ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θεωρία Συνόλων

Ενότητα: Καλά διατεταγμένοι χώροι

Γιάννης Μοσχοβάκης

Τμήμα Μαθηματικών

Σημειώματα

Σημείωμα ιστορικού εκδόσεων έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.1. Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη στο σύνδεσμο http://www.math.ucla.edu/ ynm/lectures/g.pdf

Σημείωμα αναφοράς

Σημείωμα αδειοδότησης

Διατήρηση σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΚΑΛΑ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟΙ ΧΩΡΟΙ

7.1. Καλά διατεταγμένος χώρος (well ordered set) είναι ένας μερικά διατεταγμένος χώρος

$$U = (\mathrm{Field}(U), \leq_U),$$

όπου η $\leq_U$ είναι καλή διάταξη του $\mathrm{Field}(U)$, δηλαδή διάταξη γραμμική (ολική) και τέτοια ώστε κάθε μη κενό $X \subseteq \mathrm{Field}(U)$ να έχει ελάχιστο μέλος. Με το U συνδέεται επίσης η **αυστηρή διάταξη** $<_U$,

$$x <_U y \iff_{\mathrm{op}} x \leq_U y \,\&\, x \neq y.$$

Για παράδειγμα, το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών είναι καλά διατεταγμένο με τη συνηθισμένη διάταξη, όπως επίσης και κάθε πεπερασμένο αρχικό του τμήμα

$$[0, n) = \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}.$$

Ένας «μακρύτερος» καλά διατεταγμένος χώρος, είναι ο $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq')$, όπου το ∞ είναι κάποιο αντικείμενο που δεν ανήκει στο $\mathbb{N}$ που τοποθετούμε έπειτα από όλους τους φυσικούς αριθμούς,

$$x \leq' y \iff y = \infty \vee [x, y \in \mathbb{N} \,\&\, x \leq y].$$

Όπως πάντα με δομημένα σύνολα, γενικά ταυτίζουμε έναν καλά διατεταγμένο χώρο U με το πεδίο του, αναφερόμαστε στα *σημεία* ή *υποσύνολα* του U εννοώντας αυτά του $\mathrm{Field}(U)$, ο δείκτης από τα $\leq_U$ και $<_U$ παραλείπεται όταν εννοείται, κ.λπ. Συχνά επίσης καλούμε αυτά τα αντικείμενα απλώς **χώρους**, όταν το «καλά διατεταγμένοι» είναι προφανές από τα συμφραζόμενα.

Τα σημαντικότερα αποτελέσματα στα προηγούμενα δύο κεφάλαια αποδείχτηκαν με κάποιο συνδυασμό των δύο ιδεών

$$\text{αναδρομικός ορισμός – επαγωγική απόδειξη.} \tag{7-1}$$

Στην απλούστερη περίπτωση, κάποια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ ορίζεται αναδρομικά, κάποιες ιδιότητες της f αποδείχνονται επαγωγικά, και απ' αυτές προκύπτει το θεώρημα που μας ενδιαφέρει. Τυπικά παραδείγματα είναι το Συνεχές Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου και το Θεώρημα Schröder-Bernstein, που δεν αναφέρονται (ρητά) σε αναδρομή, επαγωγή ή καν συναρτήσεις στο $\mathbb{N}$, αλλά των οποίων οι αποδείξεις οπωσδήποτε χρησιμοποιούν αυτές τις έννοιες. Στηρίξαμε την απόδειξη του Θεωρήματος Αναδρομής **5.6** κατευθείαν στο Αξίωμα Επαγωγής των φυσικών αριθμών, αλλά το θεμελιακό γεγονός —που επιδέχεται γενίκευση—

$\square \ \circ \ \circ \ \cdots \quad \blacksquare \ \bullet \ \bullet \ \cdots \quad \blacksquare \ \bullet \ \bullet \ \cdots \quad \cdots$

Διάγραμμα **7.1**. Η αρχή ενός καλά διατεταγμένου χώρου.

είναι ότι το $\mathbb{N}$ είναι καλά διατεταγμένο με τη συνηθισμένη του διάταξη. Εδώ θα γενικεύσουμε το **5.6** στο πολύ ισχυρότερο Θεώρημα Υπερπεπερασμένης Αναδρομής **7.24**, που δικαιολογεί *αναδρομικούς ορισμούς* συναρτήσεων $f : U \to E$ με πεδίο ορισμού έναν οποιονδήποτε καλά διατεταγμένο χώρο U. Μαζί με το Θεώρημα Hartogs **7.34** που εγγυάται την ύπαρξη χώρων «οσονδήποτε μεγάλου μήκους», το Θεώρημα Υπερπεπερασμένης Αναδρομής επιτρέπει την αναφορά στη βασική ιδέα (7-1) σε περιστάσεις πολύ μακριά από τους φυσικούς αριθμούς. Τυπική εφαρμογή είναι το Θεώρημα Σταθερού Σημείου **7.35** και το πόρισμά του, το Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου **7.36**, που είναι απλώς το **6.21** χωρίς την υπόθεση της αριθμήσιμης συνέχειας.

7.2. Το σύνολο A είναι **καλά διατάξιμο** (well orderable) αν υπάρχει καλή διάταξη $\leq$ του A, δηλαδή αν το A είναι το πεδίο κάποιου καλά διατεταγμένου χώρου $(A, \leq)$. Ένα από τα κύρια συμπεράσματα αυτού του κεφαλαίου είναι ότι τα καλά διατάξιμα σύνολα συμπεριφέρονται καλύτερα από τυχαία σύνολα: για παράδειγμα είναι συγκρίσιμα ανά δύο ως προς το πλήθος, είτε $A \leq_c B$ ή $B \leq_c A$. Η αλήθεια είναι ότι *όλα τα σύνολα είναι καλά διατάξιμα*. Αυτό το απέδειξε ο Zermelo το 1904, λύνοντας με μία μεγαλοφυή κίνηση το πρόβλημα Συγκρισιμότητας Πληθαρίθμων και μια σειρά συγγενών προβλημάτων ομαλότητας για όλα τα σύνολα. Θα αποδείξουμε το Θεώρημα Καλής Διάταξης του Zermelo στο επόμενο κεφάλαιο, αφού εισαγάγουμε πρώτα το Αξίωμα Επιλογής στο οποίο στηρίζεται. Πάντως το μαθηματικό περιεχόμενο του διάσημου αυτού θεωρήματος είναι το άθροισμα των Θεωρημάτων της Υπερπεπερασμένης Αναδρομής και του Hartogs: το Αξίωμα Επιλογής απλώς μας επιτρέπει την ένωση αυτών των δύο.

7.3. Άσκηση. *Αν το C είναι καλά διατάξιμο και $A \leq_c C$, τότε και το A είναι καλά διατάξιμο.*

7.4. Άσκηση. *Αν το C είναι καλά διατάξιμο και υπάρχει κάποιος επιμορφισμός $f : C \twoheadrightarrow A$, τότε $A \leq_c C$ και επομένως το A είναι επίσης καλά διατάξιμο.*

7.5. Επόμενα και οριακά σημεία. Κάθε καλά διατεταγμένος χώρος U μοιάζει με αρχικό τμήμα του $\mathbb{N}$ στην αρχή του. Αν δεν είναι κενός, πρέπει να έχει ελάχιστο σημείο που τυπικά το συμβολίζουμε 0 αντί για $\perp$,

$$0 = 0_U =_{\text{ορ}} \text{το ελάχιστο στοιχείο του } U. \tag{7-2}$$

Στο Διάγραμμα **7.1** εικονίζεται μ' ένα άσπρο τετράγωνο. Εκτός από το μέγιστο (που ίσως υπάρχει, συνήθως όχι), κάθε $x \in U$ έχει ένα αμέσως επόμενο σημείο,

$$S(x) = S_U(x) =_{\text{ορ}} \min\{y \in U \mid x < y\}. \tag{7-3}$$

Οι τιμές της μερικής συνάρτησης $S : U \rightharpoonup U$ είναι τα **επόμενα σημεία** (successor points) του U. Επιπλέον, ο U μπορεί να έχει **οριακά σημεία** (limit points) που είναι μεγαλύτερα του 0 αλλά όχι επόμενα,

$$\mathrm{Limit}_U(x) \iff_{\text{ορ}} 0 < x \,\&\, (\forall u < x)(\exists v)[u < v < x]. \tag{7-4}$$

Αυτά εικονίζονται με μαύρα τετράγωνα στο Διάγραμμα **7.1**. Το πρώτο οριακό σημείο του U συνήθως συμβολίζεται

$$\omega = \omega_U =_{\text{ορ}} \min\{x \in U \mid \mathrm{Limit}(x)\}, \tag{7-5}$$

αν υπάρχει, τα σημεία πριν από το ω είναι τα **πεπερασμένα σημεία** του U και τα σημεία που έπονται του ω (μαζί με το ω) είναι τα **άπειρα σημεία** του U. Αν ο χώρος U είναι άπειρος, τότε η συνάρτηση $\pi : \mathbb{N} \rightarrowtail U$ που ορίζεται με την αναδρομή

$$\begin{aligned} \pi(0) &= 0_U = \text{ το ελάχιστο μέλος του } U, \\ \pi(n+1) &= S_U(\pi(n)), \end{aligned} \tag{7-6}$$

μας δίνει μια αντιστοιχία των φυσικών αριθμών με τα πεπερασμένα σημεία του U που σέβεται τις διατάξεις.

7.6. Άσκηση. *Για κάθε υποσύνολο $I \subseteq U$ καλά διατεταγμένου χώρου U, ο περιορισμός*

$$x \le_I y \iff_{\text{ορ}} x \le_U y \,\&\, x, y \in I$$

της $\le_U$ στο I είναι καλή διάταξη, έτσι που το I είναι καλά διατεταγμένος χώρος ως «υποχώρος» του U.

