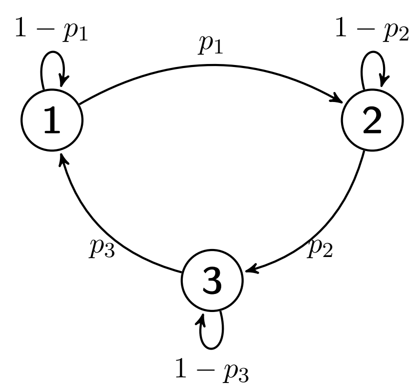
Στοχαστικές Ανελίξεις - Απρίλιος 2014

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. (25) Έχουμε 3 νομίσματα όπου η πιθανότητα το i να φέρει κεφάλι είναι ίση με $p_i, i = 1, 2, 3$, και ακολουθούμε την εξής διαδικασία. Ξεκινάμε με το νόμισμα 1 και το ρίχνουμε διαδοχικά μέχρι να φέρει κεφάλι. Τότε το αλλάζουμε με το 2 και επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία. Όταν το 2 φέρει κεφάλι το αλλάζουμε με το 3 και όταν αυτό φέρει κεφάλι το αλλάζουμε με το 1 και ούτω καθεξής.
(α) Να ορίσετε μια Μαρκοβιανή διαδικασία διακριτού χρόνου που περιγράφει την εξέλιξη αυτού του παιχνιδιού και να βρείτε το διάγραμμα και τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος.
(β) Να χαρακτηρίσετε αυτή τη διαδικασία και να βρείτε την οριακή κατανομή.
(γ) Αν κάθε φορά που φέρνουμε κεφάλι κερδίζουμε 1 ευρώ, ποιο είναι το αναμενόμενο μέσο κέρδος ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα;

Απάντηση
(α) Υποθέτουμε $0 < p_i < 1, i = 1, 2, 3$. Έστω $n = 1, 2,$ οι διαδοχιδές ρίψεις και X_n το νόμισμα που ρίχνεται στη n-οστή ρίψη, με $X_n \in \{1, 2, 3\}$. Αν $X_n = i$, αυτό σημαίνει ότι το νόμισμα i είναι σε χρήση και από την τελευταία φορά που χρησιμοποιήθηκε δεν έχει φέρει ακόμη κεφάλι. Επειδή οι διαδοχικές ρίψεις είναι ανεξάρτητες, η κατανομή πιθανότητας της επόμενης κατάστασης εξαρτάται μόνο από το ποιο νόμισμα χρησιμοποιείται τώρα και όχι από την προηγούμενη ιστορία. Συγκεκριμένα αν το νόμισμα φέρει γράμματα η κατάσταση θα παραμείνει η ίδια, ενώ αν φέρει κεφάλι η κατάσταση θα αλλάξει στο επόμενο νόμισμα. Επομένως η διαδικασία $X_n, n = 1, 2, \ldots$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με πίνακα και διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος που φαίνονται παρακάτω:

$$P = \begin{pmatrix} 1-p_1 & p_1 & 0 \\ 0 & 1-p_2 & p_2 \\ p_3 & 0 & 1-p_3 \end{pmatrix}$$



Σχήμα 1: Θέμα 1: Διάγραμμα Πιθανοτήτων Μετάβασης Ενός Βήματος

(β) Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και επειδή είναι και πεπερασμένη, είναι θετικά επαναληπτική. Επίσης επειδή για κάθε κατάσταση i, $p_{ii} > 0$, είναι και απεριοδική. Επομένως υπάρχει η οριακή κατανομή $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ που είναι η μοναδική λύση του συστήματος:

$$\pi_1 = (1-p_1)\pi_1 + p_3\pi_3$$
$$\pi_2 = (1-p_2)\pi_2 + p_1\pi_1$$
$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

από το οποίο προκύπτει

$$\pi_1 p_1 = \pi_2 p_2 = \pi_3 p_3$$
$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1.$$

