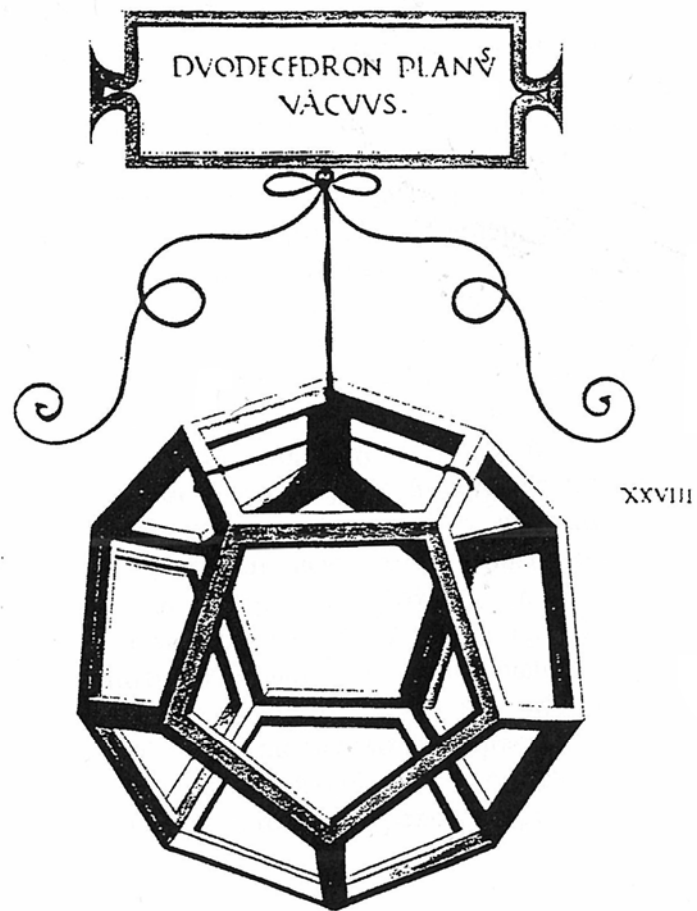


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Παναγιώτη Σπύρου



Δοδεκάεδρον ἑξάεδρον ἑξάεδρον

ΑΘΗΝΑ 2009

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	
Αντί Προλόγου ...	3
ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΑ - ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑ	
1. 1 Εισαγωγή.....	5
1. 2 Τα νέα Μέσα και οι επιπτώσεις	7
1. 3 Μάθηση και συγκινησιακοί παράγοντες	10
1. 4 Μετατόπιση του Γνωσιακού αιτήματος	15
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	
Η ΘΕΩΡΙΑ ΓΝΩΣΗΣ ΜΕΧΡΙ ΤΗΝ ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΗ	
2. 1 Θεωρία Γνώσης στους αρχαίους - αντιλήψεις για την αφαίρεση.....	17
2. 2 Ο Πλάτων	20
2. 3 Το αίτημα 'φιλοκαλούμεν με ετευτελείας' και η Χρυσή Τομή.....	23
2. 4 Ο Αριστοτέλης	35
2. 5 Ο πρώιμος Μεσαίωνας	37
2. 6 Η είσοδος του Αριστοτέλη - Ακμή του Σχολαστικισμού.....	42
2. 7 Η έξοδος από τον Μεσαίωνα.....	43
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	
Η ΘΕΩΡΙΑ ΓΝΩΣΗΣ ΤΩΝ ΝΕΟΤΕΡΩΝ ΧΡΟΝΩΝ	
3. 1 Ο Descartes.....	49
3. 2 Ο αγγλικός εμπειρισμός	51
3. 3 Ο Kant	61
3. 4 Τα Μαθηματικά πριν και μετά τον Kant	73
3. 5 Τα Μαθηματικά του 19 ^{ου} αιώνα	76
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4	
ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΕΣ ΤΟΥ 20ου ΑΙΩΝΑ	
4.1 Από τον Frege	83
4.2 Στον Russell	87
4.3 Ο λογικός εμπειρισμός.....	89
4. 4 Η ένσταση του Brouwer στον λογικισμό	97
4. 5 Το περατοκρατικό πρόγραμμα του Hilbert	98
4. 6 Ο φορμαλισμός των Bourbaki.....	101
4.7 Ο Πραγματισμός: Έναρξη του μεταμοντέρνου και των διαψευδικών θεωριών.....	103
4.9 Η Φαινομενολογία	105
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5	
ΠΛΑΙΣΙΟ ΑΝΑΚΑΛΥΨΗΣ I	

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΑ

5.1 Οι Διαψευστικές Θεωρίες	113
5.2 Thomas Kuhn	116
5.3 Imre Lakatos	118

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΠΛΑΙΣΙΟ ΑΝΑΚΑΛΥΨΗΣ II

ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ

6.1 Συμπεριφορισμός.....	119
6.2 Κατασκευαστικές Θεωρίες – Piaget- Γενετική επιστημολογία.....	120
6.4 L.S. Vygotsky.....	124
6.5 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΔΜ Θεωρίες για την Ψυχολογία των Μαθηματικών	129
6.7 Ενσώματα Μαθηματικά.....	147
6.8 Εφαρμογή της έννοιας του επιστημολογικού εμποδίου στη ΔΜ.....	153

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Σημειολογία του Pierce.....	186
Πίνακας επιστημολογιών για την Διδακτική των Μαθηματικών της Sierpinski	205
Πίνακες Διαψευστικών Θεωριών	206
Εφαρμογή της επιστημολογίας στο σχεδιασμό του αναλυτικού προγράμματος Πίνακας της M. Artigue	210
Από την Ιστορία της Καμπύλης και οι Τομές Dedekind.....	211
Η σύγκλιση κονστρουκτιβισμού και πλατωνισμού στον Husserl και η Διδακτική των Μαθηματικών	246

Οι σημειώσεις αυτές αποτελούν την εφικτή επικοινωνία πέρα του προφορικού μαθήματος με τους φοιτητές. Τα υλικά προέρχονται από διαφορετικούς δρόμους και συχνά έχουν βοηθήσει και άλλοι. Αναφέρω τα μετά την 152 σελίδα ανήκουν στον υποψήφιο διδάκτορα Γιώργο Κοσπεντάρη. Η Χρυσή τομή είναι υλικά του Κώστα Γαβρά. Πολλά ζητήματα είναι αποτέλεσμα ζητήσεων με τον καθηγητή Μαθηματικής Λογικής και Φιλοσοφίας και παιδικό φίλο μου Μιχάλη Μυτιληναίο που χάθηκε πρόωρα και στην μνήμη του οποίου αφιερώνω το παρόν.

11 Μαρτίου 2009
Παναγιώτης Σπύρου

Απρίλιο του 1910 θεώρησα αναγκαίο να συμπληρώσω υλικά κυρίως από Σημειωτική¹ και την Ιστορία της τοπολογικής ιδέας του Συνεχούς. Για τεχνικούς λόγους τοποθέτησα αυτό το υλικό σε Παράρτημα στο Τέλος.

¹ Η επεξεργασία έγινε από τους μεταπτυχιακούς Παναγιώτη Μαραγκό και Κώστα Καραντζούλη που τους ευχαριστώ. Το υλικό της Ιστορίας της καμπύλης είχε συμβάλει και ο συνάδελφος Δ. Λάππας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Αντί προλόγου

Τα επιστημολογικά ερωτήματα των Μαθηματικών εμφανίζονται σημαντικά για το δάσκαλο του αντικειμένου, καθόσον είναι αυτά που καθορίζουν την στάση του απέναντι σε ένα σύνολο ζητημάτων που αφορούν στην διδακτική πρακτική. Η συζήτηση, πάνω στα θεμέλια της επιστημονικής γνώσης και τα όρια του υποκειμένου, τον βοηθά να αυξήσει την ωριμότητα και τις ευαισθησίες του ώστε να σταθεί με ένα αναστοχαστικό και μεταγνωστικό βλέμμα προς την ίδια την καθημερινή του προσπάθεια. Θεωρείται ως απαραίτητο, όχι μόνο να μπορεί να διδάξει ένα αντικείμενο, αλλά να κρίνει το αξιολογικό πλαίσιο μέσα στο οποίο εντάσσεται κάθε φορά αυτή του η ενέργεια και να διαβάσει κριτικά παιδαγωγικές, φιλοσοφικές και ψυχολογικές θεωρίες, οι οποίες συνοδεύουν τις εκπαιδευτικές προτάσεις, έτσι ώστε να ανταποκρίνεται εποικοδομητικά σε αυτές.

Η Επιστημολογία εισάγεται ως μια Θεωρία Γνώσης με τα κλασσικά ερωτήματα της εγκυρότητας, προέλευσης και της δυνατότητας της επιστημονικής γνώσης. Τα ερωτήματα αυτά μεταπλάθονται μέσα σε διαφορετικές γλώσσες και κώδικες στη διάρκεια όλης της ιστορίας της φιλοσοφίας. Για τον Piaget, η επιστημολογία των μαθηματικών έχει να αντιμετωπίσει τρία προβλήματα:

- 1) Γιατί τα μαθηματικά είναι τόσο αποδοτικά παρόλο που στηρίζονται σε ελάχιστες και σχετικά φτωχές έννοιες ή αξιώματα;
- 2) Γιατί έχουν αναγκαίο (και καθολικό) χαρακτήρα, και παραμένουν σταθερά αυστηρά σε αντίθεση με τον κατασκευαστικό τους χαρακτήρα που μπορεί να αποτελέσει και πηγή ανωμαλιών;
- 3) Γιατί συμφωνούν τόσο πολύ με πείρα μας ή την φυσική πραγματικότητα σε αντίθεση με τον απόλυτο παραγωγικό τους χαρακτήρα;

Συγκεκριμένα, διακρίνουμε:

- 1) **Πλαίσιο δικαιολόγησης** που αφορά στη *Σημασιολογία – Αλήθεια*. Οι επιστήμονες και οι φιλόσοφοι ενδιαφέρονται για την αλήθεια² από την αρχαιότητα. Ενδιαφέρονται για το τι είναι αλήθεια, ποια πράγματα είναι αυτά που είναι αληθή, τι σημαίνει για κάποιο από αυτά τα πράγματα να είναι αληθές, και πώς το να είναι αληθές συνδέεται με τη γνώση ή τη σκέψη ότι είναι αληθές. Υπάρχουν λόγοι που οι άνθρωποι θεωρούν ότι η έννοια της αλήθειας είναι ενδιαφέρουσα.

Πρώτο, γιατί συχνά ενδιαφέρονται για κανόνες σωστής συμπερασματολογίας, δηλαδή για λογική και η έννοια της αλήθειας φαίνεται ότι παίζει σπουδαίο ρόλο σ' αυτό το πλαίσιο. Για παράδειγμα ένα έγκυρο επιχείρημα είναι ένα επιχείρημα που διατηρεί την αλήθεια, δηλαδή το συμπέρασμα του οποίου πρέπει να είναι αληθές αν οι υποθέσεις είναι αληθείς.

² Αλήθεια προκύπτει ως A- λήθεια δηλαδή άρνηση της λήθης, δηλαδή αυτό που δεν πρέπει να ξεχαστεί..

Η έννοια της εγκυρότητας ενός ‘κανόνα συμπερασμού’ φαίνεται να είναι στενά συνδεδεμένη με την έννοια της αλήθειας.

Δεύτερο, τη φιλοσοφία την αφορά η αναπαράσταση, η ικανότητά μας να σκεπτόμαστε ή να κάνουμε υποθέσεις για τον κόσμο. Μια θεμελιώδης ιδιότητα των αναπαραστάσεων φαίνεται ότι είναι, να μπορούν να είναι σωστές ή λανθασμένες, αληθείς ή ψευδείς. Με κάποια έννοια ο πρωταρχικός στόχος (αν όχι και μοναδικός) της σκέψης είναι η απόκτηση αληθών πεποιθήσεων. Η σκέψη αποδέχεται ως αλήθεια, ότι οι έγκυρες αναφορές είναι οι καλές αναφορές. Ερωτήματα για την αλήθεια φαίνεται ότι αντιστοιχούν σε ερωτήματα για την αναπαράσταση ή το νόημα. Τέλος, κάτι για να είναι αληθές πρέπει να είμαστε σε θέση να γνωρίσουμε ότι είναι αληθές.

2) Πλαίσιο ανακάλυψης αφορά σε δυο επιμέρους πλαίσια όχι πάντα διαχωρισμένα: Το ένα είναι το *πλαίσιο της ιστορικής γέννησης και ανάπτυξης των επιστημονικών εννοιών*, δηλαδή το *πλαίσιο της ιστορικής επιστημολογίας* και της ιδέας των *ιστορικών μετατοπίσεων των θεωριών* ή ακόμη το *πλαίσιο μιας κοινωνιολογίας της γνώσης*. Το άλλο είναι το *πλαίσιο της ανάδειξης της γνώσης στο εκάστοτε υποκείμενο*, συνθήκη που εμπλέκει ζητήματα τόσο γνωσιακά όσο και επικοινωνιακά, και αφορούν τόσο το επιμέρους υποκείμενο με τους επιστημολογικούς και ψυχολογικούς καθορισμούς του όσο και τις διυποκειμενικές του παραμέτρους που περιγράφονται με εργαλεία κοινωνικής ψυχολογίας.

ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑ

1.1 Εισαγωγή

Η Θεωρία της Γνώσης είναι κλάδος της φιλοσοφίας που μελετά την *δυνατότητα*, την *προέλευση*³ και την *εγκυρότητα* της Γνώσης. Πολλοί συγγραφείς θεωρούν την Επιστημολογία ταυτόσημη με την Θεωρία Γνώσης⁴. Στο βαθμό που η ιδέα της Γνώσης μπορεί να αφορά ζητήματα θεολογικά, όπως από πού προέρχεται η γνώση μου για το Θεό, αν είναι έμφυτη, αν είναι μια ιστορική και κοινωνιολογική κατασκευή ή αν επιβάλλεται από κάποια εξουσία μέσα από το αίσθημα του φόβου ή ακόμη αν είναι παρηγοριά στο φόβο του θανάτου. Ερωτήματα τέτοιου τύπου έχουν μπει στην ιστορία από φιλόσοφους και κοινωνιολόγους και εν γένει στοχαστές με διαφορετικούς προσανατολισμούς και απαντήσεις. Επίσης, το ίδιο μπορεί να έχουμε ερωτήματα του πόθεν προέρχονται οι ηθικοί μου νόμοι. Στο 'έγκλημα και τιμωρία' ο Ντοστογιέφσκι μπαίνει κατά ένα μοναδικό τρόπο σε μια τέτοια προβληματική. Στην εν γένει θεωρία γνώσης μπορεί να μας προβληματίσει πάλι η προέλευση του Ωραίου ως κοινωνικής κατασκευής, ως έμφυτης προδιάθεσης κ.α. Σε συμφωνία με όλα τα προηγούμενα η Επιστημολογία αποτελεί μια ειδική Θεωρία Γνώσης που αφορά στα αντικείμενα της επιστήμης αποκλειστικά⁵. Υπάρχει λοιπόν και ως 'Φιλοσοφία των επιστημών, δηλαδή κριτική εξέταση των αρχών, των ορίων του υποκειμένου, καθώς και των αμοιβαίων σχέσεων των διαφόρων επιστημών'⁶. Ακόμη εμφανίζεται ως η μελέτη των ορίων φιλοσοφίας και επιστήμης⁷. Θέσεις και απόψεις της επιστημολογίας εξειδικεύονται στις θεωρίες της μάθησης. Έτσι, η Επιστημολογία έρχεται να αποτελέσει τον συνδετικό κρίκο μεταξύ της φιλοσοφίας, της κοινωνικής ψυχολογίας, της ψυχολογίας της μάθησης, της ιστορίας της γνώσης και των συνθηκών μαθησιακής πρακτικής.

Η φιλοσοφία αντιμετωπίζει απευθείας την Οντολογία των Μαθηματικών δηλαδή: Τί είναι τα μαθηματικά, και πώς θεωρούμε την φύση τους; Ποια φιλοσοφία μαθηματικών αναπτύχθηκε; Από ποιον; Ενώ, τα ζητήματα της Θεωρίας της Γνώσης αγγίζουν πιο πολύ αυτό που θα λέγαμε 'Οντολογία' της ίδιας της Γνώσης, δηλαδή το τι είναι Γνώση. Μια διερεύνηση των παραπάνω ερωτημάτων κρίνεται απαραίτητη. Αλλά ποια θα είναι τα πλαίσια της επιστημολογίας με την οποία θα εργαστούμε; Πρέπει ν'αναζητήσουμε τις συνθήκες που επέτρεψαν την παραγωγή της επιστημονικής γνώσης και να εξηγήσουμε την επεξεργασία των νοητικών εργαλείων που επιτρέπουν στον άνθρωπο να καταλάβει και να επιβληθεί στην φύση. Αυτά τα νοητικά εργαλεία είναι η γλώσσα, η συμβολική σκέψη (χάρτες, σχήματα,

³ Δηλαδή από πού προέρχεται η έγκυρη γνώση, (από τις αισθήσεις, τον κόσμο των ιδεών, την λογική;) και αν η γνώση είναι δυνατή ή πώς αυτή γίνεται δυνατή.

⁴ Θ. Βορέα, Εισαγωγή στη Φιλοσοφία, Αθήνα 1956, σελ. 55 και Ε. Παπαδημητρίου, Θεωρία της Επιστήμης και Ιστορία της Φιλοσοφίας, εκδ. Gutenberg, σελ 29. Everit N. 'Modern Epistemology' A New Introduction, McGraw-Hill, New York 1995.

⁵ Τον ορισμό αυτό μου πρότεινε ο ακαδημαϊκός Κ. Δεσποτόπουλος το 1997.

⁶ Χρ. Ανδρουτσου, Λεξικόν Φιλοσοφίας, Θεσσαλονίκη 1965.

⁷ Josef Gabel, Η Ψευδής Συνείδηση, εκδόσεις Ακμων, μετ. 1978, σελ 292.

διαγράμματα), η τυπική σκέψη (τύποι, υπολογισμοί), η υποθετική και πειραματική μέθοδος, πάντα σε σχέση με την εξέλιξη των τεχνικών και των τεχνολογιών⁸. Ο ορισμός θυμίζει την εκδοχή του W. V. Quine που λέει, *επιστημολογία για μένα είναι η μελέτη τού πώς εμείς τα ζώα καταφέρνουμε να κατασκευάσουμε αυτήν εδώ την επιστήμη δεδομένου ότι έχουμε τόσο λίγα στοιχεία στην διάθεσή μας*⁹.

