο ώστε*

$$m \cap X = \emptyset. \tag{11-25}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Δεχόμαστε πρώτα την Αρχή Θεμελίωσης, και (προς απαγωγή σε άτοπο) υποθέτουμε ότι $X \neq \emptyset$, αλλά ότι κανένα $m \in X$ δεν ικανοποιεί την (11-25). Αυτό σημαίνει ότι για κάποιο a,

$$a \in X \,\&\, (\forall m \in X)(\exists t \in X)[t \in m],$$

άρα, από το **DC**, υπάρχει άπειρη, φθίνουσα $\in$-αλυσίδα που αρχίζει με το $X \ni a$, και αυτό βέβαια αντιτίθεται στην υπόθεση. Αντιστρόφως, αν η Αρχή Θεμελίωσης δεν αληθεύει και κάποια άπειρη φθίνουσα $\in$-αλυσίδα αρχίζει με το σύνολο

$$X = f(0) \ni f(1) \ni f(2) \ni \cdots ,$$

τότε η εικόνα $f[\mathbb{N}] = \{f(0), f(1), \dots\}$ είναι βεβαίως μη κενή, και τέμνει καθένα από τα μέλη της, έτσι που κανένα απ' αυτά δεν ικανοποιεί την (11-25). $\dashv$

11.31. Η συνολοθεωρία Zermelo-Fraenkel (με επιλογή), ZFC. Το πλέον διαδεδομένο—το «επίσημο»— σύστημα αξιωμάτων για σύνολα είναι η **Θεωρία Zermelo-Fraenkel** (με επιλογή), που προσθέτει τις Αρχές Αγνότητας **3.25** και Θεμελίωσης στα αξιώματα της **ZFDC** μαζί με το Αξίωμα Επιλογής, συμβολικά:

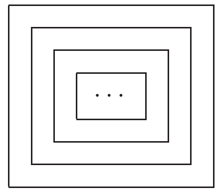
$$\mathbf{ZFC} = \mathbf{ZFDC} + \mathbf{AC} + \text{Αγνότητα} + \text{Θεμελίωση}.$$

Είναι πολλά και πειστικά τα επιχειρήματα που ευνοούν αυτό το σύστημα, μερικά απ' αυτά θα εκθέσουμε αμέσως στη συνέχεια, και πάλι αργότερα, στα Κεφάλαιο **12** και στο Παράρτημα **B**, όπου επίσης θα εξηγήσουμε και τους βασικούς λόγους που μας οδήγησαν να μείνουμε κατά βάση στην ασθενέστερη θεωρία **ZFDC** σ' αυτές τις Σημειώσεις. Από την καθαρά πρακτική άποψη, οι αρχές Αγνότητας και Θεμελίωσης δεν είναι σημαντικές για το μέρος της συνολοθεωρίας που μας αφορά εδώ, και το πλήρες **AC** χρειάζεται μόνο σποραδικά, έτσι που μπορούμε εύκολα να σημειώνουμε τις χρήσεις του.

11.32. Υπάρχουν μη εδραιωμένα σύνολα; Η πλέον κατάφωρη παραβίαση της Αρχής Θεμελίωσης θα ήταν ένα αντικείμενο που είναι το μονοσύνολο του εαυτού του,

$$\Omega = \{\Omega\}. \tag{11-26}$$

Μπορούμε να συλλάβουμε το Ω σαν το πλέον απογοητευτικό δώρο: κάθε κουτί περιέχει ένα άλλο, πανομοιότυπο, και ο Γιαννάκης εξακολουθεί ν' ανοίγει κουτιά



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **11.3**. Το Ω σαν τραγικά απογοητευτικό δώρο.

χωρίς αποτέλεσμα ή τέρμα, για πάντα! Μήπως υπάρχουν σύνολα Ω^1 και Ω^2 τέτοια ώστε

$$\Omega^1 = \{\emptyset, \Omega^2\}, \quad \Omega^2 = \{\Omega^1\}? \tag{11-27}$$

Τέτοιες εξισώσεις μοιάζουν απίθανες, άσχετες, αλλά δεν είναι προφανές ότι τα αξιώματα που έχουμε δεχτεί τις αποκλείουν. Για την ακρίβεια, δεν τις αποκλείουν: στο Παράρτημα **B** θα κατασκευάσουμε πιθανοφανή πρότυπα της **ZFDC+AC** που περιέχουν κάποιο αυτομονοσύνολο $\Omega = \{\Omega\}$, και άλλα σύνολα με παραπλήσιες ιδιότητες.

