20/12/12

Ασκήσεις στις Γεννήτριες

1. Άσκηση - Θέμα 4º Φεβρουάριος 2010

(α) a_k = # συνδυασμών του $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_\nu\}$ ανά k, όπου κάθε στοιχείο εμφανίζεται τουλάχιστον 5 φορές ;

(β) b_k = # συνδυασμών του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}$ ανά k, όπου κάθε στοιχείο εμφανίζεται 1 ή 3 φορές ;

Λύση

(α) $A_j(t, x_j) = (t x_j)^5 + (t x_j)^6 + \ldots \quad , \; j = 1, 2, \ldots, \nu$

$$A_j(t) = t^5 + t^6 + t^7 + \ldots = \frac{t^5}{1-t} \quad , \; j = 1, 2, \ldots, \nu$$

$$A(t) = A_1(t) A_2(t) \ldots A_\nu(t) = \left(\frac{t^5}{1-t}\right)^\nu$$

$$= t^{5\nu}(1-t)^{-\nu} = t^{5\nu} \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \nu \\ j \end{bmatrix} t^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \nu \\ j \end{bmatrix} t^{\overbrace{j+5\nu}^{=k}} = \sum_{k=5\nu}^{\infty} \begin{bmatrix} \nu \\ k-5\nu \end{bmatrix} t^k$$

$$a_k = \begin{cases} 0 & , \; k \leq 5\nu - 1 \\ \begin{bmatrix} \nu \\ k-5\nu \end{bmatrix} & , \; k \geq 5\nu \end{cases}$$

(β) $A(t) = (t+t^3)^\nu = t^\nu (1+t^2)^\nu$

$$= t^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\nu}{j} t^{2j}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\nu}{j} t^{2j+\nu} \quad 2j+\nu = k$$

$$= \sum_{k=\nu}^{\infty} \binom{\nu}{\frac{k-\nu}{2}} t^k$$

$k = \nu +$ άρτιος

$$= \binom{\nu}{0} t^\nu + \binom{\nu}{1} t^{\nu+2} + \binom{\nu}{2} t^{\nu+4} + \binom{\nu}{3} t^{\nu+6} + \ldots$$

$$b_k = \begin{cases} 0, & 0 \le k \le \nu-1 \\ \binom{\nu}{\frac{k-\nu}{2}}, & k = \nu + \text{άρτιος} \\ 0, & k = \nu + \text{περιττός} \end{cases}$$

2. Άσκηση - Θέμα 3ο (β) Σεπτέμβριος 2009

$D(\nu,k) = \#$ συνδυασμών του $\Omega = \{1, 2, \ldots, 3\nu+1\}$ ανά k, όπου τα στοιχεία $1, 2, \ldots, \nu \to$ άρτιο πλήθος φορών

$\nu+1, \nu+2, \ldots, 3\nu+1 \to$ το πολύ 1 φορά.

$D'(\nu,k) = \#$ συνδυασμών του $\Omega' = \{1, 2, \ldots, 2\nu+1\}$ ανά k, όπου τα στοιχεία $\nu+1, \nu+2, \ldots, 2\nu+1 \to$ το πολύ 1 φορά

$1, 2, \ldots, \nu \to$ χωρίς περιορισμό

Να αποδείξετε ότι $D(\nu,k) = D'(\nu,k)$

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι $D(t) = D'(t)$

όπου $D(t) = \sum_{k=0}^{\infty} D(\nu,k)\, t^k$

$$D'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} D'(\nu,k)\, t^k$$

Ισχύει

$$D(t) = \left(\frac{1}{1-t^2}\right)^{\nu} (1-t)^{2\nu+1} = \frac{1}{(1-t)^{\nu}(1+t)^{\nu}} (1+t)^{2\nu+1}$$

$$D'(t) = (1+t)^{\nu+1} \left(\frac{1}{1-t}\right)^{\nu} = (1+t)^{\nu+1} (1-t)^{-\nu}$$

3. Άσκηση - Θέμα 4º Φεβρουάριος 2002

$R(\nu,k) = \#$ συνδυασμών με επανάληψη ν στοιχείων ανά k του $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}$ που κάθε στοιχείο εμφανίζεται το πολύ 3 φορές.