Επομένως η οριακή κατανομή είναι

$$\pi_1 = \frac{\frac{1}{p_1}}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}}, \pi_2 = \frac{\frac{1}{p_2}}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}}, \pi_3 = \frac{\frac{1}{p_3}}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}}.$$

(γ) Σε κάθε κατάσταση το κέρδος είναι ίσο με 1 αν η επόμενη μετάβαση γίνει σε διαφορετική κατάσταση (δηλαδή έρθει κεφάλι) και 0 αν η κατάσταση παραμείνει η ίδια, δηλαδή αν $X_n = i$,

$$R_n(X_n, X_{n+1}) = \begin{cases} 1, & \text{με πιθανότητα } \; p_i \\ 0, & \text{με πιθανότητα } \; 1 - p_i \end{cases}$$

και επομένως το αναμενόμενο κέρδος μιας περιόδου στην κατάσταση i είναι ίσο με

$$r(i) = E(R_n(X_n, X_{n+1})|X_n = i) = p_i.$$

Τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο για την αναμενόμενη αμοιβή ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα

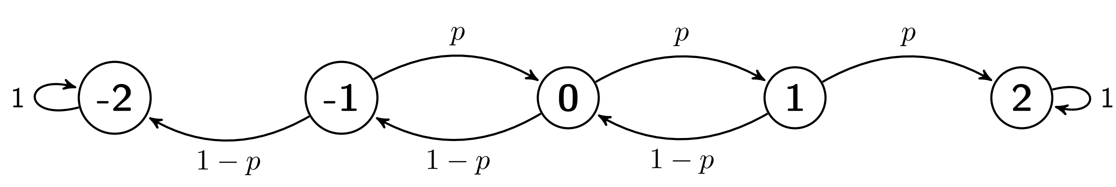
$$C = \sum_{i \in S} r(i)\pi_i = \sum_{i=1}^{3} p_i \frac{\frac{1}{p_i}}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}} = \frac{3}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. (30) Δύο ομάδες Α, Β παίζουν μεταξύ τους διαδοχικά ανεξάρτητα παιχνίδια. Σε κάθε παιχνίδι κερδίζει η ομάδα Α με πιθανότητα p και η ομάδα Β με πιθανότητα $1 - p$. Η ομάδα που κερδίζει ένα παιχνίδι παίρνει ένα βαθμό και αυτή που χάνει μηδέν βαθμούς. Πρωταθλήτρια ανακηρύσσεται η ομάδα που συγκεντρώνει πρώτη διαφορά δύο βαθμών από την άλλη.
(α) Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός παιχνιδιών μέχρι να λήξει το πρωτάθλημα;
(β) Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει το πρωτάθλημα η ομάδα Α;
(γ) Πότε η ομάδα Α προτιμά αυτό το πρωτάθλημα σε σχέση με το εναλλακτικό όπου παίζεται μόνο ένα παιχνίδι και ο νικητής ανακηρύσσεται πρωταθλητής;

Υπόδειξη: Ορίστε μια Μαρκοβιανή διαδικασία διακριτού χρόνου $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ όπου $X_0 = 0$ και X_n η διαφορά βαθμών μεταξύ Α και Β μετά το n-οστό παιχνίδι.

Απάντηση

(α) Έστω X_n η διαφορά βαθμών μεταξύ Α και Β μετά το n-οστό παιχνίδι. Αν $X_n = 2$ ή -2, τότε το παιχνίδι έχει τελειώσει με νίκη της Α ή της Β, αντίστοιχα. Αν $X_n = -1, 0, 1$ τότε στο επόμενο παιχνίδι η διαφορά θα μειωθεί κατά 1 αν χάσει η Α (με πιθανότητα $1 - p$) και θα αυξηθεί κατά 1 αν κερδίσει η Α (με πιθανότητα p). Επομένως, αφού τα παιχνίδια είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, δεδομένης της κατάστασης X_n, η κατανομή της X_{n+1} είναι ανεξάρτητη της προηγούμενης ιστορίας και η αλυσίδα είναι Μαρκοβιανή. Το διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος είναι



