8/1/13

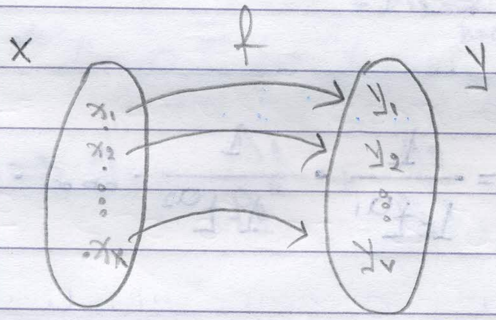
Ασκήσεις

1. Άσκηση (# συναρτήσεων)

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ $x_1 < x_2 < \dots < x_k$
$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_\nu\}$ $y_1 < y_2 < \dots < y_\nu$

συναρτήσεων $f: X \to Y$

(i) όλες οι f (Δηλαδή χωρίς περιορισμό) = ;
(ii) να 'ναι "1-1" = ;
(iii) γν. αύξουσες = ;
(iv) αύξουσες = ;
(v) "1-1" και επί = ;
(vi) αύξουσες και επί = ;
(vii) επί = ;



Λύση

(i) Κάθε συν/ση τέτοιου τύπου είναι μια διάταξη κ στοιχείων του Y με επανάληψη.

$(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k))$
ν-επιλογές ν-επιλογές ν-επιλογές

άρα $\# = \nu^k$

(ii) Αν $\kappa > \nu \Rightarrow \nexists$ συν/σεις $\Rightarrow$ # συν/σεων $= 0$

Αν $\kappa \leq \nu$, τότε κάθε συν/ση είναι διάταξη κ στοιχείων του Y χωρίς επανάληψη.

άρα $\# = (\nu)_\kappa$

(iii) Κάθε γνησίως αύξουσα συν/ση $f: X \to Y$ ορίζεται από ένα συνδυασμό κ στοιχείων του Y χωρίς επανάληψη.
Το μικρότερο στοιχείο του συνδυασμού $\to f(x_1)$
Το επόμενο στοιχείο του συνδυασμού $\to f(x_2)$
⋮

Άρα, $\# = \binom{\nu}{\kappa}$

(iv) Όμοια, $\# = \left[\begin{matrix} \nu \\ \kappa \end{matrix} \right]$

(v) Αν $\kappa \neq \nu \Rightarrow \# = 0$

Αν $\kappa = \nu \Rightarrow \# = \nu!$

(vi) Αν $\kappa < \nu \Rightarrow \# = 0$

Αν $\kappa \geq \nu \Rightarrow$ τότε μια αύξουσα επί συν/ση προσδιορίζεται από ένα συνδυασμό κ στοιχείων του Y με επανάληψη (έτσι καλύπτουμε την αύξουσα) όπου κάθε στοιχείο του Y εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά (έτσι καλύπτω και το επί)

Άρα είναι # ακεραίων λύσεων της
$z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu = k$ με $z_i \geq 1$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$
(κάνω αλλαγή μεταβλητής και προκύπτει)

$$= \begin{bmatrix} \nu \\ k-\nu \end{bmatrix} = \binom{\nu+k-\nu-1}{k-\nu} = \binom{k-1}{k-\nu}$$

(vii) Μια συν/ση $f: X \to Y$ που είναι επί προσδιορίζεται από μια διάταξη k στοιχείων του Y με επανάληψη που κάθε στοιχείο του Y εμφανίζεται τουλάχιστον 1 φορά.

$(f(x_1) \ldots f(x_k))$

Αν $k < \nu \Rightarrow$ Δεν υπάρχουν συν/σεις $\Rightarrow \# = 0$

Αν $k \geq \nu \Rightarrow$ # διατάξεων του $\{y_1, \ldots, y_\nu\}$ ανά k με επανάληψη ώστε κάθε y_i να εμφανίζεται τουλάχιστον 1 φορά.