(α) $A_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} R(\nu,k)\, t^k$

(β) $\underset{k\geq 0}{R(\nu+1,k)} = R(\nu,k) + R(\nu,k-1) + R(\nu,k-2) + R(\nu,k-3)$

Λύση

(α) $A_v(t) = (1+t+t^2+t^3)^v$

(β) $\sum_{k=0}^{\infty} R(v+1,k)\, t^k = A_{v+1}(t) = (1+t+t^2+t^3)^{v+1}$

$$= A_v(t)(1+t+t^2+t^3)$$

$$= A_v(t) + A_v(t)t + A_v(t)t^2 + A_v(t)t^3$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} R(v,k)\, t^k + \sum_{j=0}^{\infty} R(v,j)\, t^{j+1} + \sum_{j=0}^{\infty} R(v,j)\, t^{j+2} + \sum_{j=0}^{\infty} R(v,j)\, t^{j+3}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} R(v+1,k)\, t^k = \sum_{k=0}^{\infty} R(v,k)\, t^k + \sum_{j=1}^{\infty} R(v,k-1)\, t^k + \sum_{k=2}^{\infty} R(v,k-2)\, t^k + \sum_{k=3}^{\infty} R(v,k-3)\, t^k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R(v+1,0) = R(v,0) & , \ k=0 \\ R(v+1,1) = R(v,1) + R(v,0) & , \ k=1 \\ R(v+1,2) = R(v,2) + R(v,1) + R(v,0) & , \ k=2 \\ R(v+1,k) = R(v,k) + R(v,k-1) + R(v,k-2) + R(v,k-3) & , \ k \geq 3 \end{cases}$$

4. Γεννήτριες → Γέφυρες μεταξύ ακριβών και αναδρομικών τύπων ακολουθιών.

$a_0 = 1$ $a_1 = 1$ $\vdots$ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ ,\ n \geq 2$	π.χ. → $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

$$\text{Αναδρομικός τύπος} \xrightarrow{\text{Γεννήτρια}} \text{Ακριβής τύπος}$$

Έστω $A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$

Ζητάω εξίσωση για την $A(t)$.
Παίρνω την αναδρομική σχέση, πολλαπλασιάζω με t^k και αθροίζω για όλα τα k:

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k t^k = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1} t^k + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} t^k = t \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1} t^{k-1} + t^2 \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} t^{k-2}$$

$$\Rightarrow A(t) - 1 - t = t\,(A(t) - 1) + t^2 A(t)$$

$$\Rightarrow A(t)(1 - t - t^2) = 1 + \cancel{t} - \cancel{t}$$

$$\Rightarrow A(t) = \frac{1}{1 - t - t^2} \quad (1)$$

παίρνω τον παρανομαστή: $-t^2 - t + 1 = (-1)$

$$P_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Άρα η ① : $A(t) = \dfrac{1}{(-1)(t-\rho_1)(t-\rho_2)}$

$$= -\frac{1}{(\rho_1-t)(\rho_2-t)} = -\frac{1}{\rho_1 \cdot \rho_2} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{t}{\rho_1}\right)\left(1-\frac{t}{\rho_2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{A_1}{1-\frac{t}{\rho_1}} \quad \frac{A_2}{1-\frac{t}{\rho_2}}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\rho_1 \rho_2} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{t}{\rho_1}\right)\left(1-\frac{t}{\rho_2}\right)} = \frac{A_1}{1-\frac{t}{\rho_1}} \quad \frac{A_2}{1-\frac{t}{\rho_2}}$$

$$\Rightarrow A_1 = -\frac{1}{\rho_1 \rho_2 \left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)}, \quad A_2 = -\frac{1}{\rho_1 \rho_2 \left(1-\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)}$$

Άρα $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = A(t) = \dfrac{A_1}{1-\frac{t}{\rho_1}} \quad \dfrac{A_2}{1-\frac{t}{\rho_2}} =$

$$= A_1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\rho_1}\right)^k t^k + A_2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\rho_2}\right) t^k$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{A_1}{\rho_1^k} + \frac{A_2}{\rho_2^k}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

5. Εφαρμογή: Πλήθος ακεραίων λύσεων εξίσωσης με ακέραιους μη-μοναδιαίους συντελεστές.

\# ακεραίων μη-αρνητικών λύσεων της

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_\nu x_\nu = k$$

$$a_1, a_2, \ldots, a_\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

π.χ. με πόσους τρόπους ξοδεύουμε 100 € σε χαρτονομίσματα

$$5x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 50x_4 + 100x_5 = 100$$

Λύση

\# ακεραίων μη-αρνητικών λύσεων της

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_\nu x_\nu = k \quad , x_i \geq 0 \quad , i = 1, 2, \ldots, \nu$$

$$\parallel$$

\# ακεραίων μη-αρνητικών λύσεων της

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = k \quad , y_i \in \{0, a_i, 2a_i, 3a_i, \ldots\},$$

$$i = 1, 2, \ldots, \nu$$

- \# συνδυασμών ν ανά k όπου το ωi επιτρέπεται να εμφανιστεί 0 ή ai ή 2ai ή 3ai ή ...

$$\parallel$$

$$R_k$$

τότε η γεννήτρια:

$$R(t) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k t^k = \frac{1}{1-t^{a_1}} \cdot \frac{1}{1-t^{a_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-t^{a_\nu}}$$