ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Άλγεβρα

Ενότητα: Πολυωνυμικές σχέσεις - πολυώνυμα μίας μεταβλητής

Ευάγγελος Ράπτης

Τμήμα Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1 Πολυωνυμικές σχέσεις και ταυτότητες, μέρος Ι

1.1 Εισαγωγή

Σκοπός[1] του πρώτου μέρους του μαθήματος αυτού είναι να διερευνήσει διαδικασίες που θα μπορούσαμε να τις ονομάσουμε « *πολυωνυμικές σχέσεις* ». Συνήθως τα ερωτήματα-προβλήματα εμφανίζονται ως εξής :

Από ένα **Σύνολο Υποθέσεων** που διατυπώνονται με πολυώνυμα θέλουμε να καταλήξουμε σε ένα **Σύνολο συμπερασμάτων**, τα οποία επίσης διατυπώνονται με πολυώνυμα.

Πρίν προχωρήσουμε ας δούμε μερικά παραδείγματα :

Παράδειγμα 1.1.1. *Υποθέτουμε ότι τρείς αριθμοί x, y, z ικανοποιούν τις σχέσεις*

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 5 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 7 \end{aligned}$$

Δείξτε ότι :

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 &= 9 \\ x^5 + y^5 + z^5 &\neq 11 \end{aligned}$$

Να υπολογίσετε επίσης τα παρακάτω αθροίσματα :

$$\begin{aligned} &x^5 + y^5 + z^5 \\ &x^6 + y^6 + z^6 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.1.2. *Να εξετάσετε εάν υπάρχει πεπερασμένο σύνολο τριάδων x, y, z με*

$$\begin{aligned} x^7 + y^9 + z^8 &= 1 \\ x^{12} + y^{25} + z^2 &= 1 \\ x^{13} + y^{23} + z^{33} &= 1 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.1.3. *Δίνονται οι πολυωνυμικές σχέσεις $f(x) = 3x^6 + 2x^5 + 2x^4 - x^3 - 8x^2 + 11x - 9, g(x) = x^2 - 4x + 3$*

Προκύπτει η πολυωνυμική σχέση $h(x) = x^4 - 7x^2 + 6$ από τις προηγούμενες ;

Παράδειγμα 1.1.4. *Δίνονται οι παρακάτω πολυωνυμικές «γραμμικές» σχέσεις :*

$$\begin{aligned} x + 2x + 3x &= 0 \\ 4x + 5y + 6z &= 0 \\ 7x + 8y + 9z &= 0 \end{aligned}$$

Προκύπτει από τις σχέσεις αυτές η σχέση $12x + 13y + 18z = 0$;

[1] Το κείμενο αυτό γράφεται και συμπληρώνεται καθημερινά κατά τη διάρκεια του Εαρινού εξαμήνου 2013-14 για τις ανάγκες του μεταπτυχιακού μαθήματος **Άλγεβρα (Τομέας Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών)**

1.2 Στον δρόμο για έναν ορισμό

Τα παραπάνω παραδείγματα μας βάζουν το ερώτημα για έναν ορισμό-οδηγό για την αντιμετώπισή τους.

1. **Πρώτη προσέγγιση:** Θα λέμε ότι το συμπέρασμα

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) = 0$$

(το οποίο είναι ένα πολυώνυμο με ν μεταβλητές) **προκύπτει** από τις υποθέσεις

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_\nu) = 0, f_2(x_1, x_2, ..., x_\nu) = 0, \cdots, f_\mu(x_1, x_2, ..., x_\nu) = 0$$

(τα οποία είναι πολυώνυμα με ν μεταβλητές), εάν οποιαδήποτε ν-άδα $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_\nu)$ που «ικανοποιεί» τα πολυώνυμα

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_\nu) = 0, f_2(x_1, x_2, ..., x_\nu) = 0, \cdots, f_\mu(x_1, x_2, ..., x_\nu) = 0,$$

«ικανοποιεί» και το

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) = 0$$

2. **Δεύτερη προσέγγιση:** Θα λέμε ότι το συμπέρασμα

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) = 0$$

(το οποίο είναι ένα πολυώνυμο με ν μεταβλητές) **προκύπτει** από τις υποθέσεις

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_\nu) = 0, f_2(x_1, x_2, ..., x_\nu) = 0, \cdots, f_\mu(x_1, x_2, ..., x_\nu) = 0$$

(τα οποία είναι πολυώνυμα με ν μεταβλητές), εάν

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) &= h_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \cdot f_1(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \; + \\ &+ \; h_2(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \cdot f_2(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \; + \\ &+ \; \cdots \; + \\ &+ \; h_\mu(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \cdot f_\mu(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) \end{aligned}$$

δηλαδή το «συμπέρασμα» είναι ένας **πολυωνυμικός συνδυασμός** των «υποθέσεων»

1.3 Ασκήσεις και προβληματισμοί

1. «Πειραματισθείτε» με πολυώνυμα μιας ή δύο μεταβλητών για να καταλήξετε σε έναν σωστό ορισμό.
2. Σκεφθείτε έναν τρόπο διδασκαλίας των παραπάνω εννοιών στους μαθητές Γυμνασίων-Λυκείων.