1η λύση (Με αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού)

Ω: Επαναληπτικές διατάξεις του $Y = \{y_1, \ldots, y_\nu\}$ ανά k

A_i = Διατάξεις του Y ανά k όπου το y_i δεν εμφανίζεται

άρα $\# = N(A_1' A_2' \ldots A_\nu') = \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^r S_{\nu,r}$

$S_{\nu,0} = N(\underline{0}) = \nu^k$

$1 \leq r \leq \nu$: $S_{\nu,r} = \sum\limits_{\{i_1,\dots,i_r\} \subseteq \{1,\dots,\nu\}} \overbrace{N(A_{i_1} \dots A_{i_r})}^{(\nu-r)^k}$ τα σύνολα είναι ανταλλάξιμα

$= \binom{\nu}{r} \cdot (\nu-r)^k$ (ισχύει και για $r=0$)

Άρα $\# = \sum\limits_{r=0}^{\nu} (-1)^r \binom{\nu}{r} (\nu-r)^k$

2η λύση (Με γεννήτριες)

Βήμα 1

$j = 1,2,\dots,\nu \qquad E_j(t, x_j) = \frac{(tx_j)^1}{1!} + \frac{(tx_j)^2}{2!} + \dots$

Βήμα 2

$j = 1,\dots,\nu \qquad E_j(t) = \frac{t^1}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots = e^t - 1$

Βήμα 3

$E(t) = E_1(t) \dots E_\nu(t) = (e^t - 1)^\nu$

Βήμα 4

$$E(t) = (e^t - 1)^\nu$$

$$= \sum_{r=0}^{\nu} \binom{\nu}{r} (-1)^r (e^t)^{\nu-r}$$

$$= \sum_{r=0}^{\nu} \binom{\nu}{r} (-1)^r e^{(\nu-r)t}$$

$$= \sum_{r=0}^{\nu} \binom{\nu}{r} (-1)^r \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu-r)^k \cdot t^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{\nu} \binom{\nu}{r} (-1)^r (\nu-r)^k \right) \frac{t^k}{k!}$$

Άρα $\# = \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^r \binom{\nu}{r} (\nu-r)^k$

2. Άσκηση - Θέμα 1º Σεπτέμβριος 2007 (Α)

500 άτομα

$\downarrow$

100 οικογένειες $\rightarrow$ 1 πατέρας, 1 μητέρα, 3 παιδιά

Να επιλεχούν 50 άτομα.

\# Επιλογών 50 ατόμων = ;

(i) Με ακριβώς 20 παιδιά = ;

(ii) Με ακριβώς 10 μητέρες και 25 παιδιά = ;

(iii) χωρίς άτομα από την ίδια οικογένεια = ;

(iv) Με τουλάχιστον 1 πατέρα, 1 μητέρα, 1 παιδί = ;

Λύση

(i)

Μια επιλογή τέτοιου τύπου γίνεται σε 2 στάδια:

1ο στάδιο: Επιλογή παιδιών της 50άδας → $\binom{300}{20}$ τρόποι

2ο στάδιο: Επιλογή υπόλοιπων ατόμων 50άδας → $\binom{200}{30}$ τρόποι

Από Πολλ/κή Αρχή: ∃ συνολικά $\binom{300}{20}\cdot\binom{200}{30}$ τρόποι

(ii)

Μια επιλογή τέτοια γίνεται σε 3 στάδια:

1ο στάδιο: Επιλογή μητέρων → $\binom{100}{10}$ τρόποι

2ο στάδιο: Επιλογή παιδιών → $\binom{300}{25}$ τρόποι

3ο στάδιο: Επιλογή υπολοίπων → $\binom{100}{15}$ τρόποι

↓

Επιλογή είναι μόνο οι πατέρες αφού θέλουμε 10 μητέρες ακριβώς και 25 παιδιά ακριβώς

Από Πολλ/κή Αρχή έχουμε $\binom{100}{10}\cdot\binom{300}{25}\cdot\binom{100}{15}$ τρόποι.

(iii)

$\binom{100}{50} \cdot 5^{50}$ → από κάθε οικογένεια ποιον διαλέγω

από τις 100 οικογένειες παίρνω 50

(iv)