Ο R. Carnap, κύριος εκπρόσωπος του λογικού εμπειρισμού που καλλιεργήθηκε από τον κύκλο της Βιέννης, θέλει την επιστημολογία οροθετημένη μέσα σε πιο αυστηρά πλαίσια και λέει:

*Η Επιστημολογία ή η Θεωρία Γνώσης περιλαμβάνει και ψυχολογικά και λογικά προβλήματα. Τα ψυχολογικά προβλήματα εδώ αφορούν τη διαδικασία της γνώσης, δηλαδή τα πνευματικά γεγονότα χάρη στα οποία κατορθώνουμε να μάθουμε κάτι. Αν αφήσουμε τον ψυχολόγο να δώσει απάντηση στα προβλήματα αυτά με την εμπειρική του έρευνα, απομένει η λογική ανάλυση της γνώσης, ή κριβέστερα, η λογική ανάλυση του ελέγχου και της επαλήθευσης των προτάσεων, επειδή η γνώση συνίσταται από θετικά επαληθεύσιμες προτάσεις.*¹⁰

Ωστόσο, μια τέτοια αντίληψη για την επιστημολογία παραβλέπει πολλές όψεις του προβλήματος, όπως εκείνης της ιστορικότητας της γνώσης, όπως αυτή εκφράστηκε με τις ιστορικές μεταβλητές της επιστημολογίας από τον T. Kuhn ή τον I. Lakatos. Για τις θεωρήσεις αυτές θα αναφερθούμε παρακάτω, αλλά ωστόσο και μια τέτοια συμπλήρωση του επιστημολογικού πλαισίου δεν είναι ικανοποιητική για να μας δια φωτίσει για τους όρους γένεσης και λειτουργίας της γνώσης.

Ο τρόπος που χειρίζονται την ιστορικότητα οι τελευταίοι φιλόσοφοι στοχεύει περισσότερο στην περιγραφή της αλλαγής της ερευνητικής μεθόδου και στην *ιστορικότητα του αντικειμένου της γνώσης*, αφού αγνοεί τον άλλο βασικό συντελεστή της γνώσης που είναι η *ιστορικότητα του υποκειμένου της γνώσης*. Το *υποκείμενο που γνωρίζει* δεν είναι το ίδιο την κάθε ιστορική στιγμή, έτσι ώστε να το απομονώσουμε "φυσικαλιστικά" και να περιγράψουμε την διεργασία του "μανθάνειν" ως μηχανικού, αντικειμενικού γεγονότος. Το υποκείμενο συγκροτείται μέσα σε μεταλλασσόμενους κοινωνικούς, αξιολογικούς και επικοινωνιακούς όρους που του καθορίζουν γλώσσες, κώδικες, γνωσιολογικές κατηγορίες, επικοινωνιακές λειτουργίες, μέσα στις οποίες ενεργεί, καθορίζει και αυτοκαθορίζεται.

Το κενό αυτό έρχονται να συμπληρώσουν άλλες θεωρήσεις που αφορούν στην *κοινωνιολογία της γνώσης*, όπως αυτή εκφράστηκε από τον E. Durheim, Levi Straus, τις μαρξίζουσες επιστημολογίες με την μελέτη των κατηγοριών της σκέψης, όπως αυτές διαμορφώθηκαν κατά την ανθρωπολογική εξέλιξη μέσα από τις συμπεριφορές που λειτούργησαν κατά την ανάπτυξη της οργάνωσης των κοινωνιών. Επίσης, η συμβολή τόσο της νευρολογίας όσο και της ψυχιατρικής μας είναι πολύ χρήσιμες για να καταλάβουμε ένα πλήθος λειτουργίες του ανθρώπινου νου. Σε τελευταία ανάλυση είναι χρήσιμες όλες εκείνες οι επιστήμες που μας περιέγραψαν τους όρους και τις τεχνικές επικοινωνίας που ανέδειξε ο άνθρωπος μέσα στις οποίες όχι μόνο έλυνε τα

⁸ G. Glaeser, Epistémologie et Didactique, Univ. Louis Pasteur, Strasbourg, 1979.

⁹ W. V. Quine, Φιλοσοφία της Λογικής, Μεταφ. Γ. Ρουσόπουλος, εκδ. Ζαχαρόπουλος, σελ. 30

¹⁰ R. Carnap, Φιλοσοφία και λογική σύνταξη, εκδ. Εγνατία, 1976, σελ 111.

προβλήματα του αλλά επαναπροσδιόριζε την διαλεκτική σχέση του ατομικού και του συλλογικού. Τα μέσα που κάθε φορά είχε στην διάθεσή του για να εξασφαλίσει την επικοινωνία του είχαν αποφασιστική επίδραση στην ίδια την συγκρότησή του ως ανθρώπου και γινόταν ο κεντρικός άξονας ανάπτυξης της ιστορίας του.

Η εκπαίδευση των Μαθηματικών μπορεί να γίνει μέσα σε ποικίλα επικοινωνιακά περιβάλλοντα, που το καθένα προϋποθέτει διαφορετική επιστημολογία. Οι επιστημολογίες αυτές δρουν αξιολογικά και γίνονται ο κύριος φορέας επικοινωνίας του παιδευτικού μηνύματος. Σε κοινωνίες που κυριαρχούν υπερβατικές αξίες, αισθητικού ή θεολογικού τύπου οι μαθηματικές ιδέες παρουσιάζονται ως η αναλλοίωτη δομή του κόσμου, υποβάλλουν το δέος της αποκάλυψης και υπονοούν ένα βαθιά επικοινωνιακό χαρακτήρα του ανθρώπου με το άφθαρτο, το υπέρτατο, το αισθητικό, το ηθικό, το αιώνιο. Οι ιδέες αυτές που συνοψίζονται με το όνομα του Πλατωνισμού κυριάρχησαν στην μαθηματική εκπαίδευση κι έφτασαν ως ένα βαθμό ως τις μέρες μας.

Μια άλλη επιστημολογία που στάθηκε το ίδιο αποφασιστική για την ανάπτυξη των μαθηματικών είναι η εργαλειακή, δηλαδή εκείνη στην οποία κυριαρχούν τα αιτήματα της μέτρησης και της εφαρμογής. Αυτή εμφανίζεται στην νεοτερικότητα και ολοκληρώνεται με την άνοδο της αστικής τάξης, όπως αναδεικνύεται μέσα από τις ορθολογικές και μαρξίζουσες αντιλήψεις.

Άλλη εκδοχή είναι εκείνη που ανέκυψε στο τέλος του 20ου αιώνα μέσα σε πραγματιστικές κοινωνίες όπου κυριαρχούν τα νέα ηλεκτρονικά επικοινωνιακά μέσα, η εικόνα, η αγορά, η διαφήμιση. Οι συνθήκες αυτές επιφέρουν τεράστιες ανθρωπολογικές αλλαγές, τις οποίες άλλωστε ζούμε τα τελευταία χρόνια και αξίζει να σταθούμε λίγο σ'αυτές πιο επισταμένα¹¹.

1.2 Τα νέα Μέσα και οι επιπτώσεις

Οι σαρωτικές εξελίξεις που ζούμε τα τελευταία χρόνια στον πλανήτη είναι, χωρίς αμφιβολία, φυσικό ακόλουθο της αλματώδους εξέλιξης των Μέσων (Media) με άμεσες επιπτώσεις σε όλες τις σφαίρες της παγκόσμιας κοινωνίας. Η επίδραση στην επιστήμη, όπως εξάλλου και στα Μαθηματικά, υπήρξε αναπόφευκτη κι όχι μόνο εξωτερικά, προσθέτοντας κάποιες νέες δυνατότητες, αλλά προχωρώντας βαθύτερα στην ουσία τους ως κοινωνική, ιστορική και πνευματική δραστηριότητα. Πολλοί είναι εκείνοι που περιγράφουν και προσπαθούν να κατανοήσουν αυτές τις αλλαγές. Από τις αρχές του 1980, οι P. J. Davis-R. Hersh¹² αναφέρονται στις δυνατότητες που ανοίγονται με τα πειραματικά Μαθηματικά και την *οπτικοποίηση*¹³. Ήδη από το 1976, η λύση του προβλήματος των τεσσάρων χρωμάτων από τους Haken-Appel με την βοήθεια του υπολογιστή άλλαξε ουσιαστικά το νόημα της απόδειξης στα Μαθηματικά κι οι συζητήσεις που επακολούθησαν ήταν πολλές¹⁴.

¹¹ Η παραπάνω περιγραφή ανήκει στον P. Ernest.

¹² P. Davis- R. Hersh, Η Μαθηματική Εμπειρία, ΤΡΟΧΑΛΙΑ, 1991.

¹³ W. Zimmerman-S. Cunninham, Visualization in teaching and learning Mathematics. MAA Notes Series, 1991.

¹⁴ M. Otte, Mathematical knowledge and the problem of proof, Educ. Stud. Math. 26, 299-321, 1994.

Από τότε οι αλλαγές στον τρόπο έρευνας της διδασκαλίας και της χρήσης των Μαθηματικών έχουν γίνει κοινός τόπος¹⁵.

Το 1964, ένας канаδός φιλόσοφος της κουλτούρας ο Marchal Mc Luhan έγραψε ένα παράξενο και ενδιαφέρον βιβλίο με τίτλο *Media*¹⁶. Είχε μιλήσει για τις ανθρωπολογικές αλλαγές που επιφέρουν τα Μέσα στην ιστορία. Τα πρώτα χρόνια έμεινε απαρατήρητος. Τον πρόσεξαν μόνο δημοσιογράφοι, διαφημιστές κι ειδικοί των Μέσων. Στο βιβλίο αυτό ο Mc Luhan επιχειρεί μια πρωτότυπη ανάλυση της ιστορίας με βάση τις εκάστοτε τεχνολογίες και τα μέσα διάδοσης της πληροφορίας. Ισχυρίζεται ότι *κάθε τεχνολογία είναι μια προβολή του ανθρώπου στον χώρο και τον χρόνο, μια προέκταση ενός τμήματός του, μιας αίσθησης ή μιας ικανότητάς του. Έτσι, το βιβλίο αποτέλεσε προέκταση του ματιού και της μνήμης, ο τροχός του ποδιού, τα όπλα των νυχιών και των δοντιών κ.ο.κ. Αλλά κάθε τέτοια προέκταση τμήματος του ανθρώπου δεν είναι κάτι ουδέτερο κι ανεξάρτητο από την ανθρώπινη ψυχή. Τα μέσα δεν είναι γέφυρες του ανθρώπου με την φύση, είναι η φύση! Είναι η προέκταση τμημάτων του εαυτού μας που επηρεάζει τις κοινωνικές δομές και τις ανθρώπινες σχέσεις. Κάθε τεχνολογία είναι ταυτόχρονα μέσο επικοινωνίας, ορισμένες δε που έχουν εντονότερο επικοινωνιακό χαρακτήρα κυριαρχούν σε κάθε ιστορική περίοδο, καθορίζουν την κοινωνική οργάνωση, τις ανθρώπινες σχέσεις και το κυρίαρχο πρότυπο σκέψης.*

Δεν σκοπεύω να περιγράψω εδώ την Μακλουανική φιλοσοφία. Θέλω να αναφερθώ μόνο στις προφητικές νύξεις που κάνει στα μαθησιακά προβλήματα που θα προκύψουν, όσον αφορά τον αναλυτικό και ορθολογικό τρόπο σκέψης, από την επίδραση της τηλεόρασης και της διαφήμισης.

Ο Mc Luhan έχει μια πρωτότυπη άποψη για την σύνδεση του μέσου της γραφής με την έννοια της τάξης και της λογικής. *Η αλφαβητική γραφή λέει με τη γραμμική παράθεση των γραμμάτων και των σειρών υπαγορεύει κι ένα τρόπο αναλυτικής σκέψης. Η τεχνολογία της τυπογραφίας προκάλεσε την ανάδυση του Δυτικού ορθολογισμού, με άλλα λόγια ένα τρόπο σκέψης και αναπαράστασης της πραγματικότητας, ο οποίος παράγει στο νοητικό επίπεδο την ομοιομορφία, την επαναληπτικότητα και την διαδοχικότητα, χαρακτηριστικά της τυπογραφικής τεχνολογίας. Ο τύπος προκάλεσε τη διάθεση για επακριβή μέτρηση και επαναληπτικότητα, την οποία συνδέουμε σήμερα με την επιστήμη και τα Μαθηματικά.*

Αναζητά τις επιδράσεις όλων των Μέσων και ιδιαίτερα των πρόσφατων της ηλεκτρικής και της ηλεκτρονικής τεχνολογίας, όπως ο τηλεγράφος, το τηλέφωνο, ο κινηματογράφος, η φωτογραφία, το ράδιο, η τηλεόραση, η διαφήμιση. Βασικές έννοιες, όπως του χώρου ή του χρόνου αλλάζουν, κάτω από την επίδραση της τεχνολογίας, ενώ το σχολείο παύει να αποτελεί το μοναδικό κέντρο άντλησης πληροφοριών για τους νέους. Ο δάσκαλος περνάει σε ένα άλλο ρόλο, που ίσως ακόμη δεν έχει προσδιοριστεί επαρκώς.

¹⁵ W. Guzicki, Computer in Mathematics and in School Mathematics. CIEAM-42, Poland 1990.

¹⁶ M. Mc Luhan, Media, οι προεκτάσεις του ανθρώπου, εκδόσεις ΚΑΛΒΟΣ, 1990.

Η διαφήμιση αποτελεί κατά τον Mc Luhan μια γιγαντιαία εκπαιδευτική επιχείρηση, που ο ετήσιος προϋπολογισμός της ξεπερνά τον εθνικό προϋπολογισμό για την παιδεία. Η διαφήμιση, όμως, γίνεται κυρίως με στόχο την διαρκή εκπαίδευση του ανθρώπου ως καταναλωτή κι η τηλεόραση συμβάλλει στο έπακρο σε τούτο, καθόσον η τηλεοπτική εικόνα χρηματοδοτείται το μέγιστο από την διαφήμιση την οποία και υπηρετεί.

Για την επίδραση της τηλεόρασης ο Mc Luhan είχε πολύ νωρίς προειδοποιήσει. Το μωσαϊκό πλέγμα της τηλεόρασης δεν ευνοεί την προοπτική στην τέχνη ούτε την γραμμικότητα στην ζωή. Η επίδρασή της αρχίζει από την βρεφική ηλικία με το ζάπινγκ¹⁷.

Τα παιδιά των πρώτων τάξεων του δημοτικού, παρατηρεί στην συνέχεια ο Mc Luhan, αρχίζουν να διαβάζουν την τυπωμένη σελίδα από απόσταση δεκαπέντε έως δεκαοκτώ πόντων κατά μέσο όρο. Τα παιδιά μας προσπαθούν να μεταφέρουν στην τυπωμένη σελίδα τη βαθιά αισθητηριακή προσταγή της τηλεοπτικής εικόνας. Με τέλεια ψυχομιμητική ικανότητα εκτελούν τις εντολές της τηλεοπτικής εικόνας. Απορροφώνται, εμπλέκονται σε βάθος. Η γραμματική παιδεία, αντίθετα, με την προέκταση της οπτικής δύναμης στην ομοιόμορφη οργάνωση του χώρου και του χρόνου, ψυχικά και κοινωνικά, μας είχε χαρίσει τη δύναμη της αποστασιοποίησης και της μη εμπλοκής. Μάταια τώρα πασχίζουν να διαβάσουν τον τύπο σε βάθος. Φέρνουν στον τύπο όλες τις αισθήσεις κι ο τύπος τις απορρίπτει. Ο τύπος ζητά την απομονωμένη κι απογυμνωμένη οπτική κι όχι το ενιαίο σύνολο των αισθήσεων. Η σχέση με την τηλεόραση είναι συνολική και συναισθηματική και εμπλέκει όλες τις αισθήσεις. Διαποτισμένο με την τηλεοπτική εικόνα, το παιδί συναντά τον κόσμο αντιθετικό προς την γραμματική παιδεία. Το γεγονός αυτό εξασθενίζει την αποτελεσματικότητα των βασικών παιδαγωγικών τεχνικών και την αξία του εκπαιδευτικού προγράμματος.

Σε άλλο σημείο επιχειρεί ακόμη πιο επιγραμματικές διαπιστώσεις λέγοντας ότι οι νέοι έχουν εμποτιστεί από μια παρόρμηση για εμπλοκή σε βάθος, η οποία κάνει όλους τους μακρινούς στόχους της καθημερινής κουλτούρας να φαίνονται όχι όνο ψεύτικοι αλλά και αναιμικοί.

Ο Mc Luhan είχε υπόψη του την κατάσταση στην Β. Αμερική κατά την δεκαετία του εξήντα. Οι παρατηρήσεις του, τεκμηριωμένες ή όχι, δεν περιλαμβάνουν τις εξελίξεις που έλαβαν χώρα με την εξάπλωση της φωτοτυπίας, της δορυφορικής τηλεόρασης, των Η/Υ, των διαλογικών προγραμμάτων, της ασύρματης τηλεφωνίας, του internet, του e-mail, video, Google, You tube . Ωστόσο, η σημασία των προβληματισμών είναι προφανής για ένα δάσκαλο της δεκαετίας του 90 και ιδιαίτερα για τον καθηγητή των Μαθηματικών, μαθήματος κατ'εξοχήν αναλυτικού που απαιτεί μια αποστασιοποιημένη γραμμική παράθεση συλλογισμών. Σήμερα στο Πανεπιστήμιο του Τορόντο υπάρχει ένα δρομολογημένο πρόγραμμα που διερευνά τις επιπτώσεις των μέσων στην ζωή μας¹⁸.

¹⁷ Ν. Χρηστάκης, Ψυχοκοινωνιολογία των μέσων μαζικής ενημέρωσης, 1994.

¹⁸ J. M. Healy, Μυαλά που κινδυνεύουν, Λύχνος 1996, σελ. 314.

1.3 Μάθηση και συγκινησιακοί παράγοντες

Τα τελευταία χρόνια γίνεται μια συζήτηση για την διαφορετική ανταπόκριση των μαθητών στα προγράμματα των μαθηματικών και το φαινόμενο επιχειρείται να εξηγηθεί κατά ποικίλους τρόπους. Είναι αλήθεια ότι οι αξίες της κοινωνίας κι οι επικοινωνιακοί κανόνες, κάτω από την επίδραση των νέων μέσων, διαρκώς αλλάζουν. Η όποια γνωσιοθεωρία, η οποία έχει ως σκοπό την ανάλυση των μεθόδων και της σημασίας της μάθησης, δεν μπορεί να αγνοήσει τις νέες συνθήκες, που αφορούν στην ροή και στην πρόσληψη των πληροφοριών. Η περαιτέρω έρευνα ενός τέτοιου ζητήματος πρέπει να δανειστεί ιδέες και εργαλεία από την κοινωνική ψυχολογία και την επιστήμη της επικοινωνίας. Η διδασκαλία είναι ένα φαινόμενο επικοινωνιακό και *η επικοινωνία με τους νέους προϋποθέτει γνώση και βαθιά κατανόηση των ανησυχιών, ασχολιών, ενδιαφερόντων τους αλλά και γενικά των επικοινωνιακών φαινομένων της εποχής μας*¹⁹.