2 Πολυωνυμικές σχέσεις και ταυτότητες, μέρος II

2.1 Τα συστήματα

Οι παραπάνω προβληματισμοί μας οδηγούν να ασχοληθούμε με τις μεθόδους λύσεων συστημάτων **μ εξισώσεων** με **ν αγνώστους** (μεταβλητές) της μορφής

$$\left\{\begin{array}{c} f_1(x_1,x_2,\dots,x_\nu)=0 \\ f_2(x_1,x_2,\dots,x_\nu)=0 \\ \vdots \\ f_\mu(x_1,x_2,\dots,x_\nu)=0 \end{array}\right\} \quad (\Sigma),$$

όπου $f_i(x_1,x_2,\dots,x_\nu)$ είναι πολυώνυμα με **ν αγνώστους** (μεταβλητές) και συντελεστές από το $\mathbb{F}$ (όπου το $\mathbb{F}$ είναι ένα σώμα)[1].

1. Δείτε στο σημείο αυτό της μελέτης σας ένα σχετικό βίντεο. Το βίντεο θα το δείτε κάνοντας κλίκ εδώ.
2. Αν το παραπάνω σύστημα είναι γραμμικό, δηλαδή αποτελείται από γραμμικά πολυώνυμα[2], τότε η Γραμμική Άλγεβρα είναι η κατάλληλη μαθηματική θεωρία για την εύρεση των λύσεων αυτού[3].
3. Αν το παραπάνω σύστημα έχει μόνο μία μεταβλητή και μία μόνο εξίσωση, δηλαδή ν=1 και μ=1, τότε ουσιαστικά έχουμε να βρούμε τις ρίζες ενός πολυωνύμου. Σημειώνεται εδώ ότι μεταξύ άλλων κατάλληλη θεωρία για την μελέτη των ριζών του είναι η **θεωρία Galois**.

Έτσι σχηματικά και για λόγους αναφοράς παρακάτω αυτό που θα μας απασχολήσει είναι το

Πρόβλημα. *Να λυθεί ένα σύστημα **μ πολυωνυμικών εξισώσεων** με **ν μεταβλητές** και συντελεστές από το σώμα* $\mathbb{F}$.

Δύο είναι κυρίως οι μέθοδοι επίλυσης του παραπάνω προβλήματος :

1. Αλγεβρικές, μελέτη δηλαδή της δομής του δακτυλίου πολυωνύμων $\mathbb{F}[x_1,x_2,\dots,x_\nu]$. Εδώ θα συναντήσουμε και θα ασχοληθούμε με τα θεωρήματα **Hilbert**.
2. Γεωμετρικές, μελέτη δηλαδή της δομής του συνόλου λύσεων πολυωνυμικών συστημάτων π.χ μελέτη επιφανειών, γραμμών, σημείων τομής. Υπενθυμίζουμε εδώ ότι το σύνολο λύσεων ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος είναι ένας υπόχωρος. Το τελευταίο είναι ένα αρκετά σημαντικό αποτέλεσμα, διότι μπορούμε έτσι, βρίσκοντας μία βάση να κατανοήσουμε πλήρως τη δομή του συνόλου των λύσεων.

Σκοπός μας επίσης είναι η μελέτη και η κατασκευή αλγορίθμων οι οποίοι θα μας δίνουν τις λύσεις των συστημάτων. Η χρήση των μαθηματικών υπολογιστικών πακέτων γίνεται έτσι αναγκαία.

[1]Συνήθως στα παραδείγματα και στις ασκήσεις θα χρησιμοποιούμε το σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, το σώμα των μιγαδικών $\mathbb{C}$, το σώμα των ρητών $\mathbb{Q}$ και σπανιότερα το σώμα των ακεραίων modp , όπου p ακέραιος πρώτος.

[2]Ένα γραμμικό πολυώνυμο με ν μεταβλητές είναι της μορφής $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_\nu x_\nu+\beta$, όπου $\alpha_i,\beta\in\mathbb{F}$.

[3] Για καλή κατανόηση των θεμάτων που διαπραγματεύεται το βιβλίο αυτό είναι αναγκαίο ο αναγνώστης να έχει αρκετές γνώσεις από την Γραμμική Άλγεβρα.

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης και υπολογιστικά πακέτα κυρίως από το χώρο του ελεύθερου λογισμικού.

