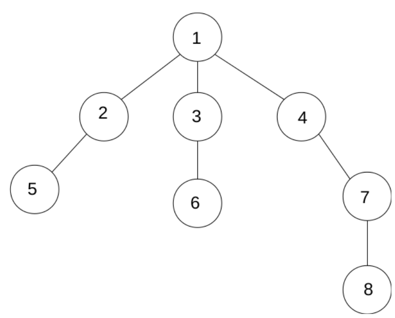
Στοχαστικές Ανελίξεις - Σεπτέμβριος 2014

ΟΔΗΓΙΕΣ
(1) Απαντήστε σε όλα τα θέματα. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.
(2) Οι απαντήσεις να είναι αιτιολογημένες. Απαντήσεις χωρίς να φαίνεται η απαιτούμενη εργασία είναι σα να μην έχουν δοθεί. Ειδικότερα, αν σε κάποιο θέμα χρησιμοποιήσετε μια στοχαστική διαδικασία που δεν έχει οριστεί στην εκφώνηση, θα πρέπει να την ορίσετε με ακρίβεια.
(3) Γράψτε αμέσως τα στοιχεία σας στο γραπτό σας. Γραπτό χωρίς στοιχεία στη διάρκεια της εξέτασης μηδενίζεται. Στο τέλος του διαγωνίσματος παραδίδονται ΟΛΕΣ οι κόλλες, περιλαμβανομένου και του πρόχειρου.
(4) Επιτρέπεται η χρήση calculator αλλά ΟΧΙ κινητού τηλεφώνου. Κινητό τηλέφωνο που εντοπίζεται να χρησιμοποιείται ή να βρίσκεται πάνω στο έδρανο συνεπάγεται μηδενισμό του γραπτού, ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ απο τον σκοπό για τον οποίο χρησιμοποιείται (π.χ. για ρολόι).
(5) Διάρκεια διαγωνίσματος : 2.5 ώρες. Πρώτη αποχώρηση : 45 λεπτά.
Καλή Επιτυχία!

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. Θεωρήστε το εξής τυχερό παιχνίδι. Ένα αντικείμενο κινείται με τυχαίο τρόπο στο δίκτυο του παρακάτω σχήματος. Συγκεκριμένα το αντικείμενο αρχικά βρίσκεται στη θέση 1 και σε κάθε βήμα κινείται με ισοπίθανα σε κάθε μια από τις γειτονικές του θέσεις. Το παιχνίδι τελειώνει όταν το αντικείμενο φτάσει σε μια από τις θέσεις 5, 6 ή 8. Αν σταματήσει στις θέσεις 5 και 6 ο παίκτης χάνει 10 ευρώ, ενώ αν σταματήσει στη θέση 8 κερδίζει x ευρώ.
Πόσο πρέπει να είναι το x έτσι ώστε να συμφέρει τον παίκτη να παίξει αυτό το παιχνίδι, δηλαδή έτσι ώστε το αναμενόμενο καθαρό κέρδος να είναι θετικό;



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. Σε ένα δωμάτιο μπαίνουν και βγαίνουν άτομα με τον εξής τρόπο: Οι μετακινήσεις γίνονται σε διακριτά βήματα–περιόδους. Αν το δωμάτιο είναι άδειο στην αρχή μιας περιόδου, τότε στη διάρκεια της περιόδου φτάνουν στο δωμάτιο 1, 2 ή 3 άτομα με αντίστοιχες πιθανότητες p_1, p_2, p_3, όπου $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Αν στην αρχή της περιόδου στο δωμάτιο υπάρχει έστω και ένα άτομο, τότε στη διάρκεια της περιόδου δεν επιτρέπεται να μπουν νέα άτομα, ενώ ένα από τα άτομα που είναι μέσα φεύγει.
Στην αρχή κάθε περιόδου ο ιδιοκτήτης του δωματίου εισπράττει 10 ευρώ από κάθε άτομο που βρίσκεται μέσα στο δωμάτιο.
Να υπολογίσετε το αναμενόμενο μέσο έσοδο του ιδιοκτήτη ανά περίοδο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3. Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, \ldots, 6\}$, και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος τον παρακάτω:

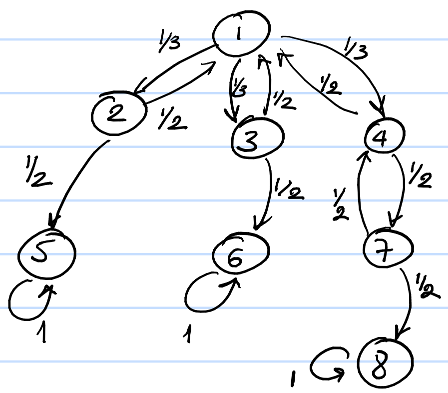
$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(α) Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν οι κλάσεις επικοινωνίας ως προς την επαναληπτικότητα και περιοδικότητα.
(β) Να βρεθούν τα όρια: $\lim_{n\to\infty} p_{25}^{(n)}, \lim_{n\to\infty} p_{35}^{(n)}, \lim_{n\to\infty} p_{14}^{(n)}, \lim_{n\to\infty} p_{31}^{(n)}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4. Ένα ταξί κινείται μέσα στην πόλη ως εξής: Όταν είναι άδειο ο χρόνος μέχρι να το σταματήσει ένας πελάτης ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Ο πελάτης που σταματάει το ταξί είναι τύπου i, με πιθανότητα θ_i, για $i = 1, 2, \ldots, N$. Η διάρκεια της διαδρομής ενός πελάτη τύπου i είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $f_i, i = 1, \ldots, N$. Όταν το ταξί είναι κατειλημμένο από ένα πελάτη δεν επιτρέπεται να πάρει άλλον πριν το τέλος της τρέχουσας διαδρομής. Να βρεθεί το ποσοστό του χρόνου που το ταξί κινείται άδειο.

Στοχαστικές Ανελίξεις- Απαντήσεις Διαγωνίσματος Σεπτεμβρίου 2014

ΘΕΜΑ 1 Έστω X_n η θέση που βρίσκεται το αντικείμενο στην αρχή της περιόδου n.
∴ $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με χώρο καταστάσεων $S=\{1,2,\dots,8\}$ και διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος το εξής:



Οι καταστάσεις 5,6 κ' 8 είναι απορροφητικές αφού εκεί το παιχνίδι τελειώνει.
Οι 1,2,3,4,7 είναι παροδικές.

Έστω Z το κέρδος αυτού του παιχνιδιού από μια φορά που θα παιχτεί.
∴ Z είναι τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας

$P(Z=-10) = f_{15}+f_{16}$, $P(Z=x)=f_{18}$, όπου f_{15}, f_{16}, f_{18} οι πιθανότητες απορρόφησης της Μαρκοβιανής αλυσίδας στις καταστάσεις 5, 6 και 8, αντίστοιχα. Επειδή σίγουρα κάποια στιγμή θα συμβεί απορρόφηση σε μια από αυτές τις καταστάσεις, ισχύει $f_{15}+f_{16}+f_{18}=1$.

Για να υπολογίσουμε τις f_{15}, f_{16}, f_{18}: Θεωρούμε πρώτα την f_{15}.