Ας θυμηθούμε τώρα τις κάπως ασαφείς περιγραφές της *μεγάλης* και της *μικρής* άποψης του κόσμου αντικειμένων $\mathcal{W}$ στο **3.26**. Η μεγάλη άποψη θεωρεί το $\mathcal{W}$ ως τη μέγιστη εφικτή συλλογή αντικειμένων που ικανοποιεί τα αξιώματα, ενώ η μικρή άποψη δέχεται ότι το $\mathcal{W}$ αποτελείται από εκείνα τα αντικείμενα που απαιτούνται από τα αξιώματα.

Με τη μεγάλη άποψη, δεν έχουμε τώρα περισσότερες ή λιγότερες ενδείξεις για την αλήθεια της Αρχής Θεμελίωσης απ' ό,τι είχαμε στο Κεφάλαιο **3**, εκτός του ότι έχουμε δημιουργήσει όλη αυτή τη θεωρία χωρίς ποτέ να χρειαστούμε αυτή την αρχή: από την άλλη μεριά, δεν χρειαστήκαμε ούτε κακά θεμελιωμένα σύνολα.

Έχουμε αποκτήσει όμως πολύ καλύτερη αντίληψη της μικρής άποψης, τουλάχιστον για τη θεωρία **ZDC+AC**, και απ' αυτήν όλες οι ενδείξεις ευνοούν την Αρχή Θεμελίωσης: τα σύνολα που «εγγυώνται» τα αξιώματα της **ZDC+AC** είναι προφανώς τα μέλη του $\mathcal{Z}$, και είναι όλα αγνά και εδραιωμένα. Θα μπορούσε κανείς να αντιλογήσει ότι δεν κατασκευάσαμε το $\mathcal{Z}$ από το τίποτα, εργαστήκαμε μέσα σ' ένα «δοσμένο» κόσμο αντικειμένων $\mathcal{W}$, και μάλιστα χρειάστηκε να δεχτούμε ότι εκτός από τα αξιώματα της **ZDC+AC**, το $\mathcal{W}$ ικανοποιεί επίσης το Αξίωμα Αντικατάστασης. Αυτό είναι σωστό, αλλά επίσης σωστή είναι και η προφανής απάντηση: έξω από κάθε έννοια αυστηρής αξιωματοποίησης, ο ορισμός του $\mathcal{Z}$ και οι αποδείξεις των βασικών ιδιοτήτων του μπορούν να κατανοηθούν άμεσα, αφελώς, όπως συνήθως καταλαβαίνουμε τα μαθηματικά—και πείθουν. Μια απλή περιγραφή του $\mathcal{Z}$ θα ήταν τέλεια κατανοητή στο Κεφάλαιο **3**, ως διαισθητικός ορισμός «περιορισμένου συνόλου», που δικαιολογεί τα αξιώματα της **ZDC+AC**, και τις αρχές Αγνότητας και Θεμελίωσης. Δεν έχουμε βρει μέχρι στιγμής παρόμοιο, αληθοφανές διαισθητικό πρότυπο της **ZDC** που να περιέχει μη εδραιωμένα σύνολα, από οποιεσδήποτε υποθέσεις που δεν οδηγούν σε φαύλο κύκλο.[31]

Είναι δυνατό να κατασκευάσουμε απλά πρότυπα όπως το $\mathcal{Z}$ για την **ZFDC** και την **ZFC**; Ας τα ονομάσουμε πρώτα.

11.33. Ορισμός. **ZFDC-κόσμος** είναι ένας κόσμος του Zermelo M που επιπλέον ικανοποιεί το Αξίωμα Αντικατάστασης, δηλαδή για κάθε σύνολο $A \in M$ και μονομελή οριστικό τελεστή H,

$$(\forall x \in M)[H(x) \in M] \Longrightarrow H[A] = \{H(x) \mid x \in A\} \in M.$$

ZFC-κόσμος είναι ένας **ZFDC**-κόσμος M που δεν περιέχει άτομα και στον οποίο κάθε σύνολο $A \in M$ επιδέχεται καλή διάταξη στο M.