Χρήσιμο είναι να εγκαταστήσετε στον υπολογιστή σας το *υπολογιστικό πακέτο* **AXIOM** *σύμφωνα με τις παρακάτω οδηγίες:*

1. Αν το λειτουργικό σύστημα είναι Windows τότε δείτε τις οδηγίες εδώ.
2. Αν το λειτουργικό σύστημα είναι Linux τότε δείτε τις οδηγίες εδώ.
3. Άλλες πληροφορίες σχετικά με υπολογιστικά πακέτα, που χρησιμοποιούνται στο μάθημα θα βρείτε στη σελίδα του Εργαστηρίου Υπολογιστών εδώ.

2.1.1 Υποδείξεις για ερύτερη μελέτη

1. Να μελετήσετε τα αναγραφόμενα για τα πολυώνυμα στην σελίδα εδώ.
2. Να μελετήσετε τα αναγραφόμενα για τις πολυωνυμικές εξισώσεις και τα συστήματα εξισώσεων στη σελίδα εδώ.

2.1.2 Άσκηση

1. Να μελετήσετε και να βρείτε πληροφορίες για το σύνολο λύσεων στο $\mathbb{R}$ του παρακάτω συστήματος

$$\begin{aligned} x^{\alpha+7} + y^{\beta+5} &= 1 \\ x^{\gamma+6} + y^{\alpha+10} &= 1 \end{aligned}$$

   όπου α,β,γ είναι τα τρία τελευταία ψηφία του Αρ. Μητρώου σας, αρχίζοντας από το τέλος.

   Εξετάστε εάν το παραπάνω σύστημα έχει πεπερασμένο ή άπειρο σύνολο λύσεων.

2. Να λυθεί το σύστημα. Να γράψετε επίσης τον τρόπο που προτείνετε να διδαχθεί ένα τέτοιο θέμα

$$\begin{aligned} (\alpha+7)x^3 + 5x^2 + (6+\beta)x + (\gamma+13) &= 0 \\ (\alpha+9)x^7 + 12x^3 + (16+\beta)x + (2\gamma+13) &= 0 \end{aligned}$$

   όπου α,β,γ είναι τα τρία τελευταία ψηφία του Αρ. Μητρώου σας, αρχίζοντας από το τέλος.

3 Πολυώνυμα μίας μεταβλητής, τρίτου βαθμού

3.1 Εξίσωση τρίτου βαθμού

Ας θεωρήσουμε την εξίσωση τρίτου βαθμού:

(3.1.1.1) $$f(x) = \alpha \cdot x^3 + \beta \cdot x^2 + \gamma \cdot x + \delta = 0, \;\; \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \;\; \alpha \neq 0$$

Σκοπός μας είναι να βρούμε τις τιμές (τις ρίζες δηλαδή) που μηδενίζουν το παραπάνω πολυώνυμο και επίσης να βρούμε ιδιότητες αυτών.

1. Αφού το α είναι διαφορετικό από το μηδέν μπορούμε να διαιρέσουμε το $f(x)$ με το α, να βρούμε το $f^\star(x) = \frac{f(x)}{\alpha}$ και να έχουμε την εξίσωση

   (3.1.1.2) $$f^\star(x) = \frac{f(x)}{\alpha} = x^3 + \frac{\beta}{\alpha} \cdot x^2 + \frac{\gamma}{\alpha} \cdot x + \frac{\delta}{\alpha} = 0, \;\; \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \;\; \alpha \neq 0$$

2. Προφανώς οι ρίζες του $f(x)$ είναι ίδιες με τις ρίζες του $f^\star(x)$.
3. Επειδή το πολυώνυμο $f^\star(x)$ είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές, θα υπάρχει τουλάχιστον μία ριζα πραγματική[1]. Επίσης ή θα έχουμε ακόμη δύο ρίζες πραγματικές ή δύο ρίζες συζυγείς μιγαδικές.
4. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι έχουμε να λύσουμε την παρακάτω εξίσωση:

   (3.1.1.3) $$x^3 + Ax^2 + Bx + \Gamma = 0$$

5. Κάνουμε τον μετασχηματισμό

   (3.1.1.4) $$x = t - \frac{A}{3}$$

6. Καταλήγουμε στην εξίσωση:

   (3.1.1.5) $$t^3 + tp + q = 0$$

   με

   (3.1.1.6) $$p = B - \frac{A^2}{3}, \quad q = \Gamma + \frac{2A^3 - 9AB}{27}$$

7. Θέλοντας να λύσουμε την εξίσωση 3.1.1.5 εργαζόμαστε ως εξής:
   Θεωρούμε ξ, ω με

