**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ**
**Εθνικό και Καποδιστριακό**
**Πανεπιστήμιο Αθηνών**

# Θεωρία Συνόλων

Ενότητα: Παράδοξα και αξιώματα

Γιάννης Μοσχοβάκης

Τμήμα Μαθηματικών

# Σημειώματα

## Σημείωμα ιστορικού εκδόσεων έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.1. Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη στο σύνδεσμο http://www.math.ucla.edu/ ynm/lectures/g.pdf

## Σημείωμα αναφοράς

Copyright 2015. Γιάννης Μοσχοβάκης. «Θεωρία Συνόλων». Έκδοση: 1.1. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.uoa.gr/courses/MATH24/

## Σημείωμα αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Όχι Παράγωγα Έργα, Μη Εμπορική Χρήση 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/

Ως Μη Εμπορική ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από τη χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

## Διατήρηση σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

# ΠΑΡΑΔΟΞΑ ΚΑΙ ΑΞΙΩΜΑΤΑ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εκθέσαμε τα πρώτα βασικά αποτελέσματα της συνολοθεωρίας όπως τη δημιούργησε ο Cantor και οι πρωτοπόροι μαθηματικοί που τον ακολούθησαν στα τελευταία είκοσι πέντε χρόνια του 19ου αιώνα. Μέχρι την αρχή του 20ού αιώνα, η θεωρία αυτή ανδρώθηκε και δικαιώθηκε με πολλές και σημαντικές εφαρμογές, ιδιαίτερα στην ανάλυση. Η μεγαλύτερή της επιτυχία ήταν (ίσως) η δημιουργία μιας εξαιρετικά όμορφης και χρήσιμης θεωρίας *υπερπεπερασμένης αριθμητικής*, δηλαδή της μελέτης των αριθμητικών πράξεων της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού και της δύναμης σε άπειρα μεγέθη. Μέχρι το 1900, δύο βασικά προβλήματα σχετικά με την έννοια της ισοπληθικότητας δεν είχαν ακόμη λυθεί. Αυτά έπαιξαν αργότερα αποφασιστικό ρόλο στην εξέλιξη της συνολοθεωρίας και θα τα μελετήσουμε προσεκτικά στα επόμενα κεφάλαια. Εδώ τα διατυπώνουμε μόνο ως εικασίες.

**3.1. Εικασία Συγκρισιμότητας Πληθαρίθμων**.[5] *Για όλα τα σύνολα $A$, $B$, είτε $A \leq_c B$ είτε $B \leq_c A$.*

**3.2. Υπόθεση του Συνεχούς** (Continuum Hypothesis). Δεν υπάρχει σύνολο πραγματικών αριθμών $X$ με πλήθος ενδιάμεσο αυτών του $\mathbb{N}$ και και του $\mathbb{R}$, δηλαδή

$$\textbf{(CH)} \qquad (\forall X \subseteq \mathbb{R})[X \leq_c \mathbb{N} \vee X =_c \mathbb{R}].$$

Εφόσον $\mathbb{R} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$, η **CH** είναι ειδική περίπτωση της **Γενικευμένης Υπόθεσης του Συνεχούς** (Generalized Continuum Hypothesis),δηλαδή της υπόθεσης ότι για κάθε άπειρο σύνολο $A$,

$$\textbf{(GCH)} \qquad (\forall X \subseteq \mathcal{P}(A))[X \leq_c A \vee X =_c \mathcal{P}(A)].$$

Αν και οι δύο αυτές εικασίες αληθεύουν, τότε οι φυσικοί αριθμοί $\mathbb{N}$ και οι πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R}$ εκπροσωπούν τις δύο ελάχιστες «τάξεις απείρου»: κάθε άπειρο σύνολο είναι ή απαριθμητό ή ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$ ή «αυστηρά πολυπληθέστερο» του $\mathbb{R}$.

---

[5] Ο Cantor ανήγγειλε το «θεώρημα συγκρισιμότητας πληθαρίθμων» το 1895 και το 1899 σκιαγράφησε μια κάπως προβληματική απόδειξη σε ένα γράμμα στον Dedekind, το οποίο όμως δεν δημοσιεύτηκε μέχρι το 1932. Μάλλον είναι πιο κοντά στην αλήθεια να πούμε ότι μέχρι το 1900 (τουλάχιστον) το πρόβλημα της συγκρισιμότητας των συνόλων ως προς το πλήθος ήταν ακόμη άλυτο.

Σ' αυτή τη διαισθητική της φάση, η θεωρία συνόλων αναπτύχθηκε με βάση τον ορισμό της έννοιας του συνόλου που έδωσε ο Cantor όπως τον διατυπώσαμε στην Εισαγωγή, περίπου όπως αποδείξαμε και εμείς τα βασικά αποτελέσματά της στο Κεφάλαιο **2**. Αν εξετάσουμε προσεχτικά αυτές τις αποδείξεις θα δούμε ότι όλες στηρίζονται στην ιδιότητα της έκτασης (1-1) και στην ακόλουθη παραδοχή:

**3.3. Γενική Αρχή Συμπερίληψης** (General Comprehension Principle). Για κάθε $n$-μελή οριστική συνθήκη (definite condition) $P$, υπάρχει ένα σύνολο

$$A = \{\vec{x} \mid P(\vec{x})\}$$

με μέλη ακριβώς τις $n$-άδες αντικειμένων που ικανοποιούν την $P(\vec{x})$, έτσι ώστε για κάθε $\vec{x}$,

$$\vec{x} \in A \iff P(\vec{x}). \tag{3-1}$$

Η ιδιότητα της έκτασης συνεπάγεται ότι το πολύ ένα σύνολο $A$ ικανοποιεί την (3-1), και καλούμε αυτό το $A$ **έκταση** (extension) ή **συμπερίληψη** (comprehension) της συνθήκης $P$.

**3.4. Οριστικές συνθήκες και τελεστές.** Ο περιορισμός της αρχής σε **οριστικές συνθήκες** είναι απαραίτητος για να αποφύγουμε άσχετες με τα μαθηματικά αοριστίες, όπως το σύνολο

$$\{x \mid x \text{ έντιμος πολιτικός}\}$$

για το οποίο ίσως υπάρχει αντιλογία αν περιέχει τον κύριο Τάδε ή την κυρία Δείνα. Διαισθητικά, μια $n$-μελής συνθήκη $P$ είναι οριστική αν για κάθε $n$-άδα αντικειμένων $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ είναι καθορισμένο χωρίς αμφισβήτηση αν η $P(\vec{x})$ αληθεύει ή όχι. Παραδείγματος χάριν, οι διμελείς συνθήκες

$$\begin{aligned} P(x,y) &\iff_{\text{ορ}} \text{ ο } x \text{ είναι γονιός του } y,\\ S(s,t) &\iff_{\text{ορ}} \text{ οι } s \text{ και } t \text{ είναι αδέλφια}\\ &\iff (\exists x)[P(x,s)\,\&\,P(x,t)] \end{aligned}$$

είναι και οι δύο οριστικές, αν δεχτούμε (για το παράδειγμα) ότι οι νόμοι της Βιολογίας καθορίζουν πατρότητα χωρίς αμφισβήτηση. Η Γενική Αρχή Συμπερίληψης εφαρμόζεται, και μπορούμε να δημιουργήσουμε τα σύνολα ζευγών

$$\begin{aligned} A &=_{\text{ορ}} \{(x,y) \mid \text{ο } x \text{ είναι γονιός του } y\},\\ B &=_{\text{ορ}} \{(s,t) \mid \text{οι } s \text{ και } t \text{ είναι αδέλφια}\}. \end{aligned}$$

