6/12/19

Ασκήσεις - Εφαρμογές στην Αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού

1. Πλαίσιο

$A_1, A_2, \ldots, A_\nu \subseteq \Omega$

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu) = \sum_{r=1}^{\nu} (-1)^{r-1} S_{\nu,r}$$

$$N(A_1' A_2' \ldots A_\nu') = \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^{r} S_{\nu,r}$$

$S_{\nu,0} = N(\Omega)$

$$r = 1, 2, \ldots, \nu : \quad S_{\nu,r} = \sum_{\{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \subseteq \{1, 2, \ldots, \nu\}} N(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_r})$$

2. Πόρισμα για ανταλλάξιμα σύνολα

Ορισμός

$A_1, A_2, \ldots, A_\nu \subseteq \Omega$ λέγονται ανταλλάξιμα

$\Updownarrow$

$N(A_1) = N(A_2) = \ldots = N(A_\nu) = n_1$

$N(A_1 A_2) = N(A_1 A_3) = \ldots = N(A_\nu A_{\nu-1}) = n_2$

$\vdots$

Γενικά

$N(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_r}) = n_r$

Για ανταλλάξιμα σύνολα η αρχή Ε-Α γίνεται

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_\nu) = \sum_{r=1}^{\nu} (-1)^{r-1} \binom{\nu}{r} n_r$$

$$N(A_1' A_2' \dots A_\nu') = \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^{r} \binom{\nu}{r} n_r$$

3. Παράδειγμα

# κατανομών κ όμοιων σφαιριδίων σε τρία διακεκριμένα κελιά.		# ακεραίων λύσεων της $x_1+x_2+x_3=k$
1ο → χωρητικότητας 9	=	$0 \leq x_1 \leq 9$
2ο → χωρητικότητας 19	=	$0 \leq x_2 \leq 19$
3ο → χωρητικότητας 29		$0 \leq x_3 \leq 29$

$$\underline{\Omega} = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{Z}^3 : x_1+x_2+x_3 = k,\ x_1,x_2,x_3 \geq 0\}$$

$$A_1 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \underline{\Omega} : x_1 \geq 10 \ (\text{ή } x_1 > 9)\}$$

$$A_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \underline{\Omega} : x_2 \geq 20 \ (\text{ή } x_2 > 19)\}$$

$$A_3 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \underline{\Omega} : x_3 \geq 30 \ (\text{ή } x_3 > 29)\}$$

λύσεων της $x_1+x_2+x_3=k$ με

$0 \le x_1 \le 9$
$0 \le x_2 \le 19$
$0 \le x_3 \le 29$

$= N(A_1'A_2'A_3') = N(\underline{o}) - N(A_1) - N(A_2) - N(A_3) + N(A_1A_2) + N(A_1A_3) + N(A_2A_3) - N(A_1A_2A_3)$

$N(\underline{o}) = \left[\begin{matrix}3\\k\end{matrix}\right]$, $N(A_1) =$ # ακέραιων λύσεων $x_1+x_2+x_3=k$ με $x_1 \ge 10$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$ $=$ # ακέραιων λύσεων $y_1+10+y_2+y_3=k$, $y_1 \ge 0$, $y_2 \ge 0$, $y_3 \ge 0$ $= \left[\begin{matrix}3\\k-10\end{matrix}\right]$

Με τον ίδιο τρόπο έχουμε:

$N(A_2) = \left[\begin{matrix}3\\k-20\end{matrix}\right]$, $N(A_3) = \left[\begin{matrix}3\\k-30\end{matrix}\right]$

$N(A_1A_2) =$ # ακέραιων λύσεων $x_1+x_2+x_3=k$, $x_1 \ge 10$, $x_2 \ge 20$, $x_3 \ge 0$ $= \left[\begin{matrix}3\\k-30\end{matrix}\right]$

Ομοίως,

$N(A_1A_3) = \left[\begin{matrix}3\\k-40\end{matrix}\right]$, $N(A_2A_3) = \left[\begin{matrix}3\\k-50\end{matrix}\right]$

$N(A_1A_2A_3) = \left[\begin{matrix}3\\k-60\end{matrix}\right]$

$$N(A_1' A_2' A_3') = \begin{bmatrix} 3 \\ k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ k-10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ k-20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ k-10 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 3 \\ k-30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ k-40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ k-50 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ k-60 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ i \end{bmatrix} = 0 \quad , \quad i < 0$$

▸ Ανταλλάξιμα είναι όταν από πίσω υπάρχει μια συμμετρία, όπως στο επόμενο (4).