Τα αξιώματα της **ZFDC** εκφράζουν ακριβώς την υπόθεση ότι η κλάση $\mathcal{W}$ όλων των αντικειμένων είναι **ZFDC**-κόσμος και, αντίστοιχα, τα αξιώματα της **ZFC** ισχυρίζονται ότι το $\mathcal{W}$ είναι **ZFC**-κόσμος.

11.34. Θεώρημα. ***Η κλάση του von Neumann***

$$\mathcal{V} =_{\text{ορ}} \{X \mid X \text{ είναι αγνό, εδραιωμένο σύνολο}\} \tag{11-28}$$

είναι **ZFDC**-*κόσμος· και αν ισχύει το* **AC**, *τότε η* $\mathcal{V}$ *είναι* **ZFC**-*κόσμος.*

Απόδειξη. Η κλάση $\mathcal{V}$ είναι κόσμος του Zermelo, εύκολα από την Άσκηση **11.27**. Για να δείξουμε ότι ικανοποιεί επίσης το Αξίωμα Αντικατάστασης, παρατηρούμε ότι για κάθε σύνολο A (ακόμη κι αν $A \notin \mathcal{V}$), αν ο H είναι μονομελής οριστικός τελεστής τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$, η τιμή $H(x)$ να είναι αγνό, εδραιωμένο σύνολο, τότε η εικόνα $H[A]$ έχει μόνο αγνά και εδραιωμένα μέλη, και επομένως (εύκολα) είναι και αυτή αγνή και εδραιωμένη.

Ο δεύτερος ισχυρισμός έπεται άμεσα, επειδή αν ισχύει το **AC**, τότε κάθε $A \in \mathcal{V}$ επιδέχεται καλή διάταξη $\leq_A \in \mathcal{P}(A \times A)$ και $\leq_A \in \mathcal{V}$. ⊣

Υπάρχει ακόμη ένας, κομψός και χρήσιμος χαρακτηρισμός των αγνών, εδραιωμένων συνόλων που είναι εύκολο πόρισμα του Θεωρήματος Εδραιωμένης Αναδρομής **11.5**.

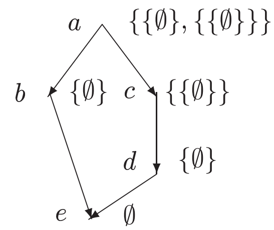
11.35. Ορισμός. **Mostowski Επιμορφισμός** ή **διακόσμηση** (decoration) γραφήματος G με σχέση ακμών $\rightarrow$ είναι ένας επιμορφισμός $d : G \twoheadrightarrow d[G]$ που αντιστοιχίζει σύνολο σε κάθε κόμβο του G, έτσι ώστε

$$d(x) = \{d(y) \mid y \leftarrow x\} \quad (x \in G). \tag{11-29}$$

11.36. Θεώρημα (Λήμμα Συμπίεσης του Mostowski, Collapsing Lemma**).**

(1) *Κάθε εδραιωμένο γράφημα G επιδέχεται ακριβώς έναν Mostowski επιμορφισμό d_G, και η εικόνα του $d_G[G]$ είναι μεταβατικό, αγνό, εδραιωμένο σύνολο.*

[31] Πρότυπα όπως το $M(\mathbb{N}_0 \cup \Omega)$ οδηγούν σε φαύλο κύκλο, επειδή χρειαζόμαστε απαρχής κάποιο Ω με την αμφισβητούμενη ιδιότητα του αυτομονοσυνόλου.



$$d_G[G] = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **11.4**. Συμπίεση Mostowski.