Δεν απαιτούμε από μιαν οριστική συνθήκη να είναι *αποκρίσιμη*, δηλαδή να έχουμε μια κατασκευαστική μέθοδο υπολογισμού της αληθοτιμής της. Παραδείγματος χάριν, είναι γνωστό το πρόβλημα της αριθμοθεωρίας, αν υπάρχουν άπειρα ζεύγη πρώτων αριθμών, και η αληθοτιμή της συνθήκης

$$G(n) \iff_{\text{ορ}} n \in \mathbb{N}\,\&\,(\exists m > n)[m, m+2 \text{ είναι πρώτοι}]$$

δεν είναι γνωστή για μεγάλες τιμές του $n$. Παρ' όλα αυτά, η συνθήκη $G$ είναι αναμφισβήτητα οριστική και μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε στον ορισμό του συνόλου

$$C =_{\text{ορ}} \{n \in \mathbb{N} \mid (\exists m > n)[m, m+2 \text{ είναι και οι δύο πρώτοι}]\}.$$

Αν η *Εικασία των Διδύμων Πρώτων* αληθεύει, τότε $C = \mathbb{N}$, αν όχι, τότε το $C$ είναι κάποιο μεγάλο αρχικό τμήμα των φυσικών αριθμών.

Κατ' αναλογίαν, ένας **τελεστής** $n$ μεταβλητών $F$ είναι **οριστικός** αν αντιστοιχίζει σε κάθε $n$-άδα αντικειμένων $\vec{x}$ ένα συγκεκριμένο, αναμφισβήτητα καθορισμένο αντικείμενο $w = F(\vec{x})$. Π.χ. αν δεχτούμε πάλι ότι η Βιολογία δεν θα μας προδώσει, ο τελεστής

$$F(x) =_{\text{ορ}} \begin{cases} \text{ο πατέρας του } x, & \text{αν ο } x \text{ είναι άνθρωπος,} \\ x, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

είναι οριστικός. Ο κάπως ανόητος διαχωρισμός περιπτώσεων είναι τυπικά αναγκαίος, για να βεβαιωθούμε ότι ο $F$ πάντα καθορίζει μια τιμή, για κάθε $x$. Αν χρειαζόμασταν αυτό το παράδειγμα σε μια πραγματική εφαρμογή, θα δίναμε τον ορισμό με το απλούστερο

$$F(x) =_{\text{ορ}} \text{ ο πατέρας του } x,$$

αφήνοντας στον αναγνώστη την αγγαρεία να διαλέξει κάποια συμβατική και άνευ σημασίας τιμή $F(x)$ για μη ανθρώπους $x$. Όπως και για τις συνθήκες, δεν επιμένουμε ότι ένας οριστικός τελεστής πρέπει να είναι *υπολογίσιμος*, μάλιστα η αμφιλογία για την τιμή του $F$ στο συγκεκριμένο παράδειγμα φτάνει μερικές φορές μέχρι τα δικαστήρια.

Εκτός από τη Γενική Αρχή Συμπερίληψης, στο προηγούμενο κεφάλαιο δεχτήκαμε και την ύπαρξη συγκεκριμένων συνόλων όπως το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών και το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, και ακόμη την οριστικότητα βασικών σχέσεων από τα κλασικά μαθηματικά, όπως την

$$\text{Function}(f, A, B) \iff \text{ η } f \text{ είναι συνάρτηση από το } A \text{ στο } B.$$

Αυτό δεν είναι πρόβλημα, καθώς αυτές τις προϋποθέσεις πάντοτε τις δέχονται οι μαθηματικοί, συνειδητά ή όχι.

Η Γενική Αρχή Συμπερίληψης έχει μια ακατανίκητη έλξη, ακολουθεί τόσο φυσικά από τις διαισθήσεις μας για την έννοια του συνόλου, ώστε το επόμενο θεώρημα καλείται «παράδοξο».

**3.5. Το παράδοξο του Russell.** *Η Γενική Αρχή Συμπερίληψης δεν ισχύει.*

Απόδειξη. Από τη Γενική Αρχή Συμπερίληψης, το σύνολο όλων των συνόλων

$$V =_{\text{ορ}} \{x \mid \text{το } x \text{ είναι σύνολο}\}$$

είναι σύνολο, κι έχει την κάπως περίεργη ιδιότητα να ανήκει στον εαυτό του, $V \in V$. Τα κοινά μαθηματικά σύνολα —αριθμών, συναρτήσεων κ.λπ— βεβαίως δεν περιέχουν τον εαυτό τους, και είναι φυσικό να τα θεωρήσουμε ως μέλη ενός μικρότερου κόσμου συνόλων, που δημιουργούμε πάλι με επίκληση της Γενικής Αρχής Συμπερίληψης,

$$R = \{x \mid \text{το } x \text{ είναι σύνολο και } x \notin x\}.$$

Ο ορισμός του $R$, όμως, αμέσως συνεπάγεται ότι

$$R \in R \iff R \notin R,$$

που είναι προφανώς άτοπο. $\dashv$

«Παράδοξο», όταν δεν θα πει «λάθος», σημαίνει «γεγονός ενάντιο στις διαισθήσεις μας», και τέτοια παράδοξα είχαν ήδη βρεθεί αρκετά στη συνολοθεωρία πριν από την ανακοίνωση του Russell το 1902, σε ένα ιστορικό γράμμα στον κορυφαίο Γερμανό φιλόσοφο και θεμελιωτή της μαθηματικής λογικής Gottlob Frege. Αυτά τα άλλα παράδοξα όμως ήταν κάπως τεχνικά και έθεταν σε αμφιβολία μόνο μέρη από τα πιο προχωρημένα κεφάλαια της θεωρίας του Cantor. Μπορούσε κανείς να εικάσει ότι κάποιο συστηματικό λάθος γινόταν στην ανώτερη συνολοθεωρία, κάτι σαν μια απρόσεκτη «διαίρεση διά του μηδενός» που σύντομα κάποιος θα έβρισκε πώς να το διορθώσει. Εξάλλου, τέτοιες αντιφάσεις και παράδοξα είχαν υπάρξει και στο λογισμό, και μετά την αυστηρή θεμελίωση αυτής της θεωρίας που μόλις είχε σχεδόν ολοκληρωθεί στο τέλος του αιώνα, όλα αποσβήστηκαν χωρίς να επηρεάσουν καθόλου τα ζωτικά μέρη της ανάλυσης. Το παράδοξο του Russell όμως ήταν κάτι τελείως διαφορετικό: απλό, σύντομο, άγγιζε την ουσία της βασικής έννοιας του συνόλου και την «προφανή» και μοναδική αρχή πάνω στην οποία είχε στηριχτεί όλη η θεωρία, και φαινομενικά την κατέστρεφε. Δεν είναι υπερβολή να πούμε ότι το παράδοξο του Russell έφερε μια φιλοσοφική **κρίση αμφιβολίας** πρώτα στη συνολοθεωρία, και μέσα απ' αυτή, αργότερα, σε όλα τα μαθηματικά, που δεν ξεπεράστηκε τελείως για τριάντα χρόνια περίπου.