Στην αλυσίδα αυτή οι καταστάσεις -2 και 2 είναι απορροφητικές και οι -1, 0, 1 παροδικές. Ο αναμενόμενος αριθμός παιχνιδιών είναι ίσος με τον αναμενόμενο αριθμό βημάτων από την κατάσταση 0 μέχρι την απορρόφηση στην -2 ή στη 2. Για να τον υπολογίσουμε, έστω f_i ο αναμενόμενος αριθμός βημάτων από την κατάσταση i μέχρι την απορρόφηση στην κατάσταση -2 ή 2. Οι f_{-1}, f_0, f_1 ικανοποιούν το παρακάτω σύστημα εξισώσεων, που προκύπτει από ανάλυση πρώτου βήματος και τον ανανεωτικό συλλογισμό:

$$\begin{aligned} f_{-1} &= 1 + pf_0 \\ f_0 &= 1 + (1-p)f_{-1} + pf_1 \\ f_1 &= 1 + (1-p)f_0. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την πρώτη και τρίτη εξίσωση στη δεύτερη παίρνουμε:

$$f_0 = 1 + (1-p) + (1-p)pf_0 + p + p(1-p)f_0 = 2 + 2p(1-p)f_0$$

και επομένως

$$f_0 = \frac{2}{1-2p(1-p)}$$

που είναι και ο αναμενόμενος αριθμός παιχνιδιών μέχρι τη λήξη του πρωταθλήματος.

(β) Η πιθανότητα να κερδίσει το πρωτάθλημα η Α είναι η πιθανότητα απορρόφησης στην κατάσταση 2 με αρχική κατάσταση 0. Έστω x_i η πιθανότητα απορρόφησης στην κατάσταση 2 δεδομένου ότι $X_0 = i$. Προφανώς $x_{-2} = 0, x_2 = 1$. Οι x_{-1}, x_0, x_1 ικανοποιούν το παρακάτω σύστημα εξισώσεων, που προκύπτει από ανάλυση πρώτου βήματος και τον ανανεωτικό συλλογισμό:

$$\begin{aligned} x_{-1} &= px_0 \\ x_0 &= (1-p)x_{-1} + px_1 \\ x_1 &= p \cdot 1 + (1-p)x_0. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την πρώτη και τρίτη εξίσωση στη δεύτερη παίρνουμε:

$$x_0 = (1-p)px_0 + p^2 + p(1-p)x_0 = p^2 + 2p(1-p)x_0$$

και επομένως

$$x_0 = \frac{p^2}{1-2p(1-p)}$$

που είναι και η πιθανότητα να κερδίσει το πρωτάθλημα η ομάδα Α.

(γ) Στο πρωτάθλημα με ένα μοναδικό αγώνα η ομάδα Α έχει πιθανότητα p να αναδειχθεί πρωταθλήτρια. Επομένως προτιμά το παραπάνω πρωτάθλημα με τη διαφορά δύο αγώνων όταν $x_0 \geq p$. Αντικαθιστώντας την τιμή του x_0 παίρνουμε:

$$\frac{p^2}{1-2p(1-p)} \geq p \Leftrightarrow \frac{p}{1-2p(1-p)} \geq 1 \Leftrightarrow p \geq 1-2p(1-p) \Leftrightarrow 1-3p+2p^2 \leq 0.$$

Το τριώνυμο $2p^2 - 3p + 1$ έχει ρίζες 1 και $\frac{1}{2}$ και είναι αρνητικό μεταξύ των ριζών. Συνεπώς η ανισότητα ισχύει για $\frac{1}{2} \leq p \leq 1$, δηλαδή η ομάδα Α προτιμά το σύστημα των πολλών αγώνων αν και μόνο αν είναι ισχυρότερη από τη Β (αν είναι ισοδύναμη με τη Β είναι αδιάφορη για το ποιο από τα δύο συστήματα θα εφαρμοστεί).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3. (25) Δίνεται μια Μαρκοβιανή διαδικασία διακριτού χρόνου $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ με χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, \ldots, 7\}$ και τον παρακάτω πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος

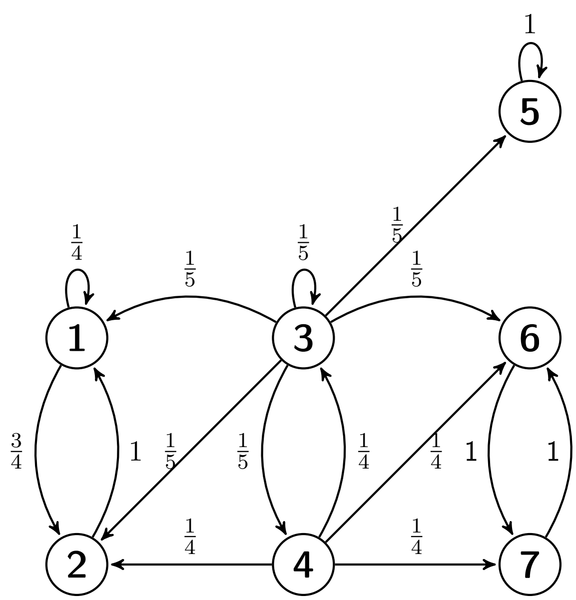
$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(α) Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν οι κλάσεις επικοινωνίας ως προς την επαναληπτικότητα και την περιοδικότητα.
(β) Να βρεθούν οι παρακάτω οριακές πιθανότητες μετάβασης:

$$\lim_{n\to\infty} p_{12}^{(n)}, \lim_{n\to\infty} p_{32}^{(n)}, \lim_{n\to\infty} p_{17}^{(n)}, \lim_{n\to\infty} p_{45}^{(n)}, \lim_{n\to\infty} p_{42}^{(n)}, \lim_{n\to\infty} p_{34}^{(n)}.$$

(γ) Αν $X_0 = 6$, ποιο είναι το αναμενόμενο ποσοστό περιόδων σε άπειρο ορίζοντα που η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση 7;
(δ) Αν $X_0 = 1$, ποιο είναι το αναμενόμενο ποσοστό περιόδων σε άπειρο ορίζοντα που η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση 1;

Απάντηση
(α) Από τον πίνακα κατασκευάζουμε το διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος που φαίνεται παρακάτω:



Από το διάγραμμα βλέπουμε ότι η αλυσίδα χωρίζεται σε τέσσερις κλάσεις επικοινωνίας:

1. $C_1 = \{1, 2\}$ θετικά επαναληπτική ως κλειστό πεπερασμένο σύνολο

2. $C_2 = \{5\}$ απορροφητική κατάσταση

3. $C_3 = \{6, 7\}$ θετικά επαναληπτική ως κλειστό πεπερασμένο σύνολο

4. $C = \{3, 4\}$ παροδική ως κλάση επικοινωνίας και ανοικτό σύνολο

Από τις θετικά επαναληπτικές, η κλάση C_1 είναι απεριοδική επειδή $p_{11} > 0$ και η κλάση C_3 περιοδική με περίοδο 2.

(β) Πρώτα βρίσκουμε τις δεσμευμένες οριακές κατανομές σε κάθε θετικά επαναληπτική κλάση.

Αν η διαδικασία απορροφηθεί στην κλάση C_2 θα παραμείνει εκεί για πάντα με οριακή κατανομή που δίνεται από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{1}{4}\pi_1 + \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1 \end{aligned}$$

από τις οποίες προκύπτει $\pi_1 = \frac{4}{7}, \pi_2 = \frac{3}{7}$.

Η κλάση C_2 είναι απορροφητική και επομένως αν η διαδικασία επισκεφθεί ποτέ την κατάσταση 5 θα παραμείνει εκεί για πάντα με οριακή κατανομή $\pi_5 = 1$.