(2) *Ένα σύνολο A είναι αγνό και εδραιωμένο αν και μόνον αν υπάρχει κάποιο εδραιωμένο γράφημα G και κάποιος κόμβος $x \in G$, έτσι ώστε $A = d_G(x)$, όπου η d_G είναι η μοναδική διακόσμηση του G.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) Η ύπαρξη και μοναδικότητα διακόσμησης ενός εδραιωμένου G είναι άμεσο πόρισμα του Θεωρήματος Εδραιωμένης Αναδρομής **11.5** εφαρμοσμένου στο G, με τον οριστικό τελεστή

$$H(f) = \mathrm{Image}(f) = \{f(x) \mid f(x)\downarrow\}.$$

Η εικόνα $d_G[G]$ είναι μεταβατικό σύνολο, επειδή αν $s \in t \in d_G[G]$, τότε $s \in t = d_G(y)$ για κάποιο $y \in G$, οπότε $s = d_G(x)$ για κάποιο $x \leftarrow y$, και $s \in d_G[G]$. Αφού το κάθε $d_G(x)$ είναι σύνολο από την (11-29), το $d_G[G]$ είναι μεταβατικό σύνολο χωρίς άτομα και επομένως αγνό. Επίσης το $d_G[G]$ είναι εδραιωμένο, επειδή αν υπήρχε φθίνουσα $\in$-ακολουθία $x_0 \ni x_1 \ni \cdots$ στο $d_G[G]$ και επιλέγαμε τους κόμβους $s_0, s_1, \ldots$ έτσι ώστε $d_G(s_i) = x_i$, τότε η $s_0 \to s_1 \to \cdots$ θα ήταν μια άπειρη φθίνουσα ακολουθία στο εδραιωμένο γράφημα G.

(2) Αν $A = d_G(x)$ με το x κόμβο κάποιου εδραιωμένου γραφήματος, τότε το A ανήκει στο μεταβατικό, αγνό, εδραιωμένο σύνολο από το (1), και επομένως είναι αγνό και εδραιωμένο. Για το αντίστροφο, έστω $G = \mathrm{TC}(A)$ η μεταβατική κλειστότητα του A και όρισε σ' αυτήν

$$x \to y \iff_{\text{ορ}} y \in x.$$

Το γράφημα G είναι εδραιωμένο, επειδή το $G = \mathrm{TC}(A)$ είναι εδραιωμένο σύνολο, Πρόβλημα **x11.16**. Επίσης ισχύει η

$$d_G(x) = x \quad (x \in G)\cdot \tag{11-30}$$

επειδή αν το x ήταν G-ελαχιστικό αντιπαράδειγμα για την (11-30), τότε

$$\begin{aligned} d_G(x) &= \{d_G(y) \mid y \,{}_G\!\!\leftarrow x\}, \\ &= \{y \mid y \leftarrow x\} && \text{από την επιλογή του } x, \\ &= \{y \mid y \in x\} && \text{από τον ορισμό της } \to, \\ &= x && \text{επειδή το } x \text{ είναι σύνολο.} \end{aligned}$$

Ειδικότερα, $A = d_G(A)$, που βεβαιώνει το (2). ⊣

Η κλάση $\mathcal{V}$ δεν είναι σύνολο (Πρόβλημα **x11.20**) και δεν είναι εύκολο να βρούμε σύνολα που να είναι **ZFDC**-κόσμοι, βλ. Προβλήματα **x12.43**, **x12.44** και **xB.12**.

11.37. Αποτελέσματα συνέπειας και ανεξαρτησίας. Όλα τα αποτελέσματα συνέπειας και ανεξαρτησίας που διατυπώσαμε στα **8.24**, **8.25**, **10.33**, **10.34**, **10.36** και **10.37** ισχύουν αν προσθέσουμε το Αξίωμα Αντικατάστασης στις σχετικές θεωρίες. Ήρθε η στιγμή να συλλέξουμε τις γενικότερες και σημαντικότερες εκδοχές αυτών των αποτελεσμάτων για τη θεωρία **ZFC**.

(1) (Gödel, 1939) *Ο κόσμος L των κατασκευάσιμων συνόλων είναι πρότυπο της* **ZFC**, *που επίσης ικανοποιεί τη Γενικευμένη Υπόθεση του Συνεχούς* **GCH**. Συνεπώς το Αξίωμα Επιλογής **AC** δεν μπορεί να διαψευστεί από τα άλλα αξιώματα της **ZFC**, ούτε και η **GCH** διαψεύδεται στην **ZFC**.

(2) (Cohen, 1963) *Καμία από τις αρχές επιλογής* $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$, **DC** *και* **AC** *δεν μπορεί να αποδειχθεί από ασθενέστερες αρχές μαζί με τα κατασκευαστικά αξιώματα του Zermelo* (**I**) – (**VI**) *και το Αξίωμα Αντικατάστασης* (**VIII**).