Μερικοί, όπως ο Γάλλος γεωμέτρης Poincaré και ο Ολλανδός τοπολόγος και φιλόσοφος Brouwer πρότειναν ριζοσπαστικές λύσεις στο πρόβλημα που —ουσιαστικά— απέρριπταν τη συνολοθεωρία και πολλά κλασικά μαθηματικά μαζί της, σαν «ψευδοθεωρίες» χωρίς ουσιαστικό περιεχόμενο. Απ' αυτούς που δίσταζαν να εγκαταλείψουν τον «παράδεισο του Cantor», πρώτος ο Russell επιχείρησε τη «σωτηρία» της συνολοθεωρίας από την καταστροφή με την περιώνυμή του **θεωρία των τύπων** (theory of types), η οποία όμως είναι δύσχρηστη στις εφαρμογές και δεν έγινε γενικά αποδεκτή από την πλειονότητα των μαθηματικών.[6] Σχεδόν παράλληλα με τον Russell, ο Zermelo πρότεινε το 1908 μια διαφορετική λύση που με τα χρόνια και την εργασία πολλών εξελίχτηκε στη σύγχρονη θεωρία των συνόλων, όπως την μελετάμε και την εφαρμόζουμε σήμερα.

Στο πρώτο του δημοσίευμα σ' αυτό το θέμα το 1908 ο Zermelo αντιμετώπισε το πρόβλημα πρακτικά. Χωρίς αμφιβολία η Γενική Αρχή Συμπερίληψης ήταν εσφαλμένη, αυτό είναι προφανές από το παράδοξο του Russell. Από την άλλη

[6]Η θεωρία των τύπων είχε μεγάλη επίδραση στην εξέλιξη της φιλοσοφίας και λογικής και μερικές από τις βασικές ιδέες της βρήκαν τελικά τη θέση τους και στη θεωρία συνόλων.

μεριά, οι συγκεκριμένες εφαρμογές αυτής της αρχής στις αποδείξεις των βασικών θεωρημάτων για τα σύνολα (όπως αυτών στο προηγούμενο κεφάλαιο) είναι ελάχιστες, απλές, κάπως προφανείς, και φαινομενικά μη προβληματικές.

> «Σ' αυτές τις περιστάσεις, δεν υπάρχει αυτή τη στιγμή για μας καμία άλλη επιλογή παρά να προχωρήσουμε προς την αντίθετη κατεύθυνση [από αυτήν της Γενικής Αρχής Συμπερίληψης] και, ξεκινώντας από τη θεωρία συνόλων όπως αυτή έχει εξελιχθεί ιστορικά, να αναζητήσουμε αυτούς τους κανόνες που είναι απαραίτητοι για την εδραίωση των θεμελίων αυτού του κλάδου των μαθηματικών. Για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα πρέπει, από τη μια μεριά, να περιορίσουμε αυτούς τους κανόνες αρκετά ώστε να αποκλείσουμε όλες τις αντιφάσεις και, από την άλλη μεριά, πρέπει να τους δεχτούμε αρκετά ισχυρούς ώστε να διατηρήσουμε ό,τι είναι πολύτιμο σ' αυτή τη θεωρία».

Με άλλα λόγια, ο Zermelo πρότεινε να αντικαταστήσουμε τις άμεσες *διαισθήσεις* του Cantor για τα σύνολα που μας οδήγησαν στην εσφαλμένη Γενική Αρχή Συμπερίληψης με μερικά **αξιώματα**, υποθέσεις για τα σύνολα που τις δεχόμαστε «εξ ανάγκης», επειδή είναι απαραίτητες για τις αποδείξεις των βασικών αποτελεσμάτων της υπάρχουσας θεωρίας.

Με μια τέτοια αμφίβολη, σχεδόν ύποπτη φιλοσοφική βάση ξεκίνησε η **αξιωματική συνολοθεωρία**, σίγουρα ένα από τα πιο σημαντικά επιτεύγματα της επιστήμης του 20ού αιώνα. Ένα μεγάλο πλεονέκτημα που είχε, όμως, από την αρχή, ήταν η μεγαλοφυΐα του Zermelo, που επέλεξε ένα εξαιρετικά φυσικό και εύχρηστο σύστημα αξιωμάτων. Κανένα από τα αξιώματα του Zermelo δεν έχει αφαιρεθεί ή σημαντικά αναθεωρηθεί και (μέχρι πρόσφατα) μόνο δύο αξιώματα προστέθηκαν στα εφτά δικά του στη δεκαετία 20 – 30, χρήσιμα για την ομαλή ανάπτυξη της συνολοθεωρίας αλλά που δεν αγγίζουν τις εφαρμογές της στα κλασικά μαθηματικά. Επιπλέον, το καθένα από τα αξιώματα του Zermelo εκφράζει μια διαισθητικά προφανή ιδιότητα των συνόλων που κατά φυσικό τρόπο συναντάμε στα μαθηματικά. Με το πέρασμα των χρόνων και τη χρήση δημιουργήθηκε μια καινούρια διαισθητική έννοια «εδραιωμένου συνόλου» που δεν οδηγεί σε αντιφάσεις και για την οποία τα αξιώματα της συνολοθεωρίας είναι τελείως προφανή. Θα επανέλθουμε στο πρόβλημα της θεμελιακής βάσης της συνολοθεωρίας, καλύτερα προετοιμασμένοι μετά τη μελέτη των βασικών, μαθηματικών της αποτελεσμάτων.

Το βασικό πρότυπο για την αξιωματοποίηση της συνολοθεωρίας ήταν βέβαια η αξιωματική γεωμετρία του Ευκλείδη, που για 2.000 χρόνια είχε εδραιωθεί ως το «τέλειο» παράδειγμα μαθηματικής θεωρίας. Αν μη τι άλλο, η αξιωματική μέθοδος ξεκαθαρίζει τα νερά και μας επιτρέπει να διαχωρίσουμε ό,τι μαθηματικές δυσκολίες και αντιφάσεις ίσως υπάρχουν στις βασικές διαισθήσεις μας για τα μαθηματικά αντικείμενα που μελετάμε, από τυχόν προβλήματα της λογικής, δηλαδή πιθανά λάθη στις αποδείξεις μας. Όπως προχωράμε στη μελέτη των πορισμάτων από τα αξιώματα του Zermelo, θα είναι πολλές φορές χρήσιμο να υπενθυμίζουμε στον εαυτό μας το παράδειγμα της γεωμετρίας του Ευκλείδη.

**3.6. Η αξιωματική βάση της συνολοθεωρίας.** Δεχόμαστε εξαρχής ότι υπάρχει ένα **πεδίο** ή **κόσμος** (universe) **αντικειμένων** $\mathcal{W}$, μερικά από τα οποία είναι **σύνολα**, και κάποιες **οριστικές συνθήκες και τελεστές** στο $\mathcal{W}$, ανάμεσά τους οι βασικές συνθήκες

$$\begin{aligned} x = y &\iff \text{το αντικείμενο } x \text{ είναι το ίδιο με το } y, \\ \mathrm{Set}(x) &\iff \text{το } x \text{ είναι σύνολο}, \\ x \in y &\iff \mathrm{Set}(y) \text{ και το } x \text{ είναι μέλος του } y. \end{aligned}$$

Τα αντικείμενα του $\mathcal{W}$ που δεν είναι σύνολα τα λέμε **άτομα** (atoms ή urelements), αλλά δεν απαιτούμε την ύπαρξή τους· δηλαδή αφήνουμε ανοικτό το ενδεχόμενο όλα τα αντικείμενα να είναι σύνολα. Οι οριστικές συνθήκες και οι τελεστές δεν είναι ούτε σύνολα ούτε άτομα.