   (3.1.1.7) $$\xi^3 - \omega^3 = q, \quad \xi \cdot \omega = \frac{p}{3}$$

8. Έχουμε τώρα τα εξής:

   (3.1.1.8) $$\xi^3 - \omega^3 = q, \quad (\xi \cdot \omega)^3 = \xi^3 \cdot \omega^3 = \frac{p^3}{27}$$

[1] Να βρείτε μία πειστική εξήγηση για αυτό

9. Οι παραπάνω εξισώσεις μας λένε ότι γνωρίζουμε τη διαφορά $\xi^3 - \omega^3 = q$ και το γινόμενο $\xi^3 \cdot \omega^3 = \frac{p^3}{27}$ δύο ποσοτήτων. Εύκολο είναι να τις βρούμε οδηγούμενοι σε ένα δευτεροβάθμιο τριώνυμο. Βρίσκουμε, λοιπόν, τα παρακάτω:

$$\xi^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},\ \omega^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \tag{3.1.1.9}$$

10. Ας θεωρήσουμε την ταυτότητα:

$$(\omega - \xi)^3 = \omega^3 - 3\omega^2 \cdot \xi + 3\omega \cdot \xi^2 - \xi^3 \Rightarrow (\omega - \xi)^3 = \omega^3 - 3\omega\xi(\omega - \xi) - \xi^3 \tag{3.1.1.10}$$

11. Η τελευταία σχέση γράφεται

$$(\omega - \xi)^3 + (\xi^3 - \omega^3) + 3\omega\xi(\omega - \xi) = 0 \tag{3.1.1.11}$$

Και αντικαθιστώντας τις σχέσεις από 3.1.1.8 έχουμε

12.

$$(\omega - \xi)^3 + q + p(\omega - \xi) = 0 \tag{3.1.1.12}$$

13. Παρατηρούμε από την τελευταία σχέση ότι οι ρίζες που ψάχνουμε είναι της μορφής $\omega - \xi$, αλλά τις τιμές των ω, ξ τις έχουμε ήδη υπολογίσει. Παρατηρούμε επίσης, ότι από τις σχέσεις 3.1.1.9, οδηγούμαστε σε τρείς τιμές για το ξ και τρεις τιμές για το ω. Όμως το πολυώνυμο έχει ακριβώς τρείς ρίζες[2] στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών. Συνεχίζουμε ως εξής:

13. 1. Οι τρείς ρίζες της μονάδας, δηλαδή του πολυωνύμου $x^3 - 1$ στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι οι
$\{z_0 = 1, z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i \cdot \sqrt{3}}{2}, z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i \cdot \sqrt{3}}{2}\}$

13. 2. Από τις σχέσεις 3.1.1.9 έχουμε για το ξ τρεις τιμές τις:
$\xi_0 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},\ \xi_1 = z_1 \cdot \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$
$\xi_2 = z_2 \cdot \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$

13. 3. Επίσης για το ω έχουμε άλλες τρείς τιμές τις:
$\omega_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},\ \omega_1 = z_1 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$
$\omega_2 = z_2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$

13. 4. Οι εξισώσεις 3.1.1.8 μας λένε τελικά ότι οι τρεις ρίζες του πολυωνύμου, που ψάχνουμε είναι:
$\omega_0 - \xi_0,\ \omega_2 - \xi_1,\ \omega_1 - \xi_2$

3.1.2 Σκέψεις για επίλυση ενός συστήματος με δύο εξισώσεις τρίτου βαθμού

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το παρακάτω πρόβλημα:

Πρόβλημα
Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} (\alpha + 7)x^3 + 5x^2 + (6 + \beta)x + (\gamma + 13) &= 0 \\ (\alpha + 9)x^3 + 12x^2 + (16 + \beta)x + (2\gamma + 13) &= 0 \end{aligned}$$

[2] όχι κατ ανάγκη διακεκριμένες

1. Η πρώτη σκέψη μας είναι να βρούμε τις ρίζες και του πρώτου πολυωνύμου και του δεύτερου, σύμφωνα με αυτά που περιγράψαμε παραπάνω και να βρούμε τις κοινές ρίζες. Να κάνετε αυτή τη διαδικασία και σκεφθείτε τις δυσκολίες, οι οποίες είναι μεγάλες (δείτε γιατί).

2. Μία άλλη προσέγγιση πιο καλή είναι αυτή που προκύπτει από την εξής ιδέα:

   Αν έχουμε γενικά να λύσουμε το σύστημα $\{f(x) = 0, g(x) = 0\}$, όπου τα $f(x), g(x)$ είναι πολυώνυμα μίας μεταβλητής, εκτελούμε τον αλγόριθμο της διαίρεσης του $f(x)$ διά του $g(x)$ (ή αντίστροφα ανάλογα με τον βαθμό των πολυωνύμων). Αν,λοιπόν, $f(x) = g(x)\pi(x) + \upsilon(x)$, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι το σύνολο λύσεων του συστήματος $\{f(x) = 0, g(x) = 0\}$ είναι ίσο με το σύνολο λύσεων του συστήματος $\{\upsilon(x) = 0, g(x) = 0\}$. Εδώ σκεφθείτε μία πιθανή γενίκευση και κατασκευή αλγορίθμου.