Έστω $f_{i5} = P(\text{απορρ. στην } 5 \mid X_0 = \quad)$, $i\in S'$. Οι f_{i5} ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$\left.\begin{aligned}
f_{15} &= \tfrac{1}{3}f_{25}+\tfrac{1}{3}f_{35}+\tfrac{1}{3}f_{45}\\
f_{25} &= \tfrac{1}{2}\cdot 1+\tfrac{1}{2}\cdot f_{15}\\
f_{35} &= \tfrac{1}{2}\cdot 0+\tfrac{1}{2}\cdot f_{15} = \tfrac{1}{2}f_{15}\\
f_{45} &= \tfrac{1}{2}\cdot f_{75}+\tfrac{1}{2}f_{15}\\
f_{75} &= \tfrac{1}{2}\cdot f_{45}+\tfrac{1}{2}\cdot 0 = \tfrac{1}{2}f_{45}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow
\left.\begin{aligned}
f_{45} &= \tfrac{1}{4}f_{45}+\tfrac{1}{2}f_{15} \Rightarrow \tfrac{3}{4}f_{45}=\tfrac{1}{2}f_{15} \Rightarrow f_{45}=\tfrac{2}{3}f_{15}\\
f_{25} &= \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}f_{15}\\
f_{35} &= \tfrac{1}{2}f_{15}
\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{15} = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}f_{15}+\frac{1}{6}f_{15}+\frac{2}{9}f_{15} = \frac{1}{6}+\frac{5}{9}f_{15} \Rightarrow \frac{4}{9}f_{15}=\frac{1}{6} \Rightarrow f_{15}=\frac{3}{8}$$

Αντίστοιχα υπολογίζεται και η f_{16}:

Έστω $f_{i6} = P(\text{απορροφ. στην } 6 \mid X_0 = i)$.

$$\left.\begin{aligned}
f_{16} &= \tfrac{1}{3} f_{26} + \tfrac{1}{3} f_{36} + \tfrac{1}{3} f_{46} \\
f_{26} &= \tfrac{1}{2} f_{16} + \tfrac{1}{2}\cdot 0 = \tfrac{1}{2} f_{16} \\
f_{36} &= \tfrac{1}{2} f_{16} + \tfrac{1}{2}\cdot 1 \\
f_{46} &= \tfrac{1}{2} f_{16} + \tfrac{1}{2} f_{76} \\
f_{76} &= \tfrac{1}{2}\cdot 0 + \tfrac{1}{2}\cdot f_{46}
\end{aligned}\right\}$$

Το σύστημα είναι ακριβώς το ίδιο με το προηγούμενο με την αντιστοιχία

$f_{16} \Leftrightarrow f_{15}$

$f_{26} \Leftrightarrow f_{35}$

$f_{36} \Leftrightarrow f_{25}$

$f_{46} \Leftrightarrow f_{45}$

Επομένως έχει την ίδια μοναδική λύση κ' συνεπώς

$f_{16} = f_{15} = \frac{3}{8}$

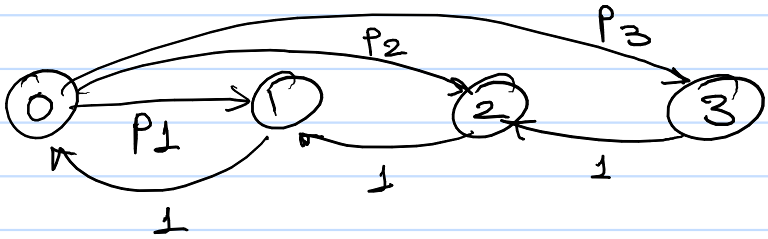
Τέλος για την f_{18} έχουμε $f_{18} = 1 - f_{15} - f_{16} = \frac{2}{8}$

Επομένως το καθαρό κέρδος Ζ παίρνει την τιμή -10 με πιθανότητα $f_{15} + f_{16} = \frac{3}{4}$ κ' την τιμή x με πιθ. $f_{18} = \frac{1}{4}$

Για να ισχύει $EZ > 0$ θα πρέπει $(-10)\cdot\frac{3}{4} + x\cdot\frac{1}{4} > 0 \Rightarrow$

$x - 30 > 0 \Rightarrow \boxed{x > 30}$

ΘΕΜΑ 2   Έστω X_n ο αριθμός ατόμων στο δωμάτιο στην αρχή της μέρας n. Τότε η $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με χώρο καταστάσεων $S=\{0,1,2,3\}$ και διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος:



Στις καταστάσεις 0, 1, 2, 3 υπάρχει αμοιβή 0, 10, 20, 30 ευρώ, αντίστοιχα.