Έτσι βέβαια αρχίζει κάθε αξιωματική θεωρία. Στην Ευκλείδειο Γεωμετρία ξεκινάμε με την υπόθεση ότι υπάρχουν *σημεία*, *γραμμές* και διάφορα άλλα γεωμετρικά αντικείμενα, και ότι μερικές βασικές, οριστικές συνθήκες έχουν οριστεί πάνω σ' αυτά, π.χ. έχει νόημα να ρωτήσουμε αν «το σημείο $P$ κείται στην ευθεία $L$». Κατόπιν διατυπώνουμε τα κλασικά αξιώματα του Ευκλείδη γι' αυτά τα αντικείμενα και προχωράμε να αποδείξουμε συμπεράσματά τους. Η Γεωμετρία είναι κάπως περίπλοκη, υπάρχουν πολλών ειδών βασικά αντικείμενα και πολλά λεπτά αξιώματα που τα συνδέουν. Σε σύγκριση μ' αυτήν, η συνολοθεωρία του Zermelo είναι λιτή, ασκητική: έχει μόνο σύνολα και άτομα, και μόνο εφτά, απλά αξιώματα που τα συνδέουν. Στο υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου θα διατυπώσουμε έξι απ' αυτά τα αξιώματα, με λίγα σχόλια και παραδείγματα. Είναι κάπως ευκολότερο να αναβάλουμε τη διατύπωση του τελευταίου, έβδομου αξιώματος μέχρις ότου κατανοήσουμε μερικά από τα συμπεράσματα των πρώτων έξι στα αμέσως επόμενα κεφάλαια.

**3.7. (I) Αξίωμα Έκτασης** (Axiom of Extensionality). *Για κάθε σύνολο $A$ και κάθε σύνολο $B$,*

$$A = B \iff (\forall x)[x \in A \iff x \in B].$$

**3.8. (II) Αξίωμα του Κενού Συνόλου και του Ζεύγους** (Emptyset and Pairset Axiom). (a) *Υπάρχει ένα «συμβατικό» σύνολο $\emptyset$ που δεν έχει κανένα μέλος.* (b) *Για κάθε $x$ και κάθε $y$, υπάρχει σύνολο $\{x, y\}$ με μοναδικά μέλη τα $x$ και $y$, έτσι που να ικανοποιείται η ισοδυναμία*

$$t \in A \iff t = x \vee t = y. \tag{3-2}$$

Το Αξίωμα Έκτασης συνεπάγεται ότι μόνο ένα κενό σύνολο υπάρχει, και ότι για όλα τα $x, y$, μόνο ένα σύνολο $A$ ικανοποιεί την (3-2). Αυτό το **δισύνολο** των $x$ και $y$ το συμβολίζουμε

$$\{x, y\} =_{\text{ορ}} \text{το μοναδικό σύνολο με μόνα μέλη τα } x, y.$$

Αν $x = y$, τότε $\{x, x\} = \{x\}$ είναι το **μονοσύνολο** του αντικειμένου $x$.

Χρησιμοποιώντας αυτό το αξίωμα μπορούμε να κατασκευάσουμε πολλά απλά σύνολα, π.χ. τα

$$\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\{\emptyset\}\},\ \{\emptyset,\{\emptyset\}\},\ \{\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\},\ \dots,$$

αλλά καθένα απ' αυτά έχει το πολύ δύο μέλη!

**3.9. Άσκηση.** *Δείξε ότι* $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

**3.10.** (**III**) **Αξίωμα Εξειδίκευσης** *ή* **Διαχωρισμού**. (Separation Axiom ή Aussonderungsaxiom).*Για κάθε σύνολο $A$ και κάθε μονομελή, οριστική συνθήκη $P$, υπάρχει ένα σύνολο $B$ που ικανοποιεί την ισοδυναμία*

$$x \in B \iff x \in A \,\&\, P(x). \tag{3-3}$$

Από το Αξίωμα Έκτασης πάλι, μόνο ένα $B$ μπορεί να ικανοποιεί την (3-3) και το συμβολίζουμε

$$B = \{x \in A \mid P(x)\}.$$

Χαρακτηριστική συμβολή του Zermelo, αυτό το αξίωμα είναι προφανώς περιορισμός της Γενικής Αρχής Συμπερίληψης που συνεπάγεται πολλά από τα «αγαθά» πορίσματά της. Π.χ. μπορούμε να ορίσουμε την τομή και τη διαφορά δύο συνόλων ως

$$A \cap B =_{\text{ορ}} \{x \in A \mid x \in B\},$$
$$A \setminus B =_{\text{ορ}} \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Η απόδειξη του παράδοξου του Russell μας δίνει ένα θεώρημα:

**3.11. Θεώρημα.** *Για κάθε σύνολο $A$, το σύνολο*

$$\mathbf{r}(A) =_{\text{ορ}} \{x \in A \mid x \notin x\} \tag{3-4}$$

*δεν είναι μέλος του $A$. Έπεται ότι η συλλογή όλων των συνόλων δεν είναι σύνολο, δηλαδή δεν υπάρχει σύνολο $V$ που να ικανοποιεί την ισοδυναμία*

$$x \in V \iff \mathrm{Set}(x).$$

Απόδειξη. Προσέξτε πρώτα ότι το $\mathbf{r}(A)$ είναι σύνολο από το Αξίωμα Διαχωρισμού. Αν (προς απαγωγή σε άτοπο) $\mathbf{r}(A) \in A$, τότε (όπως και πριν) ισχύει η ισοδυναμία

$$\mathbf{r}(A) \in \mathbf{r}(A) \iff \mathbf{r}(A) \notin \mathbf{r}(A),$$

που προφανώς είναι αντιφατική. ⊣

**3.12.** (**IV**) **Αξίωμα Δυναμοσυνόλου** (Powerset Axiom). *Για κάθε σύνολο $A$, υπάρχει ένα σύνολο $B$ με μόνα μέλη τα υποσύνολα του $A$, δηλαδή*

$$X \in B \iff \mathrm{Set}(X) \,\&\, X \subseteq A. \tag{3-5}$$

Ο συμβολισμός $X \subseteq A$ είναι συντόμευση του $(\forall t)[t \in X \Longrightarrow t \in A]$. Το Αξίωμα Έκτασης συνεπάγεται ότι για κάθε $A$, μόνο ένα σύνολο ικανοποιεί την (3-5) κι αυτό είναι βέβαια το **δυναμοσύνολο** του $A$, συμβολικά

$$\mathcal{P}(A) =_{\text{ορ}} \{X \mid \mathrm{Set}(X) \,\&\, X \subseteq A\}.$$

**3.13. Άσκηση.** *$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ και $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.*

**3.14. Άσκηση.** *Για κάθε σύνολο $A$, υπάρχει σύνολο $B$ του οποίου μέλη είναι ακριβώς όλα τα μονοσύνολα των μελών του $A$, δηλαδή*

$$x \in B \iff (\exists t \in A)[x = \{t\}].$$

**3.15.** (**V**) **Αξίωμα Ένωσης** (Unionset Axiom). *Για κάθε σύνολο $\mathcal{E}$, υπάρχει ένα σύνολο $B$ με μέλη τα μέλη των μελών του $\mathcal{E}$, που ικανοποιεί δηλαδή την ισοδυναμία*

$$t \in B \iff (\exists X \in \mathcal{E})[t \in X]. \tag{3-6}$$

Από το Αξίωμα Έκτασης πάλι, για κάθε $\mathcal{E}$, μόνο ένα σύνολο ικανοποιεί την (3-6), το ονομάζουμε **ένωση** του $\mathcal{E}$ και το συμβολίζουμε με

$$\bigcup \mathcal{E} =_{\text{ορ}} \{t \mid (\exists X \in \mathcal{E})[t \in X]\}.$$