Όλοι γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχει επιτυχημένο πρόγραμμα και μέθοδος διδασκαλίας που δεν θα εξασφαλίζει την συναίνεση και το ενδιαφέρον των μαθητών. Σε μια παλαιότερη εποχή, η προνομιούχα θέση που είχε το σχολείο για την κοινωνική ενσωμάτωση²⁰ του μαθητή εξασφάλιζε το αναγκαίο επικοινωνιακό συμβόλαιο που βοηθούσε στην προσήλωση στον λόγο του δασκάλου. Στις νέες κοινωνικές και επικοινωνιακές συνθήκες αυτές οι "καλές προϋποθέσεις" της εποχής εκείνης έχουν εκπέσει. Το παιδί της βιομηχανικής κοινωνίας έβλεπε την γνώση ως εργαλείο χειραφέτησης από τις προκαταλήψεις των παλαιότερων εποχών, ήθελε να μάθει τους νόμους της φύσης, των άστρων, να λύσει το ίδιο τις απορίες του για τις μηχανές. Στην μεταβιομηχανική εποχή μας που κατά το σλόγκαν του U. Eco *Η βιομηχανία της επικοινωνίας αποτελεί την πλέον βαριά βιομηχανία*, το επικοινωνιακό περιβάλλον αλλάζει. Τα παιδιά της τηλεοπτικής εποχής έχουν άλλες ευαισθησίες κι άλλους κανόνες πρόσληψης της γνώσης. Η εικόνα αποκτά πρωταρχική σημασία στην μεταφορά πληροφοριών και παραγκωνίζει σε μεγάλο βαθμό τις ιδέες και τον λόγο²¹. Τα παιδιά μαθαίνουν πολλά για τον υπολογιστή τους τα ηλεκτρονικά παιχνίδια, καταλαβαίνουν τι σημαίνει "μόλυνση περιβάλλοντος", τα ενδιαφέρουν στοιχεία που αφορούν στην κατανάλωση, τις μόδες και τα στυλ. Ο σημερινός κόσμος δεν είναι τόσο αυτονόητος για τον ορθολογισμό του! Οι πόλεμοι, οι ενεργειακές ελλείψεις η παγκόσμια κρίση, οι κλιματικές αλλαγές κι όλα τα άλλα προβλήματα που αναδεικνύουν τα όρια της ανθρωπότητας και το ενδεχόμενο μιας υπερμοντέρνας κατάστασης²² μας φέρνουν σε επαφή με μια νεολαία που έχει άλλες προτεραιότητες οι οποίες πρέπει να κατανοηθούν και να παρακολουθηθούν αν θέλουμε να εξασφαλίσουμε την ανταπόκριση σε ένα πρόγραμμα διδασκαλίας.

¹⁹ Ν. Χρηστάκη, Ακρόαση ροκ: Από την μουσική ένταξη στην κοινωνική ταυτότητα, Νεανική Κουλτούρα 61-67, 1994.

²⁰ Δ.Γ. Τσαούση, Η κοινωνία του ανθρώπου, Gutenberg, 1993.

²¹ Μ. Perniola, 'η κοινωνία των ομοιωμάτων', ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΙΑ Αθήνα, 1992.

²² J-F Lyotard, Η Μεταμοντέρνα Κατάσταση, ΓΝΩΣΗ.

Στην ίδια κατεύθυνση με τον Mc Luhan, η αμερικανίδα παιδαγωγός J.M. Healy έγραψε ένα συνταρακτικό βιβλίο το 1990 που πηγαίνει πολύ πιο πέρα με στοιχεία που δεν αποτελούν πια φιλοσοφίες ή προφητείες αλλά δυστυχώς διαπιστώσεις. Το βιβλίο αυτό έχει τον ενδεικτικό τίτλο *Μυαλά που κινδυνεύουν, Γιατί τα παιδιά μας δεν σκέφτονται*. Αξίζει εδώ να αναφέρουμε σύντομα μερικά από τα συμπεράσματα του βιβλίου.

Επικρίνει καταρχάς την τηλεόραση, αλλά και τον σύγχρονο τρόπο ζωής, όπως διατροφή, θόρυβος, χημικές ουσίες, συμπεριφορές κ.ά. Καταγράφει τις πολύ επιθετικές μεθόδους που χρησιμοποιούν οι διαφημιστές για να προωθήσουν τα μηνύματά τους αλλά και τους σύγχρονους σκηνοθέτες που έχουν να αντιμετωπίσουν τον ανταγωνισμό του ζάπινγκ στις διηγήσεις που αναλαμβάνουν να επεξεργαστούν. Τα πάντα γίνονται έντονα, ερεθιστικά, προκαλούν αιφνιδιασμό, φόβο, ενεργοποιούν τα βασικά ένστικτα και εκβιάζουν έτσι την προσοχή του τηλεθεατή.

Διεγείρουν την επιθυμία όπως στην περίπτωση των διαφημίσεων και παρεμβάλλουν τα προϊόντα που θα την πληρώσουν. Οι ταινίες εξάλλου προσφέρουν ένα πλαίσιο όπου ο τηλεθεατής μέσω πληρεξουσίου εκπληρώνει λογικές, παράλογες ή και βίαιες επιθυμίες²³. Η επίδραση της βίας της τηλεόρασης στους ανθρώπους και ιδιαίτερα στα παιδιά είναι πολύμορφη και δεν περιορίζεται στις ηθικολογικές όψεις που της αποδίδουν κάποιοι, ως προς την άμεση απομίμησή της. Η βία έρχεται να πληρώσει κάποια ανάγκη σε ανταπόκριση π.χ. πείσματος, εκδίκησης σε ένα σύντομο χρόνο προσδιορισμένο από τις ανάγκες της οικονομίας της τηλεοπτικής διήγησης. Έτσι, δημιουργείται μια ειδική βίωση της ροής του χρόνου με αποτέλεσμα αυτό που πολύ νωρίς (1973) είχαν παρατηρήσει οι ερευνητές σχετικά με την TV, ότι *τα παιδιά που παρακολουθούσαν επιθετικά προγράμματα παρουσίαζαν μείωση της ανοχής στις αναβολές και της υπακοής σε κανόνες, αντίθετα από τα παιδιά που παρακολουθούσαν κοινωνικά προγράμματα*²⁴. Ωστόσο, η υπομονή αποτελεί μια βασική ικανότητα απαραίτητη για την άσκηση στην έμμεση, αφηρημένη και αναλυτική σκέψη.

Τα παιδιά καταλήγουν να είναι υπερκινητικά, να μην είναι σε θέση να παρακολουθήσουν τον συλλογισμό των άλλων, να έχουν αδυναμίες στην συζήτηση²⁵. Αυτά έχουν ως αποτέλεσμα να χάνουν τις γλωσσική ικανότητα, την ικανότητα να ακούν αναλυτικά αλλά και αυτή την ανταπόκριση στα μαθηματικά προγράμματα²⁶.

Η J. M. Healy προχωρεί ακόμη παραπέρα σε μια προσπάθεια να εξηγήσει τα φαινόμενα που αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί σήμερα. Κάνοντας χρήση της θεωρίας του νομπελίστα νευρολόγου Dr Gerald Edelman ισχυρίζεται μια διαρκή εξέλιξη του εγκεφάλου κατά την διάρκεια της ζωής ενός ατόμου και *εφαρμόζει τους νόμους της φυσικής επιλογής στους νευρώνες του ανθρωπίνου εγκεφάλου. Σε αυτό το σύστημα που διαρκώς μεταβάλλεται, ομάδες νευρώνων είναι εμπλεγμένες σε ένα*

²³ N. Χρηστάκη, Ψυχοκοινωνιολογία των ΜΜΕ.

²⁴ L. Friedrich-A.H. Stein, Επιθετικά και κοινωνικά προγράμματα και η συμπεριφορά των παιδιών της προσχολικής ηλικίας, Εξελικτική ψυχολογία, τόμος Γ, επιμ. Βοσνιάδου, Gutenberg.

²⁵ Η J. M. Healy αναφέρει ενδεικτικά ότι ένας αριθμός παιδιών στις ΗΠΑ, γύρω στο έξι τοις εκατό, παίρνει και φάρμακα για να συγκεντρωθεί, βλέπε σελ. 128

²⁶ J. M. Healy κρούει τον κώδωνα του κινδύνου για τις επιπτώσεις που έχει.

συνεχή ανταγωνισμό μεταξύ τους για να "αιχμαλωτίσουν" άλλα κύτταρα για την ομάδα τους. Οι ομάδες που παρουσιάζουν τη μεγαλύτερη δράση αναπτύσσουν δυνατότερες συνάψεις, που προστίθενται στα δίκτυα τους, και επιβιώνουν. "Επιλέχθηκαν", επειδή είναι πιθανόν να χρησιμοποιηθούν σε μελλοντική συμπεριφορά²⁷.

Ο ανταγωνισμός αυτός επιτελείται εκτός των άλλων και με την απόρριψη ενός μεγάλου αριθμού κυττάρων καθημερινά²⁸. Αυτό δηλαδή που υπερασπίζει σε όλο το βιβλίο είναι οι αλλαγές που επιφέρει στον εγκέφαλο ο νέος τρόπος ζωής. Πιστεύει ότι ο εγκέφαλος των σημερινών παιδιών έχει δομηθεί πάνω σε γλωσσικά πρότυπα που ανταγωνίζονται τις αξίες και τους σκοπούς της τυπικής εκπαίδευσης. Οι κλασικές μέθοδοι διδασκαλίας δεν επιτυγχάνουν επειδή ο νεαρός εγκέφαλος δεν έχει διαμορφωθεί γλωσσικά ως το βασικό εργαλείο για την αναλυτική σκέψη. Τα παιδιά εθισμένα πια να ανταποκρίνονται πλέον σε ερεθιστικά μηνύματα χάνουν βαθμιαία την δυνατότητα συγκέντρωσης στο κλασικό μετωπικό μάθημα²⁹.

Οι διαπιστώσεις της J. Healy δεν είναι οι μοναδικές. Ένας νέος κλάδος της γνωστικής ψυχολογίας που μελετά τους συγκινησιακούς παράγοντες που αφορούν στην μάθηση κρίθηκε απαραίτητος και έρχεται να μας επισημάνει τα εκρηκτικά μαθησιακά προβλήματα που έχουν προκύψει³⁰. Αλλά οπωσδήποτε εκείνο που είναι αυτονόητο είναι ότι το περιβάλλον που παρέχουμε στα παιδιά, τα ερεθίσματα με τα οποία τα ενθαρρύνουμε να αλληλεπιδρούν και οι τρόποι με τους οποίους επιδεικνύουμε τις χρήσεις του ανθρώπινου μυαλού - αυτά είναι τα μέσα για την διαμόρφωση του εγκεφάλου τους και του πολιτισμικού μας μέλλοντος³¹.

Ακόμη και εκείνοι για τους οποίους οι ισχυρισμοί της J. Healy ως προς την αλλαγή των εγκεφάλων θα φαίνονταν υπερβολικοί, δεν μπορούν να αγνοήσουν την αλλαγή ως προς τους τρόπους πρόσληψης του μεγαλύτερου μέρους των πληροφοριών, την εισβολή της εικόνας και του καταναλωτικού ακτιβισμού στην ζωή. Εν ολίγοις, θυμίζει την επιθετική διαφήμιση προϊόντων, τον εντατικό και προκλητικό ρυθμό της σύγχρονης τηλεοπτικής διήγησης, την μεγάλη ανάπτυξη της αγοράς με προϊόντα που αφορούν στην νεολαία, τους ειδικούς καταναλωτικούς κωδικών που προωθούνται σε παιδιά και εφήβους, την πολιτιστική ισοπέδωση που προσφέρουν πολυεθνικά μουσικά κανάλια τύπου MTV, την ρηχή διεθνή επικοινωνία που διαμορφώνεται μέσω μιας μέτριας γνώσης της αγγλικής. Παρατηρούμε ότι η ανθρώπινη επικοινωνία επιτελείται όλο και πιο λίγο μέσω ιδεών, γλώσσας και αναστοχαστικών ενεργημάτων κι όλο και πιο πολύ με εικόνες και συμπεριφορές (όπως κάπνισμα, ποτό, μηχανές, αθλητικοί αγώνες, κλάμπινγκ, ταξίδια κ.ά). Η εμπορευματοποίηση των ανθρώπινων δραστηριοτήτων στην ολότητά τους προσδίδει σε όλο και περισσότερες αξίες της κουλτούρας καταναλωτική διάσταση μετατρέποντάς τες σε στείρο ακτιβισμό που δεν εσωτερικεύεται, έτσι ώστε οι αξίες αυτές να χάνουν τον μορφωτικό τους χαρακτήρα. Τα σύγχρονα μέσα καθορίζουν

²⁷ J. Heale, σελ. 74.

²⁸ J. Heale, σελ. 53.

²⁹ J. Healy, σελ. 16

³⁰ Μ. Ντάβου, Γνωστικοί και συναισθηματικοί παράγοντες επικοινωνίας. (Σημειώσεις 1995). Επίσης της ίδιας 'Οι διεργασίες της σκέψης στην εποχή της πληροφορίας' Εκδόσεις Παπαζήση, 2000.

³¹ J. Heale, σελ. 76.

λιγότερο το τι πρέπει να σκέφτεται κανείς και περισσότερο τα θέματα με τα οποία θα ασχολείται³².

Για το ζήτημα αυτό η J. Healy σχολιάζει: τα παιδιά συνεχώς διεγείρονται από τον έξω κόσμο ώστε να έχουν λίγο χρόνο να καθίσουν, να συλλογιστούν, και να μιλήσουν με τον εαυτό τους³³. "σπρώχνονται" από την μια δραστηριότητα στην άλλη και μπορεί να παίρνουν πολλή αισθητηριακή πληροφόρηση, αλλά δεν έχουν αρκετό χρόνο για να σχηματίσουν συνειρμικά δίκτυα ώστε να καταλάβουν και να οργανώσουν την εμπειρία με τρόπο που να έχει νόημα³⁴.

Μια προσέγγιση, λοιπόν, που να αναδεικνύει την σημασία της συναισθηματικής ατμόσφαιρας που περιβάλλει την νεολαία, μέσα στην οποία ερχόμαστε να διδάξουμε τα μαθηματικά, φαίνεται αναγκαία. Η μετατόπιση των αξιών είναι δεδομένη. Η γνώση αποκτά πλέον πραγματολογικό χαρακτήρα, γίνεται εργαλείο για κάτι. Προτεραιότητα της εκπαίδευσης δεν είναι πια η γνώση ή η αλήθεια του κόσμου καθ'εαυτή, αλλά η σωστή διαχείριση των επικοινωνιακών δυνατοτήτων της εποχής, του νου, των μέσων, της διϋποκειμενικότητας, του σωστού διαλόγου, της διαπραγμάτευσης, των γλωσσών, των διεθνών καταναλωτικών ρευμάτων, των κωδίκων, των επαγγελματικών εργαλείων, των στρατηγικών δράσης.

Για να καταλάβουμε το τεράστιο χάσμα που μας χωρίζει και να συγκρίνουμε τις διαφορές με την πριν σαράντα χρόνια εποχή ας σταθούμε σε ένα γεγονός. Όταν η εποχή εκείνη, τόσο κοντά σε μας, τόσο μακριά από μας, δρομολόγησε το μεγάλο εκπαιδευτικό πρόγραμμα της δεκαετίας του 60³⁵. Η εκπαίδευση, σε όλο τον βιομηχανικό κόσμο απέκτησε προτεραιότητα. Τα εκπαιδευτικά προγράμματα φάνηκαν ανανεωμένα, πληθωρικά προτείνοντας το ορθολογικό παράδειγμα, που άρχισε με τον Καρτέσιο, τον Γαλιλαίο κι έφτανε μέχρι τον Αϊνστάϊν. Το θαύμα της γνώσης του κόσμου και της τεχνολογίας! Η τεχνολογία υποσχόταν ταξίδια στο φεγγάρι, ξεπέραςμα της ένδειας παγκοσμίως, φτηνή ηλεκτρική ενέργεια ενώ στην πράξη έκρυβε το ανελέητο κυνήγι των εξοπλισμών, τον ανταγωνισμό για την πρόσβαση στις πρώτες ύλες, τον έλεγχο των αγορών και την παγκόσμια επιρροή. Επιπλέον, το ψευδοορθολογικό του όραμα κάλυπτε συστηματικά τα τεράστια οικολογικά αδιέξοδα που από τότε προκαλούσε. Στα πλαίσια της εκπαίδευσης, το πρόγραμμα αυτό, καλλιεργούσε το πρότυπο του *ταλεντισμού*³⁶, της εξειδίκευσης και της αυθεντίας, αδιαφορώντας για τον ευρύτερο επικοινωνιακό και πολιτιστικό χαρακτήρα της παιδείας. Λέγεται το εξής παράδοξο ότι οι επιτελείς σχεδιάζουν πάντα τον προηγούμενο πόλεμο. Αυτό λοιπόν είναι το άμεσο επιστημολογικό εμπόδιο που δεν μας επιτρέπει να διαισθανθούμε την εποχή που έρχεται και μας οδηγεί ν'αναζητούμε λύσεις στον επιστημονισμό του παρελθόντος.

Τα μαθησιακά ζητήματα που προκύπτουν, όπως δείξαμε παραπάνω, δεν μπορούμε να τα δούμε αποκομμένα από την εξίσου σημαντική πτυχή των

³² Ν. Χριστάκης, Ψυχοκοινωνιολογία ΜΜΕ, σελ 34

³³ J. Healy, σελ 51.

³⁴ J. Healy, σελ 70.

³⁵ Μπάμπη Τουμάση, Σύγχρονη διδακτική των Μαθηματικών

³⁶ P. Davis - R. Hersh, Μαθηματική Εμπειρία. Τροχαλία 1990.

συγκινησιακών παραγόντων, που επιδρούν στην μάθηση κι ιδιαίτερα των νέων. Είναι αλήθεια, ότι όλα μας τα προγράμματα αναφέρονται στην εκπαίδευση νέων σχολικής και λυκειακής ηλικίας, μιας φάσης ιδιαίτερα ευαίσθητης σε συναισθηματικές αλλαγές, οι οποίες έχουν μεγάλη επίδραση στις γνωστικές διαδικασίες. Σήμερα έχει γίνει πια κατανοητό ότι οι πληροφορίες που δέχονται κι αφομοιώνουν οι άνθρωποι έχουν μεγάλη σχέση όχι μόνο με τις προηγούμενες γνωστικές δομές τους, όπως πολύ σωστά μας περιέγραψε ο κονστρουκτιβισμός, αλλά κι με τις συγκινησιακές καταστάσεις στις οποίες βρίσκονται, τις αναπαραστάσεις που διαθέτουν για το περιβάλλον και τις έννοιες, τις ταυτόσεις που κάνουν μέσα στο συμβολικό σύμπαν αυτών των αναπαραστάσεων. Η Μ. Ντάβου αναφέρει πάνω σε αυτό. *Ο άνθρωπος δεν είναι μια γνωστική μηχανή που λειτουργεί αυτόματα, ακολουθώντας πάντα τις προβλεπόμενες, μετρήσιμες οδούς. Έως το τέλος της δεκαετίας του 80, οι γνωστικοί ψυχολόγοι μελετούσαν την σκέψη επηρεασμένοι αρκετά από τις επιστήμες των υπολογιστών και της τεχνητής νοημοσύνης. Αναπόφευκτα, τα θεωρητικά μοντέλα που προέκυψαν, αν και επεδείκνυαν σπουδαία θεωρητική ακρίβεια, δεν αντιμετώπιζαν προβλήματα στην πρακτική τους εφαρμογή*³⁷.