7.7. Ορισμός. Ο καλά διατεταγμένος χώρος U είναι **αρχικό τμήμα** (initial segment) του V, αν το πεδίο του $\mathrm{Field}(U)$ είναι κλειστό προς τα κάτω υποσύνολο του $\mathrm{Field}(V)$ και η $\le_U$ είναι ο περιορισμός της $\le_V$ στο $\mathrm{Field}(U)$:

$$\begin{aligned} U \sqsubseteq V \iff_{\text{ορ}} \ & \mathrm{Field}(U) \subseteq \mathrm{Field}(V) \\ & \& \, (\forall x, y \in \mathrm{Field}(U))[x \le_U y \iff x \le_V y] \\ & \& \, (\forall y \in \mathrm{Field}(U))(\forall x \le_V y)[x \in \mathrm{Field}(U)]. \end{aligned} \tag{7-7}$$

Προφανώς ο V είναι αρχικό τμήμα του εαυτού του, το **τετριμμένο** αρχικό τμήμα. Σε κάθε $y \in V$ αντιστοιχίζουμε το **γνήσιο αρχικό τμήμα** των σημείων αυστηρά κάτω του y,

$$\mathbf{seg}(y) = \mathbf{seg}_V(y) =_{\text{ορ}} \{x \in V \mid x <_V y\} \subsetneq V. \tag{7-8}$$

Σχολαστικά, αυτό είναι το πεδίο του $\mathbf{seg}(y)$, αλλά η διάταξή του καθορίζεται απ' αυτήν του V και θα αναφερόμαστε στα αρχικά τμήματα, ως συνήθως, σαν να ήταν απλά σύνολα.

7.8. Άσκηση. *Αν το 0 είναι το ελάχιστο του χώρου U, τότε $\mathbf{seg}(0) = \emptyset$, και αν το $x \in U$ έχει επόμενο, τότε*

$$\mathbf{seg}(S(x)) = \mathbf{seg}(x) \cup \{x\}.$$

7.9. Πρόταση. *Το σύνολο I είναι αρχικό τμήμα του χώρου U τότε και μόνον αν $I = U$, ή για κάποιο $x \in U$, $I = \mathbf{seg}(x)$.*

Αποδειξη. Αν $I \subsetneq U$, έστω $x = \min(U \setminus I)$, έτσι ώστε αμέσως

$$y \in \mathbf{seg}(x) \Longrightarrow y < x \Longrightarrow y \in I,$$

και αρκεί να δείξουμε

$$y \in I \Longrightarrow y < x$$

για να συμπεράνουμε ότι $I = \mathbf{seg}(x)$. Προς απαγωγή σε άτοπο, αν υπάρχει $y \in I$ τέτοιο που $y \not< x$, τότε $x \leq y$, άρα $x \in I$ αφού το I είναι κλειστό προς τα κάτω, που αντιτίθεται στην επιλογή του x. Το αντίστροφο είναι τετριμμένο. ⊣

7.10. Άσκηση. *Η οικογένεια των αρχικών τμημάτων ενός καλά διατεταγμένου χώρου είναι καλά διατεταγμένη από τη σχέση* $\sqsubseteq$.

Η γενική ιδέα είναι να θεωρήσουμε έναν καλά διατεταγμένο χώρο U ως γενίκευση της αριθμοσειράς $0, 1, 2, \dots$, πιθανόν μικρότερη ή ίση σε μήκος με το $\mathbb{N}$, τυπικά πολύ μακρύτερη. Τα συγκεκριμένα στοιχεία του U είναι άνευ σημασίας: το *μήκος* της ακολουθίας είναι αυτό που μας ενδιαφέρει. Εισάγουμε εδώ τη γενική έννοια ισομορφισμού που συσχετίζει μερικά διατεταγμένους χώρους με το ίδιο *σχήμα*, όπου το σχήμα ενός καλά διατεταγμένου χώρου είναι απλώς το «μήκος» του.

7.11. Ορισμός. Μια συνάρτηση $\pi : P \to Q$ από ένα μερικά διατεταγμένο χώρο σε έναν άλλο **σέβεται τις διατάξεις** (is order preserving) αν για όλα τα $x, y \in P$,

$$x \leq_P y \iff \pi(x) \leq_Q \pi(y).$$

Ομοιότητα (similarity) από το P στο Q είναι μια αντιστοιχία $\pi : P \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Q$ που σέβεται τις διατάξεις, και αν υπάρχει τέτοια ομοιότητα καλούμε τους P και Q **όμοιους** (similar), **ισομορφικούς** ή **αμοιβαία αντίγραφα** και γράφουμε

$$P =_o Q \iff_{\text{ορ}} (\exists \pi : P \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Q)[\text{η } \pi \text{ είναι ομοιότητα}].$$

Παρατηρήστε ότι όπως πάντα για δομημένα σύνολα, γράφουμε $\pi : P \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Q$ για ομοιότητες αντί για το σχολαστικότερο $\pi : \mathrm{Field}(P) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathrm{Field}(Q)$.

7.12. Άσκηση. *Κάθε συνάρτηση $\pi : P \to Q$ από ένα μερικά διατεταγμένο χώρο σε κάποιον άλλο που σέβεται τις διατάξεις είναι μονοτονική· αλλά υπάρχουν μονοτονικές συναρτήσεις που δεν σέβονται τις διατάξεις.*

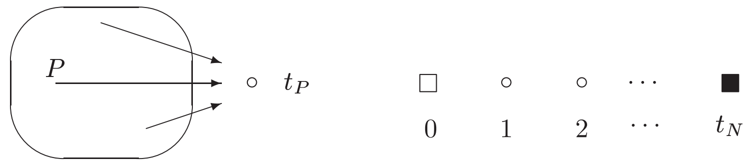
7.13. Άσκηση. *Η συνάρτηση $f : P \to Q$ σε γραμμικά διατεταγμένους χώρους P και Q σέβεται τις διατάξεις τότε και μόνον αν είναι* **αυστηρά μονοτονική**, *δηλαδή αν*

$$x <_P y \Longrightarrow f(x) <_Q f(y)\cdot$$

έπεται ότι κάθε συνάρτηση σε καλά διατεταγμένους χώρους που σέβεται τις διατάξεις είναι αυστηρά μονοτονική, και επομένως μονομορφισμός.

7.14. Άσκηση. *Για όλους τους μερικά διατεταγμένους χώρους P, Q, R,*

$$P =_o P,$$
$$P =_o Q \Longrightarrow Q =_o P,$$
$$P =_o Q \,\&\, Q =_o R \Longrightarrow P =_o R.$$



Διαγραμμα **7.2**. Ο επόμενος χώρος του P και ο $\mathrm{Succ}(\mathbb{N})$.

7.15. Λήμμα. *Κάθε μερικά διατεταγμένος χώρος P που είναι όμοιος με έναν καλά διατεταγμένο χώρο U, είναι και ο ίδιος καλά διατεταγμένος.*

Αποδειξη. Αν $\emptyset \neq X \subseteq P$ και το $p \in U$ είναι το $\leq_U$-ελάχιστο μέλος της εικόνας $\pi[X]$, τότε (εύκολα) το $x = \pi^{-1}(p)$ είναι το $\leq_P$-ελάχιστο του X, επειδή η π σέβεται τις διατάξεις. $\dashv$

Είναι εύκολο να κατασκευάσουμε καλά διατεταγμένους χώρους αρκετά μεγάλου μήκους, αρχίζοντας με τον $\mathbb{N}$ και τα πεπερασμένα του αρχικά τμήματα και εφαρμόζοντας μερικούς φυσικούς τελεστές πάνω στους μερικά διατεταγμένους χώρους, που δίνουν καλά διατεταγμένα αποτελέσματα σε καλά διατεταγμένες τιμές των μεταβλητών τους. Θεωρούμε εδώ μόνο έναν απλό και χαρακτηριστικό τέτοιο τελεστή, και αφήνουμε τους άλλους για τα προβλήματα.

7.16. Ο **επόμενος** $\mathrm{Succ}(P)$ μερικά διατεταγμένου χώρου P κατασκευάζεται προσθέτοντας ένα καινούριο σημείο πάνω απ' όλα τα σημεία του P. Συγκεκριμένα, μπορούμε να προσθέσουμε στο πεδίο του P το αντικείμενο

$$t_P =_{\text{ορ}} \mathbf{r}(\mathrm{Field}(P)) \tag{7-9}$$

που δεν ανήκει στο $\mathrm{Field}(P)$ σύμφωνα με το **3.11**, και ορίζουμε

$$x \leq_{\mathrm{Succ}(P)} y \iff_{\text{ορ}} x \leq_P y \vee [x \in P \,\&\, y = t_P] \vee x = y = t_P. \tag{7-10}$$

Αν το P είναι πεπερασμένο με n σημεία, τότε το $\mathrm{Succ}(P)$ έχει $n+1$ σημεία, και μάλιστα (εύκολα) $\mathrm{Succ}([0,n)) =_o [0,(n+1))$. Από την άλλη μεριά, ο $\mathrm{Succ}(\mathbb{N})$ είναι άπειρος, απαριθμητός αλλά «μακρύτερος» του $\mathbb{N}$, έχει μέγιστο σημείο αμέσως επάνω απ' όλους τους φυσικούς αριθμούς.

7.17. Άσκηση. *Αν $P =_o Q$, τότε $\mathrm{Succ}(P) =_o \mathrm{Succ}(Q)$.*

7.18. Άσκηση. *Ο επόμενος $\mathrm{Succ}(U)$ κάθε καλά διατεταγμένου χώρου U είναι καλά διατεταγμένος.*

Μ' αυτό τον τελεστή του επόμενου, μπορούμε να θεωρήσουμε κάθε καλά διατεταγμένο χώρο ως αρχικό τμήμα κάποιου άλλου,

$$U = \mathbf{seg}_{\mathrm{Succ}(U)}(t_U) \subsetneq \mathrm{Succ}(U). \tag{7-11}$$

7.19. Ορισμός. Μια απεικόνιση $\pi : P \to P$ από ένα μερικά διατεταγμένο χώρο στον εαυτό του άλλο είναι **επεκτατική** (expansive), αν για κάθε $x \in P$, $x \leq \pi(x)$.

7.20. Θεώρημα. *Κάθε μονομορφισμός $\pi : U \rightarrowtail U$ από έναν καλά διατεταγμένο χώρο στον εαυτό του που σέβεται τη διάταξη είναι επεκτατικός.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προς απαγωγή σε άτοπο, έστω $\pi : U \rightarrowtail U$ μονομορφισμός που σέβεται τη διάταξη, αλλά για κάποιο $x \in U$, $\pi(x) < x$, και έστω

$$x^* = \min\{x \in U \mid \pi(x) < x\}.$$

Συνάγουμε ότι $\pi(x^*) < x^*$, άρα $\pi(\pi(x^*)) < \pi(x^*)$ αφού ο μονομορφισμός π σέβεται τη διάταξη, και αυτό αντικρούει την επιλογή του x^*. ⊣

7.21. Πόρισμα. *Κανείς καλά διατεταγμένος χώρος δεν είναι όμοιος με κάποιο από τα γνήσια αρχικά του τμήματα, και επομένως διαφορετικά αρχικά τμήματα του ίδιου χώρου δεν είναι ποτέ όμοια.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κάθε ομοιότητα $\pi : U \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathbf{seg}(x)$ είναι μονομορφισμός από το U στο U που σέβεται τη διάταξη, και επομένως δεν μπορεί να ισχύει η $\pi(x) < x$, από το Θεώρημα. ⊣

Επειδή καλά διατεταγμένοι χώροι μπορεί να έχουν οριακά σημεία εκτός του 0 και των επόμενων, είναι ευκολότερο να γενικεύσουμε σ' αυτούς τις αρχές απόδειξης με *πλήρη επαγωγή* και ορισμού με *πλήρη αναδρομή*.