(3) (Cohen, 1963) *Υπάρχει πρότυπο της* **ZFC** *στο οποίο η Υπόθεση του Συνεχούς* **CH** *δεν αληθεύει, και επομένως η* **CH** *δεν είναι θεώρημα της* **ZFC**.

(4) (Solovay, 1970) *Υπάρχει πρότυπο της* **ZFC** *στο οποίο κάθε «ορίσιμο», αναπαρίθμητο σημειοσύνολο έχει τέλειο υποσύνολο, και επομένως έχει πληθικό αριθμό* $\mathfrak{c}$. Ειδικότερα, αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να ορίσουμε ένα συγκεκριμένο σημειοσύνολο A και μετά να αποδείξουμε στην **ZFC** ότι ο πληθάριθμός του είναι μεγαλύτερος του $\aleph_0$ και μικρότερος του $\mathfrak{c}$.

(5) (Solovay, 1970) *Υπάρχει πρότυπο της* **ZFDC** *στο οποίο κάθε αναπαρίθμητο σημειοσύνολο περιέχει μη κενό, τέλειο υποσύνολο*, και επομένως *η ύπαρξη αναπαρίθμητων σημειοσυνόλων χωρίς μη κενό, τέλειο υποσύνολο δεν είναι θεώρημα της* **ZFDC**. Το πρότυπο του Solovay ικανοποιεί επίσης τις Αρχές Αγνότητας και Θεμελίωσης.

Προβλήματα για το Κεφάλαιο 11

x11.1. Δείξε το Αξίωμα Διαχωρισμού (**III**) από τα υπόλοιπα αξιώματα στην ομάδα (**I**) – (**V**) και το Αξίωμα Αντικατάστασης (**VIII**).

x11.2. Για κάθε σύνολο A, κάθε μονομελή οριστικό τελεστή F και κάθε διμελή, οριστικό τελεστή G, υπάρχει ελάχιστο για την $\subseteq$ σύνολο $\overline{A}$ που περιέχει το A ως υποσύνολο και είναι κλειστό για τους F και G, δηλαδή

$$A \subseteq \overline{A}, \quad x \in \overline{A} \Longrightarrow F(x) \in \overline{A}, \quad x, y \in \overline{A} \Longrightarrow G(x, y) \in \overline{A}.$$

(Το ίδιο ισχύει για οποιοδήποτε αριθμό τελεστών, οσωνδήποτε μεταβλητών.)

x11.3. Το Αξίωμα Αντικατάστασης είναι κατασκευαστικά ισοδύναμο με το εξής: για κάθε σύνολο A και κάθε μονομελή οριστικό τελεστή F, υπάρχει σύνολο

B που περιέχει το A και είναι κλειστό για τον F, δηλαδή
$$A \subseteq B \,\&\, F[B] \subseteq B.$$

x11.4. Το Αξίωμα Αντικατάστασης είναι κατασκευαστικά ισοδύναμο με το εξής: για κάθε σύνολο A και κάθε μονομελή οριστικό τελεστή F, ο περιορισμός
$$F\restriction A =_{\mathsf{op}} \{(x, F(x)) \mid x \in A\}$$
του F στο A είναι συνάρτηση, δηλαδή σύνολο ζευγών.

x11.5. Αν ο (x, y) είναι οριστικός τελεστής δύο μεταβλητών που ικανοποιεί την πρώτη ιδιότητα διατεταγμένων ζευγών (OP1) στο **4.1**, τότε ικανοποιεί επίσης και τη δεύτερη, (OP2). (Αυτό δεν μπορεί να αποδειχτεί στην **ZDC+AC**, βλ. Πρόβλημα **xB.4**.)

x11.6. Αν ο $|A|$ είναι οριστικός τελεστής που έχει την πρώτη ιδιότητα ασθενούς τελεστή πληθικότητας (C1), τότε αυτόματα έχει και την τρίτη, (C3). (Αυτό δεν μπορεί να αποδειχτεί στην **ZDC+AC**, βλ. Πρόβλημα **xB.8**.)