Στην κλάση C_3 δεν υπάρχει οριακή κατανομή επειδή είναι περιοδική, όμως οι εξισώσεις ισορροπίας έχουν μοναδική λύση που ερμηνεύεται ως αντίστοιχα ποσοστά χρόνου:

$$\begin{aligned} \pi_6 &= \pi_7 \\ \pi_6 + \pi_7 &= 1 \end{aligned}$$

από τις οποίες προκύπτει $\pi_6 = \pi_7 = \frac{1}{2}$.

Για να βρούμε τις ζητούμενες πιθανότητες πρέπει επίσης να υπολογίσουμε τις πιθανότητες απορρόφησης από τις παροδικές καταστάσεις σε κάθε μια από τις επαναληπτικές κλάσεις.

Για την κλάση C_1 οι πιθανότητες απορρόφησης x_{3,C_1}, x_{4,C_1} αποτελούν τη μοναδική λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} x_{3,C_1} &= p_{31} \cdot 1 + p_{32} \cdot 1 + p_{33} x_{3,C_1} + p_{34} x_{4,C_1} + p_{35} \cdot 0 \\ x_{4,C_1} &= p_{42} \cdot 1 + p_{43} x_{3,C_1} + p_{46} \cdot 0 + p_{47} \cdot 0 \end{aligned}$$

επομένως

$$\begin{aligned} x_{3,C_1} &= \frac{2}{5} + \frac{1}{5} x_{3,C_1} + \frac{1}{5} x_{4,C_1} \\ x_{4,C_1} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} x_{3,C_1} \end{aligned}$$

από τις οποίες προκύπτει $x_{3,C_1} = \frac{3}{5}, x_{4,C_1} = \frac{2}{5}$.

Για την κλάση C_2 οι πιθανότητες απορρόφησης x_{3,C_2}, x_{4,C_2} αποτελούν τη μοναδική λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} x_{3,C_2} &= p_{34} \cdot 1 + p_{33} x_{3,C_2} + p_{34} x_{4,C_2} \\ x_{4,C_2} &= p_{43} x_{3,C_2} \end{aligned}$$

επομένως

$$\begin{aligned} x_{3,C_2} &= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} x_{3,C_2} + \frac{1}{5} x_{4,C_2} \\ x_{4,C_1} &= \frac{1}{4} x_{3,C_2} \end{aligned}$$

από τις οποίες προκύπτει $x_{3,C_2} = \frac{4}{15}, x_{4,C_2} = \frac{1}{15}$.

Τέλος για την κλάση C_3 οι πιθανότητες απορρόφησης προκύπτουν ως οι συμπληρωματικές αυτών για τις άλλες κλάσεις:

$$\begin{aligned} x_{3,C_3} &= 1 - x_{3,C_1} - x_{3,C_2} = 1 - \frac{3}{5} - \frac{4}{15} = \frac{2}{15} \\ x_{4,C_3} &= 1 - x_{4,C_1} - x_{4,C_2} = 1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{15} = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

Τώρα μπορούμε να βρούμε τις ζητούμενες οριακές πιθανότητες.

Η πιθανότητα $\lim_{n\to\infty} p_{12}^{(n)} = \pi_1 = \frac{4}{7}$, γιατί η κλάση C_1 είναι θετικά επαναληπτική και ξεκινώντας από οπουδήποτε μέσα σε αυτή ισχύουν οι αντίστοιχες οριακές πιθανότητες.

Η πιθανότητα $\lim_{n\to\infty} p_{32}^{(n)} = x_{3,C_1}\pi_2 = \frac{3}{5}\frac{3}{7} = \frac{9}{35}$, επειδή πρέπει η διαδικασία να απορροφηθεί στην C_1 και μετά από πολύ χρόνο να βρεθεί στην κατάσταση 2.

Η πιθανότητα $\lim_{n\to\infty} p_{17}^{(n)} = 0$ γιατί αν η διαδικασία ξεκινήσει στην κατάσταση 1 θα παραμείνει για πάντα στην κλάση C_1.