Ο τελεστής της ένωσης είναι πιο χρήσιμος όταν το $\mathcal{E}$ είναι **οικογένεια συνόλων**, δηλαδή όταν το $\mathcal{E}$ και κάθε μέλος του $X \in \mathcal{E}$ είναι σύνολα. Αυτή είναι η περίπτωση στην απλούστερη εφαρμογή, που μας δίνει (επιτέλους) τον διμελή τελεστή της ένωσης συνόλων: θέτουμε

$$A \cup B = \bigcup \{A, B\}.$$

χρησιμοποιώντας τα αξιώματα (**II**) και (**V**), και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} t \in A \cup B &\iff (\exists X \in \{A, B\})[t \in X] \\ &\iff t \in A \vee t \in B. \end{aligned}$$

**3.16. Άσκηση.** *$\bigcup \emptyset = \bigcup \{\emptyset\} = \emptyset$.*

**3.17.** (**VI**) **Αξίωμα Απείρου** (Axiom of Infinity). *Υπάρχει κάποιο σύνολο $I$ που περιέχει το κενό σύνολο $\emptyset$ και το μονοσύνολο κάθε μέλους του, δηλαδή*

$$\emptyset \in I \,\&\, (\forall x)[x \in I \Longrightarrow \{x\} \in I].$$

Χωρίς να έχουμε αυστηρό ορισμό του «απείρου» ακόμη, είναι προφανές ότι οποιοδήποτε $I$ ικανοποιεί τις συνθήκες του αξιώματος είναι άπειρο, αφού

$$\emptyset \in I \,\&\, (\forall x)[x \in I \Longrightarrow \{x\} \in I].$$

και όλα αυτά τα σύνολα είναι διαφορετικά από το Αξίωμα Έκτασης. Η διαισθητική αντίληψη του αξιώματος του απείρου είναι ότι απαιτεί ακριβώς την ύπαρξη του συνόλου

$$I = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\},$$

αλλά είναι απλούστερο (και αρκεί) να δεχτούμε για το $I$ τη χαρακτηριστική ιδιότητα του αξιώματος.

Η κοινή αντίληψη φιλοσόφων και μαθηματικών του 19ου αιώνα ήταν ότι η ύπαρξη απείρων συνόλων μπορεί να αποδειχτεί, και ειδικότερα, ότι είναι εφικτό να «κατασκευάσουμε» το σύνολο των φυσικών αριθμών από το τίποτα, «μόνο με τη Λογική». Όλες οι αποδείξεις που είχαν προταθεί στηρίζονταν στην εσφαλμένη

Γενική Αρχή Συμπερίληψης και οδηγούσαν σε αντιφάσεις. Σήμερα καταλαβαίνουμε τα πράγματα κάπως καλύτερα: η Λογική μπορεί να ταξινομήσει τους ορθούς τρόπους του «σκέπτεσθαι», αλλά (από τη φύση της) δεν μπορεί να αποδείξει την ύπαρξη ουδενός, πόσο μάλλον απείρων συνόλων. Με τη σωστή και σαφή αντιμετώπιση αυτού του θέματος στη διατύπωση ξέχωρου Αξιώματος Απείρου, ο Zermelo έκανε μια ιδιαίτερα σημαντική προσφορά στη διαδικασία αποβολής από τη Λογική οντολογικών απαιτήσεων και στη διαχώρισή της από τη μαθηματική ανάπτυξη της συνολοθεωρίας, προς όφελος και των δύο κλάδων.

**3.18. Αξιώματα για οριστικές συνθήκες και τελεστές.** Ο Zermelo δέχτηκε τις *οριστικές συνθήκες* διαισθητικά, τις περιέγραψε περίπου όπως τις περιγράψαμε και εμείς στο **3.4**, και χρησιμοποίησε σε εφαρμογές του Αξιώματος Εξειδίκευσης πολλές πολύπλοκες συνθήκες χωρίς ξέχωρη απόδειξη της «οριστικότητάς» τους. Αυτό θα κάνουμε και εμείς, επειδή οι αποδείξεις οριστικότητας είναι βαρετές και σπάνια βοηθούν την κατανόηση. Αξίζει όμως εδώ, για μια φορά, να απαριθμήσουμε τις ελάχιστες (και προφανείς) ιδιότητες των οριστικών συνθηκών και τελεστών που αρκούν για να στηρίξουν όλες τις αποδείξεις που θα δώσουμε.

1. Οι εξής βασικές συνθήκες είναι οριστικές:

$$\begin{aligned} x = y &\iff_{\text{ορ}} \text{το } x \text{ και το } y \text{ είναι το ίδιο αντικείμενο,}\\ \mathrm{Set}(x) &\iff_{\text{ορ}} \text{το } x \text{ είναι σύνολο,}\\ x \in y &\iff_{\text{ορ}} \mathrm{Set}(y) \text{ και το } x \text{ είναι μέλος του } y, \end{aligned}$$

2. Για κάθε αντικείμενο $c$ και κάθε $n$, ο σταθερός τελεστής $n$ μεταβλητών

$$F(x_1, \dots, x_n) = c$$

είναι οριστικός.

3. Κάθε *τελεστής προβολής*

$$F_i(x_1, \dots, x_n) = x_i \quad (1 \le i \le n)$$

είναι οριστικός.

4. Αν η $P$ είναι οριστική συνθήκη $n+1$ μεταβλητών και για κάθε $n$-άδα $\vec{x} = x_1, \dots, x_n$ αντικειμένων υπάρχει ακριβώς ένα $w$ που ικανοποιεί την $P(\vec{x}, w)$, τότε ο τελεστής

$$F(\vec{x}) = \text{ το μοναδικό } w \text{ ώστε } P(\vec{x}, w)$$

είναι οριστικός.

5. Αν η $Q$ είναι οριστική συνθήκη $m$ μεταβλητών, αν κάθε $F_i$ είναι οριστικός τελεστής $n$ μεταβλητών για $i = 1, \dots, m$, και αν

$$P(\vec{x}) \iff_{\text{ορ}} Q(F_1(\vec{x}), \dots, F_m(\vec{x})),$$

τότε η συνθήκη $P$ είναι επίσης οριστική.