Η μαθησιακή ωρίμανση ενός νέου επιτελείται παράλληλα και σε συσχετισμό με την φυσική του ωρίμανση και αποτελεί μια πορεία προς την ενηλικίωση και την ενσωμάτωσή του στην κοινωνία. Τέτοιοι παράγοντες ωρίμανσης και αφομοίωσης των νέων στην κοινωνία αποτελούν "οι οργανισμοί, τα σχολεία, η κατανάλωση, οι παρέες"³⁸. Πώς λειτουργούν αυτοί όμως οι παράγοντες στην σύγχρονη κοινωνία, όπου η διαφήμιση και τα μέσα ενημέρωσης προωθούν τόσο δυναμικά και μεθοδευμένα τα επιλεγμένα καταναλωτικά πρότυπα;

Προς εμπύρωση της σημασίας της επίδρασης των συγκινησιακών παραγόντων θα αναφέρω ένα χαρακτηριστικό απόσπασμα από την Απολογία του μεγάλου άγγλου μαθηματικού G. H. Hardy³⁹ που γράφει:

Δεν θυμάμαι να ένοιωσα, όταν ήμουν παιδί, πάθος για τα Μαθηματικά, και η αντίληψη που είχα για την καριέρα του μαθηματικού ήταν κάθε άλλο παρά ευγενής. Έβλεπα τα Μαθηματικά μόνο από την σκοπιά των εξετάσεων και των υποτροφιών: Ήθελα να νικήσω τα άλλα παιδιά, και αυτός ήταν ο καλύτερος δυνατός τρόπος να το επιτύχω... Ήμουν κάπου δεκαπέντε ετών όταν (με μάλλον παράξενο τρόπο) οι φιλοδοξίες μου πήραν μια αποφασιστική τροπή. Υπάρχει ένα βιβλίο του Alan St Aubyn, με τίτλο "Ένας Εταίρος του Trinity", από μια σειρά μυθιστορημάτων που περιγράφουν πώς υποτίθεται ότι είναι η ζωή σ'ένα κολλέγιο του Cambridge. Υπάρχουν στο βιβλίο δυο ήρωες: ο κεντρικός ήρωας που ονομάζεται Flowers, που είναι σχεδόν εντελώς καλός, και ο δευτερεύων, πιο αδύναμος τύπος, που ονομάζεται Brown. Ο Flowers και ο Brown αντιμετωπίζουν πολλούς κινδύνους στη φοιτητική ζωή, αλλά ο χειρότερος ήταν μια χαρτοπαικτική λέσχη που την διευθύνουν δυο μαγευτικές αλλά υπερβολικά διαβολικές νεαρές κυρίες. Ο Flowers επιζεί όλων αυτών

³⁷ Μ. Ντάβου, Γνωστικοί και συναισθηματικοί παράγοντες επικοινωνίας.

³⁸ Α. Αστρινάκης, Νέα φαινόμενα και μορφές περιθωριοποίησης της Νεολαίας στις σύγχρονες κοινωνίες, Επιθεώρηση κοινωνικών ερευνών, 68Α, 1988 σελ 56-96.

³⁹ G.H. Hardy, η Απολογία ενός Μαθηματικού, Πανε/μιακές εκδ. Κρήτης 1993.

των δυσκολιών, έρχεται δεύτερος στο Τμήμα των Κλασικών Σπουδών, οπότε αναγορεύεται αυτομάτως Εταίρος. Ο Brown καταρρέει, ρημάζει τους γονείς του, το ρίχνει στο πιοτό και σώζεται από παραλήρημα κατά την διάρκεια μιας καταγίγδας χάριν και μόνο στις προσευχές. Μόλις και μετά βίας παίρνει ακόμη και το απλό πτυχίο και τελικά γίνεται ιεραπόστολος. Η φιλία τους δεν κλονίζεται από τα συνεχή αυτά περιστατικά, και ο Flowers θυμάται τον Brown με στοργικό οίκτο, καθώς πίνει κρασί και τρωει ξηρούς καρπούς για πρώτη φορά στο Εντευκτήριο των Επισήμων. ... αλλά ακόμη και το απλουστευτικό μου μυαλό, γράφει ο G. Hardy, αρνείτο να παραδεχθεί τον Flowers ως ευφυή. Αν εκείνος μπορούσε να καταφέρει όλα αυτά, γιατί να μην μπορώ κι εγώ; Ιδιαίτερα η τελευταία σκηνή στο Εντευκτήριο, με σαγήνευε εντελώς και από τότε, έως ότου τα κατάφερα, τα μαθηματικά ήσαν για μένα πάνω απ'όλα ο τρόπος απόκτησης του τίτλου του Εταίρου στο Trinity.

Ο Hardy μας παρουσιάζει με μεγαλοφυή απλότητα αυτό που σήμερα οι κοινωνικοί ψυχολόγοι βλέπουν ως την διαδικασία ενσωμάτωσης. Υπάρχει η αναπαράσταση μιας κοινωνικής αξίας, η εμπλοκή και τέλος η απαραίτητη ταύτιση που λέει "γιατί να μην μπορώ κι εγώ"⁴⁰;

1.4: Μετατόπιση του Γνωσιακού αιτήματος

Στις προηγούμενες παραγράφους προσπαθήσαμε να καταθέσουμε τις κοινότητες παρατηρήσεις μας που ωστόσο συχνά αγνοούμε όταν μιλάμε για ζητήματα εκπαίδευσης. Δείξαμε πώς τα νέα Μέσα επιβάλλουν νέους κώδικες επικοινωνίας και κανόνες πρόσληψης της πληροφορίας. Επίσης, πρέπει να λάβουμε υπ'όψη ότι οι νέες αντιλήψεις για τα ανθρώπινα δικαιώματα μέσα στις δημοκρατικές κοινωνίες και ιδιαίτερα τα δικαιώματα των νέων, τα νέα οπτικοακουστικά μέσα και ο τρόπος χειρισμού τους επιβάλλουν εντελώς νέους κώδικες, οι οποίοι υπαγορεύουν συμμετοχή και πρωτοβουλίες από τους διδασκόμενους που σε παλαιότερες εποχές θα ήταν αδιανόητες. Είναι πια αποδεκτό ότι τα προβλήματα της κάθε εποχής ανακύπτουν στα διάφορα επίπεδα της επικοινωνίας (της), και δεν είναι δυνατόν να διατυπωθούν με ακρίβεια, με ορθότητα, ή με αποτελεσματικότητα χωρίς να λάβουμε υπόψη μας τον τρόπο με τον οποίο αυτά ανακύπτουν και μέσα σε ποιο πλαίσιο Διατυπώνονται⁴¹. Σε ένα περιβάλλον υπερπληροφόρησης, γινόμαστε μάρτυρες ραγδαίων αλλαγών αξιών και αιτημάτων. Η μνήμη και η κριτική σκέψη είναι τα πρώτα θύματα της υπερπληροφόρησης. Ωστόσο, τα παλαιότερα αξιολογικά συστήματα με τα οποία ήταν διαποτισμένη η φιλοσοφία της εκπαίδευσης, έπαψαν να αποδίδουν. Σε αυτές τις αντιλήψεις αντιπαραθέτουν⁴² την διδακτική πρόταση των ανοικτών προβλημάτων και της διαθεματικότητας την οποία θα ονομάσω επικοινωνιακή αντίληψη και η οποία περιλαμβάνει τις προηγούμενες αντιλήψεις αλλά και πολλά νέα στοιχεία.

⁴⁰ N. Χρηστάκης, Μουσικές Ταυτότητες, ΔΕΛΦΙΝΙ, Αθήνα 1994.

⁴¹ Mac Keon, Communication, Truth, Society, Ethics, 1957.

⁴² P. Ernest, The impact of Beliefs on the Teaching of Mathematics, Mathematics Teaching, the state of the act, New York, The falmer Press, 1991, σελ 249-255.

Κατ'αυτήν το κέντρο πλέον της διαδικασίας μάθησης δεν είναι πια το αντικείμενο της γνώσης, όπως φαινόταν παλαιότερα, αλλά η επικοινωνία που εγκαθίσταται ανάμεσα στα υποκείμενα που συμμετέχουν στην διαδικασία της μάθησης. Αυτή επιτελείται μεταξύ των μαθητών και του καθηγητή. Οι νέες αυτές διδασκαλίες με συνεργασίες σε ομάδες, με εικονικές αναπαραστάσεις των καταστάσεων, μέσω της χρήσης υπολογιστών κ.ά είναι αυτές που ανταποκρίνονται στις πραγματικότητες για να επιτευχθεί μια αποδοτική συνεργασία μυαλού-πολιτισμού⁴³.

Στην σύγχρονη Διδακτική συναντάμε συχνά τον παιδαγωγικό αίτημα που θέλει να κατασκευάσει μαθητές *λύτες προβλημάτων*. Στην συνέχεια θα δούμε πώς η πραγματιστική φιλοσοφία επιφυλάσσει, από πολύ νωρίς, μια προνομιούχα θέση για το *πρόβλημα*, με μια εκδοχή που παρακάμπτει τα μεταφυσικά ερωτήματα. Έτσι κατά την επιστημολογία του Dewey, το πρόβλημα είναι κάτι περισσότερο από συγκυριακή άσκηση δεξιοτήτων. Είναι τρόπος, οδός συγκρότησης της "αληθούς" εικόνας του κόσμου. Οι θεωρήσεις αυτές αφορούσαν στην γενικότερη επιστημολογία και δεν σκόπευαν άμεσα σε διδακτικά μοντέλα. Ωστόσο, όπως φαίνεται από τα παράλληλα αιτήματα μεταξύ της σύγχρονης επιστημολογίας και της Διδακτικής που παρουσίασε η Michele Artigue⁴⁴, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι η πραγματιστική φιλοσοφία μαζί με την φαινομενολογική παράδοση καθορίζουν το πλαίσιο ερμηνείας που συνθέτει παλαιότερες και νέες αντιλήψεις και προσφέρουν μια ευρύτερη φιλοσοφική στήριξη στις νέες διδασκαλίες. Η διαδικασία συγκρότησης της γνώσης μετατοπίζεται έτσι στο πεδίο της *διαπραγμάτευσης των υποκειμένων* και το θεώρημα του μεγάλου στοχαστή του καιρού μας J. Habermas, που συγκρότησε την 'Θεωρία του Επικοινωνιακού Πράττειν'⁴⁵, γίνεται ιδιαίτερα αντιπροσωπευτικό και σύμφωνα με το αυτό το *παράδειγμα της γνώσης των αντικειμένων πρέπει να αντικατασταθεί από το παράδειγμα της συνεννόησης μεταξύ υποκειμένων ικανών να επικοινωνούν μέσω της γλώσσας και να πράττουν*⁴⁶, υπαινίσσεται το επίκεντρο των διεργασιών για μια *εκπαιδευτική φιλοσοφία* μέσα στο σύγχρονο επικοινωνιακό περιβάλλον.

Μπορεί κανείς να μελετήσει αυτό που έχει πρωτύτερα ονειρευτεί

Gaston Bachelard

Στο σημείο θάθελα να καταθέσω πνευματικές οφειλές στο δάσκαλό μου ομότιμο καθηγητή Σπύρο Ζερβό που μου ενέπνευσε το αντιεξουσιαστικό εκπαιδευτικό του όραμα.

⁴³ J. M. Healy, κεφάλαιο 13, Νέα μυαλά, νέα σχολεία.

⁴⁴ M. Henry, Διδακτική Μαθηματικών, μετ. από τα γαλλικά, σελ. 29.

⁴⁵ J. Habermas, Theory des kommunikativen Handelns, 1981.

⁴⁶ J. Habermas, Ο Φιλοσοφικός Λόγος της Νεοτερικότητας, Εκδ. Αλεξάνδρεια, σελ 365.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η ΘΕΩΡΙΑ ΓΝΩΣΗΣ ΜΕΧΡΙ ΤΗΝ ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΗ

2.1. Η Θεωρία Γνώσης στους αρχαίους και οι αντιλήψεις για την νοητική αφαίρεση μέχρι τον Πλάτωνα

διά γάρ τό θαυμάζειν οι άνθρωποι και νύν και τό πρώτον ήρξαντο φιλοσοφείν.

Αριστοτέλους, Μ.τ.φ., Α2, 981a 28-29

Πριν μιλήσουμε για την φιλοσοφία των αρχαίων ελλήνων ίσως θα έπρεπε να αναφέρουμε λίγα λόγια που να συζητούν τα αίτια και το πλαίσιο που διαμορφώθηκε ο πολιτισμός που έφτασε στην ιδέα της μαθηματικής απόδειξης. Ο Α. Szabó¹ (και όχι μόνο) αποδίδει την απόδειξη αποκλειστικά στους έλληνες. Οι μεγάλοι πολιτισμοί που προηγήθηκαν του ελληνικού έκαναν μαθηματικά αλλά πουθενά δεν φαίνεται να έφτασαν σε μια ιδέα απόδειξης και μπαίνει το ερώτημα γιατί. Η απάντηση πρέπει να αναζητηθεί στην δομή και τις οικονομίες των κοινωνιών εκείνων. Μελέτες που έκαναν την δεκαετία του 60-70 πάνω στον *ασιατικό τρόπο παραγωγής*² διαφωτίζουν σε μεγάλο βαθμό την κατάσταση. Ως ασιατικό τρόπο παραγωγής εμφανίζουν μια συγκέντρωση ομογενών κοινοτήτων μιας ομογενούς παραγωγής. Π.χ. Η απέραντη παραγωγική δομή του σιτοβολώνα του Νείλου. Ελεύθεροι αγρότες προσφέρουν μέρος της σοδιάς σε μια κεντρική συντονιστική των δραστηριοτήτων εξουσία. Η εξουσία αυτή που ενδεχομένως προέκυψε από τον συντονισμό ενός αντιπλημμυρικού προγράμματος τιθάσευσης του ποταμού ή διαμορφώνεται ως αυτόνομη τάξη. Η τάξη αυτή οργανώνει ένα πολιτισμό συναθροιστικό με στόχο επίλυσης συγκεκριμένων προβλημάτων, αντιπλημμυρικού έργου, κατασκευής πυραμίδων και ναών όπως επίσης διαφύλαξη και διανομή ενός τεράστιου πλούτου. Τα προβλήματα ανάλογα και στην Βαβυλώνα με αποτέλεσμα να μην έχει προκύψει ακόμη η αυθύπαρκτη προσωπικότητα καθόσον οι άνθρωποι των κοινωνιών αυτών νιώθουν υπάρχουν και εκφράζουν τις τάξεις στις οποίες ανήκουν.

Αντίθετα στο γεωγραφικό χώρο του Αιγαίου από τις αρχές της 2^{ης} χιλιετηρίδας³ αναδύεται μια άλλη κοινωνία με τα εξής χαρακτηριστικά:

- 1) την συνύπαρξη πολλών μικρών διαφορετικών οικονομιών, του βουνού, της πεδειαδάς, της θάλασσας.

¹ Árpád Szabó, *Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών*, Εκδόσεις ΤΕΕ, Αθήνα 1973.

²Centre d' Etudes et de Recherchers Marxistes, *Sur le 'mode de production asiatique'* Editions Sociales, Paris 1974. & Ferenc Tokei, *Για τον Ασιατικό τρόπο παραγωγής*, Εκδόσεις Αναγνωστίδη.

³ G. Thomson, (1954) *Η Αρχαία Ελληνική Κοινωνία*, το προϊστορικό Αιγαίο, Εκδοτικό Ινστιτούτο Αθηνών & J. Sarcady, *The development of Greek society 12-8th centuries B.C*, Acta Antica Academiae, 1975.

- 2) Οι οικονομίες αυτές δύσκολα συγκροτούνται στην επιρροή μιας και μόνης εξουσίας.
- 3) Στα παράλια προσέρχονται κυνηγημένοι από τις εξουσίες της ανατολής τεχνίτες των μετάλλων, της κεραμικής οι οποίοι δρουν πλέον ελεύθεροι.
- 4) Οι αλυσίδα των νησιών του Αιγαίου διευκολύνει την επικοινωνία και τα θαλάσσια ταξίδια που ενθαρρύνουν το εμπόριο και τις ανταλλαγές αλλά και τον πόρο αναζήτησης νέων πληροφοριών.
- 5) Οι παραπάνω συνθήκες πυροδοτούν την ανάπτυξη μιας πλούσιας σε αφαιρέσεις γλώσσα⁴.
- 6) Την ανάπτυξη της μεγάλης βιοτεχνικής παραγωγής⁵.
- 7) Την ατομική ιδιοκτησία ως αποτέλεσμα της κινητικότητας και της διάρρηξης των ομαδικών σχέσεων⁶.
- 8) Στην συγκρότηση ενός αστικού πλέγματος ελευθέρων πολιτών για τους προκύπτει η ανάγκη ενός θεσμού διακανονισμού διαφορών, δηλαδή του δικαστηρίου.
- 9) Ανάπτυξη της επιχειρηματολογίας των σοφιστών. Τι λέμε, πώς εννοούμε. Οι συζητήσεις αυτές ήταν αναπτυγμένες μέσα στο προσωπικό περιβάλλον αλλά οργανώνονται με τον Σωκράτη και τον Πλάτωνα⁷.
- 10) Ο ελεύθερος άνθρωπος έχει ιδιοκτησία η οποία μπορεί να αμφισβητηθεί (Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα των *όρων* των κτημάτων. Οι γείτονες ενδεχομένως τα μετακινούσαν και ο δικαστής ζητούσε τον *ορισμό* του κτήματος δηλαδή να τοποθετηθούν πάλι τα παλούκια που ονομαζόταν όροι. Η μεταφορά έφτασε μέχρι τα μαθηματικά όπως ισχυρίζεται ο Szabo.) Ακόμη, η αμφισβήτηση μπορεί να είναι ηθική, πολιτική, στρατιωτική. Το τι είναι έγκλημα και το πώς τεκμηριώνεται η ενοχή είναι βασικό στοιχείο της κοινωνίας. Επίσης, η υποκίνηση ελευθέρων πολιτών σε μάχη απαιτεί την ανάπτυξη επιχειρημάτων που να παραπέμπουν σε αρχές στις οποίες να σέβονται όλοι, τις αρχές της Πόλης⁸.
- 11) Όλες οι παραπάνω προϋποθέσεις πυροδοτούν μια διαφορετική κοινωνική ψυχολογία με τελείως διαφορετικές ψυχικές λειτουργίες, διαδικασίες που θα δρομολογήσουν την συγκρότηση του ανθρώπου που σκέφτεται απομονωμένα και ανεξάρτητα ενόσον συνδέεται με την πόλη

⁴ Παναγιώτη Σπύρου (1983), Για τα ιδεολογικά φαινόμενα της προκλαστικής αρχαιότητας, *Άνθρωπος*, τόμος 10ος, Αθήνα 1983, σελ. 529–532.