7.22. Θεώρημα Υπερπεπερασμένης Επαγωγής. *Για κάθε καλά διατεταγμένο χώρο U και κάθε μονομελή οριστική συνθήκη P,*

$$\text{αν} \quad (\forall y \in U)[(\forall x < y)P(x) \Longrightarrow P(y)] \ \text{ τότε } \ (\forall y \in U)P(y).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προς απαγωγή σε άτοπο, υποθέτουμε την άρνηση του θεωρήματος και θέτουμε

$$y^* =_{\text{ορ}} \min\{y \in U \mid (\forall x < y)P(x) \,\&\, \neg P(y)\};$$

η υπόθεση συνεπάγεται $P(y^*)$, που αντιτίθεται στην επιλογή του y^*. ⊣

Σε πολλές εφαρμογές είναι εξίσου εύκολο να αποδείξουμε $(\forall y \in U)P(y)$ με απαγωγή σε άτοπο, κατευθείαν, επαναλαμβάνοντας στην ουσία το επιχείρημα του **7.22**. Εξαρτάται από τη δομή της πρότασης που θέλουμε να αποδείξουμε και πόσο μας ενοχλούν οι λογικοί υπολογισμοί με αρνητικές προτάσεις. Θα δώσουμε παραδείγματα και των δύο μεθόδων. Παρατηρήστε ότι ο τερατώδης (αλλά καθιερωμένος) όρος «υπερπεπερασμένη» χρησιμοποιείται επειδή ο U μπορεί να είναι μακρύτερος του $\mathbb{N}$, αλλά το Θεώρημα βεβαίως ισχύει επίσης όταν ο U είναι πεπερασμένος ή όμοιος με τον $\mathbb{N}$.

Το επόμενο λήμμα είναι το κλειδί για την απόδειξη του θεμελιακού θεωρήματος που το ακολουθεί.

7.23. Λήμμα. *Έστω U καλά διατεταγμένος χώρος και $h : (U \rightharpoonup E) \times U \to E$ συνάρτηση που αντιστοιχίζει σε κάθε μερική συνάρτηση από το U στο E και σε κάθε στοιχείο του U ένα στοιχείο του E. Για κάθε $t \in U$, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση*

$$\sigma_t : \mathbf{seg}(t) \to E$$

που ικανοποιεί την ταυτότητα

$$\sigma_t(x) = h(\sigma_t{\restriction}\mathbf{seg}(x), x) \quad (x < t). \tag{7-12}$$

Αποδειξη. Με Υπερπεπερασμένη Επαγωγή, δεχόμαστε ότι για κάθε $u < t$ υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $\sigma_u : \mathbf{seg}(u) \to E$ τέτοια ώστε

$$\sigma_u(x) = h(\sigma_u{\restriction}\mathbf{seg}(x), x) \quad (x < u). \tag{7-13}$$

Η επαγωγική υπόθεση δεν προσφέρει τίποτε αν $t = 0_U$ είναι το ελάχιστο του U, αλλά σ' αυτή την περίπτωση το συμπέρασμα είναι τετριμμένο, θέτοντας $\sigma_0 = \emptyset$. Αν $t = Sv$ είναι επόμενο στοιχείο στον U, θέτουμε

$$\sigma_t = \sigma_v \cup \{(v, h(\sigma_v, v))\}.$$

Τώρα η (7-13) ισχύει για κάθε $x < v$ από την επαγωγική υπόθεση και επίσης ισχύει για το $x = v$ από τον ορισμό. Για την τελευταία περίπτωση όπου το t είναι οριακό στοιχείο, χρειαζόμαστε ένα

Υπολήμμα. *Το σύνολο συναρτήσεων $\{\sigma_u \mid u < t\}$ είναι αλυσίδα στη σχέση $\subseteq$, δηλαδή*

$$x < u < v < t \Longrightarrow \sigma_u(x) = \sigma_v(x). \tag{7-14}$$

Απόδειξη. Προς απαγωγή σε άτοπο, έστω x ελάχιστο τέτοιο ώστε να μην ισχύει η (7-14) για κάποια $u < v < t$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\sigma_u{\restriction}\mathbf{seg}(x) = \sigma_v{\restriction}\mathbf{seg}(x),$$

και επομένως, από τη βασική ταυτότητα που ικανοποιούν οι σ_u, σ_v,

$$\begin{aligned}\sigma_u(x) &= h(\sigma_u{\restriction}\mathbf{seg}(x), x)\\ &= h(\sigma_v{\restriction}\mathbf{seg}(x), x)\\ &= \sigma_v(x),\end{aligned}$$

που αντικρούει την υπόθεση για το x. ⊣ (Υπολήμμα)

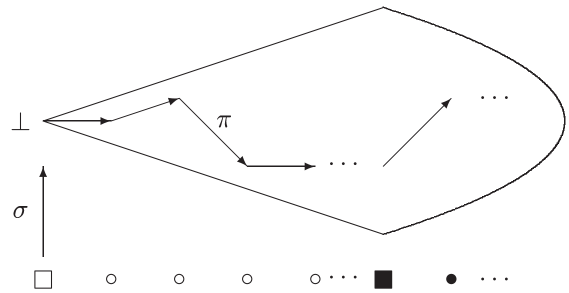
Θέτουμε τώρα

$$\sigma_t = \bigcup\{\sigma_u \mid u < t\}\cdot$$

η σ_t είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το αρχικό τμήμα $\mathbf{seg}(t)$ από το Υπολήμμα, και ικανοποιεί την (7-12), αφού για κάθε $x < t$,

$$\begin{aligned}\sigma_t(x) &= \sigma_u(x) && \text{για κάποιο } u \text{ όπου } x < u < t,\\ &= h(\sigma_u{\restriction}\mathbf{seg}(x), x) && \text{από την επαγωγική υπόθεση, αφού } u < t,\\ &= h(\sigma_t{\restriction}\mathbf{seg}(x), x) && \text{επειδή } \sigma_u{\restriction}\mathbf{seg}(x) = \sigma_t{\restriction}\mathbf{seg}(x)\\ & && \text{από τον ορισμό του } \sigma_t.\end{aligned}$$

Αυτό δείχνει την ύπαρξη της σ_t, και η μοναδικότητά της είναι προφανής με Υπερπεπερασμένη Επαγωγή, από την (7-12). ⊣



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **7.3**. Υπερπεπερασμένη τροχιά επεκτατικής απεικόνισης.

7.24. Θεώρημα Υπερπεπερασμένης Αναδρομής. *Για κάθε καλά διατεταγμένο χώρο U και κάθε συνάρτηση $h : (U \rightharpoonup E) \times U \to E$, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f : U \to E$ που ικανοποιεί την ταυτότητα*

$$f(x) = h(f \restriction \mathbf{seg}(x), x) \quad (x \in U). \tag{7-15}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $\mathrm{Succ}(U)$ ο επόμενος χώρος του U, με το σημείο $t = t_U$ στην κορυφή, ακριβώς πάνω απ' όλα τα σημεία του U. Ορίζουμε την επέκταση $h' : (\mathrm{Succ}(U) \rightharpoonup E) \times \mathrm{Succ}(U) \to E$ του h, με

$$h'(\sigma, x) = \begin{cases} h(\sigma \restriction U, x), & \text{αν } x \in U, \\ e^*, & \text{διαφορετικά, δηλαδή αν } x = t, \end{cases}$$

όπου το e^* είναι κάποιο στοιχείο του E, άνευ σημασίας. Η συνάρτηση h' έχει το κατάλληλο πεδίο ορισμού για να εφαρμόσουμε το Λημμα στο χώρο $\mathrm{Succ}(U)$ και στην ίδια, διότι $\mathbf{seg}_{\mathrm{Succ}(U)}(t) = U$. Αυτό μας δίνει για το σημείο t στην κορυφή, ακριβώς μία συνάρτηση $f = \sigma_t : U \to E$ που ικανοποιεί την (7-12) για κάθε $x \in U$. ⊣

Ίσως η απλούστερη, μη τετριμμένη εφαρμογή Υπερπεπερασμένης Αναδρομής να είναι η κατασκευή υπερπεπερασμένων τροχιών για απεικονίσεις ενός επαγωγικού μερικά διατεταγμένου χώρου στον εαυτό του. Θεωρούμε πρώτα τη βασική περίπτωση μιας *επεκτατικής* απεικόνισης, κατά τον ορισμό **7.19**. Οι επεκτατικές απεικονίσεις σχετίζονται με τις μονοτονικές που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, αλλά οι δύο έννοιες δεν συμπίπτουν. Η σταθερή απεικόνιση $(X \mapsto \emptyset)$ στο $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ π.χ. είναι προφανώς μονοτονική αλλά όχι επεκτατική, ενώ η

$$\pi(X) = \begin{cases} X \cup \{1\} & \text{αν } 0 \in X, \\ X \cup \{2\} & \text{αν } 0 \notin X \end{cases}$$

είναι επεκτατική αλλά (εύκολα) όχι μονοτονική. Παρ' όλα αυτά, αποτελέσματα για επεκτατικές απεικονίσεις συχνά μεταφράζονται σε συγγενή αποτελέσματα για μονοτονικές απεικονίσεις.

7.25. Λήμμα Επανάληψης. *Έστω $\pi : P \to P$ επεκτατική απεικόνιση κάποιου επαγωγικού χώρου, και έστω U καλά διατεταγμένος χώρος. Υπάρχει ακριβώς* *μία συνάρτηση $\sigma : U \to P$ με τις εξής ιδιότητες:*

$$\begin{aligned} \sigma(0) &= \bot, \\ \text{αν } x = S(y), \text{ τότε } \sigma(x) &= \pi(\sigma(y)), \\ \text{αν } \mathrm{Limit}(x), \text{ τότε } \sigma(x) &= \sup\nolimits_P \{\sigma(y) \mid y < x\}. \end{aligned} \tag{7-16}$$

Επιπλέον, αυτή η σ είναι μονοτονική από τον U στον P, δηλαδή

$$x \le y \Longrightarrow \sigma(x) \le_P \sigma(y). \tag{7-17}$$

Αποδειξη. Οι ιδιότητες στην **7-16** σχεδόν αποτελούν ορισμό της σ με υπερπεπερασμένη αναδρομή, μόνο που η οριακή περίπτωση δεν έχει νόημα αν το σύνολο $\{\sigma(y) \mid y < x\}$ δεν είναι αλυσίδα στο P. Για να καλύψουμε αυτό το ενδεχόμενο, ορίζουμε την σ με την εξής εφαρμογή του Θεωρήματος **7.24**:

$$\sigma(x) = \begin{cases} \bot, & \text{αν } x = 0, \\ \pi(\sigma(y)), & \text{αν } x = S(y) \text{ για κάποιο } y, \\ \sup_P \{\sigma(y) \mid y < x\}, & \text{if } \mathrm{Limit}(x) \\ & \quad \& \, (\forall x_1 < x_2 < x)[\sigma(x_1) \le_P \sigma(x_2)], \\ \bot, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

όπου $\le \, = \, \le_U$ είναι η καλή διάταξη του U, όπως και στη διατύπωση του θεωρήματος.