6. Αν οι $Q$, $R$ και $S$ είναι οριστικές συνθήκες με τον προφανή αριθμό μεταβλητών, τότε οριστικές είναι και οι συνθήκες που ορίζονται απ' αυτές με

τις απλές πράξεις της λογικής, ως εξής:

$$
\begin{aligned}
P_1(\vec{x}) &\Longleftrightarrow_{\text{ορ}} \neg P(\vec{x}) &&\Longleftrightarrow \text{ η } P(\vec{x}) \text{ δεν αληθεύει,}\\
P_2(\vec{x}) &\Longleftrightarrow_{\text{ορ}} Q(\vec{x}) \,\&\, R(\vec{x}) &&\Longleftrightarrow \text{ η } Q(\vec{x}) \text{ και η } R(\vec{x}) \text{ αληθεύουν,}\\
P_3(\vec{x}) &\Longleftrightarrow_{\text{ορ}} Q(\vec{x}) \vee R(\vec{x}) &&\Longleftrightarrow \text{ μια από τις } Q(\vec{x}),\ R(\vec{x}) \text{ αληθεύει,}\\
P_4(\vec{x}) &\Longleftrightarrow_{\text{ορ}} (\exists y)S(\vec{x},y) &&\Longleftrightarrow \text{ για κάποιο } y, \text{ αληθεύει η } S(\vec{x},y),\\
P_5(\vec{x}) &\Longleftrightarrow_{\text{ορ}} (\forall y)S(\vec{x},y) &&\Longleftrightarrow \text{ για κάθε } y, \text{ αληθεύει η } S(\vec{x},y).
\end{aligned}
$$

Όλες οι συνθήκες και οι τελεστές που θα χρησιμοποιήσουμε μπορούν να αποδειχτούν οριστικές με αναφορά σ' αυτές τις απλές ιδιότητες. Εκτός όμως από ένα πρόβλημα στο τέλος αυτού του κεφαλαίου (γι' αυτούς που ενδιαφέρονται στη λογική), θα παραλείψουμε τέτοιες τεχνικές αποδείξεις οριστικότητας και συμβουλεύουμε τον αναγνώστη να κάνει το ίδιο: μας απομακρύνουν από το κύριο έργο μας, που είναι να μελετήσουμε τα σύνολα και όχι τις οριστικές συνθήκες και τους τελεστές.

**3.19. Κλάσεις**. Έχοντας απορρίψει με τόσες φαμφάρες τη Γενική Αρχή Συμπερίληψης, θα ισχυριστούμε τώρα ότι *για κάθε μονομελή οριστική συνθήκη $P$, υπάρχει μια* **κλάση**

$$A = \{x \mid P(x)\}, \tag{3-7}$$

*τέτοια ώστε για κάθε αντικείμενο $x$,*

$$x \in A \iff P(x). \tag{3-8}$$

Για να δώσουμε νόημα σ' αυτή την αρχή και να την αποδείξουμε, χρειαζόμαστε ένα συμβατικό συμβολισμό και τη σημαντική έννοια της «κλάσης». Κάθε σύνολο θα είναι κλάση, αλλά εξαιτίας του Παραδόξου του Russell **3.5**, απαραιτήτως υπάρχουν κλάσεις που δεν είναι σύνολα αλλιώς οι (3-7) και (3-8) μας οδηγούν αμέσως στο Παράδοξο του Russel, στην περίπτωση $P(x) \iff \mathrm{Set}(x) \,\&\, x \notin x$.

Καταρχήν ας συμφωνήσουμε ότι για κάθε μονομελή, οριστική συνθήκη $P$, θα γράφουμε συνώνυμα

$$x \in P \iff P(x).$$

Παραδείγματος χάριν, αν Set είναι η βασική συνθήκη του «είναι σύνολο», αποδίδουμε ακριβώς το ίδιο νόημα στις εκφράσεις

$$x \in \mathrm{Set} \iff \mathrm{Set}(x) \iff \text{το } x \text{ είναι σύνολο.}$$

Τίποτα καινούριο σ' αυτό, μόνο ένας απλός, συμβατικός συμβολισμός.

Η μονομελής συνθήκη $P$ είναι **ισομελής** (ίση σε έκταση, coextensive) με ένα σύνολο $A$, αν τα αντικείμενα που την ικανοποιούν είναι ακριβώς τα μέλη του $A$, συμβολικά

$$P =_{\mathrm{e}} A \Longleftrightarrow_{\text{ορ}} (\forall x)[P(x) \iff x \in A]. \tag{3-9}$$

Για παράδειγμα, αν

$$P(x) \iff x \neq x,$$

τότε $P =_{\rm e} \emptyset$. Από το Παράδοξο του Russell **3.5**, υπάρχουν συνθήκες που δεν είναι ισομελείς με σύνολα. Από την άλλη μεριά, *μια μονομελής, οριστική συνθήκη $P$ είναι ισομελής το πολύ με ένα σύνολο*: επειδή αν $P =_{\rm e} A$ και επίσης $P =_{\rm e} B$, τότε για κάθε $x$,

$$x \in A \iff P(x) \iff x \in B,$$

και $A = B$ από το Αξίωμα Έκτασης.

Εξ ορισμού, μια **κλάση** (class) $A$ *είναι είτε σύνολο, είτε μονομελής, οριστική συνθήκη που δεν είναι ισομελής με κανένα σύνολο.* Σε κάθε μονομελή συνθήκη $P$ αντιστοιχίζουμε την κλάση

$$\{x \mid P(x)\} =_{\rm op} \begin{cases} \text{το μοναδικό σύνολο } A \text{ τέτοιο ώστε } P =_{\rm e} A, \\ \qquad \text{αν } P =_{\rm e} A \text{ για κάποιο σύνολο } A, \\ P, \quad \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{3-10}$$

Αν $A =_{\rm op} \{x \mid P(x)\}$, τότε είτε η $P$ είναι ισομελής με κάποιο σύνολο, οπότε $P =_{\rm e} A$ και από τον ορισμό $x \in A \iff P(x)$, είτε η $P$ δεν είναι ισομελής με κανένα σύνολο, οπότε $A = P$ και

$$x \in A \iff x \in P \iff P(x) \quad \text{(από το συμβατικό συμβολισμό).}$$

Αυτό είναι ακριβώς η *Γενική Αρχή Συμπερίληψης για Κλάσεις* που διατυπώσαμε πιο πάνω στις (3-7) και (3-8).

**3.20. Άσκηση.** *Για κάθε σύνολο $A$,*

$$\{x \mid x \in A\} = A,$$

*άρα κάθε σύνολο είναι κλάση. Δείξε επίσης ότι*

$$\{X \mid \mathrm{Set}(X) \,\&\, X \subseteq A\} = \mathcal{P}(A).$$

**3.21. Άσκηση.** *Οι κλάσεις $\mathcal{W}$ όλων των αντικειμένων και* Set *όλων των συνόλων δεν είναι σύνολα.*

Αν η $P$ είναι μια $n$-μελής οριστική συνθήκη και ο $F$ ένας $n$-μελής οριστικός τελεστής, θέτουμε:

$$\{F(\vec{x}) \mid P(\vec{x})\} =_{\rm op} \{w \mid (\exists \vec{x})[P(\vec{x}) \,\&\, w = F(\vec{x})]\}. \tag{3-11}$$

Παραδείγματος χάριν, για $F(x) = \{x\}$,

$$\{\{x\} \mid x = x\} = \{w \mid (\exists x)[w = \{x\}]\} = \text{Η κλάση όλων των μονοσυνόλων.}$$

**3.22. Άσκηση.** *Η κλάση $\{\{x\} \mid x = x\}$ όλων των μονοσυνόλων δεν είναι σύνολο.*

**3.23. Άσκηση.** *Για κάθε κλάση $A$,*

$$\begin{aligned} \text{η } A \text{ είναι σύνολο} &\iff \text{για κάποια κλάση } B, A \in B \\ &\iff \text{για κάποιο σύνολο } X, A \subseteq X, \end{aligned}$$