⁵ Maurice Godelier, La notion de <Mode de production asiatique> et les schémas marxistes d'évolution des sociétés, σελ. 47-100 στο Centre d' Etudes et de Recherches Marxistes, Sur le 'mode de production asiatique' Editions Sociales, Paris 1974.

⁶ Στο ίδιο.

⁷ W. K. C. Guthrie 1983, *The Sophists*, Cambridge University Press. & G. S. Kirk, J. E. Raven and M. Schofield 1979, *The presocratics Philosophers*, CUP. G. Thomson 1972, *les premiers philosophes, es/ouvertures*. W. Windelband – H. Heimsoeth, *Εγχειρίδιο Ιστορίας της Φιλοσοφίας*, MIET 1980.

⁸ Βασίλη Μπρακατσούλα, *Ο διαφωτισμός στην Αρχαία Ελλάδα*, Αθήνα 1976 & J. de Romily, *Οι Μεγάλοι Σοφιστές στην Αθήνα του Περικλή*, μετ. Κακριδή, Καρδαμίτσα 1994.

μέσω του λόγου που συνέχει τα άτομα. Έχουμε, δηλαδή, την πρώτη ανάδειξη του Εγώ ως κοινωνικής κατηγορίας⁹.

Στην φιλοσοφία των αρχαίων δεν βρίσκουμε ολοκληρωμένη Θεωρία Γνώσης, αφού μια τέτοια εκδοχή της φιλοσοφίας τονίζεται κατά τους νεότερους χρόνους. Ωστόσο, επιμέρους γνωσιοθεωρητικές ιδέες εμφανίζονται ακόμη και στην προσωκρατική φιλοσοφία¹⁰. Στην *Ιστορία της επιστημολογίας* ο D. W. Hamlyn παρατηρεί: *Οι Προσωκρατικοί, οι πρώτοι φιλόσοφοι της δυτικής παράδοσης, δεν έδωσαν θεμελιώδη προσοχή στον κλάδο αυτό, γιατί πρωταρχικά ήταν απασχολημένοι με τη φύση και τη δυνατότητα της μεταβολής. Πήραν σαν δεδομένο ότι η γνώση της φύσης ήταν δυνατή, αν και μερικοί απ'αυτούς σκέφθηκαν ότι η γνώση της δομής της πραγματικότητας μπορούσε καλύτερα να επιτευχθεί από ορισμένες άλλες πηγές παρά από άλλες... Αμφιβολίες άρχισαν να παρουσιάζονται μόλις τον 5ο αι. και υπεύθυνοι γι'αυτές ήταν κυρίως οι σοφιστές¹¹.*

Η σκέψη αυτών των πρώτων φιλοσόφων στρέφεται προς το αντικείμενο, απορροφάται από το αντικείμενο και το θεωρεί αναλλοίωτο από την ενέργειά της. Αλλά οι φιλόσοφοι αυτοί, χωρίς να έχουν συνείδηση ότι έκαναν επιστήμη της γνώσης αλλά οντολογία, προχώρησαν σε διακρίσεις μιλώντας για βαθμούς αλήθειας *δόξα, πίστη, αλήθεια*, ακόμα και *πιθανότητα*, τα είδη γνώσης *εμπειρική, λογική και μαθηματική*, και τις πηγές της *νόηση, αίσθηση*. Εθεσαν τις πρώτες γνωσιολογικές αρχές γνώση δια των ομοίων και γνώση δια των εναντίων καθώς και τις πρώτες λογικές αρχές *νόμοι ταυτότητας και αντίφασης¹²*.

Οι Προσωκρατικοί θεωρήθηκαν αισθησιοκράτες, αν και είναι χαρακτηριστικό κοινό γνώρισμα τους η δυσπιστία τους στην μαρτυρία των αισθήσεων. Κριτήριο της αλήθειας θεωρούν τον *λόγον* είτε τον *κοινόν* είτε τον *επιστημονικόν* ή τον *ορθόν*. Ο Αριστοτέλης ισχυρίζεται ότι ταύτιζαν το *φρονείν* με το *αισθάνεσθαι* και ότι έδιναν στο *νοεόν* εμπειρική αφετηρία και σωματική υπόσταση. Στον Ξενοφάνη βρίσκουμε την άποψη ότι οι ιδέες πρέπει να υποβάλλονται στο *κριτήριο της αλήθειας* και τον *λόγο* τον *κοινόν*, τον *ορθόν* και τον *επιστημονικόν*. Η λέξη *επιστήμη* απαντά στον Δημόκριτο, ο *επιστήμων*, *αντεπιστήμων* στους Πυθαγορείους ενώ το *επίσταμαι* και στον Ηράκλειτο. Επίσης, αναφέρουμε τα ρήματα *γιγνώσκειν, ειδέναι, μαθηθάνειν*. Στον Παρμενίδη συναντούμε το επίθετο *νοητόν* αν και όχι σε αντιδιαστολή προς το *αισθητόν*. Επίσης, στον Παρμενίδη αναζητείται ο θεωρητικός κόσμος της Πραγματικότητας που βρίσκεται πίσω από το φαινομενικό των εμφανίσεων. Η πραγματικότητα δημιουργείται από επιχειρήματα και εντελώς διαφορετικά από τον φαινομενικό κόσμο. Το εμπειρικό δόγμα των Ιώνων φιλοσόφων κήρυξε ότι *τα πάντα ρεί* και δεν υπάρχει τίποτα στο νου αν δεν περάσει από τις αισθήσεις. Ο

⁹ Jean- Pierre Vernant, Μύθος και σκέψη στην αρχαία Ελλάδα. Εκδόσεις Ολκός, 1975, & J. P. Vernant “Η καταγωγή της ελληνικής σκέψης”, Δίπτυχο, 1966.

¹⁰ Κ. Μουτσόπουλου, σημειώσεις Θεωρίας Γνώσεως 1970, Δραγώνα Μοναχού, Η Θεωρία Γνώσης των Προσωκρατικών, Δευκαλίων 1974.

¹¹ History of Epistemology, *The Encyclopedia of Philosophy*, U.S.A. 1967, τ. 3, σ. 9, το απόσπασμα από την Δ. Μοναχού.

¹² Δρ. Μοναχού

Παρμενίδης¹³ υποστηρίζει *Το γαρ αυτό νοεῖν ἐστὶν τε και εἶναι*. Το δόγμα του Παρμενίδη οδηγεί σε ένα νοητικό κόσμο αόρατο και αντιεμπειρικό. Ο μαθητής του ο Ζήνωνας θα προχωρήσει παραπέρα με τα παράδοξα και εισάγοντας για πρώτη φορά την εις άτοπον απαγωγή θα προσπαθήσει να δείξει ότι η φαινομενικότητα δεν υπάρχει¹⁴.

2.2 Πλάτων

Οι βασικές επιρροές στον Πλάτωνα¹⁵ είναι από τον δάσκαλό του Σωκράτη, τους Πυθαγόρειους, τον Παρμενίδη. Το βασικό πρόβλημα της γνωσιοθεωρίας του συνίσταται στην διάκριση δυο κόσμων, του νοητού και του αισθητού. Ο δυϊσμός αυτός είναι πυθαγόρειας προέλευσης και προσδιορίζει την κλίμακα της αφαίρεσης που επιτελεί ο νους μεταξύ αισθητών και νοητών. Ο πρώτος κόσμος, ο κόσμος των *Ιδεών*, ευρίσκεται υπεράνω του κόσμου των φυσικών αντικειμένων και ικανοποιεί το αίτημα του Παρμενίδη για την ταυτότητα, αποτελεί το σταθερό και αμετάκλητο πρότυπο όλων των υποδεεστέρων διαβαθμίσεων της πραγματικότητας¹⁶, τον στόχο κάθε πραγματικής επιστήμης για την επίτευξη της απόλυτης γνώσης. Στον κόσμο αυτό, ο Πλάτων τοποθετεί και τα μαθηματικά αντικείμενα. Ο δεύτερος κόσμος, ο κόσμος της αίσθησης και της ροής, της μεταβολής και του γίνεσθαι, έχει ηρακλείτεια προέλευση, αποτελεί αφετηρία των αισθητηριακών δεδομένων που βρίσκονται σε διαρκή μεταβολή. Η συνεχής μεταβολή των αισθητηριακών δεδομένων, οδήγησε την σκέψη του Πλάτωνα στην αναζήτηση της ενότητας αυτών κάτω από μια καθολική έννοια, την ιδέα, ώστε να περιλάβει *ενί είδει* τις διαφοροποιήσεις των καθ'έκαστα, και να δώσει, κατά συνέπεια, λόγο ως προς το τι πράγματι είναι επιστήμη¹⁷. Η αίσθηση παρεμποδίζει την ανάπτυξη της επιστήμης όταν αυτή ορίζεται ως *σωματικόν πάθος*, ως *ατομική*, ως φορέας των *πολλών χωρίς το έν*, ως *ασταθής και μεταβαλλόμενη*, ως *ασαφής φύσις*, ως *είναι πώς*, ως *φαίνεσθαι* ή ως *επιστήμη* με το νόημα που έδινε στην λέξη ο Πρωταγόρας ως απλή αίσθηση *ουκ άλλο τι ἐστὶν επιστήμη ἢ αἰσθησις*¹⁸ (η επιστήμη δεν είναι τίποτε άλλο από αἰσθησις). Σε αυτή την περίπτωση, δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ επιστήμης και μή επιστήμης, *ουκ ἄρ' ἂν εἴη ποτέ... αἰσθησις τε και επιστήμη ταυτόν*¹⁹ (δεν είναι επιστήμη και αίσθηση το ίδιο).

Οι αισθήσεις για τον Πλάτωνα επηρεάζουν την γνωστική διαδικασία ως αφορμές γνώσεων, όταν δηλαδή αφυπνίζουν την μνήμη και προκαλούν ανάμνηση.

¹³ Popper K.: 1988, *The world of Parmenides*, Routledge, London and New York

¹⁴ A. Szabo, *Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών*.

¹⁵ A. E. Taylor, *Πλάτων*, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης, 1992.

¹⁶ Μόνος λόγος πια για οδό απομένει πώς υπάρχει (το όν)... το άπλαστο κι ανώλεθρο... τέλειο κι απράνταχτο. Ούτε ήταν ούτε θάναι, τώρα είναι όλο μαζί, ένα συνεχές... Δε θ'αφήσω απ'το μή όν να μου πεις ή να εννοήσεις, κι άρρητο και μή νοητό είναι το πως δεν υπάρχει... ούτε από το μή όν θ'αφήσει της πειθώς η δύναμη πλάϊ σ'αυτό να γίνει κάτι..., Ελεάτες, Τα κείμενα, Ε. Ρούσου, Δευκαλιών 33/34, 1982, επίσης J. Burnet, *Η Αυγή της ελληνικής φιλοσοφίας*, μετ. εκδ. Αναγνωστίδη, σελ. 172

¹⁷ επιστήμης λαβείν λόγον τι πότε τυγχάνει όν, Θεαίτητος, 148b, Ζαχαρόπουλος.

¹⁸ Θεαίτητος, 151e.

¹⁹ Θεαίτητος, 186e

Δηλαδή αντίθετα με τις παρεξηγήσεις του Πλατωνισμού υπάρχει κάποια σχέση της πραγματικότητας με το νοητό κόσμο των ιδεών. Η μνήμη, ως γνωσιολογική δραστηριότητα, είναι εξ ολοκλήρου προσανατολισμένη προς την γνώση των ιδεών, γνώση που κατά βάθος είναι αναγνώριση που προϋποθέτει ανάμνηση. Την μνήμη εξάλλου ονομάζει *σωτηρίαν της αισθήσεως*²⁰.

Μέσα στην φιλοσοφία του Πλάτωνα, η μνήμη είναι προγενέστερη του σώματος και δύναται, ως εκ τούτου, να διατηρεί την αίσθηση του παρελθόντος, του παρόντος και του μέλλοντος και έτσι συνδέει την *ανάμνηση* με την διαδικασία της μάθησης. Οι αισθήσεις πάλι προϋποτίθενται στην διαδικασία της ανάκλησης της απολεσθείσης γνώσεως και συνιστούν την αναγκαία προϋπόθεση για την εμπειρική γνώση και την επιστήμη. Μέσω ομοιοτήτων και ταυτίσεων εξασφαλίζεται ο μηχανισμός αναγνώρισης και ταυτότητας του όντος, και συνεπώς του είδους, η διαίρεση και ειδοποιός διαφορά²¹. Δηλαδή την έννοια της ταυτότητας και της διαφοράς.

Στην κατανόηση αυτών των σχέσεων βοηθάει το σχήμα με το οποίο ο Πλάτων δίνει την πορεία της γνώσης από τα *ορώμενα* στα *νοούμενα* και αποτελεί την πρώτη περιγραφή της διαδικασίας της αφαίρεσης που στοχεύει να συγκροτήσει μια επιστημολογία. Συγκεκριμένα καταγράφει την κλίμακα:

Νοούμενα - *Νόησις*: δ) Ιδέα του αγαθού, δ) Νόησις ως επιστήμη, γ) Γενικές έννοιες, που δεν έχουν απαλλαγεί από τα ορατά, γ) Διάνοια.

Ορώμενα - *Δόξα*: β) Ορατά, β) Πίστις, α) Εικόνες, α) Εικασία.

Στην πρώτη βαθμίδα της γνώσης είναι η *εικασία* που αντιστοιχεί στις *εικόνες*, δηλαδή στα απλά δεδομένα των αισθήσεων, η γνώση των οποίων είναι στο στάδιο της δόξας, ανάμεσα στην άγνοια -**μη όν** και στην νόηση - **όν**.

Στην δεύτερη βαθμίδα της *πίστης* και αντιστοιχεί στην γνώση των ίδιων των αισθητών και όχι των *εικόνων* τους, στη γνώση των γύρω μας ζώων και όσων παράγει η φύση και κατασκευάζει ο άνθρωπος.

Στην τρίτη βαθμίδα, της *διάνοιας*, η γνώση περνάει στο νοητό κόσμο, αλλά δεν έχει απαλλαγεί ακόμη από τον ορατό. Η σχέση της με την τέταρτη βαθμίδα, που είναι η *νόησις*, είναι όμοια με εκείνη της εικασίας σε σχέση με την πίστη.

Τα Μαθηματικά ανήκουν στην τρίτη βαθμίδα και τοποθετούνται από τον Πλάτωνα στη θέση του μέσου ανάμεσα στη δόξα και στη νόηση - για δυο λόγους:

α) τα Μαθηματικά θεωρούνται διφυή, από τη μια μεριά βοηθούνται από τη χρησιμοποίηση των ορωμένων ειδών και κάνουν τους συλλογισμούς τους επάνω σε αυτά και από την άλλη, η διάνοια δεν αναφέρεται στα ορώμενα *αλλά σε εκείνο των οποίων αυτά είναι εικόνες, γιατί η αποδεικτική τους διαδικασία έχει να κάνει με το καθαυτό τετράγωνο και την καθαυτή διάμετρο και όχι αυτήν που σχεδιάζουν*²².

²⁰ Φίληβος, 34α και Τίμαιος, 64b –c.

²¹ Μπαρζελιώτης.

²² A. Szabo, *Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών*.

β) Στα Μαθηματικά η έρευνα, *το ζητείν*, ξεκινάει από υποθέσεις, που δεν προχωρούν προς την *αρχή* (το *έν*, το αγαθόν), αλλά προς το συμπέρασμα, επί την τελευταίην.

Μόνο η τέταρτη βαθμίδα, η νόηση ο καθαρός λόγος στηριγμένος στη διαλεκτική δύναμη - χρησιμοποιεί τις υποθέσεις ως βάση, για να εξορμήσει προς την *ανυπόθετη αρχή* και προχωρεί έξω από κάθε υπόθεση χωρίς να οδηγείται από εικόνες όπως στην προηγούμενη περίπτωση, αλλά από καθαρά είδη ακολουθώντας στην έρευνα την συνάφειά τους²³.

Εδώ θα ήταν σκόπιμο να δούμε την πορεία προς την αφαίρεση όπως αυτή περιγράφεται από τον πυθαγόρειο Αρχύτα ο οποίος λέει: *Η λειτουργία της σοφίας έγκειται εις το να θεωρεί όλα τα όντα εν τή ολότητι αυτών και να γνωρίζει την γενικωτάτην αυτών απόδοσιν. Εκείνος δ'όστις είναι ικανός να αναλύει όλα τα είδη και να ανιχνεύει και να συνάπτει αυτά εις ομάδας και δι' αντιστρόφου λειτουργίας να ανάγη εις μίαν μόνον αρχήν, ούτος είναι ο σοφώτατος και πλησιέστατος προς την αλήθειαν. Ούτος φαίνεται ότι εύρε το υπέρτατον παρατηρητήριον, από της κορυφής του οποίου δύναται να παρατηρεί τον Θεόν και όλα τα πράγματα τα ανήκοντα εις την Θεότητα. Η γνώση είναι κατορθωτή μόνον δια του Νου, (όμμα της ψυχής), κατόπιν ασκήσεων και σαφούς θεωρήσεως²⁴.*

Ο Πλάτων χρησιμοποιεί τις λέξεις "αριθμητική" και "λογιστική" που σημαίνει υπολογισμός. Ωστόσο, ως αριθμητική δεν θεωρεί την άσκηση στο μέτρημα, αλλά την μελέτη της μονάδας. "η περί το έν μάθησις"²⁵ και της φύσεως των αριθμών²⁶. Με άλλα λόγια, είναι η μελέτη των ίδιων των αριθμών²⁷, η οποία έχει την δύναμη να οδηγήσει την ψυχή στην θεωρία της πραγματικότητας²⁸, επειδή την εξαναγκάζουν να χρησιμοποιήσει την νόηση ή την λογική αποκλείοντας τις αισθήσεις²⁹.