Η παραπάνω αλυσίδα είναι θετικά επαναληπτική και απεριοδική επομένως έχει μοναδική οριακή κατανομή $(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\pi_3)$:

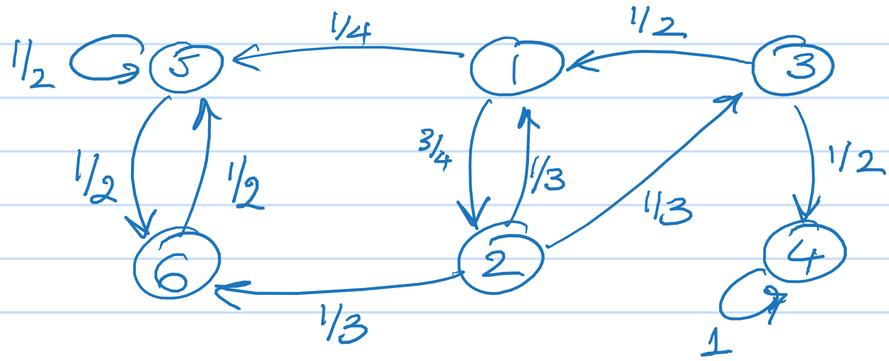
$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 = \pi_0\cdot p_1 + \pi_2 \\ \pi_2 = \pi_0\cdot p_2 + \pi_3 \\ \pi_3 = \pi_0\cdot p_3 \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \pi_3 = \pi_0 p_3 \\ \pi_2 = \pi_0 p_2 + \pi_3 = \pi_0(p_2+p_3) \\ \pi_1 = \pi_0 p_1 + \pi_2 = \pi_0(p_1+p_2+p_3) = \pi_0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \pi_0 + \pi_0 + \pi_0(p_2+p_3) + \pi_0 p_3 = 1 \Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{2+p_2+2p_3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_0 = \dfrac{1}{2+p_2+2p_3}, & \pi_1 = \dfrac{1}{2+p_2+2p_3} \\ \pi_2 = \dfrac{p_2+p_3}{2+p_2+2p_3}, & \pi_3 = \dfrac{p_3}{2+p_2+2p_3} \end{cases}$$

Το αναμενόμενο μέσο έσοδο ανά ημέρα σε άπειρο ορίζοντα είναι ίσο με $C = 0\cdot\pi_0 + 10\cdot\pi_1 + 20\pi_2 + 30\pi_3$, όπου τα $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3$ δίνονται παραπάνω

ΘΕΜΑ 3 Το διάγραμμα μεταβάσεων είναι:



(α) Η κλάση $C_1=\{5,6\}$ είναι θετικά επαναληπτική και απεριοδική

Η κλάση $C_2=\{4\}$ είναι απορροφητική

Το παροδικό σύνολο είναι το $T=\{1,2,3\}$.

(β) Επειδή ο χώρος καταστάσεων είναι πεπερασμένος, η διαδικασία θα απορροφηθεί με πιθανότητα 1 σε μια από τις κλάσεις C_1, C_2.

Αν απορροφηθεί στην κλάση C_1, η οριακή κατανομή θα είναι

(π_5,π_6) : $\left\{\pi_6=\frac{1}{2}\pi_5,\ \pi_5+\pi_6=1\right\} \Rightarrow \pi_5=\frac{2}{3},\ \pi_6=\frac{1}{3}$

Αν απορροφηθεί στην κλάση C_2 θα είναι $\pi_4=1$.

Οι πιθανότητες απορρόφησης από τις παροδικές καταστάσεις στις κλάσεις C_1, C_2 υπολογίζονται ως εξής.