4. <u>Γενίκευση: Κατανομή όμοιων σφαιριδίων σε διακεκριμένα κελιά ίδιας χωρητικότητας.</u>

\# κατανομών k όμοιων σφαιριδίων σε ν διακεκριμένα κελιά χωρητικότητα m = \# ακεραίων λύσεων της $x_1 + x_2 + \dots + x_\nu = k$

$0 \le x_i \le m \quad , i = 1, 2, \dots, \nu$

$$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_\nu) \in \mathbb{Z}^\nu : x_1, x_2, \dots, x_\nu \ge 0$$

$$A_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_\nu) \in \Omega \text{ με } x_i \ge m+1\}$$
$i = 1, 2, \dots, \nu$

Ζητούμενο πλήθος $= N(A_1' A_2' \dots A_\nu') = \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^r S_{\nu,r}$

$$S_{\nu,0} = N(\Omega) = \begin{bmatrix} \nu \\ k \end{bmatrix}$$

$N(A_{i_1}) = \#$ λύσεων της

$$x_1 + x_2 + \dots + x_v = k \quad = \left[\begin{matrix} v \\ k-(m+1) \end{matrix}\right] \rightarrow n_1 \text{ ανεξάρτητο του } i_1$$

$$x_{i_1} \geq m+1$$

$$x_j \geq 0 \,, \; j \neq i_1$$

$$S_{v,1} = \binom{v}{1} \left[\begin{matrix} v \\ k-(m+1) \end{matrix}\right]$$

$$N(A_{i_1} A_{i_2}) = \left[\begin{matrix} v \\ k-2(m+1) \end{matrix}\right] = n_2 \text{ ανεξάρτητο των } i_1, i_2$$

$$S_{v,2} = \binom{v}{2} \left[\begin{matrix} v \\ k-2(m+1) \end{matrix}\right]$$

Γενικά: $N(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r}) = \left[\begin{matrix} v \\ k-r(m+1) \end{matrix}\right]$

$$S_{v,r} = \binom{v}{r} \left[\begin{matrix} v \\ k-r(m+1) \end{matrix}\right]$$

5. Άσκηση (Πρόβλημα Γαλιλαίου)

Ρίψη ζαριού v φορές

πιθανότητα να εμφανιστεί άθροισμα ρίψεων k $= \dfrac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \dfrac{\#\text{ ακεραίων λύσεων της } x_1 + x_2 + \dots + x_v = k \text{ με } 1 \leq x_i \leq 6,\; i = 1,2,\dots,v}{6^v}$

$y_i = x_i - 1$

$i = 1,2,\dots,v$

Αριθμητής $= \#$ ακεραίων λύσεων της $y_1 + y_2 + \dots + y_v = k - v$, $0 \leq y_i \leq 5$, $i = 1,2,\dots,v$ $= \displaystyle\sum_{r=0}^{v} (-1)^r \binom{v}{r} \left[\begin{matrix} v \\ k-v-6r \end{matrix}\right]$

6. Μεταθέσεις χωρίς σταθερά σημεία

ν άτομα ⇝ $1\ 2\ \dots\ \nu$

ν πράγματα τους ⇝ $\Pi_1\ \Pi_2\ \dots\ \Pi_\nu$

Βάζουμε τα πράγματα τυχαία σε σειρά και το άτομο i παίρνει αυτό που βρίσκεται στην i-θέση.

Δυνατές μεταθέσεις $= \nu!$

Πιθανότητα όλοι να πάρουν το δικό τους πράγμα $= \dfrac{1}{\nu!} \to 0,\ \nu \to \infty$

Πιθανότητα κανείς να μην πάρει το δικό του $= \dfrac{\#\text{μεταθέσεων των } \Pi_1, \dots, \Pi_\nu}{\nu!}$ όπου το Π_i δεν βρίσκεται στην i θέση

Ω: Σύνολο των μεταθέσεων των $\Pi_1, \dots, \Pi_\nu$.

A_i: Το σύνολο των μεταθέσεων των $\Pi_1, \dots, \Pi_\nu$ που το Π_i πάει στη θέση i.