Δεν μπορεί κανείς να μελετήσει τους *ίδιους τους αριθμούς παρουσιάζοντάς τους με ορατά και απτά αντικείμενα*³⁰. Τελικά, η Αριθμητική ως *ελκτικόν παντάπασι προς ουσίαν* έχει την δύναμη να οδηγεί από το αισθητό και συγκεκριμένο στη νόηση, στη γενικότερη σύλληψη, στη γνώση του "τί εστί" στην "του όντος θέαν"³¹. Ακόμη, η σημασία της Γεωμετρίας έγκειται, όχι στον πρακτικό της ρόλο, αλλά στο γεγονός ότι είναι ένας τρόπος να μελετήσουμε τα αιώνια και αμετάβλητα όντα και βοηθά

²³ Πολιτεία, 510b, Ζαχαρόπουλος.

²⁴ Σακελαρίου, Πυθαγόρας, σελ 148, 275. Ενδιαφέρουσες είναι οι απόψεις του Αρθουρ Κάισλερ στους Υπνοβάτες, παραπέμποντας στην Ορφική παράδοση των Πυθαγορείων όπου η λέξη Θεωρία φορτίζεται με *απόλυτη θρησκευτική θεώρηση στην οποία ο θεατής ταυτίζεται με τον μαρτυρικό θεό, πεθαίνει με τον θάνατό του ξαναγεννιέται με τη νέα γέννησή του*. Η γραμματική δυνατότητα τον *θεό-ορώ*, *θεωρώ* ως θέαση του αναλλοίωτου είναι προφανής. Την νοσταλγία της απόλυτης χωρικής άχρονης διάστασης του μαθηματικού σύμπαντος επικαλείται ο J. Gabel, Η Ψευδής συνείδηση, Ακμών 1978, ως διαφυγή από το άγχος του αναπόδραστου του χρόνου και του θανάτου. Ο Κρόνος στους ορφικούς που τρώει τα παιδιά του είναι ο Χρόνος.

²⁵ Πολιτεία Ζ', 524e-525a

²⁶ Πολιτεία Ζ', 525c

²⁷ 525d.

²⁸ 523a, 524d-525b

²⁹ 525d

³⁰ 526a

³¹ Η λέξη θεώρημα ενδέχεται να είναι σύνθεση των λέξεων Θεός και ορώ, βλέπε παραπάνω σχόλιο του Αρχύτα. Arthur Kestler, Οι Υπνοβάτες, εκδόσεις Χατζηνικολή 1975, σελ. 28.

στην ανύψωση της ψυχής προς την αλήθεια, δηλαδή προχωρεί από την πρακτική γνώση στον κόσμο της αφάιρησης και της γενίκευσης, της "ουσίας". Ο αληθινός σκοπός της γεωμετρίας είναι η γνώση, όχι των πραγμάτων που γεννιούνται και καταστρέφονται, αλλά των αιώνιων όντων και θα πρέπει να τη μελετά κανείς για να ανακαλύψει την εσώτερη αρχή του κόσμου, η οποία διέπει και συνέχει τα πάντα. Οι ιδέες και τα γεωμετρικά σχήματα έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό, είναι αμετάβλητα και ανεξάρτητα των αισθητών αντικειμένων.

Η Γεωμετρία ασχολείται, όχι με μετρήσεις και κατασκευές των συγκεκριμένων γεωμετρικών σχημάτων, αλλά με τα ίδια τα γεωμετρικά σχήματα, δηλαδή με σημεία, γραμμές, τρίγωνα, τετράγωνα κ.λ.π, ως αντικείμενα καθαρής σκέψης. Όταν χρησιμοποιούμε ένα σχήμα στην Γεωμετρία, δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια εικόνα, το τρίγωνο που σχεδιάζουμε είναι μια ατελής αναπαράσταση του τριγώνου που σκεφτόμαστε.

Θα γνωρίζεις βέβαια ακόμα πώς χρησιμοποιούν, εκτός αυτού, και τα ορατά είδη και επάνω σε αυτά κάνουν τους υπολογισμούς τους, αν και δεν τους ενδιαφέρουν αυτά τα ίδια, αλλά εκείνα που είναι εικόνες τους. Οι συλλογισμοί τους, δηλαδή, αναφέρονται στο κάθαυτό, π.χ. τετράγωνο και στην καθεαυτή διάμετρο και όχι σε αυτή που σχεδιάζουν, το ίδιο και για τα άλλα που πλάθουν ή ζωγραφίζουν και που μπορεί να έχουν σκιές και εικόνες επάνω στα νερά: αυτά τα μεταχειρίζονται πάλι απλά σαν εικόνες και ζητούν να δούμε εκείνα τα ίδια, που δεν μπορεί κανείς να τα δει αλλιώς παρά με την διάνοια³².

2.3 Το αίτημα 'φιλοκαλούμε με ευτελείας' και η Χρυσή Τομή³³

Η ιδέα του Πλατωνισμού προετοιμάζεται στους Πυθαγόρειους και τους Ελεάτες αλλά ολοκληρώνεται στον Πλάτωνα. Στην ιστορία μπορεί να τον διακρίνει κανείς σε κείμενα των νεοτέρων όπως του Frege, του Russell, του Cantor, του Bernays, του Hardy, του Hilbert, του Gödel, για να αναφέρουμε ορισμένους πλέον γνωστούς υποστηρικτές μιας ρεαλιστικής αντίληψης των Μαθηματικών. Ο Πλατωνισμός ισχυριζόταν, όπως φάνηκε στα παραπάνω, ότι τα αντικείμενα και οι δομές των

³² ζ'510e

Euclid, The thirteen Books of the Elements, Vol. II, Thomas L. Heath, Dover 1956. B. Felt (2006) *As In-depth Investigation of the divine – Ratio TMME*, Vol 3, no 2, pp157-175. Πηγές από το Διαδίκτυο: *Problems of "golden section" and functional asymmetry of the brain*, N. N. Nikolaenko, & Doctor of Medicine, Professor. *Museum of Harmony and the Golden Section: Mathematical Connections in Nature, Science, and Art*, Dr. Oleksiy Stakhov. & *Fibonacci numbers and the Golden Section*, Radoslav Jovanovic. & *Golden section - Golden Triangle - Pentagon and Pentagram - Dodecahedron*, Herman Serras. & *The Golden section ratio - Some Solid (Three-dimensional) Geometrical Facts about the Golden Section: & Mathematics In Leonardo Da Vinci's Vitruvian Man*, Elizabeth Stephens-Doll. & *The Golden Section in Nature*, Gary Meisner. & *On Symmetry in School Mathematics*, Tommy Dreyfus) & Theodore Eisenberg. & *The archetypal hypothesis of C.G. Jung and W. Pauli and the number archetypes: An extension of the concept to the golden number*, Vasile V. Morariu - Charles R. Card (Paideusis Journal for Interdisciplinary and Cross-Cultural Studies).

μαθηματικών έχουν πραγματική ύπαρξη, ανεξάρτητη από την ανθρωπότητα και το να κάνεις Μαθηματικά είναι μια διαδικασία ανακάλυψης προϋπαρχόντων σχέσεων. Σύμφωνα με τον Πλατωνισμό, η μαθηματική γνώση αποτελεί την περιγραφή αυτών των αντικειμένων όπως και των σχέσεων ή των δομών που τα συνδέουν. Η μαθηματική δραστηριότητα είναι μια διαδικασία ανακάλυψης (και όχι επινόησης). Οι περισσότεροι ενεργοί μαθηματικοί νιώθουν ως ήπιοι πλατωνικοί. Ο Bill Tutte³⁴ ένας από τους δημιουργούς της Θεωρίας Γραφημάτων στον 20ο αιώνα προβληματίζεται για το πλατωνικό ή μη των Μαθηματικών και λέει χαρακτηριστικά.

Οι θεωρίες της φυσικής Είναι πράγματι μαθηματικές θεωρίες μαζί με κάποια αυθαίρετη ταυτιση μαθηματικών και φυσικών εννοιών. Το γιατί τέτοιες θεωρίες πρέπει να είναι τόσο πετυχημένες όσο είναι, αποτελεί ένα φιλοσοφικό μυστήριο: Κάποιοι υποστηρίζουν ότι δεν υπάρχει κανένα μυστήριο. Οι μαθηματικοί έχουν διεισδήσει τόσο πολύ στο χώρο της Φυσικής που έχουν επιβάλλει τις δικές τους συνήθειες στον τρόπο σκέψης. Προσωπικά δεν πιστεύω, πως γι' αυτό το λόγο είναι τόσο επιτυχημένες θεωρίες. Είμαι πεπεισμένος ότι πολλές από τις αποτυχίες μου στην μαθηματική έρευνα οφειλόταν στην προσπάθεια μου να επιβάλλω τα δικά μου πρότυπα στο δύστροπο αντικείμενο. Στις επιτυχίες μου, πάλι, είχα την εντύπωση, ότι το να βρίσκω το πρότυπο εκεί που προϋπήρχε, ήταν κάτι που μου προκαλούσε έκπληξη και συγχρόνως κάτι που ξεπερνούσε τις δυνατότητες της εφευρετικότητας μου.

Ο Πλατωνισμός, προφανώς, προσφέρει μια λύση στο πρόβλημα της αντικειμενικότητας των μαθηματικών αντικειμένων και συνυπολογίζει από κοινού την αλήθεια και την ύπαρξη των αντικειμένων όπως και την προφανή αυτονομία των μαθηματικών, που υπακούουν σε εσωτερικούς νόμους και στη λογική.

Το μειονέκτημα του Πλατωνισμού είναι ότι δεν μας εξηγεί πώς ο άνθρωπος έρχεται σε επαφή με αυτό τον κόσμο των Ιδεών, ποιος είναι ο τρόπος που κοινωνούνται αυτές στον ανθρώπινο νου. Ο Πλάτων επικαλέστηκε όπως είδαμε την *ανάμνηση*. Στο διάλογο "Μένων" εμφανίζει τον Σωκράτη να βοηθά με επιδεξιότητα ένα ακαλλιέργητο νεαρό δούλο και να τον οδηγεί στη σωστή χρήση των αρχών της λογικής και των Μαθηματικών και δείχνει πώς η κατοχή των αρχών αυτών προκύπτει ως ανάμνηση και όχι ως απόκτηση³⁵. Αυτή η αντίληψη έχει την ανάγκη μιας υπερφυσικής θεωρίας περί ψυχής κι ίσως ακόμη και μετεμψύχωσης, κάτι που ανάγεται σε παλαιότερες Πυθαγόρειες δοξασίες³⁶ και οπωσδήποτε δεν είναι εύκολο στην απολυτότητά της να εξηγήσει τις πολύπλοκες κατασκευές των σύγχρονων μαθηματικών³⁷.

Πιστεύετε ακόμη ότι οι αρχαίοι Έλληνες ανέπτυξαν την επιστήμη της αισθητικής ως μέθοδο ανάλυσης της ομορφιάς, πιστεύοντας ότι η αρμονία αποτελούσε τη βάση της. Η Ομορφιά και η Αλήθεια συσχετίζονται: ο καλλιτέχνης αναζητά την Αλήθεια στην Ομορφιά, κι ο επιστήμονας την Ομορφιά στην Αλήθεια. Ο κόσμος για αυτούς ήταν ένα κόσμημα που το θαύμαζαν. Οι εξηγήσεις τους

³⁴ W. T. Tutte: Τι είναι τα Μαθηματικά, μετάφραση Σπύρου QUANTUM, Τόμος 3, τεύχος 2, 1996, σελ. 50–54.

³⁵ Ε. Παπανούτσου, Γνωσιολογία, σελ. 69.

³⁶ Ε. Σακελαρίου, Πυθαγόρας.

³⁷ P. Ernest, The Philosophy of Mathematics Education, σελ 29.

ανταποκρίνονταν σε ένα αισθητικό αίτημα το *φιλοκαλούμεν μετ' ευτελείας* του Περικλή ίσως να χαρακτηρίζει την ουσία του αρχαίου ελληνικού πολιτισμού³⁸. Μπροστά στην γοητεία που προσφέρουν τα Μαθηματικά με τις συμμετρίες τους, τα αναγκαία συμπεράσματα, την εμπλοκή των αποτελεσμάτων τους σε ζητήματα του κόσμου έμπαινε το ερώτημα από πού προέρχονται και αν έχουν κάτι το θεϊκό, το άφθαρτο και αναλλοίωτο³⁹. Ο θαυμασμός και η απορία συνεχίζει να απασχολεί την φιλοσοφία και την επιστήμη και σήμερα. Στην εισαγωγή παρέθεσα το κύριο πρόβλημα της επιστημολογίας των Μαθηματικών όπως το διατυπώνει ο Piaget ή όπως αποπειρώνται να απαντήσουν οι Lakoff G. & Núñez E. R (2000) στο *Where Mathematics comes from*⁴⁰. Ο θαυμασμός αυτός διατρέχει όλη την φιλοσοφία και την κάθε εποχή επινοούνται άλλες λύσεις. Σήμερα σημαντική είναι η στρουκτουραλιστική εκδόχη που βλέπει δομές στον κόσμο στο DNA στην μοριακή δομή και θα μπορούσε να συζητηθούν ως προβολές και προκαθορισμοί της κατασκευής μας⁴¹. Ωστόσο, την εποχή του ο Πλάτων το έλυσε με τον κόσμο των Ιδεών κάτι που δεν μπορεί σήμερα να γίνει αποδεκτό αλλά έβαλε το ζήτημα. Σήμερα οι συζήτηση γίνεται με θέμα της αντικειμενικότητας των Μαθηματικών δομών ή της αναγκαιότητας σε κάποια αξιώματα να έχουμε μονοσήμαντες απαντήσεις στα προβλήματα. Μετά τον Gödel το ζήτημα έγινε πολύπλοκο και θα το συζητήσουμε παρακάτω. Ωστόσο, τώρα θα παρουσιάσουμε στοιχεία από την γοητεία και το μυστήριο της Χρυσής Τομής χωρίς οπωσδήποτε καμιά μυστικιστική φόρτιση ώστε να αναγνωρίσουμε τον κόσμο που ο Πλάτων είχε μυστά του και προσπάθησε να αποδώσει.

Την μεγάλη προσφορά του Πλάτωνα στην ιστορία της φιλοσοφίας υπογραμμίζει ο φιλόσοφος του 20ου αιώνα A. Whitehead (1929), θεωρώντας ότι όλη η ευρωπαϊκή φιλοσοφία αποτελείται από μια σειρά σημειώσεων στον Πλάτωνα⁴².

Το πλέον διαδεδομένο κριτήριο ομορφιάς είναι η Χρυσή Τομή, ή Θεία Αναλογία ή Χρυσός Λόγος. Η πρώτη μαθηματική διατύπωση της ιδέας γίνεται από τον Ευκλείδη στην Πρόταση VI. 30 των *Στοιχείων*: Η αρχή γίνεται με τη διαίρεση ενός ευθυγράμμου τμήματος σε άκρο και μέσο λόγο. Ένα σημείο πάνω σ' ένα ευθύγραμμο τμήμα διαιρεί το τμήμα σε μέσο και άκρο λόγο αν ο λόγος ολόκληρου του τμήματος προς το

³⁸ Δεν είναι ίσως τυχαίο ότι είναι η προμετωπίδα στο Μουσείο της Ακρόπολης. Αυτή η δωρικής επίδρασης απαίτηση φαίνεται σε αυτό που ο Αριστοτέλης καθορίζει για *ορισμό* μια *αναγκαία* και *ικανή* συνθήκη G. Lakoff & R. Núñez (2000) *Where Mathematics comes from*, Basic Books.

³⁹ *Τόσο εύλογο το Ακατανόητο*, του Οδυσσέα Ελύτη Γένεσις, Αξιον Εστί.

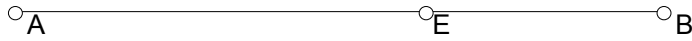
⁴⁰ Lakoff G. & Núñez E. R.: 2000 *Where Mathematics comes from*, basic books, New York.

⁴¹ Shapiro S., *Σκέψεις για τα Μαθηματικά*, Ελλ. Μετ. Δρόσος & Σπανός, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 2006. J. Piaget, στρουκτουραλισμός, Εκδόσεις Καστανιώτη, 1972. M. Otte, Limits of Constructivisme: Kant, Piaget and Pierce. *Science & Education* 7, 427-450 (1998). Ulf Grenander Geometries of Knowledge, Proc. Acad. Sci. USA, Vol. 4 p. 83-89, 1997.

⁴² Roy Bhaskar, *Plato Etc*, Verso, London- New York 1994.

μεγαλύτερο από τα τμήματα είναι ίσος με το λόγο του μεγαλύτερου τμήματος προς το μικρότερο.

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{EB} \quad (1)$$



Αυτή η διαίρεση του ευθυγράμμου τμήματος ονομάζεται χρυσή τομή. Το πηλίκο AB/AE ονομάζεται χρυσός λόγος, είναι άρρητος αριθμός με τιμή 1,618... και συμβολίζεται συχνά με το γράμμα Φ . Κατά προσέγγιση, τα δύο τμήματα που προκύπτουν έχουν ποσοστιαία αναλογία 62% και 38% του μήκους του αρχικού τμήματος, αντίστοιχα.

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{AB - AE} \Leftrightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{1}{\frac{AB}{AE} - 1}$$

Θέτοντας $\frac{AB}{AE} = \Phi$, η σχέση δίνει την αλγεβρική εξίσωση:

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \quad (2)$$

η θετική ρίζα της οποίας είναι:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

Η σχέση (2) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} \quad (3)$$

ή

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 \quad (4)$$

Η σχέση (4) δηλώνει ότι ο αντίστροφος του Φ προκύπτει αν από το Φ αφαιρεθεί η μονάδα. Ο χρυσός λόγος είναι ο μοναδικός θετικός αριθμός που έχει αυτή την ιδιότητα.