Υπολήμμα. *Για κάθε $x \in U$,*

$$x_1 < x_2 \le x \Longrightarrow \sigma(x_1) \le_P \sigma(x_2). \tag{7-18}$$

Απόδειξη. Δεχόμενοι την άρνηση προς απαγωγή σε άτοπο, έστω x το ελάχιστο στον U για το οποίο η (7-18) δεν ισχύει. Αφού η (7-18) αληθεύει τετριμμένα όταν $x = 0$ είναι το ελάχιστο του U, υπάρχουν μόνο δύο περιπτώσεις που πρέπει να εξετάσουμε.

Περιπτωση 1. $x = S(y)$ είναι επόμενο σημείο. Έστω $x_1 < x_2 \le x$. Αν $x_2 \le y$, τότε $\sigma(x_1) \le_P \sigma(x_2)$ από την επιλογή του x. Το μόνο άλλο ενδεχόμενο είναι ότι $x_2 = x$, αλλά τότε $\sigma(x_1) \le_P \sigma(y)$ από την επιλογή του x πάλι, και $\sigma(y) \le \pi(\sigma(y)) = \sigma(x)$ από την επεκτατικότητα της π. Επομένως η (7-18) ισχύει για το x, που είναι άτοπο.

Περιπτωση 2. Το x είναι οριακό. Από την επιλογή του x,

$$x_1 < x_2 < x \Longrightarrow \sigma(x_1) \le \sigma(x_2), \tag{7-19}$$

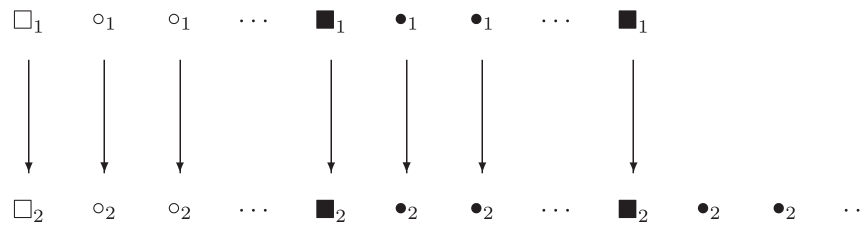
έτσι ώστε για να φτάσουμε σε άτοπο, αρκεί να δείξουμε ότι

$$x_1 < x \Longrightarrow \sigma(x_1) \le_P \sigma(x).$$

Αυτό ισχύει επειδή από τη συνεπαγωγή (7-19) και τον ορισμό της σ, έπεται αμέσως ότι $\sigma(x) = \sup_P \{\sigma(y) \mid y < x\}$. ⊣ (Υπολήμμα)

Το αποτέλεσμα συνάγεται από το Υπολήμμα, που ειδικότερα δείχνει ότι η περίπτωση «αλλιώς» δεν ανακύπτει στον υπολογισμό της σ από τον ορισμό της.⊣

Η υπερπεπερασμένη τροχιά $\sigma : U \to P$ της απεικόνισης $\pi : P \to P$ που εγγυάται το Λήμμα Επανάληψης είναι προφανώς επέκταση της τροχιάς $(n \mapsto x_n)$ που ορίσαμε στην απόδειξη του Συνεχούς Θεωρήματος Ελάχιστου Σταθερού



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **7.4**. Πορτρέτο αρχικής ομοιότητας.

Σημείου **6.21**, τουλάχιστον αν ο χώρος U είναι μακρύτερος του $\mathbb{N}$. Είναι ένα από τα εργαλεία που χρησιμοποιούμε στην απόδειξη του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου, ως εξής:

7.26. Προσχέδιο απόδειξης. Ας υποθέσουμε ότι για κάποιον επαγωγικό χώρο P, μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν καλά διατεταγμένο χώρο U τέτοιον ώστε *να μην υπάρχει μονομορφισμός* $\sigma : U \rightarrowtail P$. Ειδικότερα, η υπερπεπερασμένη τροχιά $\sigma : U \to P$ του Λήμματος **7.25** δεν μπορεί να είναι μονομορφισμός, και επομένως υπάρχουν $x < y$ τέτοια ώστε $\sigma(x) = \sigma(y)$. Η μονοτονικότητα της σ συνεπάγεται ότι

$$x \le u \le y \Longrightarrow \sigma(x) = \sigma(u),$$

το x έχει επόμενο αφού δεν είναι το μέγιστο του U, $x < S(x) \le y$, και επομένως

$$\sigma(x) = \sigma(Sx) = \pi(\sigma(x)).$$

Με άλλα λόγια, το σημείο $\sigma(x)$ είναι σταθερό σημείο της π.

Έτσι, για ν' αποδείξουμε ότι κάθε επεκτατική απεικόνιση $\pi : P \to P$ σε επαγωγικό χώρο έχει σταθερό σημείο, αρκεί να δείξουμε ότι *για κάθε σύνολο P, υπάρχει κάποιος καλά διατεταγμένος χώρος U που δεν μπορεί να εμφυτευτεί ένα-προς-ένα στον P*. Αυτό είναι ακριβώς το Θεώρημα Hartogs που είναι ο επόμενός μας στόχος. Για να το αποδείξουμε, πρέπει να μελετήσουμε πρώτα το πρόβλημα συγκρισιμότητας καλά διατεταγμένων χώρων ως προς το μήκος.

Η εικόνα του τυπικού καλά διατεταγμένου χώρου στο Διάγραμμα **7.1** υποδείχνει ότι πρέπει να μπορούμε να συγκρίνουμε δύο χώρους, να τους «ξαπλώσουμε» τον ένα δίπλα στον άλλο, το ελάχιστο 0_U του πρώτου αντικριστά στο ελάχιστο 0_V του άλλου, το επόμενο $S_U(0_U)$ αντικριστά με το επόμενο $S_V(0_V)$, το πρώτο οριακό σημείο ω_U του πρώτου (αν υπάρχει) αντικριστά με το ω_V κ.λπ. μέχρις ότου εξαντλήσουμε όλα τα σημεία του U ή του V. Η αυστηρή απόδοση αυτής της ιδέας είναι γενίκευση του Θεωρήματος Μοναδικότητας των φυσικών αριθμών **5.4**.

7.27. Ορισμός. Αρχική ομοιότητα (initial similarity)

$$\pi : U \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \pi[U] \sqsubseteq V$$

ενός καλά διατεταγμένου χώρου με κάποιον άλλο είναι μια οποιαδήποτε ομοιότητα του U με κάποιο αρχικό τμήμα του V. Αν υπάρχει τέτοια αρχική ομοιότητα, καλούμε τον U **μικρότερο-ίσο σε μήκος** του V, συμβολικά:

$$U \leq_o V \iff_{\text{ορ}} (\exists I \sqsubseteq V)[U =_o I]. \tag{7-20}$$

Επίσης γράφουμε,

$$U <_o V \iff_{\text{ορ}} U \leq_o V \,\&\, U \neq_o V. \tag{7-21}$$

Από το **7.9**, κάθε αρχική ομοιότητα $\pi : U \rightarrowtail V$ είναι ομοιότητα είτε με το V είτε με ένα γνήσιο αρχικό τμήμα του V, άρα

$$U <_o V \iff (\exists x \in V)[U =_o \mathbf{seg}_V(x)]. \tag{7-22}$$

7.28. Άσκηση. *Αν οι $\pi : U \rightarrowtail V$ και $\rho : V \rightarrowtail W$ είναι αρχικές ομοιότητες, τότε και η σύνθεσή τους $\rho\pi : U \rightarrowtail W$ είναι αρχική ομοιότητα.*

7.29. Πρόταση. *Για όλους τους καλά διατεταγμένους χώρους U, V, W,*

$$U \leq_o U,$$
$$\textit{αν}\ \ [U \leq_o V \,\&\, V \leq_o W],\ \ \textit{τότε}\ \ U \leq_o W,$$
$$\textit{αν}\ \ [U \leq_o V \,\&\, V \leq_o U],\ \ \textit{τότε}\ \ U =_o V.$$

Απόδειξη. Μόνο η τρίτη συνεπαγωγή χρειάζεται απόδειξη, και αυτή συνάγεται εύκολα από το **7.21**, ως εξής: Η σύνθεση $\rho\pi$ των αρχικών ομοιοτήτων $\pi : U \rightarrowtail V$, $\rho : V \rightarrowtail U$ που φανερώνουν την υπόθεση, είναι αρχική ομοιότητα $\rho\pi : U \rightarrowtail U$, κι αν δεν ήταν επιμορφισμός, θα φανέρωνε ότι ο U είναι όμοιος με ένα γνήσιο αρχικό του τμήμα, που είναι αδύνατο· άρα η $\rho\pi$ είναι αντιστοιχία, και επομένως η π είναι επίσης αντιστοιχία. ⊣

7.30. Θεώρημα. *Η συνάρτηση $\pi : U \to V$ από έναν καλά διατεταγμένο χώρο σε κάποιον άλλο είναι αρχική ομοιότητα, τότε και μόνον αν ικανοποιεί την εξίσωση*

$$\pi(x) = \min_V \{y \in V \mid (\forall u <_U x)[\pi(u) <_V y]\}. \tag{7-23}$$

Απόδειξη. Κάθε αρχική ομοιότητα $\pi : U \rightarrowtail V$ είναι μονομορφισμός που σέβεται τις διατάξεις, άρα

$$(\forall u <_U x)[\pi(u) <_V \pi(x)], \tag{7-24}$$

και επομένως

$$z = \min_V \{y \in V \mid (\forall u <_U x)[\pi(u) <_V y]\} \leq_V \pi(x).$$

Εφόσον η π είναι αρχική και $z \leq_V \pi(x)$, υπάρχει κάποιο $u \in U$ τέτοιο ώστε $\pi(u) = z$. Αν δεχτούμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι $z = \pi(u) <_V \pi(x)$, συμπεραίνουμε αμέσως ότι $u <_U x$ επειδή η π είναι μονομορφισμός που σέβεται τις διατάξεις· επομένως $\pi(u) <_V z$ από τον ορισμό του z, που είναι άτοπο επειδή $z = \pi(u)$.