3. Παρακολουθήστε επίσης το βίντεο εδώ και σκεφθείτε νέες μεθόδους.

3.1.3 Ασκήσεις -Σχετικά θέματα

1. Δείτε στη διεύθυνση εδώ ιστορικές πληροφορίες για πολυωνυμικές εξισώσεις τρίτου βαθμού.

2. Βρείτε πληροφορίες για την **Διακρίνουσα** ενός πολυωνύμου τρίτου βαθμού.

3.1.4 Υποδείξεις για την παραπάνω άσκηση

1. Εδώ έχουμε ένα σύστημα δύο πολυωνυμικών εξισώσεων με πραγματικούς συντελεστές. Το σύστημα αυτό έχει λύσεις, για παράδειγμα $x = 1, y = 0$ είναι μία λύση. Αυτό είναι προφανές και έτσι με την παρατήρηση αυτή δεν χρειάζεται να χάσουμε χρόνο να εξετάσουμε αν το σύνολο λύσεων Λ είναι μη-κενό. Παραμένει όμως το σημαντικό ερώτημα:
   Πότε ένα σύστημα πολυωνυμικών εξισώσεων έχει μή-κενό σύνολο λύσεων;

   Δείτε στην αρχή το σύστημα ποιοτικά. Αν ήταν γραμμικό, τότε θα ήταν γνωστής μορφής και το σύνολο λύσεων θα ήταν εύκολο να περιγραφεί. Σκεφθείτε γιατί.

   Αν ήταν επίσης της μορφής:
   $$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ x^2 - y^2 &= 1 \end{aligned}$$

   θα θέσουμε $x^2 = X, y^2 = Y$ και θα το λύσουμε ως γραμμικό. Η δυσκολία επίλυσης βρίσκεται στους εκθέτες λοιπόν. Προσπαθήστε να ανακαλύψετε δικές σας μεθόδους ή χρησιμοποιείστε και το AXIOM αλλά να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα.

2. Γιατί το σύστημα του ερωτήματος 1 έχει πεπερασμένο σύνολο λύσεων;

   Σκεφθείτε πάνω στο ερώτημα αυτό.

4 Πολυώνυμα τετάρτου και μεγαλυτέρου βαθμού

4.1 Εξίσωση τετάρτου βαθμού

4.1.1 Επίλυση με ριζικά

Θεωρούμε τώρα το πολυώνυμο τετάρτου βαθμού:

$$f(x) = \alpha \cdot x^4 + \beta \cdot x^3 + \gamma \cdot x^2 + \delta \cdot x + \epsilon, \ \ \alpha \neq 0$$

με συντελεστές από το σώμα $\mathbb{F}$[1].

1. Διαιρούμε το $f(x)$ με τον μη-μηδενικό αριθμό α και έχουμε το πολυώνυμο $\frac{1}{\alpha} \cdot f(x)$. Οι τιμές, που μηδενίζουν (οι ρίζες) το $f(x)$ είναι ίδιες που μηδενίζουν το $\frac{1}{\alpha} \cdot f(x)$.

2. Το $\frac{1}{\alpha} \cdot f(x)$ έχει τη μορφή:

$$x^4 + A \cdot x^3 + B \cdot x^2 + \Gamma \cdot x + \Delta$$

3. Κάνουμε το μετασχηματισμό $x = t - \frac{A}{4}$, οπότε το πολυώνυμο παίρνει τη μορφή[2]:

$$t^4 + pt^2 + qt + r$$

4. Γράφουμε τώρα

$$t^4 + pt^2 + qt + r = (t^2 + \kappa t + \lambda) \cdot (t^2 + \mu t + \xi)$$

   και προσπαθούμε να υπολογίσουμε τα $\kappa, \lambda, \mu, \xi$.

5. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \mu + \kappa &= 0 \\ \lambda + \kappa \cdot \mu + \xi &= p \\ \lambda \cdot \mu + \kappa \cdot \xi &= q \\ \lambda \cdot \xi &= r \end{aligned}$$

6. Έχουμε επίσης:

$$\begin{aligned} \lambda + \xi &= p + \kappa^2 \\ \kappa \cdot (\xi - \lambda) &= q \\ \lambda \cdot \xi &= r \end{aligned}$$

7. Θεωρούμε την ταυτότητα:

   (4.1.1.1) $$(\lambda + \xi)^2 - (\xi - \lambda)^2 = 4\lambda\xi$$

   και αντικαθιστώντας στην ταυτότητα αυτή
   $\lambda + \xi = p + \kappa^2, \ \ \xi - \lambda = \frac{q}{\kappa}, \ \ \lambda\xi = r$ έχουμε μία εξίσωση τρίτου βαθμού ως προς κ^2.