Η χρυσή τομή και οι συσχετιζόμενοι με αυτήν αριθμοί Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...) διέπουν την ιστορία της τέχνης. Παραδείγματα γνωστών έργων που παρουσιάζουν την εν λόγω αναλογία είναι οι Πυραμίδες της Αιγύπτου, ο Παρθενών, τα αρχαιοελληνικά γλυπτά, η Mona Lisa του Leonardo Da Vinci, πίνακες του Ραφαήλ, η μουσική του Beethoven και του Mozart κλπ.. Μερικά από τα πλέον αξιοσημείωτα και καθολικά στοιχεία που υποδεικνύουν το ρόλο της χρυσής τομής ως ασυναίσθητου τελεστή ταξινόμησης στην ανθρώπινη ψυχολογία

προέρχονται από την ανάλυση αρχαιολογικών και εθνογραφικών χειροτεχνημάτων που παρουσιάζουν αναλογίες που ακολουθούν τη χρυσή τομή ή αναλογίες που συνδέονται με αυτή. Πολλές πρόσφατες μελέτες σε προϊόντα αγγειοπλαστικής και πήλινα χειροτεχνήματα από τη Νεολιθική περίοδο ή την αρχαιότητα αποκαλύπτουν την πανταχού παρουσία της χρυσής τομής στις αναλογίες τους. Αν στο δεξί μέλος της σχέσης (3) αντικαταστήσουμε το Φ με το ίσο του, όπως δίνεται από την (3), έχουμε την παράσταση:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} \quad (5)$$

και αν συνεχίσουμε την αντικατάσταση προκύπτει το συνεχές κλάσμα:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}}} \quad (6)$$

Επειδή $\Phi > 0$, η σχέση (2) δίνει:

$$\Phi = \sqrt{1 + \Phi} \quad (7)$$

και αν αντικαταστήσουμε το Φ στο δεξί μέλος με το ίσο του, όπως δίνεται από την (7), έχουμε τη μορφή:

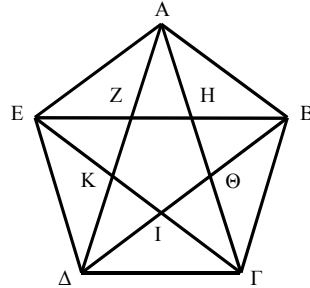
$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \Phi}} \quad (8)$$

και με διαδοχικές αντικαταστάσεις:

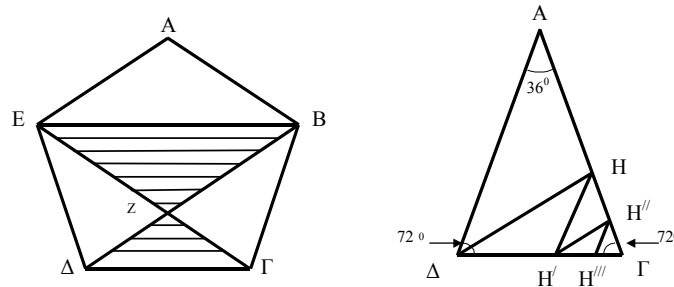
$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \Phi}}} \quad (9)$$

Γεωμετρική αναπαράσταση: Η χρυσή τομή χρησιμοποιείται ευρύτατα στη γεωμετρία. Το κανονικό πεντάγωνο διέπεται από τη χρυσή τομή. Οι διαγώνιοί του διαιρούνται σε χρυσό λόγο δύο φορές.

Στα αρχαία χρόνια, στη σχολή των Πυθαγορείων, το πεντάγωνο σχεδιασμένο με τις πέντε διαγωνίους του αποτελούσε σύμβολο ζωής και υγείας. Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση μπορούμε να αποδείξουμε ότι στο κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ τα σημεία Ζ, Η, Θ, Ι, Κ τομής των διαγωνίων τις διαιρούν σε χρυσή τομή και σχηματίζουν κανονικό πεντάγωνο, το ΖΗΘΙΚ.

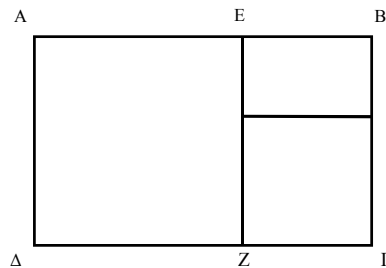


Το κανονικό πεντάγωνο περικλείει ένα πλήθος όμορφων σχημάτων τα οποία χρησιμοποιούνται ευρέως σε έργα τέχνης. Στην αρχαία Ελλάδα και Αίγυπτο ήταν γνωστός ο νόμος του «χρυσού ποτηριού». Χρησιμοποιούνταν από αρχιτέκτονες και χρυσοχόους. Αν σχεδιάσουμε τις διαγωνίους ΒΕ, ΒΔ και ΕΓ στο πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ, το τμήμα που διαμορφώνεται μέσα στα τρίγωνα ΕΒΙ και ΙΔΓ παίρνει τη μορφή ενός ποτηριού. Υπάρχει και ένα άλλο κομψό σχήμα μέσα στο πεντάγωνο. Είναι το «χρυσό τρίγωνο», το ΑΔΓ λόγου χάρη, του οποίου η βάση είναι η πλευρά του κανονικού πενταγώνου. Το τρίγωνο έχει τη γωνία της κορυφής Α ίση με 36° και τις γωνίες της βάσης ίσες με 72° καθεμιά.

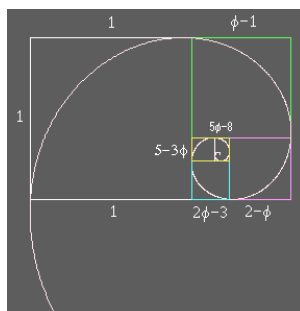


Οι Πυθαγόρειοι είχαν ενθουσιαστεί έντονα από το γεγονός ότι η διχοτόμος ΔΗ της γωνίας Δ συμπίπτει με τη διαγώνιο ΔΒ του κανονικού πενταγώνου και το σημείο Η διαιρεί την πλευρά ΑΓ σε χρυσή τομή. Οπότε εμφανίζεται το νέο μικρότερο χρυσό τρίγωνο ΔΓΗ. Αν φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Η που τέμνει την ΔΓ στο σημείο Η, κατόπιν τη διχοτόμο της γωνίας Η' που τέμνει την ΑΓ στο Η' και συνεχίσουμε επ' άπειρον τη διαδικασία, παίρνουμε μια άπειρη ακολουθία χρυσών τριγώνων.

Η ίδια ιδιότητα είναι εγγενής στο χρυσό ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ που έχει το λόγο των πλευρών του $AB:AD$ ίσο με το χρυσό λόγο. Κατασκευάζοντας το τετράγωνο $A\epsilon Z\Delta$ μέσα στο ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ παίρνουμε το νέο χρυσό ορθογώνιο $EB\Gamma Z$, του οποίου ο λόγος των πλευρών $EZ:EB$ ισούται με το χρυσό λόγο. Αν συνεχίσουμε τη διαδικασία επ' άπειρον παίρνουμε μια άπειρη ακολουθία τετραγώνων και των αντίστοιχων χρυσών ορθογωνίων.

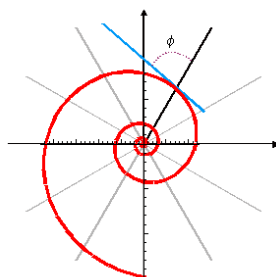


Η έλικα είναι μια επίπεδη καμπύλη που προκύπτει από ένα σημείο που απομακρύνεται σύμφωνα με έναν ορισμένο κανόνα από την αρχή μιας ημιευθείας και περιστρέφεται ομαλά γύρω από την αρχή. Αν θεωρήσουμε ως αρχή τον πόλο του συστήματος πολικών συντεταγμένων, τότε μαθηματικά η έλικα μπορεί να παρασταθεί με τη βοήθεια κάποιας πολικής εξίσωσης $\rho=f(\varphi)$, όπου ρ είναι η διανυσματική ακτίνα της έλικας, φ είναι η γωνία που διαγράφεται γύρω από τον πολικό άξονα και $f(\varphi)$ είναι μια μονότονη – αύξουσα ή φθίνουσα – θετική συνάρτηση. Όταν το σημείο απομακρύνεται από την αρχή ομαλά ($\rho=a\varphi$, $a>0$) τότε έχουμε την έλικα του Αρχιμήδη. Αν το σημείο απομακρύνεται σύμφωνα με τον εκθετικό νόμο ($\rho=ae^{k\varphi}$, $a>0$) τότε έχουμε την ισογώνια έλικα. Η ισογώνια έλικα έχει δύο ενδιαφέρουσες ιδιότητες:



1. Η διανυσματική ακτίνα ρ και η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της έλικας σχηματίζουν μια σταθερή γωνία ϕ . Δηλαδή η καμπύλη τέμνει όλες τις ημιευθείες που ξεκινούν από τον πόλο O σχηματίζοντας ίσες γωνίες.

2. Η ισογώνια έλικα αποσυντίθεται σε μια ευθεία και σε μια περιφέρεια για τις τιμές 0° και 90° , αντίστοιχα, της γωνίας ϕ . Τούτο σημαίνει ότι η έλικα έχει και τις ιδιότητες της ευθείας και τις ιδιότητες της περιφέρειας.



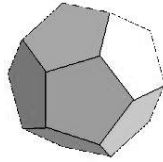
Η σχέση της ισογώνιας έλικας με τη χρυσή τομή και τους αριθμούς της ακολουθίας Fibonacci εξηγείται ως εξής: Ξεκινώντας από ένα χρυσό ορθογώνιο μήκους Φ και ύψους 1, δημιουργείται μια φυσική ακολουθία εμπεριεχομένων χρυσών ορθογώνιων που προκύπτουν από την αφαίρεση του αριστερού τετραγώνου από το πρώτο ορθογώνιο, του άνω τετραγώνου από το δεύτερο ορθογώνιο κ.ο.κ. Το μήκος και το ύψος του n -οστού χρυσού ορθογώνιου μπορούν να γραφούν ως γραμμικές εκφράσεις $\alpha + \beta\Phi$, όπου οι συντελεστές α και β είναι πάντα αριθμοί Fibonacci, άρα συνδέονται με τη χρυσή τομή.

Αν ως αρχή της χρυσής έλικας επιλέξουμε το σημείο στο οποίο συγκλίνουν διαδοχικά τα χρυσά ορθογώνια, η χρυσή έλικα θα περάσει από τις τρεις από τις τέσσερις κορυφές καθενός από τα χρυσά ορθογώνια που κατασκευάζονται διαδοχικά. Δηλαδή, η χρυσή έλικα περιγράφεται στο χρυσό ορθογώνιο.

Κάθε ισογώνια έλικα παριστάνει το σχήμα της αύξησης ή της μείωσης και μπορεί να εκφραστεί μέσω γεωμετρικής προόδου. Εδώ βρίσκεται ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον σημείο της χρυσής ισογώνιας έλικας. Σ' αυτή την έλικα οι όροι της γεωμετρικής προόδου που αντιστοιχεί στην έλικα είναι οι δυνάμεις του χρυσού λόγου: Φ^n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$). Μια τέτοια έλικα έχει την ιδιότητα ότι η αντίστοιχη της γεωμετρική πρόοδος είναι ταυτόχρονα και αριθμητική. Τούτο σημαίνει ότι η εκθετική της αύξηση δίνεται από απλή άθροιση δύο διαδοχικών όρων.

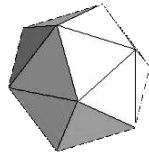
Κατά τη γνώμη πολλών ερευνητών, αυτή η αξιοσημείωτη ιδιότητα μας επιτρέπει να εξηγήσουμε πολλά φαινόμενα στη βοτανολογία και τη βιολογία.

Το κανονικό δωδεκάεδρο και το κανονικό εικοσάεδρο:



Η χρυσή τομή συνδέεται στενά με τα Πλατωνικά στερεά, και ιδιαίτερα με το δωδεκάεδρο και το εικοσαέδρο. Το δωδεκάεδρο έχει 12 έδρες, 30 ακμές και 20 κορυφές. Κάθε έδρα του δωδεκάεδρου είναι κανονικό πεντάγωνο και έχει πέντε επίπεδες γωνίες. Οπότε το συνολικό πλήθος των επίπεδων γωνιών του δωδεκάεδρου είναι $5 \times 12 = 60$. Αφ' ετέρου, $3 \times 20 = 60$. Το τελευταίο σημαίνει ότι τρεις γειτονικές επίπεδες γωνίες συγκλίνουν σε κάθε κορυφή του εικοσαέδρου. Τέλος, το πλήθος των εδρών πολλαπλασιασμένο επί το πλήθος των ακμών δίνει 360.

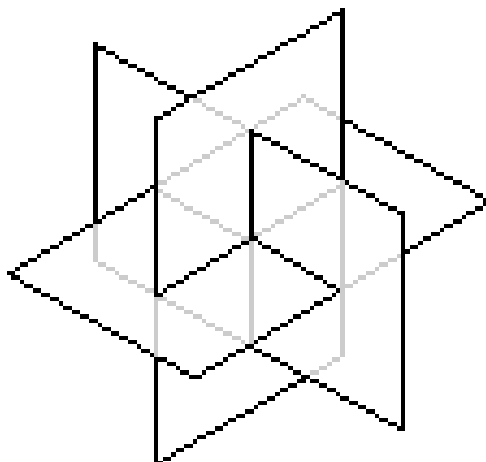
Το εικοσαέδρο έχει 20 έδρες, καθεμιά από τις οποίες είναι ισόπλευρο τρίγωνο, 30 ακμές και 12 κορυφές. Το εικοσαέδρο και το δωδεκάεδρο έχουν το ίδιο πλήθος ακμών, ενώ το πλήθος εδρών του εικοσαέδρου ισούται με το πλήθος κορυφών του δωδεκάεδρου και το πλήθος κορυφών του εικοσαέδρου ισούται με το πλήθος εδρών του δωδεκάεδρου. Καθώς σε κάθε κορυφή του εικοσαέδρου συγκλίνουν πέντε επίπεδες γωνίες, το συνολικό πλήθος επίπεδων γωνιών του είναι $5 \times 12 = 60$ και το γινόμενο του πλήθους ακμών επί το πλήθος κορυφών ισούται με 360. Το εικοσαέδρο έχει επίσης σχέση με το κανονικό πεντάγωνο και, επομένως, με το χρυσό λόγο επειδή οι εξωτερικές ακμές των πέντε γειτονικών τριγώνων που συγκλίνουν σε κάθε κορυφή κατασκευάζουν ένα κανονικό πεντάγωνο.



Υπάρχουν δύο σημαντικές σχέσεις μεταξύ του δωδεκάεδρου και του εικοσαέδρου. Η πρώτη είναι ότι τα κέντρα των εδρών του δωδεκάεδρου ορίζουν τις κορυφές εικοσαέδρου και τα κέντρα των εδρών του εικοσαέδρου ορίζουν τις κορυφές δωδεκάεδρου.

Αν συνδέσουμε τα κέντρα των εδρών του δωδεκάεδρου μπορούμε να πάρουμε τρία ορθογώνια που τέμνονται στο χώρο κατά ορθές γωνίες. Το σημαντικό είναι ότι τα ορθογώνια αυτά έχουν λόγο πλευρών ίσο με Φ . Το ίδιο συμβαίνει αν ενώσουμε τις κορυφές του εικοσαέδρου.

Χρησιμοποιώντας αυτά τα χρυσά ορθογώνια είναι εύκολο να δούμε ότι οι συντεταγμένες των κορυφών του εικοσαέδρου⁴³ είναι:



$(0, 1, \Phi), (0, -1, \Phi), (0, 1, -\Phi), (0, -1, -\Phi), (\Phi, 0, 1), (\Phi, 0, -1), (-\Phi, 0, 1), (-\Phi, 0, -1), (1, \Phi, 0), (1, -\Phi, 0), (-1, \Phi, 0), (-1, -\Phi, 0)$.



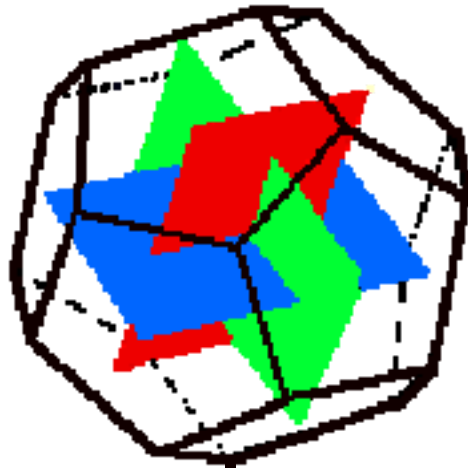
Αντίστοιχα για τις κορυφές του δωδεκαέδρου έχουμε τις συντεταγμένες:

$(0, \Phi-1, \Phi), (0, \Phi-1, -\Phi), (0, -(\Phi-1), \Phi), (0, -(\Phi-1), -\Phi), (\Phi, 0, \Phi-1), (\Phi, 0, -(\Phi-1)), (-\Phi, 0, \Phi-1), (-\Phi, 0, -(\Phi-1)), (\Phi-1, \Phi, 0), (\Phi-1, -\Phi, 0), (-(\Phi-1), \Phi, 0), (-(\Phi-1), -\Phi, 0), (1, 1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, 1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1), (-1, -1, -1)$.

Βιολογικές έρευνες των ετών 1970-1990 έδειξαν ότι ο χρυσός λόγος αποκαλύπτεται σε κάθε οντότητα, από τους ιούς μέχρι τον ανθρώπινο οργανισμό, και χαρακτηρίζει τη συμμετρία και την αρμονία των δομών

⁴³ Το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο είναι δυο από τα πέντε πλατωνικά στερεά με τη μελέτη των οποίων ολοκληρώνονται τα στοιχεία του Ευκλείδη.

τους. Στη βιολογική δομική οργάνωση, ο χρυσός λόγος είναι παραδεκτός ως ένας καθολικός νόμος που διέπει τα ζώντα συστήματα από τα φυτά ως τον άνθρωπο.



Μελετώντας το πρόβλημα της πληθυσμιακής αύξησης των κουνελιών, ο Fibonacci, ανακάλυψε μια αξιοσημείωτη αριθμητική ακολουθία που αργότερα έλαβε το όνομά του: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 κ.ο.κ. Σ' αυτή την ακολουθία, κάθε όρος, ξεκινώντας από τον τρίτο, ισούται με το άθροισμα των δύο προηγούμενων. Καθώς οι όροι αυξάνουν πλησιάζουν ολοένα περισσότερο μεταξύ τους και ο λόγος καθενός προς τον προηγούμενό του προσεγγίζει η το κλάσμα $1,618$.

Αργότερα αποδείχθηκε ότι η ακολουθία χαρακτηρίζει τη δομική οργάνωση πολλών έμβιων όντων. Λόγου χάρη, η σπειροειδής ανάπτυξη των φύλλων ενός φυτού γύρω από το βλαστό δίνει ένα κλάσμα – το πλήθος των στροφών γύρω από το βλαστό προς το πλήθος των φύλλων που βρίσκονται σε ένα κύκλο – το οποίο αντιστοιχεί στην ακολουθία Fibonacci: $2/5$, $3/8$, $5/13$ κ.λπ. Είναι γνωστό ότι ο χρυσός λόγος συναντάται στα πενταπέταλα άνθη της μηλιάς, της αχλαδιάς και πολλών άλλων φυτών.

Τα μόρια του DNA και του RNA, των φορέων του γενετικού κώδικα, έχουν δομή διπλής έλικας της οποίας οι αναλογίες αντιστοιχούν σχεδόν πλήρως σε αριθμούς Fibonacci.

Υπάρχουν πολλά παραδείγματα της χρυσής τομής ή του χρυσού λόγου στη φύση (Ghyka 1927, 1931, 1977, Ciofu 1994, Reading, 1997). Η παρουσία της χρυσής τομής έχει επίσης ανακαλυφθεί σε άλλες περιοχές της βιολογίας, συμπεριλαμβανομένης της νευροφυσιολογίας, της επιδημιολογίας, καθώς και στους βιολογικούς ρυθμούς (Ciofu 1994). Στην

ψυχολογία και την κοινωνιολογία, εμφανίσεις αναλογιών της χρυσής τομής έχουμε στις μελέτες των χρόνων αντίδρασης, της μνήμης και της μάθησης, του δείκτη νοημοσύνης κλπ. (Ciofu, 1994).