Με αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

Ω = Σύνολο επιλογής ατόμων από τις οικογένειες

A_1 = Σύνολο επιλογής του Ω χωρίς πατέρα

A_2 = Σύνολο επιλογής του Ω χωρίς μητέρα

A_3 = Σύνολο επιλογής του Ω χωρίς παιδιά

$$N(A_1' A_2' A_3') = N(\Omega) - N(A_1) - N(A_2) - N(A_3) + N(A_1A_2) +$$

$$+ N(A_1A_3) + N(A_2A_3) - N(A_1A_2A_3)$$

$$= \binom{500}{50} - \binom{400}{50} - \binom{400}{50} - \binom{200}{50} + \binom{300}{50} + \binom{100}{50} + \binom{100}{50} - \underbrace{0}_{\text{απαγορεύονται όλα}}$$

$$= \binom{500}{50} - 2\binom{400}{50} - \binom{200}{50} + \binom{300}{50} + 2\binom{100}{50}$$

3. Άσκηση - Θέμα 2ο Σεπτέμβριος 2007 (Α)

α) $\sum_{k=0}^{\nu}(\nu k^2-\nu)\binom{\nu}{k} = \nu\sum_{k=0}^{\nu}\underbrace{(k^2-1)}\binom{\nu}{k}$

$A(k)_2 + B(k)_1 + \Gamma$
$\quad\|$
$Ak(k-1) + B(k) + \Gamma$
$A=1,\ B=+1,\ \Gamma=-1$

$$= \nu\cdot\left(\sum_{k=\cancel{0}\,2}^{\nu}k(k-1)\binom{\nu}{k} + \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{\nu}k\binom{\nu}{k} - \sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\right)$$

$$= \nu\cdot\left(\sum_{k=2}^{\nu}\cancel{k}\cancel{(k-1)}\,\frac{\nu}{\cancel{k}}\cdot\frac{(\nu-1)}{\cancel{(k-1)}}\binom{\nu-2}{k-2} + \sum_{k=1}^{\nu}\cancel{k}\cdot\frac{\nu}{\cancel{k}}\binom{\nu-1}{k-1} - 2^{\nu}\right)$$

$$= \nu^2\left(\sum_{k=2}^{\nu}(\nu-1)\binom{\nu-2}{\underset{j}{\overset{}{k-2}}}\right) + \nu^2\left(\sum_{k=1}^{\nu}\binom{\nu-1}{k-1}\right) - \nu 2^{\nu}$$

$$= \nu^2(\nu-1)\sum_{j=0}^{\nu-2}\binom{\nu-2}{j} + \nu^2\sum_{j=0}^{\nu-1}\binom{\nu-1}{j} - \nu 2^{\nu}$$

$$= \nu^2(\nu-1)2^{\nu-2} + \nu^2\cdot 2^{\nu-1} - \nu 2^{\nu}$$

10/1/13

Επαναληπτικές Ασκήσεις

1. Άσκηση - Θέμα 2 Σεπτέμβριος 2007(Α) (συνέχεια)

β. $\sum_{\rho=0}^{\kappa} \binom{\nu}{\rho} \binom{\nu-\rho}{\kappa-\rho}$

$= \sum_{\rho=0}^{\kappa} \frac{\nu!}{\rho! \cdot \cancel{(\nu-\rho)!}} \cdot \frac{\cancel{(\nu-\rho)!}}{(\kappa-\rho)!(\nu-\rho-\kappa+\rho)}$

$= \frac{\nu!}{\kappa! (\nu-\kappa)!} \sum_{\rho=0}^{\kappa} \frac{\kappa!}{\rho! (\kappa-\rho)!}$

$= \binom{\nu}{\kappa} \cdot \sum_{\rho=0}^{\kappa} \binom{\kappa}{\rho} = \binom{\nu}{\kappa} 2^{\kappa}$

γ. # ακεραίων λύσεων (μη-αρνητικών) της

$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 100$, $x_i \geq 5$, $i = 1, \dots, 9$

$x_{10} \geq 0$ πολλ/σιο του 25

$x_{11} \geq 0$.

1η λύση

$=$ # ακεραίων λύσεων της $y_1 + y_2 + \dots + y_9 + x_{10} + x_{11} = 55$

$y_i \geq 0$, $i = 1, \dots, 9$

$x_{11} \geq 0$

$x_{10} \geq 0$ πολλ/σιο του 25

$=$ # ακεραίων λύσεων ... με $x_{10} = 0$ + # ακεραίων λύσεων ... με $x_{10} = 25$ + # ακεραίων λύσεων ... με $x_{10} = 50$

$= \begin{bmatrix} 10 \\ 55 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$

2η λύση

συνδυασμών του $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_{11}\}$ ανά 100