Άρα ο αριθμητής $= N(A_1' A_2' \dots A_\nu') = \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^r S_{\nu,r}$

$N(\Omega) = \nu!$

$N(A_{i_1}) = (\nu-1)!$

$N(A_{i_1} A_{i_2}) = (\nu-2)!$

$N(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r}) = (\nu-r)!$

$$S_{\nu,r} = \binom{\nu}{r}(\nu-r)! = \frac{\nu!}{r!\cancel{(\nu-r)!}} \cdot \cancel{(\nu-r)!} = \frac{\nu!}{r!}, \quad r = 0, 1, \dots, \nu$$

Αριθμητής $= \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^r S_{\nu,r} = \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^r \frac{\nu!}{r!}$

Πιθανότητα κανείς να μην πάρει το αντικείμενο του

$$\sum_{r=0}^{\nu} \frac{(-1)^r}{r!} \xrightarrow[\nu \to \infty]{||} \frac{1}{e}$$

11/12/12

Ασκήσεις στην Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

1. Υπενθυμίσεις

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_\nu) = \sum_{r=1}^{\nu} (-1)^{r-1} S_{\nu,r}$$

$$N(A_1' A_2' \dots A_\nu') = \sum_{r=0}^{\nu} (-1)^{r} S_{\nu,r}$$

$$S_{\nu,0} = N(\Omega)$$

$$S_{\nu,r} = \underbrace{\sum N(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r})}_{\binom{\nu}{r} \text{ όροι}}, \quad r = 1,2,\dots,\nu$$

$$\{i_1,\dots,i_r\} \subseteq \{1,2,\dots,\nu\}$$

2. Άσκηση - Θέμα 3ο Μάρτιος 2003

Α: Έφηβοι που πέρασαν τη δοκιμασία της Αρκούδας
Β: Έφηβοι που πέρασαν τη δοκιμασία του Βίσωνα
Γ: Έφηβοι που πέρασαν τη δοκιμασία του Γύπα.

Δεδομένα

(i) $N(B) = 2N(A)$
(ii) $N(\Gamma) = 3N(A)$
(iii) $N(AB) = N(A\Gamma) = N(B\Gamma)$
(iv) $N(A \cup B \cup \Gamma) = 46$
(v) $N(AB\Gamma) = 1$
(vi) $N(AB') = 5$

Ερωτήματα:

α) Πόσοι πέρασαν την Α δοκιμασία ($N(A) = ;$)

β) Πόσοι πέρασαν και τις 2 ($N(AB) = ;$)

Λύση

Από Αρχή Ε-Α: $46 = N(A \cup B \cup \Gamma)$

$= N(A) + N(B) + N(\Gamma) - N(AB) - N(A\Gamma) - N(B\Gamma) + N(AB\Gamma)$

$\Rightarrow 46 = 6N(A) - 3N(AB) + 1$ (1)

$45 = 6N(A) - 3N(AB)$

$15 = 2N(A) - N(AB)$ (*)

$N(AB') = N(A) - N(AB)$

$\Rightarrow N(A) - N(AB) = 5$ (**)

Από (*) (**) $\Rightarrow N(A) = 10$ (α)

$N(AB) = 5$ (β)

S.O.S.

3. Άσκηση - Θέμα 3ο Νοέμβριος 2003

20 φορές διαλέγουμε 1 φύλλο από μια τράπουλα με 52 φύλλα και το ξαναβάζουμε πίσω (καταγραφή → επανατοποθέτηση)

Το αποτέλεσμα είναι διατεταγμένη 20-άδα τραπουλόχαρτα

T = # αποτελεσμάτων που εμφανίζονται και οι 4 άσσοι.

1♣, 1♡, 1♠, 1◇

$T = ;$

Λυση

Ω: σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων

$N(\Omega) = 52^{20}$

A_1: σύνολο αποτελεσμάτων που δεν εμφανίζεται ο άσσος ♣

A_2: σύνολο αποτελεσμάτων που δεν εμφανίζεται ο άσσος ♦

A_3: σύνολο αποτελεσμάτων που δεν εμφανίζεται ο άσσος ♥

A_4: σύνολο αποτελεσμάτων που δεν εμφανίζεται ο άσσος ♠

Άρα $T = N(A_1' A_2' A_3') = \sum_{r=0}^{4} (-1)^r S_{4,r}$

$S_{4,0} = N(\Omega) = 52^{20}$

$$S_{4,r} = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_r) \subseteq \{1,2,3,4\}} N(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_r}), \quad r = 1,2,3,4$$