8. Όταν λύσουμε την εξίσωση τρίτου βαθμού, με τη βοήθεια του προηγουμένου μαθήματος, ως προς κ^2 βρίσκουμε το κ και μετά τα λ και ξ και μετά τις ρίζες που ψάχνουμε[3].

[1] Θεωρείστε ότι το σώμα των συντελεστών είναι το σώμα των πραγματικών αριθμών.

[2] Διαπιστώστε ότι για κάθε πολυώνυμο $f(x) = x^\nu + \alpha_{\nu-1} \cdot x^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} \cdot x^{\nu-2} + \cdots + \alpha_1 \cdot x + \alpha_0$ ο μετασχηματισμός $x = t - \frac{\alpha_{\nu-1}}{\nu}$ οδηγεί σε ένα πολυώνυμο χωρίς όρο βαθμού $\nu - 1$.

[3] Πρέπει εδώ να κάνουμε την κατάλληλη διερεύνηση, όπως στην εξίσωση τρίτου βαθμού και να απορρίψουμε μερικές ρίζες που εμφανίζονται.

9. Δείτε και τη διεύθυνση Ρίζες εξίσωσης τετάρτου βαθμού εδώ και συγκρίνετε τα ευρήματα τα δικά σας με αυτά που παρουσιάζονται.

4.1.2 Η δυστυχία του να μήν υπάρχει αλγόριθμος!

Όπως είδαμε παραπάνω αν μας δοθεί ένα πολυώνυμο δευτέρου, τρίτου, ή τετάρτου βαθμού, μπορούμε να βρούμε τις ρίζες του.

Πιο αυστηρά μπορούμε να πούμε το παρακάτω:

Θεώρημα 4.1.1. *Έστω $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ βαθμού έως 4. Τότε υπάρχει αλγόριθμος, ο οποίος έχει ως είσοδο το πολυώνυμο (στην πραγματικότητα τους συντελεστές του) και ως έξοδο τις τιμές που το μηδενίζουν (ρίζες του). Οι ρίζες αυτές περιγράφονται χρησιμοποιώντας τις 4 πράξεις του σώματος (πρόσθεση,αφαίρεση,πολλαπλασιασμό, διαίρεση) και εξαγωγή ρίζας.*

1. Υπενθυμίζουμε ότι η έννοια του αλγορίθμου συναντιέται σχεδόν σε όλους τους επιστημονικούς κλάδους και είναι μία μάθηματική έννοια. Να διαβάσετε οπωσδήποτε το άρθρο εδώ.

2. Ο Galois απέδειξε ότι **δεν υπάρχει αλγόριθμος,** ο οποίος να έχει ως είσοδο ένα οποιοδήποτε[4] πολυώνυμο βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου με 5 και ως έξοδο περιγραφή των ριζών με τη βοήθεια των 4 πράξεων του σώματος των συντελεστών και εξαγωγή ρίζας.

3. Η απόδειξη[5] του Galois στηρίζεται στην πρωτοποριακή (για την εποχή της) μαθηματική σύλληψη ότι κάθε πολυώνυμο (όπως και κάθε μαθηματικό αντικείμενο) χαρακτηρίζεται από τις « συμμετρίες του», τις «αρμονίες του». Αυτές οι « συμμετρίες» αποτελούν μία ομάδα. Η ομάδα που επισυνάπτεται κατά φυσιολογικό τρόπο στο πολυώνυμο $f(x)$ και το χαρακτηρίζει λέγεται **ομάδα Galois** του πολυωνύμου και συμβολίζεται $G(f)$.

4. Μία ομάδα Γ λέγεται **επιλύσιμη** εάν υπάρχει πεπερασμένη ακολουθία υποομάδων

$$\Gamma_0 = \{e\}, \Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_\nu = \Gamma$$

έτσι ώστε $\Gamma_i \lhd \Gamma_{i+1}$, και κάθε ομάδα-πηλίκο Γ_{i+1}/Γ_i είναι αβελιανή ομάδα. Με λόγια μία ομάδα είναι επιλύσιμη εάν υπάρχει «σκάλα» που φθάνουμε από την τετριμμένη υποομάδα στην αρχική ομάδα, τα « σκαλοπάτια» είναι υποομάδες, κάθε υποομάδα είναι κανονική υποομάδα της επόμενης και η ομάδα-πηλίκο είναι αβελιανή ομάδα. Δείτε περισσότερα για τις επιλύσιμες ομάδες εδώ.