*όπου η σχέση «υποκλάσης» ορίζεται όπως και για τα σύνολα,*

$$A \subseteq B \iff_{\rm op} (\forall x)[x \in A \Longrightarrow x \in B].$$

**3.24. Επιλογή και Αντικατάσταση: προσοχή!** Η αξιωματοποίηση της συνολοθεωρίας δεν θα είναι πλήρης μέχρι να εισαγάγουμε το τελευταίο Αξίωμα Επιλογής του Zermelo στο Κεφάλαιο **8** και το μεταγενέστερο Αξίωμα Αντικατάστασης στο Κεφάλαιο **11**. Υπάρχουν σοβαροί λόγοι γι' αυτές τις αναβολές, που θα τους εξηγήσουμε εν καιρώ, αλλά επίσης υπάρχουν σοβαροί λόγοι για την εισαγωγή αυτών των αξιωμάτων: πολλά από τα απλούστατα συνολοθεωρητικά επιχειρήματα βασίζονται σ' αυτά τα αξιώματα, μεταξύ τους και μερικές από τις πλέον βασικές αποδείξεις του Κεφαλαίου **2**. Επομένως, μέχρι το Κεφάλαιο **8** πρέπει να προσέχουμε ιδιαίτερα ότι οι αποδείξεις μας μπορούν πράγματι να δικαιολογηθούν με βάση τα αξιώματα (**I**) – (**VI**) και ότι δεν έχουμε αθέλητα χρησιμοποιήσει και κάποια άλλη «προφανή» αλήθεια για τα σύνολα, την οποία δεν έχουμε ακόμη ούτε αποδείξει ούτε συμπεριλάβει στα αξιώματα. Σε μερικά μέρη θα αποδείξουμε κάτι ασθενέστερο αυτού που πράγματι ισχύει, επειδή η πλήρης αλήθεια χρειάζεται Επιλογές ή Αντικατάσταση για να επιβεβαιωθεί. Αυτό μάλλον είναι καλό: θα μας κρατήσει επιφυλακτικούς και θα μας βοηθήσει να μάθουμε καλύτερα την τέχνη του *να συλλογίζεσαι αξιωματικά.*

**3.25. Περί ατόμων**.Οι περισσότερες σύγχρονες μελέτες στην αξιωματική συνολοθεωρία δέχονται ευθύς εξ αρχής τη λεγόμενη **Αρχή Αγνότητας** (Principle of Purity), ότι *δεν υπάρχουν άτομα* και ότι όλα τα αντικείμενα στο βασικό μας πεδίο αντικειμένων είναι *σύνολα*. Έχει μια ελκυστική απλότητα η ιδέα ενός τέτοιου μαθηματικού κόσμου όπου τα πάντα είναι σύνολα. Ακολουθώντας τον Zermelo έχουμε επιτρέψει την ύπαρξη ατόμων (χωρίς να την απαιτήσουμε), κυρίως επειδή αυτό κάνει τη συνολοθεωρία πιο φυσικά και άμεσα εφαρμόσιμη στις άλλες επιστήμες: θέλουμε τα αποτελέσματά μας να είναι εφαρμόσιμα σε σύνολα από *πλανήτες*, *μόρια ή βατράχια*, και τα βατράχια δεν είναι σύνολα. Οπωσδήποτε, το κόστος αυτής της επιλογής είναι ελάχιστο: σε μερικά μέρη πρέπει να πούμε «αντικείμενο», όπου οι εξορκιστές των ατόμων θα έλεγαν «σύνολο». Είναι όμως σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι κανένα από τα αξιώματά μας δεν απαιτεί την ύπαρξη ατόμων, και επομένως κανένα από τα συμπεράσματά τους δεν βασίζεται στα άτομα: ό,τι αποδείξουμε παραμένει αληθές στον κόσμο των αγνών συνόλων, εφόσον βέβαια αυτός ο κόσμος ικανοποιεί τα αξιώματα του Zermelo.

**3.26. Αξιώματα ως ιδιότητες κλειστότητας του κόσμου** $\mathcal{W}$. Όπως και να φανταστούμε το πεδίο $\mathcal{W}$ της αξιωματικής μας θεωρίας, είναι προφανές ότι δεν περιέχει όλα τα «στοιχεία της διαίσθησης ή του στοχασμού μας» στην έκφραση του Cantor: δεν περιέχει π.χ. αυτόν τον ίδιο κόσμο $\mathcal{W}$, που δεν είναι σύνολο και οπωσδήποτε είναι στοιχείο του στοχασμού μας και αναντίρρητο μαθηματικό αντικείμενο. Αν δεχτούμε ότι υπάρχουν μαθηματικά αντικείμενα έξω από το $\mathcal{W}$, τότε μπορούμε (χρήσιμα) να θεωρήσουμε τα αξιώματα ως *ιδιότητες κλειστότητας* του $\mathcal{W}$. Μέχρι στιγμής έχουμε δεχτεί ότι το $\mathcal{W}$ περιέχει το $\emptyset$, ότι είναι κλειστό για τους τελεστές του ζεύγους $\{x, y\}$ (**II**), δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(X)$ (**IV**) και ένωσης $\bigcup \mathcal{E}$ (**V**), ότι περιέχει κάθε οριστική υποσυλλογή κάθε συνόλου (**III**), και ότι περιέχει επίσης κάποιο σύνολο $I$ με τη χαρακτηριστική ιδιότητα του Αξιώματος Απείρου (**VI**). Μπορούμε ακόμη να ερμηνεύσουμε το Αξίωμα

Έκτασης (**I**) ως ιδιότητα κλειστότητας του $\mathcal{W}$: στη μη τετριμμένη κατεύθυνσή του, απαιτεί για όλα τα σύνολα $A, B$ τη συνεπαγωγή

$$A \neq B \Longrightarrow (\exists t)[t \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)], \tag{3-12}$$

δηλαδή κάθε ανισότητα $A \neq B$ μεταξύ δύο συνόλων δικαιολογείται από κάποιο «νόμιμο» αντικείμενο $t \in \mathcal{W}$ που ανήκει στο ένα και όχι στο άλλο.

Αυτή η ερμηνεία των αξιωμάτων είναι συμβατή με δύο διαφορετικές απόψεις του κόσμου $\mathcal{W}$. Η πρώτη θεωρεί τον κόσμο σαν κάτι χαώδες, άμορφο, δύσκολο στην κατανόηση και αδύνατο να οριστεί: αλλά κάθε αντικείμενο που ανήκει στο $\mathcal{W}$ είναι συγκεκριμένο, οριστικό, ολοκληρωμένο, και αυτές οι ιδιότητες των αντικειμένων αρκούν για να δικαιολογήσουν τις ιδιότητες κλειστότητας του $\mathcal{W}$ που εκφράζουν τα αξιώματα. Ας την πούμε αυτή τη *μεγάλη άποψη* του $\mathcal{W}$. Η *μικρή άποψη* είναι ότι ο κόσμος $\mathcal{W}$ αποτελείται ακριβώς από εκείνα τα αντικείμενα των οποίων την ύπαρξη «εγγυώνται» τα αξιώματα, τα αντικείμενα δηλαδή που μπορούν να «κατασκευαστούν» με επανειλημμένες εφαρμογές των αξιωμάτων: τα αξιώματα αληθεύουν στο $\mathcal{W}$ επειδή συμπεριλάβαμε σ' αυτό, επίτηδες, ακριβώς όλα τα αντικείμενα που απαιτούνται από τις ιδιότητες κλειστότητας που εκφράζουν τα αξιώματα. Βεβαίως, καμία από αυτές τις απόψεις δεν μας δίνει αυστηρό, μαθηματικό ορισμό του $\mathcal{W}$, αλλά είναι προφανές ότι εκφράζουν διαφορετικές απόψεις του μαθηματικού κόσμου των συνόλων. Με τη μικρή άποψη, π.χ. δεν υπάρχουν άτομα, αφού κανένα από τα αξιώματα δεν τα απαιτεί, ενώ η μεγάλη άποψη επιτρέπει βατράχια ανάμεσα στα αντικείμενα του $\mathcal{W}$.