Αντιστρόφως, αν η $\pi : U \to V$ ικανοποιεί την (7-23), τότε σέβεται τις διατάξεις, αφού από την (7-23), $u <_U x \Longrightarrow \pi(u) <_V \pi(x)$. Δεχόμαστε προς απαγωγή σε άτοπο ότι η εικόνα $\pi[U]$ δεν είναι αρχικό τμήμα του V και επιλέγουμε το x ελάχιστο στο U τέτοιο ώστε να υπάρχει κάποιο $y <_V \pi(x)$, $y \notin \pi[U]$. Από την επιλογή του x, $\pi[\mathbf{seg}_U(x)] \sqsubseteq V$ και αυτό το αρχικό τμήμα είναι γνήσιο επειδή δεν περιέχει το y. Άρα για κάποιο $z \in V$, $\pi[\mathbf{seg}_U(x)] = \mathbf{seg}_V(z)$, και από την (7-23), $\pi(x) = z$. Συνάγεται ότι $y <_V z$ και $y \in \mathbf{seg}_V(z) = \pi[\mathbf{seg}_U(x)]$, που είναι άτοπο. ⊣

7.31. Θεώρημα (Συγκρισιμότητα καλά διατεταγμένων χώρων). *Για όλους τους καλά διατεταγμένους χώρους U, V, είτε $U \leq_o V$ ή $V \leq_o U$.*

Απόδειξη. Το θεώρημα είναι τετριμμένο αν $V = \emptyset$, συνεπώς δεχόμαστε ότι το ελάχιστο 0_V υπάρχει. Από το Θεώρημα Υπερπεπερασμένης Αναδρομής **7.24** υπάρχει συνάρτηση $\pi : U \to V$ που ικανοποιεί την ταυτότητα

$$\pi(x) = \begin{cases} \min_V\{y \in V \mid (\forall u <_U x)[\pi(u) <_V y]\}, \\ \qquad\qquad \text{αν } (\exists y \in V)(\forall u <_U x)[\pi(u) <_V y], \\ 0_V, \ \text{αλλιώς}. \end{cases} \tag{7-25}$$

Σχολαστικά, εδώ εφαρμόζουμε το Θεώρημα **7.24** στην απεικόνιση $h : (U \rightharpoonup E) \times U \to E$, ορισμένη με τον τύπο

$$h(p, x) = \begin{cases} \min_V\{y \in V \mid (\forall u <_U x)[p(u) <_V y]\}, \\ \qquad\qquad \text{αν } (\exists y \in V)(\forall u <_U x)[p(u) <_V y], \\ 0_V, \ \text{αλλιώς}. \end{cases}$$

Ξεχωρίζουμε τώρα δύο περιπτώσεις.

Περιπτωση 1. *Για κάθε $x \neq 0_U$, $\pi(x) \neq 0_V$.* Αυτό σημαίνει ότι η δεύτερη περίπτωση στον ορισμό (7-25) δεν ανακύπτει, άρα η π ικανοποιεί την ταυτότητα (7-23) και αναγκαστικά είναι αρχική ομοιότητα από το Θεώρημα **7.30**.

Περιπτωση 2. *Για κάποιο $a \in U, a \neq 0_U$ και $\pi(a) = 0_V$.* Έστω a το ελάχιστο τέτοιο στοιχείο του U. Θεωρούμε τον περιορισμό

$$\rho = (\pi \restriction \mathbf{seg}_U(a)) : \mathbf{seg}_U(a) \to V,$$

ο οποίος ικανοποιεί την (7-23), άρα από το Θεώρημα **7.30**, είναι αρχική ομοιότητα από τον $\mathbf{seg}_U(a)$ στον V. Ειδικότερα, η εικόνα $\rho[\mathbf{seg}_U(a)] = \pi[\mathbf{seg}_U(a)]$ είναι αρχικό τμήμα του V· αν ήταν γνήσιο, τότε $\pi[\mathbf{seg}_U(a)] = \mathbf{seg}_V(z)$ για κάποιο $z \in V$ και από την (7-25), $\pi(a) = z \neq 0_V$, ενάντια στην επιλογή του a. Άρα $\pi[\mathbf{seg}_U(a)] = V$. Συνάγεται ότι $V =_o \mathbf{seg}_U(a)$, και επομένως υπάρχει αρχική ομοιότητα από το V στο U. ⊣

Το θεμελιακό αυτό θεώρημα έχει πληθώρα πορισμάτων, μερικά από τα οποία αξίζει να διατυπώσουμε αμέσως. Το πρώτο μας δίνει έναν απλό τρόπο να συγκρίνουμε καλά διατεταγμένους χώρους.

7.32. Πόρισμα. *Για όλους τους καλά διατεταγμένους χώρους U, V,*

$$U \leq_o V \iff (\exists \pi : U \rightarrowtail V)[\text{η } \pi \text{ σέβεται τις διατάξεις}].$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιος μονομορφισμός $\pi : U \rightarrowtail V$ που σέβεται τις διατάξεις, αλλά (προς απαγωγή σε άτοπο), $U \not\leq_o V$, άρα $V <_o U$.

Έπεται ότι $V =_o \mathbf{seg}_U(x)$ για κάποιο x από την (7-22), και επομένως υπάρχει αντιστοιχία $\sigma : V \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathbf{seg}_U(x)$· τώρα η σύνθεση $\rho = \sigma \circ \pi : U \rightarrowtail \mathbf{seg}_U(x)$ είναι μονομορφισμός που σέβεται τις διατάξεις και αντιτίθεται στο **7.20**. ⊣

7.33. Πόρισμα (Καλή θεμελίωση του $\leq_o$). *Κάθε μη κενή κλάση $\mathcal{E}$ καλά διατεταγμένων χώρων έχει $\leq_o$-ελάχιστο μέλος, δηλαδή για κάποιο $U_0 \in \mathcal{E}$ και όλα τα $U \in \mathcal{E}$, $U_0 \leq_o U$.*

Απόδειξη. Η υπόθεση μας δίνει κάποιο $W \in \mathcal{E}$, και αν αυτός ο W είναι $\leq_o$-ελάχιστος στο $\mathcal{E}$, τελειώσαμε. Αν όχι, τότε η **7.31** συνεπάγεται ότι υπάρχουν καλά διατεταγμένοι χώροι στην κλάση $\mathcal{E}$ που είναι όμοιοι με αρχικά τμήματα του W, έτσι που το σύνολο

$$J =_{\text{ορ}} \{x \in W \mid (\exists U \in \mathcal{E})[U =_o \mathbf{seg}_W(x)]\} \tag{7-26}$$

είναι μη κενό και άρα έχει $\leq_W$-ελάχιστο μέλος x. Από τον ορισμό του J, υπάρχει κάποιος χώρος $U_0 \in \mathcal{E}$ τέτοιος ώστε $U_0 =_o \mathbf{seg}_W(x)$, και ισχυριζόμαστε ότι αυτός ο U_0 είναι $\leq_o$-ελάχιστος στο $\mathcal{E}$. Για να το αποδείξουμε, με απαγωγή σε άτοπο, έστω κάποιος $U \in \mathcal{E}$, $U_0 \not\leq_o U$· άρα $U <_o U_0 =_o \mathbf{seg}_W(x)$· άρα $U =_o \mathbf{seg}_W(y)$ για κάποιο $y <_W x$, ενάντια στην επιλογή του x. ⊣

Στις περισσότερες εφαρμογές αυτού του θεωρήματος η κλάση $\mathcal{E}$ είναι σύνολο, οικογένεια καλά διατεταγμένων χώρων, αλλά υπάρχουν και περιπτώσεις όπου η γενικότητα της διατύπωσης είναι χρήσιμη. Π.χ. υπάρχει $\leq_o$-ελάχιστος καλά διατεταγμένος χώρος που έχει οριακό σημείο—συγκεκριμένα, ο $\mathrm{Succ}(\mathbb{N})$.

Με όλη αυτή την προεργασία δεν έχουμε ακόμη κατασκευάσει αναπαρίθμητους καλά διατεταγμένους χώρους, και δημιουργείται η υποψία ότι όλ' αυτά τα θεωρήματα αφορούν μόνο περίεργα ανακατώματα του $\mathbb{N}$. Το επόμενο δεύτερο θεμελιακό αποτέλεσμα του κεφαλαίου ξεκαθαρίζει την εικόνα.

7.34. Θεώρημα Hartogs. *Υπάρχει οριστικός τελεστής $\chi(A)$ που αντιστοιχίζει σε κάθε σύνολο A, έναν καλά διατεταγμένο χώρο*

$$\chi(A) = (h(A), \leq_{\chi(A)}),$$

τέτοιον ώστε $h(A) \not\leq_c A$, δηλαδή δεν υπάρχει μονομορφισμός $\pi : h(A) \rightarrowtail A$. Επιπλέον, ο χώρος $\chi(A)$ είναι ο $\leq_o$-ελάχιστος με αυτή την ιδιότητα, δηλαδή για κάθε καλά διατεταγμένο χώρο W,

$$\text{αν } W \not\leq_c A, \text{ τότε } \chi(A) \leq_o W. \tag{7-27}$$

Απόδειξη. Θέτουμε πρώτα

$$\mathrm{WO}(A) =_{\text{ορ}} \{U \mid U = (\mathrm{Field}(U), \leq_U) \text{ είναι καλά διατεταγμένος χώρος με } \mathrm{Field}(U) \subseteq A\}, \tag{7-28}$$

Έστω $\sim_A$ ο περιορισμός της οριστικής συνθήκης $=_o$ στο $\mathrm{WO}(A)$,

$$U \sim_A V \iff_{\text{ορ}} U, V \in \mathrm{WO}(A) \,\&\, U =_o V.$$

Προφανώς η $\sim_A$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathrm{WO}(A)$. Θέτουμε

$$h(A) =_{\text{ορ}} [\![\mathrm{WO}(A)/{\sim_A}]\!] \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{WO}(A)), \tag{7-29}$$

και διατάσσουμε τις κλάσεις ισοδυναμίας στο $h(A)$ από τους «αντιπροσώπους» τους,

$$[U/{\sim_A}] \leq_{\chi(A)} [V/{\sim_A}] \iff_{\text{ορ}} U \leq_o V. \tag{7-30}$$

Αυτό έχει νόημα, επειδή αν

$$[U/{\sim_A}] = [U'/{\sim_A}],\ [V/{\sim_A}] = [V'/{\sim_A}],\ \text{και } U \leq_o V,$$

τότε $U' =_o U \leq_o V =_o V'$. Το γεγονός ότι η $\leq_{\chi(A)}$ είναι καλή διάταξη του $h(A)$ έπεται εύκολα από τις γενικές ιδιότητες της $\leq_o$ και από τα **7.31** και **7.33**. Παίρνοντας την άρνηση των δύο πλευρών της (7-30) συνάγουμε την «αυστηρή» της μορφή,

$$V <_o U \iff [V/{\sim_A}] <_{\chi(A)} [U/{\sim_A}] \quad (U, V \in \mathrm{WO}(A)). \tag{7-31}$$

Οι βασικές ιδιότητες του τελεστή Hartogs απορρέουν από το εξής

Λήμμα. *Για κάθε $\alpha = [U/{\sim_A}] \in h(A)$,*

$$\mathbf{seg}_{\chi(A)}(\alpha) = \{[\mathbf{seg}_U(x)/{\sim_A}] \mid x \in U\} =_o U.$$

Ειδικότερα, κάθε γνήσιο αρχικό τμήμα του $\chi(A)$ είναι όμοιο με κάποιο καλά διατεταγμένο $U \in \mathrm{WO}(A)$, και κάθε $U \in \mathrm{WO}(A)$ είναι όμοιο με κάποιο γνήσιο αρχικό τμήμα του $\chi(A)$.