$N(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}) = (52-r)^{20} \Longrightarrow A_1, A_2, A_3, A_4$ ανταλλάξιμα

$\Longrightarrow S_{4,r} = \binom{4}{r} (52-r)^{20}$

$r = 1,2,3,4$

(για $r=0$ ισχύει)

Τελικά $T = \sum_{r=0}^{4} (-1)^r \binom{4}{r} (52-r)^{20}$

4. Άσκηση - Θέμα 3ο Μάρτιος 2004

\# λέξεων 6 γραμμάτων από το αλφάβητο (Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η,Θ,Ι) ώστε να εμφανίζονται όλα τα φωνήεντα (Α,Ε,Η,Ι).

Λύση

όπως η προηγούμενη
Αλφάβητο → τράπουλα
Λέξη 6 γραμμάτων → αποτέλεσμα με 20 τραπουλόχαρτα
4 φωνήεντα → 4 άσσοι

Όμοια με την προηγούμενη → $\sum_{r=0}^{4} (-1)^r (9-r)^6 \binom{4}{r}$

5. Άσκηση - Θέμα 3ο Σεπτέμβριος 2005

\# 6-ψηφίων αριθμών με ψηφία από τα 1,2,...,7 που περιέχουν τα ψηφία 1,2,3.

Λύση

Όμοια με τις 2 προηγούμενες → $\sum_{r=0}^{3} (-1)^r \binom{3}{r} (7-r)^6$

6. Άσκηση - Θέμα 3ο Σεπτέμβριος 2012

Έχουμε 3 σύμβολα Α
3 σύμβολα Β
3 σύμβολα Γ

(α) # τρόπων τοποθέτησης τους σε σειρά
(β) # τρόπων τοποθέτησης τους ώστε τα 3Α συνεχόμενα
(γ) # τρόπων τοποθέτησης τους ώστε να μην υπάρχουν 3 όμοια σύμβολα συνεχόμενα.

Λύση

(α) # μεταθέσεων 3 ειδών στοιχείων

$$= \frac{(3+3+3)!}{3!\,3!\,3!} = \frac{9!}{(3!)^3}$$

(β) # μεταθέσεων 3 ειδών στοιχείων

ΑΑΑ → 1 φορά
Β → 3 φορές
Γ → 3 φορές

$$= \frac{(1+3+3)!}{1!\,3!\,3!} = \frac{7!}{(3!)^2}$$

(γ) Αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού

Ω = μεταθέσεις 3 ειδών στοιχείων
Α → 3 φορές
Β → 3 φορές
Γ → 3 φορές

$N(\Omega) = \dfrac{9!}{(3!)^3}$

A_1 = μεταθέσεις 3Α, 3Β και 3Γ που τα 3Α είναι συνεχόμενα.
A_2 = μεταθέσεις 3Α, 3Β και 3Γ που τα 3Β είναι συνεχόμενα
A_3 = μεταθέσεις 3Α, 3Β και 3Γ που τα 3Γ είναι συνεχόμενα

$N(\Omega) - \underbrace{N(A_1) - N(A_2) - N(A_3)}_{\text{ανταλλάξιμα}} + N(A_1A_2) + N(A_1A_3) + N(A_2A_3) - N(A_1A_2A_3)$

$$\frac{9!}{(3!)^3} - 3\frac{7!}{(3!)^2} + 3\cdot\frac{5!}{3!} - 3!$$

7. Άσκηση - Θέμα 3ο Φεβρουάριος 2010

20 άτομα μπαίνουν σε ανελκυστήρες 5-όροφης οικοδομής.

(i) # τρόπων αποβίβασης στους ορόφους 1 ως 5 ώστε στους ορόφους 1,2,3 να αποβιβαστεί τουλάχιστον 1 άτομο.

(ii) # τρόπων αποβίβασης ώστε να αποβιβαστεί ο ίδιος αριθμός ατόμων σε κάθε όροφο.

Λύση

(i)

Τρόπος αποβίβασης = Διατεταγμένη 20-άδα που στην i-θέση δείχνει σε ποιον όροφο κατέβηκε το i-άτομο.

Όμοια με τις ασκήσεις 2,3,4 $\Rightarrow \sum_{r=0}^{3} (-1)^r \binom{3}{r} (5-r)^{20}$

(ii) $\dfrac{20!}{4!4!4!4!4!} = \dfrac{20!}{(4!)^5}$