Αντίστοιχα με τα προηγούμενα βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} p_{45}^{(n)} &= x_{4,C_2}\pi_5 = \frac{1}{15} \\
\lim_{n\to\infty} p_{42}^{(n)} &= x_{4,C_1}\pi_2 = \frac{1}{15} \\
\lim_{n\to\infty} p_{34}^{(n)} &= 0,
\end{aligned}$$

όπου το τελευταίο όριο είναι ίσο με μηδέν γιατί η κατάσταση 4 είναι παροδική.

(γ) Αν η αρχική κατάσταση είναι η 6, τότε η διαδικασία θα παραμείνει για πάντα στη θετικά επαναληπτική κλάση C_3. Παρ΄ όλο που η κλάση αυτή δεν έχει οριακή κατανομή, οι πιθανότητες π_6, π_7 ερμηνεύονται ως ποσοστά περιόδων που η διαδικασία βρίσκεται στις καταστάσεις 6 και 7 αντίστοιχα, επομένως το ζητούμενο ποσοστό χρόνου είναι ίσο με $\pi_7 = \frac{1}{2}$.

(δ) Αν η αρχική κατάσταση είναι η 1, τότε η διαδικασία θα παραμείνει για πάντα στη θετικά επαναληπτική κλάση C_1, επομένως το ζητούμενο ποσοστό χρόνου είναι ίσο με $\pi_1 = \frac{4}{7}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4. (30) Σε μια πολιτική συγκέντρωση στο Σύνταγμα υποθέτουμε ότι πολίτες έρχονται στην πλατεία σύμφωνα με διαδικασία Poisson(λ). Κάθε άτομο παραμένει στην πλατεία χρόνο που ακολουθεί εκθετική κατανομή με ρυθμό θ. Έστω $X(t)$ ο αριθμός ατόμων στην πλατεία τη χρονική στιγμή t.

(α) Δικαιολογήστε ότι η $\{X(t), t \geq 0\}$ είναι Μαρκοβιανή διαδικασία συνεχούς χρόνου και βρείτε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης.

(β) Διατυπώστε τις προδρομικές διαφορικές εξισώσεις Chapman-Kolmogorov για τις πιθανότητες μετάβασης $p_{ij}(t), i, j \in S$.

(γ) Αποδείξτε ότι η διαδικασία είναι θετικά επαναληπτική για κάθε τιμή των λ, θ και βρείτε την οριακή κατανομή. Τι είδους κατανομή είναι αυτή;

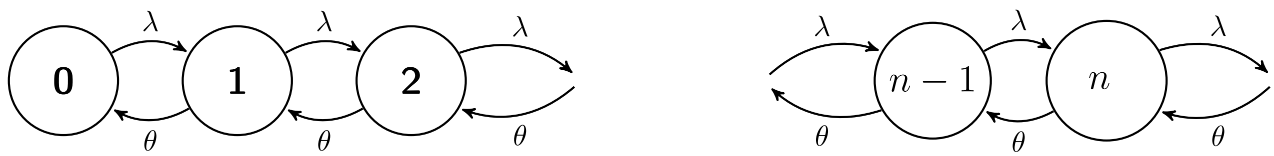
(δ) Αν ο ρυθμός άφιξης είναι 100 άτομα το λεπτό και κάθε άτομο παραμένει κατά μέσο όρο στη συγκέντρωση 1 ώρα, ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός ατόμων στην πλατεία μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα από την αρχή της συγκέντρωσης; (Υποθέστε προσεγγιστικά ότι η συγκέντρωση διαρκεί άπειρο χρόνο.)

Απάντηση **(α)** Τα γεγονότα που μπορεί να αλλάξουν την κατάσταση είναι η άφιξη και η αναχώρηση ενός ατόμου από τη συγκέντρωση. Επειδή οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών γεγονότων είναι όλοι εκθετικοί η διαδικασία $X(t), t \geq 0$ είναι διαδικασία γεννήσεων-θανάτων.