Proof. Δείχνουμε πρώτα την ισότητα

$$\mathbf{seg}_{\chi(A)}(\alpha) = \{[\mathbf{seg}_U(x)/{\sim_A}] \mid x \in U\}.$$

Αν $\beta = [V/{\sim_A}] <_{\chi(A)} \alpha$, τότε $V <_o U$ από την (7-31), άρα $V =_o \mathbf{seg}_U(x)$ για κάποιο $x \in U$ και επομένως $\beta = [\mathbf{seg}_U(x)/{\sim_A}]$. Αντιστρόφως, για κάθε $x \in U$, $\mathbf{seg}_U(x) <_o U$, άρα $[\mathbf{seg}_V(x)/{\sim_A}] <_{\chi(A)} [U/{\sim_A}] = \alpha$, πάλι από την (7-31).

Για να δείξουμε την ομοιότητα

$$U =_o \mathbf{seg}_{\chi(A)}(\alpha) = \{[\mathbf{seg}_U(x)/{\sim_A}] \mid x \in U\},$$

θεωρούμε την απεικόνιση $\rho : U \to h(A)$ με

$$\rho(x) = [\mathbf{seg}_U(x)/{\sim_A}], \quad (x \in U),$$

που είναι ομοιότητα του U με την εικόνα της $\rho[U]$, επειδή

$$\begin{aligned} x <_U y &\iff \mathbf{seg}_U(x) \subsetneq \mathbf{seg}_U(y) \\ &\iff \mathbf{seg}_U(x) <_o \mathbf{seg}_U(y) \\ &\iff [\mathbf{seg}_U(x)/{\sim_A}] <_{\chi(A)} [\mathbf{seg}_U(y)/{\sim_A}]. \qquad \dashv \text{(Λήμμα)} \end{aligned}$$

Υποθέτουμε τώρα, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι υπάρχει κάποιος μονομορφισμός

$$\pi : h(A) \rightarrowtail A,$$

και έστω $B = \pi[h(A)] \subseteq A$ η εικόνα του. Ο μονομορφισμός π «αντιγράφει» την καλή διάταξη του $h(A)$ σε μια επίσης καλή διάταξη του B,

$$x \leq_B y \iff_{\text{ορ}} \pi^{-1}(x) \leq_{\chi(A)} \pi^{-1}(y) \quad (x, y \in B),$$

έτσι ώστε το $U = (B, \leq_B)$ είναι καλά διατεταγμένο υποσύνολο του A, και από τον ορισμό του,

$$U =_o \chi(A). \tag{7-32}$$

Από το Λήμμα όμως, ο U είναι όμοιος με κάποιο γνήσιο αρχικό τμήμα του $\chi(A)$, και επομένως $U <_o \chi(A)$, που είναι άτοπο αφού $U =_o \chi(A)$.

Για να δείξουμε την ελαχιστότητα του $\chi(A)$, παρατηρούμε πρώτα ότι για κάθε καλά διατεταγμένο W, αν $W <_o \chi(A)$, τότε $W =_o \mathbf{seg}_{\chi(A)}(\alpha)$ για κάποιο $\alpha = [U/{\sim_A}]$, τέτοιο ώστε $W =_o U$ από το Λήμμα. Άρα

$$\text{αν } \; W <_o \chi(A), \text{ τότε } \; W \leq_c A, \tag{7-33}$$

εφόσον το (πεδίο ορισμού του) U είναι υποσύνολο του A και οι ομοιότητες είναι μονομορφισμοί. Παίρνοντας την άρνηση και των δύο πλευρών,

$$\text{αν } \; W \not\leq_c A, \text{ τότε } \; \neg[W <_o \chi(A)], \text{ και άρα } \chi(A) \leq_o W. \qquad \dashv$$

Θα προτιμούσαμε βεβαίως να αποδείξουμε ότι $A <_c \chi(A)$ αντί του δειλού $\chi(A) \not\leq_c A$, και σίγουρα αυτό αληθεύει, αλλά η απόδειξή του χρειάζεται το Αξίωμα Επιλογής. Πρέπει να περιμένουμε λίγο ακόμη μέχρις ότου εμφανιστεί ο από μηχανής θεός στο προσκήνιο.

Οι ενοχλητικές λεπτομέρειες αυτής της απόδειξης πηγάζουν από το γεγονός ότι ο περιορισμός $\lesssim_A$ της οριστικής συνθήκης $\leq_o$ στο $\mathrm{WO}(A)$ δεν είναι καλή διάταξη, για τον τετριμμένο λόγο ότι δεν είναι αντισυμμετρική: πιθανόν να υπάρχουν διαφορετικοί, όμοιοι, $U, V \in \mathrm{WO}(A)$, και βεβαίως πάντα υπάρχουν αν το A έχει τουλάχιστον δύο μέλη. Αυτό μας ανάγκασε να ορίσουμε το $h(A)$ ως σύνολο κλάσεων ισοδυναμίας αντί του πολύ απλούστερου $h(A) = \mathrm{WO}(A)$. Τεχνικά, η σχέση $\lesssim_A$ είναι *καλή προδιάταξη* και αξίζει τον κόπο να διαμορφώσει κανείς αυτή την απόδειξη κάπως διαφορετικά, μετά την εισαγωγή αυτής της έννοιας, βλ. Προβλήματα **x7.17** – **x7.20**.

Ο τελεστής Hartogs μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην κατασκευή γενικών τελεστών του *infimum* και του *supremum* για οικογένειες καλά διατεταγμένων χώρων (Προβλήματα **x7.26** και **x7.27**) αλλά έχει και πολλές άλλες ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Για πρώτη εφαρμογή του, γενικεύουμε το Συνεχές Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου **6.21** σε μη συνεχείς απεικονίσεις, αφού πρώτα διατυπώσουμε το Θεώρημα Σταθερού Σημείου, που έχουμε ήδη αποδείξει.

7.35. Θεώρημα Σταθερού Σημείου(Fixed Point Theorem, Zermelo).[17] *Κάθε επεκτατική απεικόνιση $\pi : P \to P$ σε έναν επαγωγικό χώρο έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο, δηλαδή κάποιο $x^* \in P$ ικανοποιεί την εξίσωση*

$$x^* = \pi(x^*).$$

---

[17] Ο Zermelo δεν διατύπωσε το Θεώρημα Σταθερού Σημείου σε τέτοια γενικότητα, και γι' αυτό το λόγο το θεώρημα και διάφορα από τα πορίσματά του έχουν αποδοθεί κατά καιρούς σε μεταγενέστερους μαθηματικούς. Όμως η διάσημη «πρώτη απόδειξη» του *Θεωρήματος Καλής Διάταξης* που έδωσε ο Zermelo το 1904 δείχνει ακριβώς αυτό το θεώρημα, τετριμμένα περιορισμένο στην ειδική περίπτωση που τον ενδιέφερε.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το επιχείρημα στο **7.26** χρειαζόταν μόνο κάποιο καλά διατεταγμένο χώρο U τέτοιον ώστε να μην υπάρχει μονομορφισμός $\sigma : U \rightarrowtail P$, και τώρα έχουμε τον $U = \chi(P)$ με αυτήν ακριβώς την ιδιότητα. ⊣

7.36. Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου (Least Fixed Point Theorem). *Κάθε μονοτονική απεικόνιση $\pi : P \to P$ σε επαγωγικό χώρο έχει* (ακριβώς) *ένα ισχυρά ελάχιστο σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει $x^* \in P$ με*

$$\pi(x^*) = x^*,$$
$$(\forall y \in P)[\pi(y) = y \Longrightarrow x^* \leq y],$$

που επιπλέον έχει την εξής, ισχυρότερη ιδιότητα:

$$(\forall y \in P)[\pi(y) \leq y \Longrightarrow x^* \leq y]. \tag{7-34}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Μια προσεκτική ανάγνωση των αποδείξεων του Λήμματος Επανάληψης **7.25** και του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου **7.26** φανερώνει ότι ακριβώς η ίδια κατασκευή του σταθερού σημείου για μια επεκτατική απεικόνιση μας δίνει επίσης το ελάχιστο σταθερό σημείο μιας μονοτονικής απεικόνισης. Δεν υπάρχει όμως λόγος να το κάνουμε αυτό, αφού το Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου είναι απλό πόρισμα του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου. Η βασική παρατήρηση είναι ότι κάθε μονοτονική απεικόνιση π είναι επεκτατική σε κάποιο επαγωγικό *υποχώρο* του P.