5. Κατά κάποιον τρόπο μία ομάδα Γ είναι επιλύσιμη εάν «χτίζεται» από τα «θεμέλια», δηλαδή την τετριμμένη υποομάδα έως την «οροφή», δηλαδή την ίδια την ομάδα Γ και τα «υλικά» είναι αβελιανές ομάδες. Για να «σταθεί» καλά το «οικοδόμημα» πρέπει κάθε υποομάδα από τις $\Gamma_0 = \{e\}, \Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_\nu = \Gamma$ να είναι κανονική στην επόμενη και η ομάδα-πηλίκο να είναι αβελιανή.

6. Ο Galois, λοιπόν απέδειξε ότι ένα πολυώνυμο $f(x)$ λύνεται με ριζικά (όπως παραπάνω) **εάν και μόνο εάν** η ομάδα Galois $G(f)$ είναι επιλύσιμη.

7. Θα αναρωτηθεί βέβαια κανείς σε τι βοηθάει αυτή η μετάφραση του προβλήματος. Αυτό που αποδεικνύει κανείς είναι ότι η ομάδα Galois του πολυωνύμου $G(f)$ είναι πεπερασμένη και μάλιστα ισόμορφη με μία υποομάδα της ομάδας μεταθέσεων S_ν , όπου ν είναι ο βαθμός του πολυωνύμου.

[4] **Προσοχή:** Το θεώρημα αυτό αναφέρεται σε όλα τα πολυώνυμα. Υπάρχουν όμως και πολυώνυμα βαθμού 5 ή παραπάνω που οι ρίζες τους εκφράζονται με ριζικά π.χ. $f(x) = x^5 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$

[5] Συστήνω ανεπιφύλακτα και με θέρμη να εγγραφείτε στο μάθημα **Θεωρία Galois** που διδάσκεται στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών

Αφού κάθε ομάδα Galois είναι πεπερασμένη, μπορούμε να εξετάσουμε σχετικά εύκολα αν είναι επιλύσιμη. Επίσης μπορούμε να αποδείξουμε ότι κάθε υποομάδα της S_3 και της S_4 είναι επιλύσιμη. Όμως η S_5 δεν είναι επιλύσιμη. Επισημαίνουμε ότι ο δείκτης στην ομάδα S_ν σχετίζεται με τον βαθμό του πολυωνύμου.

8. Σύμφωνα με τα παραπάνω δεν υπάρχει αλγόριθμος που να δίνει τις ρίζες ενός πολυωνύμου χρησιμοποιώντας ριζικά. Δείτε το 2 για πιο αυστηρή διατύπωση. Δείτε επίσης το άρθρο εδώ σχετικά με τη θεωρία Galois.

4.1.3 Πάντα υπάρχει ελπίδα!

1. Ας θεωρήσουμε το πολυώνυμο $f(x) = x^5 - 9x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$. Με τη βοήθεια παραγώγων μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η παραπάνω συνάρτηση έχει τρεις ρίζες πραγματικές. Οι άλλες δύο θα είναι συζυγείς -μιγαδικές.

2. Δες επίσης και στη διεύθυνση εδώ. Να βάλετε στην κατάλληλη θέση ξανά το πολυώνυμο $x^5 - 9x + 3$ και δείτε τι θα σας επιστρέψει.

3. Από τις παραπάνω πληροφορίες μπορούμε να βρούμε ότι η ομάδα Galois του $f(x)$ είναι η S_5. Η ομάδα αυτή **δεν** είναι επιλύσιμη διότι περιέχει ως υποομάδα την A_5. Δες πληροφορίες εδώ. Το συμπέρασμα είναι ότι δεν υπάρχει ελπίδα να βρούμε τύπο για τις ρίζες του $f(x)$ όπως έχουμε βρει για τα πολυώνυμα τρίτου και τετάρτου βαθμού.

4. Όμως υπάρχει ο κλάδος των Μαθηματικών Αριθμητική ανάλυση[6] ο οποίος δίνει αλγορίθμους για εύρεση προσεγγίσεων των ριζών. Δες εδώ για περισσότερες πληροφορίες.

5. Βρείτε επίσης από το AXIOM τις ρίζες του πολυωνύμου $f(x)$. Τι παρατηρείτε;

6. Προσπάθειες επίσης για εύρεση αλγορίθμων έχουν γίνει πρόσφατα και από τον συνάδελφο Ηλία Τσιγαρίδα εδώ.

7. Το συμπέρασμα είναι ότι παρακάμπτοντας την δυσκολία της μη-ύπαρξης αλγορίθμων για εύρεση ριζών πολυωνύμων βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 5 (ως αποτέλεσμα της θεωρίας Galois) κατασκευάζουμε άλλους αλγορίθμους που βρίσκουν με προσεγγίσεις τις ρίζες.