Οι ρυθμοί γεννήσεων είναι ίσοι με $\lambda_n = \lambda, n = 0, 1, \ldots$.

Για τους ρυθμούς θανάτων παρατηρούμε ότι στην κατάσταη n η επόμενη αναχώρηση θα συμβεί όταν φύγει το πρώτο από τα υπάρχοντα n άτομα στην πλατεία. Επομένως ο χρόνος μέχρι την επόμενη αναχώρηση ακολουθεί εκθετική κατανομή με ρυθμό $n\theta$, δηλαδή οι ρυθμοί θανάτων είναι $\mu_n = n\theta, n = 0, 1, 2, \ldots$.

Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης είναι



(β) Οι προδρομικές εξισώσεις Chapman-Kolmogorov είναι:

$$p'_{i0}(t) = -\lambda p_{i0}(t) + \theta p_{i1}(t), \quad i \geq 0,$$
$$p'_{ij}(t) = -(\lambda + j\theta)p_{ij}(t) + \lambda p_{i,j-1}(t) + (j+1)\theta p_{i,j+1}(t), \quad i \geq 0, j > 0$$

(γ) Η διαδικασία είναι αδιαχώριστη. Επειδή ο χώρος καταστάσεων είναι απειροσύνολο, η μοναδική κλάση μπορεί να είναι παροδική, μηδενικά επαναληπτική ή θετικά επαναληπτική. Σύμφωνα με το θεώρημα οριακής κατανομής για αδιαχώριστες Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου, για να είναι θετικά επαναληπτική πρέπει και αρκεί να υπάρχει μοναδική στάσιμη κατανομή. Η στάσιμη κατανομή προκύπτει ως λύση των εξισώσεων ισορροπίας. Παίρνοντας ως εξισώσεις ισορροπίας τις εξισώσεις ροής πιθανότητας για διαδοχικές διαμερίσεις $\{0, 1, \ldots, n\}, \{n+1, \ldots\},\ n = 0, 1, \ldots$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} p_0\lambda &= p_1\theta \\ p_1\lambda &= p_2 2\theta \\ &\cdots \\ p_{n-1}\lambda &= p_n n\theta \\ &\cdots \end{aligned}$$

από τις οποίες προκύπτει

$$p_1 = \frac{\lambda}{\theta}p_0,\ p_2 = \frac{\lambda}{2\theta}p_1 = \frac{\lambda^2}{2\theta^2}p_0, \ldots, p_n = \frac{\lambda^n}{n!\theta^n}p_0$$

Αντικαθιστώντας τον γενικό τύπο του p_n στην εξίσωση κανονικοποίησης παίρνουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!\theta^n} = 1.$$

Όμως

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!\theta^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^n}{n!} = e^{\frac{\lambda}{\theta}}$$

για οποιαδήποτε $\lambda, \theta > 0$, επομένως από την εξίσωση κανονικοποίησης προκύπτει

$$p_0 = e^{-\frac{\lambda}{\theta}}$$

και

$$p_n = e^{-\frac{\lambda}{\theta}} \frac{\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^n}{n!} > 0, n = 0, 1, 2, \ldots$$

Επομένως η στάσιμη κατανομή είναι μοναδική και θετική και η διαδικασία είναι θετικά επαναληπτική για όλες τις θετικές τιμές των παραμέτρων. Η στάσιμη κατανομή, που τώρα είναι και οριακή είναι η Poisson με παράμετρο $\frac{\lambda}{\theta}$.

(δ) Από το (γ) προέκυψε ότι η κατανομή της $X(t)$ για $t \to \infty$ είναι ασυμπτωτικά Poisson με παράμετρο $\frac{\lambda}{\theta}$. Επομένως

$$\lim_{t\to\infty} E(X(t)) = \frac{\lambda}{\theta}.$$

Παίρνοντας μονάδα χρόνου τη μια ώρα, έχουμε $\lambda = 100 \cdot 60 = 6000, 1/\theta = 1$, επομένως

$$\lim_{t\to\infty} E(X(t)) = 6000.$$