Έστω $x_{i1}=P(\text{απορρόφηση στην } C_1 \mid X_0=i)$, $i=1,2,3$

Οι x_{i1} ικανοποιούν το σύστημα

$$x_{11}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x_{21}$$
$$x_{21}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x_{11}+\frac{1}{3}x_{31}$$
$$x_{31}=\frac{1}{2}\cdot x_{11}+\frac{1}{2}\cdot 0$$

Η λύση αυτού του συστήματος είναι: $x_{11}=\frac{4}{5}$, $x_{21}=\frac{11}{15}$, $x_{31}=\frac{2}{5}$

Οι πιθανότητες απορρόφησης στην κλάση $C_2=\{4\}$ είναι

$$x_{12}=1-x_{11}=1/5\ ,\quad x_{22}=1-x_{21}=\frac{4}{15}\ ,\quad x_{32}=1-x_{31}=\frac{3}{5}$$

Τώρα τα ζητούμενα όρια υπολογίζονται ως εξής:

$$\lim_{n\to\infty} p_{25}^{(n)} = x_{21}\cdot\pi_5 = \frac{11}{15}\cdot\frac{2}{3}=\frac{22}{45}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{35}^{(n)} = x_{31}\cdot\pi_5 = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$$

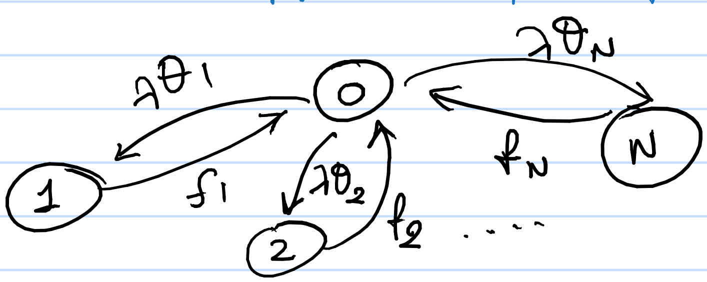
$$\lim_{n\to\infty} p_{14}^{(n)} = x_{12}\cdot\pi_4 = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{31}^{(n)} = 0$$ (αφού η 1 είναι παροδική)

ΘΕΜΑ 4 Η κατάσταση του ταξί προσδιορίζεται από το αν είναι ελεύθερο ή, αν είναι κατειλημμένο, από την κατηγορία επιβάτη που μεταφέρει. Επομένως ορίζουμε την κατάσταση

$$X(t)=\begin{cases}0\ , & \text{ελεύθερο}\\ i\ , & \text{πελάτης κατηγορίας } i\ ,\ i=1,\dots,N\end{cases}$$

Η $\{X(t),t\geq 0\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με διάγραμμα ρυθμών μετάβασης



Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και πεπερασμένη, επομένως θετικά επαναληπτική, και έχει οριακή κατανομή.

Οι εξισώσεις ισορροπίας στις καταστάσεις 1,2,..,N είναι

$$\left.\begin{aligned} p_1 f_1 &= p_0 \lambda \theta_1 \\ p_2 f_2 &= p_0 \lambda \theta_2 \\ &\vdots \\ p_N f_N &= p_0 \lambda \theta_N \end{aligned}\right\} \Rightarrow p_i = \lambda \theta_i / f_i \quad , i = 1, \dots, N$$

Από την εξίσωση κανονικοποίησης παίρνουμε

$$\sum_{i=0}^{N} p_i = 1 \Rightarrow p_i \left(1 + \sum_{i=1}^{N} \lambda \theta_i / f_i\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_0 = \frac{1}{1 + \lambda \sum_i \theta_i / f_i} , \quad p_i = \frac{\lambda \theta_i / f_i}{1 + \theta \sum_i \theta_i / f_i} \quad , i = 1, \dots, N$$

Οι οριακές πιθανότητες ερμηνεύονται και ως ποσοστά χρόνου παραμονής στην αντίστοιχη κατάσταση σε άπειρο ορίζοντα. Επομένως το ποσοστό χρόνου που το ταξί κινείται άδειο είναι ίσο με

$$p_0 = \frac{1}{1 + \lambda \sum_{i=1}^{N} \frac{\theta_i}{f_i}}$$