4.2 Ομάδα Galois ενός πολυωνύμου

Αρχίζουμε με ένα παράδειγμα. Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(x) = x^4 - 8x^2 + 15 \in \mathbb{Q}[x]$. Το σώμα των συντελεστών είναι το σώμα των ρητών αριθμών.

Το ελάχιστο σώμα (υπόσωμα των μιγαδικών) που περιέχει τους ρητούς και τις ρίζες του $f(x)$ είναι το σώμα $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$. Η **ομάδα Galois** του $f(x)$ είναι το σύνολο των αυτομορφισμών του $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$

[6] Συστήνω ανεπιφύλακτα και με θέρμη να εγγραφείτε στο μάθημα Αριθμητική ανάλυση που διδάσκεται στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών.

4.3 Σχετικά με τους κοινούς παράγοντες

Θα ασχοληθούμε τώρα με το παρακάτω ερώτημα:

Άσκηση 4.3.1. *Δίνονται τα πολυώνυμα μία μεταβλητής:*

$$g(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0 \ , \ \ \nu > 0$$
$$h(x) = \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1}x^{\mu-1} + \cdots + \beta_0 \ , \ \ \mu > 0$$

Έχουν τα πολυώνυμα $g(x), h(x)$ κοινό παράγντα;

4.4 Η μέθοδος με το Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη

Μία πρώτη απάντηση στο παραπάνω ερώτημα είναι η εύρεση του Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη $d(x) = MK\Delta(g(x), h(x))$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

1. Υπολογίζουμε το Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη $d(x)$ με τον αλγόριθμο του Ευκλείδη ή με οποιαδήποτε άλλη μέθοδο.
2. Έχουμε $g(x) = d(x) \cdot \kappa(x)$ και $h(x) = d(x) \cdot \lambda(x)$, με $MK\Delta(\kappa(x), \lambda(x)) = 1$.
3. Αν $\gamma(x)$ κάποιος κοινός παράγοντας των $g(x), h(x)$, τότε το πολυώνυμο $\gamma(x)$, θα δαιρεί τον ΜΚΔ $d(x)$.

4.5 Η ορίζουσα του Sylvester

Λήμμα 4.5.1. *Τα πολυώνυμα $g(x), h(x)$ έχουν κοινό παράγοντα εάν και μόνο εάν υπάρχουν πολυώνυμα $A(x)$ και $B(x)$ έτσι ώστε:*

1. *Τα $A(x)$ και $B(x)$ δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν*
2. *Το $A(x)$ έχει βαθμό το πολύ $\mu - 1$ και το $B(x)$ βαθμό το πολύ $\nu - 1$*
3. $A(x)g(x) - B(x)h(x) = 0$

Ορισμός 4.5.2. *Ο πίνακας Sylvester δύο πολυωνύμων $g(x), h(x)$ ορίζεται όπως φαίνεται στη διεύθυνση εδώ και συμβολίζεται $Syl(g, h, x)$. Η ορίζουσα του πίνακα αυτού ονομάζεται* **απαλοίφουσα** *των δύο πολυωνύμων και συμβολίζεται $Res(g, h, x)$.*

Θεώρημα 4.5.3. *Τα πολυώνυμα $g(x), h(x)$, έχουν κοινό παράγοντα εάν και μόνο εάν $Res(g, h, x) = 0$*

4.5.1 Άσκηση

1. Να θεωρήσετε το πολυώνυμο $f(x) = (\alpha + 7)x^3 + (\beta + 3)x^2 + (\gamma + 4)x + 2 \in \mathbb{R}[x]$ και να βρείτε τις τρείς ρίζες του πολυωνύμου αυτού με ριζικά. Δείτε επίσης τι θα σας απαντήσει κάποιο υπολογιστικό πακέτο στο ερώτημα αυτό.

2. Να θεωρήσετε το πολυώνυμο $g(x) = x^4 + (\alpha + 1)x^3 + (\beta + 8)x^2 + (\gamma + 1)x + 2 \in \mathbb{R}[x]$ και να περιγράψετε τις 4 ρίζες του με ριζικά. Δείτε επίσης τι θα σας απαντήσει κάποιο υπολογιστικό πακέτο στο ερώτημα αυτό.

3. Να κάνετε μία απόδειξη του λήμματος 4.5.1.

4. Να κάνετε μία απόδειξη του θεωρήματος 4.5.3.

5. Να εφαρμόσετε τη μέθοδο του Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη και τη μέθοδο του Sylvester στα πολυώνυμα $f(x), g(x)$ για να διαπιστώσετε αν έχουν κοινό παράγοντα.