Θέτουμε

$$Q = \{x \in P \mid x \leq \pi(x) \,\&\, (\forall y)[\pi(y) \leq y \Longrightarrow x \leq y]\}$$

και παρατηρούμε πρώτα ότι ο περιορισμός

$$\leq_Q = \{(x, y) \mid x, y \in Q \,\&\, x \leq_P y\}$$

της $\leq_P$ στο Q είναι μερική διάταξη—αυτό ισχύει αυτόματα για τον περιορισμό της $\leq_P$ σε οποιοδήποτε υποσύνολο του P. (Παραλείπουμε τους δείκτες $_P$ και $_Q$ στη συνέχεια.) Επίσης $\pi[Q] \subseteq Q$, επειδή

$$x \leq \pi(x) \Longrightarrow \pi(x) \leq \pi(\pi(x)),$$

και για κάθε y,

$$\pi(y) \leq y \,\&\, x \leq y \Longrightarrow \pi(x) \leq \pi(y) \leq y,$$

από τη μονοτονικότητα της π. Συνεπώς ο περιορισμός

$$\pi_Q = \{(x, \pi(x)) \mid x \in Q\}$$

της π στο Q είναι απεικόνιση στο Q, εξακολουθεί να είναι μονοτονική (προφανώς) αλλά είναι και επεκτατική, από τον ορισμό του Q. Για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Σταθερού Σημείου **7.35** στα Q και π_Q μας λείπει μόνο το εξής

Λήμμα. *Ο χώρος Q είναι επαγωγικός.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε αλυσίδα $S \subseteq Q$, το ελάχιστο άνω φράγμα $M = \sup S$ (που υπάρχει στον P επειδή ο P είναι επαγωγικός) ανήκει

$\square$	$\circ$	$\circ$	$\cdots$	$\blacksquare$	$\bullet$	$\bullet$	$\cdots$
$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$\cdots$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$\cdots$

Διαγραμμα **7.5**. Το άθροισμα $\mathbb{N} +_o \mathbb{N}$.

στον Q, δηλαδή (1) $M \leq \pi(M)$, και (2) για κάθε y, $\pi(y) \leq y \Longrightarrow M \leq y$. Για το (1) υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} x \in S \Longrightarrow\ & x \leq M, && \text{επειδή το } M \text{ είναι άνω φράγμα του } S, \\ \Longrightarrow\ & \pi(x) \leq \pi(M), && \text{επειδή η } \pi \text{ είναι μονοτονική}, \\ \Longrightarrow\ & x \leq \pi(x) \leq \pi(M), && \text{επειδή } x \in S \subseteq Q, \end{aligned}$$

και επομένως το $\pi(M)$ είναι άνω φράγμα του S και $M = \sup S \leq \pi(M)$. Το (2) έπεται από την παρατήρηση ότι κάθε y που ικανοποιεί την $\pi(y) \leq y$ είναι άνω φράγμα του Q (από τον ορισμό του Q), και επομένως άνω φράγμα του υποσυνόλου $S \subseteq Q$, άρα $M = \sup S \leq y$. $\dashv$ (Λήμμα)

Από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου **7.35** τώρα, υπάρχει κάποιο $x^* \in Q$ τέτοιο ώστε $\pi(x^*) = x^*$ και η (7-34) ισχύει, πολύ απλά επειδή $x^* \in Q$.

Η μοναδικότητα του ελάχιστου σταθερού σημείου είναι προφανής: αν y^* είναι επίσης ελάχιστο σταθερό σημείο, τότε $x^* \leq y^*$ και $y^* \leq x^*$, κι άρα $x^* = y^*$. $\dashv$

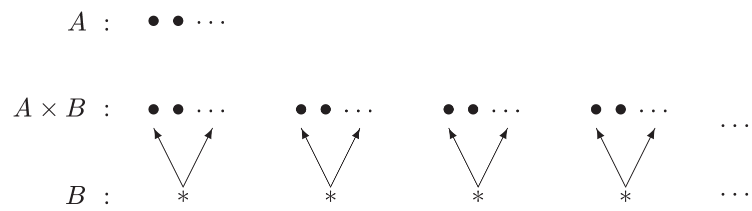
Το γενικό Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου μας απελευθερώνει από την ανάγκη να ελέγχουμε τη συνέχεια απεικονίσεων στις εφαρμογές ελάχιστων σταθερών σημείων στην Πληροφορική, και ιδιαίτερα στην ερμηνεία προγραμμάτων με ελάχιστα σταθερά σημεία. Αυτό είναι κομψό και ευχάριστο, αλλά όχι ιδιαίτερα σημαντικό, μιας και (όπως παρατηρήσαμε στο Κεφάλαιο **6**) οι απεικονίσεις που συναντά κανείς στις αλγοριθμικές εφαρμογές είναι κατά κανόνα προφανώς συνεχείς, από τον ορισμό τους. Το θεώρημα έχει όμως πολύ βαθύτερες εφαρμογές στη γενική θεωρία συνόλων, και ειδικότερα στη μελέτη της *ορισιμότητας* στη συνολοθεωρία, ως επίσης και στην κατασκευή παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων συνόλων με συγκεκριμένες ιδιότητες. Θα βρούμε πολλά τέτοια παραδείγματα στα επόμενα κεφάλαια.

Προβλήματα για το Κεφάλαιο 7

x7.1. Κάθε γραμμική διάταξη πεπερασμένου συνόλου είναι καλή διάταξη. (Σχετικό είναι το Πρόβλημα **x6.7**.)

7.37. Το **άθροισμα** $P +_o Q$ δύο μερικά διατεταγμένων χώρων P και Q κατασκευάζεται τοποθετώντας ξένα αντίγραφα των P και Q το ένα μετά το άλλο, έτσι ώστε κάθε σημείο του P να προηγείται κάθε σημείου του Q. Τυπικά, θέτουμε $P +_o Q = R$, όπου

$$\mathrm{Field}(R) =_{\text{ορ}} (\{0\} \times \mathrm{Field}(P)) \cup (\{1\} \times \mathrm{Field}(Q)), \tag{7-35}$$



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **7.6**. Το γινόμενο δύο καλά διατεταγμένων χώρων.

και για $(i,x),(j,y) \in \mathrm{Field}(R)$,

$$\begin{aligned}(i,x) \leq_R (j,y) \iff_{\text{ορ}} \ & i < j \vee [i = j = 0 \,\&\, x \leq_U y] \\ & \vee [i = j = 1 \,\&\, x \leq_V y].\end{aligned} \tag{7-36}$$

Η ιδέα είναι ότι ο P είναι όμοιος με το χώρο $\{0\} \times \mathrm{Field}(P)$ μερικά διατεταγμένο από τα δεύτερα των μελών του, με την προφανή ομοιότητα $(x \mapsto (0,x))$, και με τον ίδιο τρόπο, $Q =_o \{1\} \times \mathrm{Field}(Q)$.

x7.2. Αν $P =_o P'$ και $Q =_o Q'$, τότε $P +_o Q =_o P' +_o Q'$.

x7.3. Για κάθε μερικά διατεταγμένο χώρο P, $\mathrm{Succ}(P) =_o P +_o [0,1)$.

x7.4. Για όλους τους μερικά διατεταγμένους χώρους P, Q, R,

$$P +_o (Q +_o R) =_o (P +_o Q) +_o R.$$

x7.5. Αν οι χώροι U και V είναι καλά διατεταγμένοι, τότε και το άθροισμά τους $U +_o V$ είναι καλά διατεταγμένο.

x7.6. Δείξε ότι $[0,1) +_o \mathbb{N} =_o \mathbb{N} \neq_o \mathbb{N} +_o [0,1)$, και επομένως ο τελεστής άθροισης καλά διατεταγμένων χώρων δεν είναι αντιμεταθετικός.

7.38. Το **γινόμενο** $P \cdot_o Q$ δύο μερικά διατεταγμένων χώρων κατασκευάζεται με την αντικατάσταση κάθε σημείου του Q από ένα αντίγραφο του P. Τυπικά, θέτουμε $P \cdot_o Q = R$, όπου

$$\mathrm{Field}(R) = \mathrm{Field}(P) \times \mathrm{Field}(Q), \tag{7-37}$$

και $\leq_R$ είναι η *αντίστροφη αλφαβητική* διάταξη ζευγών, δηλαδή συγκρίνουμε πρώτα τα δεύτερα μέλη: για $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathrm{Field}(R)$,

$$(x_1,y_1) \leq_R (x_2,y_2) \iff_{\text{ορ}} y_1 <_Q y_2 \vee [y_1 = y_2 \,\&\, x_1 \leq_P x_2]. \tag{7-38}$$

Δεν υπάρχει κάποιος ιδιαίτερος λόγος για την επιλογή της αντίστροφης αλφαβητικής διάταξης αντί της συνηθισμένης, απλά ο Cantor έδωσε τον ορισμό μ' αυτόν τον τρόπο και έμεινε.

x7.7. Αν $P =_o P'$ και $Q =_o Q'$, τότε $P \cdot_o Q =_o P' \cdot_o Q'$.

x7.8. Δείξε ότι $P \cdot_o [0,2) =_o P +_o P$, αλλά $[0,2) \cdot_o \mathbb{N} =_o \mathbb{N} \neq_o \mathbb{N} \cdot_o [0,2)$, έτσι ώστε ο πολλαπλασιασμός καλά διατεταγμένων χώρων δεν είναι αντιμεταθετικός.

$$\begin{array}{rcccccccc}
 & (0,0) & (1,0) & (2,0) & \cdots & (0,1) & (1,1) & (2,1) & \cdots \\
N \cdot_o [0,2): & \square & \circ & \circ & \cdots & \blacksquare & \bullet & \bullet & \cdots \\
[0,2) \cdot_o N: & \square & \circ & \circ & \circ & \circ & \cdots & & \\
 & (0,0) & (1,0) & (0,1) & (1,1) & (0,2) & \cdots & &
\end{array}$$

Διαγραμμα **7.7**. Αντιμετάθεσης αποτυχία.

x7.9. Για όλους τους μερικά διατεταγμένους χώρους P, Q, R,

$$P \cdot_o (Q \cdot_o R) =_o (P \cdot_o Q) \cdot_o R.$$

x7.10. Το γινόμενο καλά διατεταγμένων χώρων είναι καλά διατεταγμένο.

x7.11. Για κάθε καλά διατεταγμένο χώρο U, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $\mathrm{Parity} : U \to \mathbb{N}$, τέτοια ώστε $\mathrm{Parity}(y) = 0$ αν $y = 0$ ή το y είναι οριακό σημείο, και στα επόμενα

$$\mathrm{Parity}(S(x)) = 1 - \mathrm{Parity}(x).$$

x7.12. Κάθε σημείο y καλά διατεταγμένου χώρου U εκφράζεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$y = S^n(x), \tag{7-39}$$

όπου (1) το x είναι είτε το ελάχιστο 0 είτε κάποιο οριακό σημείο, (2) το n είναι φυσικός αριθμός και (3) η συνάρτηση $(i, x) \mapsto S^i(x)$ ορίζεται με την αναδρομή

$$S^0(x) = x, \quad S^{i+1}(x) = S(S^i(x)).$$

x7.13. Για όλους τους καλά διατεταγμένους χώρους U, V, υπάρχει το πολύ μία αρχική ομοιότητα $\pi : U \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \pi[U] \sqsubseteq V$.

x7.14. Για όλους τους καλά διατεταγμένους χώρους U, V, W,

$$U <_o V \,\&\, V \leq_o W \implies U <_o W,$$
$$U \leq_o V \,\&\, V <_o W \implies U <_o W.$$

x7.15. Αν κ και λ είναι καλά διατάξιμοι πληθικοί αριθμοί, τότε είτε $\kappa \leq_c \lambda$ είτε $\lambda \leq_c \kappa$.