x11.7. Η οριστική συνθήκη της συνάρτησης ορισμένη στην (4-14) ικανοποιεί την ισοδυναμία
$$\begin{aligned}\mathrm{Function}(f) \iff\ & \mathrm{Set}(f) \,\&\, (\forall w \in f)(\exists x, y)[w = (x, y)] \\ & \&\, (\forall x, y, y')[[(x, y) \in f \,\&\, (x, y') \in f] \Longrightarrow y = y'],\end{aligned}$$
δηλαδή το f είναι συνάρτηση ακριβώς όταν είναι μονοσήμαντο σύνολο διατεταγμένων ζευγών. (Βλ. επίσης το Πρόβλημα **xB.9**.)

x11.8. Υπάρχει ακριβώς μία ακολουθία $(n \mapsto \aleph_n)$ που ικανοποιεί τις ταυτότητες
$$\aleph_0 = |\mathbb{N}|, \quad \aleph_{n+1} = \aleph_n^+.$$
Τα ονόματα των πρώτων άπειρων πληθαρίθμων τα ορίσαμε στην (9-6), αλλά άλλο είναι να δείξεις ότι υπάρχει *η ακολουθία* $(n \mapsto \aleph_n)$. (βλ. επίσης το Πρόβλημα **xB.10**.)

x11.9. Γενικευμένη αναδρομή με παραμέτρους. Για κάθε μονομελή οριστικό τελεστή G και κάθε τριμελή οριστικό τελεστή H, υπάρχει μονομελής, οριστικός τελεστής F που ικανοποιεί τις ταυτότητες
$$\begin{aligned}F(0, y) &= G(y), \\ F(n+1, y) &= H(F(n, y), n, y).\end{aligned}$$

x11.10. Αν η $\mathcal{E}$ είναι μη κενή οικογένεια μεταβατικών συνόλων, τότε η ένωση $\bigcup \mathcal{E}$ και η τομή $\bigcap \mathcal{E}$ είναι επίσης μεταβατικά σύνολα.

x11.11. Για κάθε κλάση A υπάρχει ελάχιστη, μεταβατική κλάση $\overline{A}$ που περιέχει την A, δηλαδή τέτοια ώστε $A \subseteq \overline{A}$ και για κάθε μεταβατική κλάση B, αν $A \subseteq B$, τότε $\overline{A} \subseteq B$.

x11.12. Οι κλάσεις των αγνών συνόλων, των κληρονομικά πεπερασμένων συνόλων και των κληρονομικά αριθμήσιμων συνόλων είναι όλες μεταβατικές.

x11.13. Αν $x_1 \in x_2 \in \cdots \in x_n = x_1$, τότε το x_1 είναι κακά θεμελιωμένο.

x11.14. Το αντικείμενο x είναι κακά θεμελιωμένο αν και μόνον αν υπάρχει σύνολο A τέτοιο ώστε

$$x \in A \,\&\, (\forall s \in A)(\exists t \in A)[s \ni t].$$

x11.15. Αν υπάρχουν Ω^1, Ω^2 που ικανοποιούν την (11-27), τότε είναι διαφορετικά, κληρονομικά πεπερασμένα, αγνά σύνολα.

x11.16. Ένα σύνολο A είναι εδραιωμένο αν και μόνον αν η μεταβατική του κλειστότητα $\mathrm{TC}(A)$ είναι εδραιωμένη.

***x11.17.** Ένα σύνολο ανήκει στο V_ω αν και μόνον αν είναι αγνό, εδραιωμένο και κληρονομικά πεπερασμένο. Υποδειξη. Δείξε πρώτα ότι κάθε πεπερασμένο, μεταβατικό, αγνό και εδραιωμένο σύνολο είναι μέλος του V_ω.

x11.18. Για κάθε μεταβατικό σύνολο I, έστω

$$J = \{x \in I \mid x \text{ είναι αγνό και εδραιωμένο}\}\cdot$$

δείξε ότι

$$M(J) = \{x \in M(I) \mid x \text{ είναι αγνό και εδραιωμένο}\}.$$

x11.19. Αν υπάρχει σύνολο $\Omega = \{\Omega\}$ όπως στην (11-26), τότε

$$\{x \in M(\Omega) \mid x \text{ εδραιωμένο}\} = V_\omega.$$

x11.20. Δείξε ότι η κλάση $\mathcal{V}$ των αγνών, εδραιωμένων συνόλων δεν είναι σύνολο.