Υπάρχουν επιχειρήματα που ευνοούν και τις δύο αυτές απόψεις, οι οποίες έχουν παίξει σημαντικό ρόλο στη φιλοσοφία της συνολοθεωρίας, ακόμη και στην πρακτική της, υποβάλλοντας το είδος των προβλημάτων που αξίζουν μελέτη. Θα επιστρέψουμε στο θέμα αυτό στο Κεφάλαιο **11** και στο Παράρτημα **B**, όταν θα έχουμε τη δυνατότητα να το συζητήσουμε κάπως πιο σοβαρά. Εν τω μεταξύ, θα αναφερθούμε συχνά στα αξιώματα ως ιδιότητες κλειστότητας του $\mathcal{W}$, μια χρήσιμη κατανόησή τους που είναι συμβατή με κάθε φιλοσοφική πρόσβαση στη συνολοθεωρία.

## Προβλήματα για το Κεφάλαιο 3

**x3.1.** Για κάθε μη κενό σύνολο $\mathcal{E}$ και για κάθε $X \in \mathcal{E}$, ορίζουμε την *τομή του* $\mathcal{E}$ *μέσω του* $X$,

$$\bigcap{}_X \mathcal{E} =_{\text{ορ}} \{x \in X \mid (\forall U \in \mathcal{E})[x \in U]\}.$$

Δείξε ότι για όλα τα μέλη $X, Y$ του $\mathcal{E}$,

$$\bigcap{}_X \mathcal{E} = \bigcap{}_Y \mathcal{E},$$

δηλαδή η τομή $\bigcap_X \mathcal{E}$ είναι ανεξάρτητη του $X$ που χρησιμοποιήσαμε στον ορισμό της, και επομένως μπορούμε να τη συμβολίζουμε $\bigcap \mathcal{E}$ χωρίς να δείχνουμε αυτό το $X$. Δείξε επίσης ότι $A \cap B = \bigcap\{A, B\}$.

**x3.2.** Για οποιαδήποτε σύνολα $A, B$, εξέτασε ποιές από τις παρακάτω κλάσεις είναι ή όχι σύνολο.

1. $\{\{\emptyset, x\} \mid x \in A\}$.
2. $\{x \mid \mathrm{Set}(x) \,\&\, x \neq \emptyset\}$.
3. $\{\{x, y\} \mid x \in A \,\&\, y \in B\}$.
4. $\{\mathcal{P}(X) \mid X \subseteq A\}$.

**x3.3.** Δείξε αυστηρά ότι οι ακόλουθες συνθήκες και τελεστές είναι οριστικοί, χρησιμοποιώντας μόνο τα (**I**) – (**VI**) και τα αξιώματα στο **3.18**. (Το $c$ είναι τυχόν αντικείμενο.)

$$\begin{aligned}
P_1(x) &\iff_{\text{ορ}} x \in c, & F_1(x,y) &=_{\text{ορ}} \{x,y\},\\
P_2(x,y,z) &\iff_{\text{ορ}} z \in x, & F_2(X) &=_{\text{ορ}} \bigcup X,\\
P_3(X,Y) &\iff_{\text{ορ}} X \subseteq Y, & F_3(X) &=_{\text{ορ}} \mathcal{P}(X),\\
P_4(X,Y) &\iff_{\text{ορ}} X \cap Y = \emptyset, & F_4(x) &=_{\text{ορ}} \{x\},\\
P_5(X,Y) &\iff_{\text{ορ}} \mathcal{P}(X) \subseteq Y. & F_5(X,Y) &=_{\text{ορ}} X \cup Y.
\end{aligned}$$

Στα υπόλοιπα προβλήματα της ενότητας αυτής θεωρούμε την έννοια της *ισοδυναμίας* κατά το Zermelo, η οποία διαισθητικά ισχύει όταν δυο σύνολα είναι ισοπληθικά. Αφού ορίσουμε τις *συναρτήσεις* μέσα στην αξιωματική θεωρία του Zermelo στο επόμενο κεφάλαιο, τα προβλήματα αυτά θα είναι επουσιώδη· τώρα όμως, έχουν ενδιαφέρον.

**3.27. Ορισμός.** Δύο σύνολα $A$, $B$ είναι **ξένα** (disjoint) αν $A \cap B = \emptyset$. Το σύνολο $W$ είναι **σύνδεσμος** δύο ξένων συνόλων $A$ και $B$ (κατά τον Zermelo), αν ισχύουν οι εξής τρεις συνθήκες:

1. $Z \in W \Longrightarrow (\exists x \in A, y \in B)[Z = \{x, y\}]$.
2. Για κάθε $x \in A$, υπάρχει ακριβώς ένα $y \in B$ ώστε $\{x, y\} \in W$.
3. Για κάθε $y \in B$ υπάρχει ακριβώς ένα $x \in A$ ώστε $\{x, y\} \in W$.

**x3.4.** Δείξε ότι αν τα $A$, $B$ είναι ξένα σύνολα, τότε η κλάση

$$\Sigma(A, B) = \{W \mid \text{το } W \text{ είναι σύνδεσμος του } A \text{ με το } B\}$$

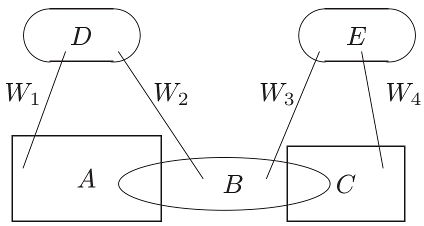
είναι σύνολο.

**3.28. Ορισμός.** Δύο σύνολα $A$, $B$ είναι **ισοδύναμα κατά τον Zermelo** αν υπάρχει τρίτο σύνολο $C$ ξένο των δύο και σύνδεσμοι του $A$ με το $C$ και του $B$ με το $C$, συμβολικά:

$$\begin{aligned}
A \sim_Z B \iff (\exists C, W, W')[&A \cap C = \emptyset \,\&\, B \cap C = \emptyset\\
&\& \; W \in \Sigma(A, C) \,\&\, W' \in \Sigma(B, C)].
\end{aligned}$$

$^*$**x3.5.** Η συνθήκη ισοδυναμίας του Zermelo έχει τις εξής ιδιότητες, για όλα τα σύνολα $A$, $B$, $C$:

$$A \sim_Z A,$$
$$\text{αν } \; A \sim_Z B, \text{ τότε } \; B \sim_Z A,$$
$$\text{αν } \; (A \sim_Z B \,\&\, B \sim_Z C), \text{ τότε } \; A \sim_Z C.$$




Διαγραμμα **3.1**. Η υπόθεση του τρίτου μέρους του Προβλήματος **x3.5**.

Υποδειξη. Για να δείξεις ότι $A \sim_Z A$, πρέπει να βρεις κάποιο σύνολο $C$ με $A \cap C = \emptyset$ τέτοιο ώστε να υπάρχει σύνδεσμος $W$ του $A$ με το $C$. Η υπόθεση για την (τελευταία) μεταβατική ιδιότητα εικονίζεται στο Διάγραμμα **3.1**.