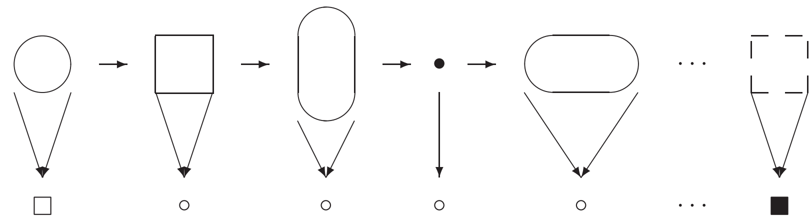
* **x7.16.** Αν ο κ είναι καλά διατάξιμος, άπειρος πληθικός αριθμός, τότε $\kappa + 1 =_c \kappa$.

7.39. Ορισμός. Καλή προδιάταξη (prewellordering!) στο σύνολο A είναι μια σχέση $\precsim \subseteq A \times A$ που είναι αυτοπαθής, μεταβατική, συνδεδεμένη (ολική) και εδραιωμένη. «Συνδεδεμένη» (connected) σημαίνει ότι τα μέλη του A είναι συγκρίσιμα ανά δύο,

$$(\forall x, y \in A)[x \precsim y \vee y \precsim x],$$

και «εδραιωμένη» (grounded) σημαίνει ότι κάθε μη κενό $X \subseteq A$ έχει $\precsim$-ελάχιστο μέλος,

$$(\forall X \subseteq A, X \neq \emptyset)(\exists x \in X)(\forall y \in X)[x \precsim y].$$



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **7.8**. Πορτρέτο καλής προδιάταξης.

Μια καλή προδιάταξη θα ήταν καλή διάταξη, αν είχε επιπλέον την ιδιότητα της αντισυμμετρικότητας.

x7.17. Για κάθε σύνολο A, θεωρούμε το σύνολο

$$B = \{X \subseteq A \mid X \text{ είναι πεπερασμένο}\}$$

των πεπερασμένων υποσυνόλων του A και ορίζουμε στο B

$$X \precsim_B Y \iff_{\text{ορ}} X \leq_c Y.$$

Δείξε ότι η $\lesssim_B$ είναι καλή προδιάταξη.

x7.18. Η σχέση $\precsim \subseteq A \times A$ είναι καλή προδιάταξη τότε και μόνον αν υπάρχει ένας καλά διατεταγμένος χώρος $U = (\mathrm{Field}(U), \leq_U)$ και ένας επιμορφισμός $\pi : A \twoheadrightarrow \mathrm{Field}(U)$, έτσι ώστε

$$x \precsim y \iff \pi(x) \leq_U \pi(y) \quad (x, y \in A).$$

x7.19. Για κάθε σύνολο A, η σχέση

$$U \lesssim_A V \iff_{\text{ορ}} U, V \in \mathrm{WO}(A) \,\&\, U \leq_o V$$

είναι καλή προδιάταξη του $\mathrm{WO}(A)$.

x7.20. Κατεργαστείτε μια διαφορετική διατύπωση της απόδειξης του Θεωρήματος Hartogs, χρησιμοποιώντας τα δύο προηγούμενα Προβλήματα.

x7.21. Για κάθε σύνολο A, υπάρχει καλά διατεταγμένος χώρος V τέτοιος ώστε δεν υπάρχει επιμορφισμός $\pi : A \twoheadrightarrow V$.

x7.22. Δείξε ότι αν $A \leq_c B$, τότε $\chi(A) \leq_o \chi(B)$.

x7.23. Δείξε ότι $\chi([0, n)) =_o [0, n + 1)$.

x7.24. Αν ο W καλά διατεταγμένος χώρος και $W \leq_c A$, τότε $W <_o \chi(A)$.

x7.25. Για κάθε σύνολο A και κάθε καλά διατεταγμένο χώρο U,

$$U <_o \chi(A) \iff \mathrm{Field}(U) \leq_c A.$$

Ο τελεστής $\chi(A)$ είναι οριστικός, μιας και δώσαμε ένα συγκεκριμένο ορισμό του πεδίου $h(A)$ και της καλής διάταξης $\leq_{\chi(A)}$ του $\chi(A)$ από το A. Μπορούμε να τον χρησιμοποιήσουμε για να ορίσουμε κάποιους σχετικούς τελεστές σε οικογένειες καλά διατεταγμένων χώρων.

[*] **x7.26.** Να ορίσεις έναν οριστικό τελεστή $\inf(\mathcal{E})$, τέτοιον ώστε για κάθε μη κενή οικογένεια $\mathcal{E}$ καλά διατεταγμένων χώρων, το $\inf(\mathcal{E})$ να έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(1) Το $\inf(\mathcal{E})$ είναι καλά διατεταγμένος χώρος.
(2) Για κάποιο $U \in \mathcal{E}$, $\inf(\mathcal{E}) =_o U$.
(3) Για κάθε $U \in \mathcal{E}$, $\inf(\mathcal{E}) \leq_o U$.

Υποδειξη. Ψάξε στα αρχικά τμήματα του $\chi(\bigcup \mathcal{E})$.

[*] **x7.27.** Να ορίσεις έναν οριστικό τελεστή $\sup(\mathcal{E})$, τέτοιον ώστε για κάθε μη κενή οικογένεια $\mathcal{E}$ καλά διατεταγμένων χώρων, το $\sup(\mathcal{E})$ να έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(1) Το $\sup(\mathcal{E})$ είναι καλά διατεταγμένος χώρος.
(2) Αν $U \in \mathcal{E}$, τότε $U \leq_o \sup(\mathcal{E})$.
(3) Αν το W είναι καλά διατεταγμένος χώρος και για κάθε $U \in \mathcal{E}$, έχουμε $U \leq_o W$, τότε $\sup(\mathcal{E}) \leq_o W$.

[*] **x7.28.** Για κάθε γραμμική διάταξη $\leq$ σε σύνολο A, ορίζουμε στο χώρο $\mathcal{P}(A)$ την απεικόνιση

$$\pi(X) =_{\text{ορ}} \{y \in A \mid (\forall x < y)[x \in X]\}.$$

Δείξε ότι η $\pi : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ είναι μονοτονική και δώσε ένα παράδειγμα όπου δεν είναι αριθμήσιμα συνεχής. Δείξε ότι αν το A_w είναι το ελάχιστο σταθερό σημείο της π, τότε

$$x \in A_w \iff \{(s,t) \in A \times A \mid s \leq t < x\} \text{ είναι καλή διάταξη.}$$

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου είναι ευκολότερο να χρησιμοποιήσουμε *την απόδειξη* του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου **7.35** παρά την εκφώνησή του.

[*] **x7.29. Λεπτομερειακό Θεώρημα Σταθερού Σημείου.** Για κάθε επεκτατική ή μονοτονική απεικόνιση $\pi : P \to P$ σε επαγωγικό χώρο P, υπάρχει υποσύνολο $D \subseteq P$ του P με τις εξής ιδιότητες:

(1) Το D είναι καλά διατεταγμένη αλυσίδα στο P.
(2) Κάθε σημείο του D καθορίζεται από τα προηγούμενά του με τον τύπο

$$x = \pi(\sup\{y \in D \mid y < x\}).$$

(3) Κανένα σημείο του D δεν είναι σταθερό σημείο της π.
(4) Το σημείο $\pi(\sup D)$ είναι σταθερό σημείο της π,

$$\pi(\pi(\sup D)) = \pi(\sup D).$$

(5) Αν η π είναι μονοτονική, τότε το $\pi(\sup D)$ είναι το ελάχιστο σταθερό σημείο της π.

Δείξε επίσης ότι αυτές οι ιδιότητες χαρακτηρίζουν το D: μόνο ένα υποσύνολο του P τις ικανοποιεί.

***x7.30.** Υποθέτουμε ότι η $\pi : P \times Q \to P$ είναι μονοτονική απεικόνιση στο γινόμενο δύο επαγωγικών χώρων, και ορίζουμε την $\rho : Q \to P$ χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα **x6.4** και το Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου 7.36,

$$\begin{aligned} \rho(y) &= (\mu x \in P)[\pi(x, y) = x] \\ &= \text{το ελάχιστο σταθερό σημείο της } \pi(x, y) = x. \end{aligned} \tag{7-40}$$

Δείξε ότι η ρ είναι μονοτονική, και ότι αν η π είναι αριθμήσιμα συνεχής, τότε και η ρ είναι αριθμήσιμα συνεχής.

***x7.31. Ο κανόνας των Bekič-Scott**. Υποθέτουμε ότι οι P_1, P_2 είναι επαγωγικοί χώροι και οι

$$\pi_1 : P_1 \times P_2 \to P_1, \quad \pi_2 : P_1 \times P_2 \to P_2,$$

είναι μονοτονικές απεικονίσεις. Χρησιμοποιώντας τον μ-συμβολισμό για τα ελάχιστα σταθερά σημεία της (7-40), ορίζουμε πρώτα την

$$\rho(x_2) = (\mu x_1 \in P_1)[\pi_1(x_1, x_2) = x_1],$$

μετά το σημείο

$$\overline{x}_2 = (\mu x_2 \in P_2)[\pi_2(\rho(x_2), x_2) = x_2]$$

ως το ελάχιστο σταθερό σημείο της απεικόνισης $x_2 \mapsto \pi_2(\rho(x_2), x_2)$ (που είναι μονοτονική από το **x7.30**) και τελικά το σημείο

$$(x_1^*, x_2^*) = (\mu(x_1, x_2) \in P_1 \times P_2)[(\pi_1(x_1, x_2), \pi_2(x_1, x_2)) = (x_1, x_2)]$$

ως το ελάχιστο σταθερό σημείο στο γινόμενο. Δείξε ότι

$$x_2^* = \overline{x}_2.$$

Το πρόβλημα βεβαιώνει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τα αμοιβαία ελάχιστα σταθερά σημεία επαναλαμβάνοντας δύο φορές τον τελεστή ελάχιστου σταθερού σημείου $(\mu x \in P)$.