11.38. Ορισμός. Η κλάση ατόμων K **στηρίζει** (supports) το σύνολο A αν

$$x \in \mathrm{TC}(A) \,\&\, \mathrm{Atom}(x) \Longrightarrow x \in K\cdot$$

θέτουμε

$$\mathcal{W}[K] = \{x \mid \text{το } x \text{ στηρίζεται από την } K\}, \tag{11-31}$$
$$\mathcal{V}[K] = \{x \mid \text{το } x \text{ είναι εδραιωμένο και στηρίζεται από την } K\}. \tag{11-32}$$

x11.21. Η κλάση $\mathcal{W}[K]$ των συνόλων που στηρίζονται από μια κλάση ατόμων K είναι **ZFDC**-κόσμος.

x11.22. Η κλάση $\mathcal{V}[K]$ των εδραιωμένων συνόλων που στηρίζονται από μια κλάση ατόμων K είναι **ZFDC**-κόσμος.

x11.23. Έστω $G = (\mathbb{N}, \rightarrow)$ με $m \rightarrow n \iff n < m$. Δείξε ότι το G είναι εδραιωμένο και υπολόγισε την εικόνα $d_G(m)$ για κάθε m για τη μοναδική διακόσμηση του G.

x11.24. Δώσε παράδειγμα άπειρου, εδραιωμένου γραφήματος G με $d_G[G] = \{\emptyset\}$.

***x11.25.** Έστω $G = (\mathbb{N} \setminus \{0\}, \to)$, με

$$m \to n \iff m \neq n \,\&\, \text{το } n \text{ διαιρεί το } m.$$

Δείξε ότι το G είναι εδραιωμένο και υπολόγισε την είκονα $d_G(m)$ για κάθε m υπό τη μοναδική διακόσμηση του G.

x11.26. *Επεκταμένη διακόσμηση* γραφήματος G είναι ένας επιμορφισμός $d : G \twoheadrightarrow d[G]$ που ικανοποιεί για κάθε $x \in G$ την εξίσωση

$$d(x) = \begin{cases} x, & \text{αν το } x \text{ είναι άτομο,} \\ \{d(y) \mid y \leftarrow x\}, & \text{αν το } x \text{ είναι σύνολο.} \end{cases}$$

Δείξε ότι κάθε εδραιωμένο γράφημα επιδέχεται ακριβώς μία επεκταμένη διακόσμηση, και ότι ένα (όχι υποχρεωτικά αγνό) σύνολο A είναι εδραιωμένο αν και μόνον αν υπάρχει εδραιωμένο γράφημα G και $x \in G$, τέτοια ώστε $A = d(x)$.

***x11.27. Εδραιωμένη $\in$-αναδρομή**. Για κάθε διμελή οριστικό τελεστή H, υπάρχει οριστικός τελεστής $F(t)$ τέτοιος ώστε για κάθε εδραιωμένο σύνολο x,

$$F(x) = H(F \restriction x, x),$$

όπου η συνάρτηση $F \restriction x = \{(t, F(t)) \mid t \in x\}$ είναι ο περιορισμός του τελεστή F στο σύνολο x.

Αυτό είναι ειδική περίπτωση της επόμενης, κάπως γενικότερης επέκτασης του Θεωρήματος Εδραιωμένης Αναδρομής **11.5**.

***x11.28.** Έστω διμελής οριστική συνθήκη $t < y$ με τις ιδιότητες (1) για κάθε x, η κλάση $\{t \mid t < x\}$ είναι σύνολο, και (2) δεν υπάρχει ακολουθία $(n \mapsto x_n)$ τέτοια ώστε για κάθε n, $x_{n+1} < x_n$. Δείξε ότι για κάθε διμελή οριστικό τελεστή H υπάρχει κάποιος άλλος F, τέτοιος ώστε για κάθε x,

$$F(x) = H(F \restriction \{t \mid t < x\}, x),$$

όπου η συνάρτηση $F \restriction \{t \mid t < x\} = \{(t, F(t)) \mid t < x\}$ είναι ο περιορισμός του F στο σύνολο $\{t \mid t < x\}$.