$t^5 + t^6 + t^7 + \dots \leftarrow$ ω_i επιτρέπεται να εμφανιστεί τουλάχιστον 5 φορές, $i = 1, \dots, 9$

$t^0 + t^{25} + t^{50} \leftarrow$ ω_{10} επιτρέπεται να εμφανιστεί πολλ/σιο του 25 αριθμό φορών

$t^0 + t^1 + t^2 + \dots \leftarrow$ ω_{11} επιτρέπεται να εμφανιστεί χωρίς περιορισμό

Γεννήτρια Συνδυασμών

$$A(t) = \left(\frac{t^5}{1-t}\right)^9 \cdot \left(t^0 + t^{25} + t^{50}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-t}\right) = \frac{t^{45}(1 + t^{25} + t^{50})}{(1-t)^{10}} =$$

$$= \frac{t^{45} + t^{70} + t^{95}}{(1-t)^{10}} = \left(t^{45} + t^{70} + t^{95}\right) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 10 \\ j \end{bmatrix} t^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 10 \\ j \end{bmatrix} t^{45+j} + \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 10 \\ j \end{bmatrix} t^{70+j} + \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 10 \\ j \end{bmatrix} t^{95+j}$$

Τελικά, # ζητούμενων λύσεων είναι:

Συντελεστής του t^{100} στην $A(t) = \begin{bmatrix} 10 \\ 55 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$

2. Άσκηση - Θέμα 2(β) - Σεπτέμβριος 2012

\# μη-αρνητικών ακέραιων λύσεων (x_1, x_2, x_3, x_4) του
$x_1 + x_2 + x_3 = 8$
$x_1 + x_2 + x_4 = 10$

$\shortparallel$

\# μη αρνητικών ακέραιων λύσεων (x_1, x_2, x_3, x_4) του
$x_1 + x_2 + x_3 = 8$
$x_4 = x_3 + 2$

$\shortparallel$

\# τετράδων της μορφής (x_1, x_2, x_3, x_3+2) λύσεων ακέραιων μη-αρνητικών της $x_1 + x_2 + x_3 = 8 =$

$$\left[\begin{matrix} 3 \\ 8 \end{matrix}\right]$$

3. Άσκηση

\# ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων της εξίσωσης
$(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_4 + x_5) = 6$

$\shortparallel$

\# ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων του συστήματος
$x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + x_4 + x_5 = 6$

$+$

\# ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων του συστήματος $x_1 + x_2 + x_3 = 2$
$x_1 + x_4 + x_5 = 3$

$+$

\# ακέραιων μη-αρνητικών λύσεων του συστήματος $x_1 + x_2 + x_3 = 3$
$x_1 + x_4 + x_5 = 2$

+

\# ακεραίων μη-αρνητικών λύσεων του συστήματος

$x_1+x_2+x_3=6$

$x_1+x_4+x_5=1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

$+\ldots$

$$=2\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)$$

4. <u>Άσκηση</u>

\# ακεραίων μη-αρνητικών λύσεων της $x_1+2x_2+50x_3=100$

||

\# ακεραίων μη-αρνητικών λύσεων της $y_1+y_2+y_3=100$

$y_1 \geq 0$

y_2 πολλ/σιο του 2

y_3 πολλ/σιο του 50

||

\# ακεραίων μη-αρνητικών λύσεων ... με $y_3=0$ + \# ακεραίων μη-αρνητικών λύσεων ... με $y_3=50$

\+ \# ακεραίων μη-αρνητικών λύσεων ... με $y_3=100$

ακέραιων λύσεων $y_1+y_2+y_3=100$
$y_1 \geq 0$
$y_2 \geq 0$ πολ/σιο του 2
$y_3 = k$

$\parallel$

ακέραιων λύσεων $y_1+y_2=100-k$
$y_1 \geq 0$
$y_2 \geq 0$ πολ/σιο του 2

$\parallel$

(# άρτιων $\leq 100-k$ $= 1+\left\lfloor \frac{100-k}{2} \right\rfloor$

Ζητούμενο # $= 1+\left\lfloor \frac{100-0}{2} \right\rfloor + 1+\left\lfloor \frac{100-50}{2} \right\rfloor + 1+\left\lfloor \frac{100-100}{2} \right\rfloor$

$= 78$