Το μάτι, τα πτερύγια και η ουρά ενός δελφινιού βρίσκονται όλα σε μέσο και άκρο λόγο με το μήκος του σώματός του. Οι διαστάσεις του πτερυγίου της ράχης βρίσκονται σε μέσο και άκρο λόγο (κίτρινο και πράσινο). Τα σημάδια στα φτερά της πεταλούδας είναι σε άκρο και μέσο λόγο με το μήκος και το πλάτος της.

Η ελικοειδής ανάπτυξη των θαλάσσιων κοχυλιών παρέχει ένα ακόμη όμορφο παράδειγμα της χρυσής τομής. Το χέρι μας παρουσιάζει τη χρυσή τομή και την κολουθία Fibonacci. Κάθε τμήμα είναι 1.61804... φορές μεγαλύτερο από το προηγούμενό του.

Κάθε φάλαγγα του ανθρώπινου δείκτη, από το ακροδάκτυλο μέχρι τη βάση του στον καρπό είναι, μεγαλύτερη από την προηγούμενή της κατά περίπου 1.618, δηλαδή περίπου κατά το χρυσό λόγο, προσαρμοζόμενη επίσης στους αριθμούς Fibonacci 2, 3, 5 and 8. Με αυτή την κλίμακα το νύχι μας έχει μοναδιαίο μήκος.

Κατά τα τελευταία χρόνια έχουν εμφανιστεί εργασίες σχετικά με το ρόλο της βρεγματικής περιοχής του ανθρώπινου εγκεφάλου στην αισθητική αντίληψη του κόσμου. Κατέστη γνωστό ότι οι βρεγματικοί λοβοί είναι υπεύθυνοι για την ικανότητα διάκρισης των αντικειμένων με την αφή μόνο και με τα μάτια κλειστά. Αποδείχθηκε ότι υγιή άτομα προτιμούσαν να επιλέγουν μέσω της αφής σχήματα που ήταν προσαρμοσμένα στο χρυσό λόγο, και ότι το ποσοστό των προτιμήσεων μέσω της αφής δεν διέφερε από τα αντίστοιχα αποτελέσματα της οπτικής επιλογής. Οπότε φαίνεται ότι το συγκεκριμένο σύστημα αντίληψης που εδράζει στην βρεγματική περιοχή λειτουργεί σε συγχρονισμό με το οπτικό σύστημα που υποστηρίζεται από την ινιακή και κροταφική περιοχή του εγκεφάλου.

Η ανθρώπινη καρδιά χτυπά με περίπου 60 σφυγμούς το λεπτό σε κατάσταση ηρεμίας και με έως και 120 σφυγμούς σε κατάσταση άγχους ή έντονης κίνησης. Η πίεση του αίματος μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της καρδιακής λειτουργίας. Φθάνει τη μέγιστη τιμή της στην αριστερή καρδιακή κοιλία τη στιγμή της συστολής. Στις αρτηρίες κατά τη διάρκεια της κοιλιακής συστολής της καρδιάς η πίεση του αίματος φθάνει τη μέγιστη τιμή των 115 - 125 mm στήλης υδραργύρου. Τη στιγμή της χαλάρωσης του καρδιακού μυός (διαστολή) η πίεση μειώνεται μέχρι τα 70 - 80 mm στήλης υδραργύρου. Ο λόγος της μέγιστης προς την ελάχιστη πίεση ισούται κατά μέσο όρο με 1,6, δηλαδή, πολύ κοντά στη χρυσή

αναλογία. Είναι αυτή η σύμπτωση τυχαία ή μήπως απεικονίζει κάποια αντικειμενική κανονικότητα της αρμονικής οργάνωσης της καρδιακής δραστηριότητας;

Η καρδιά χτυπά συνεχώς από τη στιγμή της γέννησης του ανθρώπου ως τη στιγμή του θανάτου του. Και η δραστηριότητά της πρέπει να είναι η βέλτιστη και να υπόκειται στους νόμους αυτοοργάνωσης των βιολογικών συστημάτων. Και καθώς η χρυσή αναλογία είναι ένα από τα κριτήρια των αυτό-οργανωμένων συστημάτων μπορούμε φυσικά να υποπτευθούμε ότι η καρδιακή λειτουργία υπόκειται στο νόμο της χρυσής τομής. Μπορούμε να κρίνουμε την καρδιακή λειτουργία με τη χρήση ενός ηλεκτροκαρδιογραφήματος, της καμπύλης που απεικονίζει τους διαφορετικούς κύκλους της καρδιακής λειτουργίας. Οπότε, λόγου χάρη, για τον άνθρωπο η «χρυσή συχρότητα» είναι 63 παλμοί το λεπτό.

2.4 Ο Αριστοτέλης

Ο Αριστοτέλης, σχολιάζοντας τον δάσκαλό του Πλάτωνα λέει, ότι μεταξύ των αισθητών αντικειμένων και των Ιδεών έθεσε τα Μαθηματικά, που διαφέρουν από τα αισθητά επειδή είναι αιώνια και αμετακίνητα, αλλά διαφέρουν και από τις Ιδέες, γιατί μπορεί να υπάρχουν πολλά αντικείμενα του ιδίου είδους ενώ η Ιδέα είναι μοναδική. Για παράδειγμα, η Ιδέα του τριγώνου είναι μια, αλλά μπορεί να υπάρξει οποιοσδήποτε αριθμός μαθηματικών τριγώνων - των ορατών τριγώνων - δηλαδή υπάρχουν τα τέλεια τρίγωνα των οποίων τα ορατά τρίγωνα είναι ατελή αντίγραφα. Ένα απόσπασμα από την έβδομη Επιστολή του Πλάτωνα λέει τα εξής:

1. Υπάρχει κάτι που καλείται κύκλος και είναι γνωστό με αυτό το όνομα,
2. υπάρχει ο ορισμός του : αυτό στο οποίο οι αποστάσεις από τα άκρα του προς το κέντρο, σε όλες τις διευθύνσεις είναι πάντα ίσες (είναι ο ορισμός αυτού στο οποίο αποδίδουμε τα ονόματα *στρογγύλον* και *κύκλος*),
3. έχουμε τον κύκλο που σχεδιάζεται και μετασχηματίζεται: αυτός ο κύκλος είναι φθαρτός και καταστρέφεται, και όμως αυτός ο κύκλος ή η Ιδέα του κύκλου σχετίζεται με το ότι υπάρχουν και άλλοι κύκλοι και είναι διαφορετικοί μεταξύ τους.

Ένα άλλο ζήτημα, που ως γνωστόν, χαρακτηρίζει την κλασσική γεωμετρία είναι ότι οι επιτρεπόμενες κατασκευές ήταν εκείνες που γινόταν με κανόνα και διαβήτη και μόνο. Η απαίτηση αυτή πρέπει να ήταν παλαιότερη του Πλάτωνα αλλά μετά από αυτόν ενισχύθηκε και μάλιστα σε τέτοιο βαθμό που να αποτελεί το θεμελιώδες νομιμοποιητικό κριτήριο της μαθηματικής οντολογίας. Πρέπει να σημειωθεί ότι προσεγγιστικές λύσεις είχαν δοθεί από την αρχαιότητα αλλά η προσέγγιση δεν ήταν θεωρητικά κατοχυρωμένη στις απαιτήσεις των αρχαίων. Επίσης, αυτό δείχνει ότι δεν ήταν η πρακτική που καθόριζε την πνευματική παραγωγή αλλά αισθητικά κυρίως αιτήματα.

Ακόμη πρέπει να παρατηρήσουμε τα εξής: Το *όντως όν* του Πλάτωνα (ονομάζεται *είδος* και *ιδέα*) βρίσκεται πέρα από τα όρια του συνειδησιακού κόσμου

και, για να το πλησιάσει η ψυχή, όχι μόνο την αίσθηση αλλά και την νόηση πρέπει να υπερβεί και να δοθεί στη μυστική θέα. Στην προσπάθεια εξέλιξης της, η πλατωνική σκέψη προσπαθεί να φέρει σε συνάφεια αυτές τις υπερκόσμιες σταθερές μορφές και να τις ενυφάνει μέσα στην πραγματικότητα του φυσικού και του λογικού σύμπαντος. Αυτή τη σκέψη θα τη συνεχίσει και θα την ολοκληρώσει αργότερα ο Αριστοτέλης. Τα είδη, στη Μεταφυσική του, συμφιλώνονται πάλι με την αισθητή πραγματικότητα, γίνονται μορφές, οι ειδολογικοί νόμοι της, οι τελικοί σκοποί, που με την κίνησή της (όπως θα δούμε αργότερα περιγράφοντας την έννοια της κίνησης στον Αριστοτέλη) τείνει να τους πραγματώσει. Ωστόσο, πρέπει να ξαναπούμε ότι η *Ιδέα* στον Πλάτωνα δεν είναι συνειδησιακό προϊόν, αλλά αυθύπαρκτη πραγματικότητα, το μόνο καθαυτό όν. Έτσι και με τον εγκλεισμό των *ειδών* μέσα στο είναι των πραγμάτων, που πρεσβεύει η αριστοτελική οντολογία δεν συνθηκολογεί με τον αντικειμενικό ιδεαλισμό του Πλάτωνα. Το κοινό βέβαια που πρέπει να παρατηρήσουμε και για τις δυο θεωρίες είναι ότι κατά βάθος είναι ρεαλιστικές⁴⁴.

Η αριστοτελική επιστημολογία θεμελιώνεται στις ανώτατες και αποδεικτικές πρώτες αρχές που παρέχει ο νούς, καθώς επίσης στην συνεργασία του νου με τις αισθήσεις. Η αίσθηση προσφέρει την αληθινή και ουσιαστική μορφή των πραγμάτων. Εκτός από την αίσθηση ο Αριστοτέλης διακρίνει και την κοινή, κατά συμβεβηκός αίσθηση. Στην κοινή αίσθηση είναι δυνατό να εμφιλοχωρήσει πλάνη. Η αίσθηση αυτή δυνατό να διατηρεί την δραστηριότητά της κατά τον ύπνο.

Κατά τον Πλάτωνα, η μνήμη ανήκει στην ψυχή ανεξάρτητα από το σώμα, είναι προγενέστερη των χρονικών διακρίσεων, και σχετίζεται βασικά με την νόηση, (ενώ η αίσθηση αποτελεί απλή μεσολαβητική λειτουργία). Σε αντίθεση, ο Αριστοτέλης σχετίζει την μνήμη άμεσα προς την νόηση και περιορίζει την μνήμη στα αντικείμενα της αισθήσεως *μνήμη του γενομένου* και προϋποθέτει την παρέλευση ενός χρονικού διαστήματος από την αρχική εμπειρία *διο μετά χρόνου πάσα μνήμη*. Χωρίς χρόνο δηλαδή δεν υπάρχει μνήμη⁴⁵. Η νόηση στον Αριστοτέλη δεν είναι δυνατόν να λειτουργεί ανεξάρτητα από το σώμα. Η λειτουργία της είναι δυνατή επειδή διαθέτει εικόνες εν αφαιρέσει που οφείλουν την αρχική τους προέλευση στην αισθητηριακή δραστηριότητα, δηλαδή στην ενέργεια των αισθήσεων και των αισθητών αντικειμένων. Επίσης, η ενεργητικότητα της ψυχής είναι απαραίτητη και σε αυτό παίζει μεγάλο ρόλο η φαντασία. *Νοεῖν οὐκ ἔστιν ἀνευ φαντασίας* και σε σχέση με την αίσθηση *ἀνευ αισθήσεως και ἀνευ φαντασίας οὐκ ἔστιν υπόληψις*. Συνεπώς, νόηση και αίσθηση συνεργάζονται χάρις στη φαντασία, η οποία συνδέεται στενά με κάθε μια από αυτές.

Συγκεκριμένα, τα Μαθηματικά για τον Αριστοτέλη, είναι η *επιστήμη της Ποσότητος*⁴⁶, ασχολούνται με τις ιδιότητες και σχέσεις εκείνων των *μορφών*, τις οποίες μπορεί κανείς να τις διακρίνει εννοιολογικά από την αντίστοιχη ύλη. Οι μορφές ενυπάρχουν στην ύλη και είναι αδιαχώριστες από αυτήν, και μόνο η διάνοια

⁴⁴ Ε. Παπανούτσου, σελ. 17

⁴⁵ Μπαρζελιώτη

⁴⁶ H. G. Apostle, *Aristotle's Theory of Mathematics as a science of quantities*, σελ 154-214, ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ, 1978-79

μπορεί να τις διακρίνει. Ο μαθηματικός παραβλέπει στα γεωμετρικά σχήματα την φυσική τους υπόσταση. Τα θεωρεί όμως πραγματικές οντότητες, μια και ως μορφές περιέχονται σε πραγματικά αντικείμενα. Έργο του μαθηματικού δεν είναι οι οντότητες καθ'αυτές αλλά οι ιδιότητες και οι σχέσεις τους⁴⁷.

Τα κύρια επιτεύγματα του Αριστοτέλη στην Φιλοσοφία των Μαθηματικών συνοψίζονται στα εξής: Στην αρχή είναι η ανάλυση της δομής μιας επιστήμης για την οποία ως πρότυπο είχε τα Μαθηματικά. Έπειτα είναι η απόρριψη του εν ενεργεία απείρου, (γιατί η έννοια οδηγεί σε αντινομίες⁴⁸ όπως του Ζήνωνα). Επίσης, είναι αδύνατη, κατά τον Αριστοτέλη, η θεώρηση αντικειμένων απείρων διαστάσεων. και έχει νόημα μόνο η *δυναμική* σπουδή του απείρου⁴⁹. Εξάλλου η διάκρισή των οντοτήτων σε κλάσεις και τύπους, δηλ. η ιδέα ότι έχει νόημα να ομιλούμε για ορισμένες ιδιότητες που αποτελούν τα *κατηγορήματα* είναι ιδέα που ξαναβρίσκουμε στην νεότερη Λογιστική Σχολή.

Κατά τον Αριστοτέλη το αληθές ή το ψεύδος δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια κατάσταση ή απόφαση. *Συμπλοκή νοημάτων εστί το αληθές*⁵⁰. Τούτο όμως σημαίνει ότι το οντολογικό πρόβλημα της αλήθειας δεν υπάρχει, είναι άνευ αντικειμένου. Η άποψη, ομοιάζει με εκείνη που συναντούμε στον Tarski⁵¹ (η λεγόμενη αντιστοιχιστική άποψη για την αλήθεια) και θα δούμε αργότερα.

Στον Αριστοτέλη επίσης ανάγονται και οι ιδέες που απασχολούν την σύγχρονη θεμελίωση των Μαθηματικών που οπωσδήποτε προϋπάρχουν του Ευκλείδη και της ιδέας της αξιωματικοποίησης της Γεωμετρίας⁵².

Συνοψίζοντας για τους αρχαίους φιλόσοφους θα μπορούσαμε να ονομάσουμε την φιλοσοφία τους για τα Μαθηματικά *εποπτικό ρεαλισμό*. Για τους αρχαίους ο αριθμός και το γεωμετρικό σχήμα αποτελούν αυθύπαρκτες πραγματικότητες (που το πνεύμα *θεάται*). Οι πράξεις εκφράζουν σχέσεις μεταξύ αριθμών, αλλά οι σχέσεις αυτές αποτελούν σταθερά ανεξάρτητα δεδομένα. Η σκέψη συναντά αυτά τα όντα (αριθμούς και σχήματα) έξω και τα παριστάνει (όπως στην περίπτωση των σχημάτων αποτυπώνει μια *δεδομένη* μορφή χώρου) - δεν τα κατασκευάζει⁵³.

2. 5 Ο πρώϊμος Μεσαίωνας

Για να γίνει κατανοητή η μεγάλη στροφή, που προκύπτει στον τρόπο του σκέπτεσθαι και που αποβλέπει το εννοιολογικό σύστημα της Αναγέννησης, θα

⁴⁷ Φ. Βασιλείου, Ο Αριστοτέλης και η Φιλοσοφία των Μαθηματικών, σελ 145-153, ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ, 1978-79

⁴⁸ Η ύπαρξη οντότητας (συνόλου) που να περιέχει όλα τα όντα} είναι λογικά αδύνατος για τον Σταγειρίτη, Φ. Βασιλείου, όπως παραπάνω.

⁴⁹ Δ. Αναπολιτάνος, Εισαγωγή στην Φιλοσοφία των Μαθηματικών, Νεφέλη, 1985

⁵⁰ Αριστοτέλη, Περί ψυχής, Γ8, 432a 11

⁵¹ Α. Γιανναρά, Μαθήματα εισαγωγής στη φιλοσοφία, σελ 28

⁵² Ε. Παπανούτσου, Γνωσιολογία, 1954.

⁵³ Ε. Παπανούτσου, σελ. 293.

πρέπει να δούμε μερικές από τις βασικές ιδεολογικές μετατοπίσεις που προέκυψαν κατά τον Μεσαίωνα ιδιαίτερα στις χώρες όπου επικρατούσε ο καθολικισμός⁵⁴.

Η πρώτη και βασική αντιδιαστολή από τον αρχαίο κόσμο είναι η στάση που θεμελιώθηκε στο χώρο της Θεολογίας από τον Αυγουστίνο (354 -430 μ.Χ.) στο αντιπροσωπευτικό του έργο *De utilitate credendi* (Περί της χρησιμότητας του πιστεύειν)⁵⁵. Η στάση αυτή αντικρίζει τη φυσική πραγματικότητα όχι σαν τον *Κόσμο* προς θαυμασμό των αρχαίων, αλλά από την άποψη του ωφέλιμου αποτελέσματος και της χρησιμοθηρικής εκμετάλλευσης. Η ίδια η θρησκευτική πίστη, η κατ'εξοχήν αναζήτηση μετά-φυσικής γνώσης υποτάσσεται στις ωφελιμιστικές απαιτήσεις του ατόμου⁵⁶.

Το Αισθητικό αίτημα της Αρμονίας, που υποκινούσε την έρευνα στους Πυθαγόρειους, στον Πλάτωνα, στον Ευκλείδη υποχωρεί μπροστά σε μια αναγκαιότητα θρησκευτικού και χρησιμοθηρικού αιτήματος. Ένα άλλο γεγονός που συντελεί στις φιλοσοφικές διεργασίες του ύστερου Μεσαίωνα είναι η έναρξη της Σχολαστικής φιλοσοφίας με την ίδρυση του κράτους των Φράγκων τον 9ο αιώνα. Σημαντική είναι τότε η παρουσία του Αλκουίνου (Alcuin 730 - 804), οργανωτή της παιδείας στην Γαλλία, που χαρακτηρίζει χρήσιμη την αξιοποίηση της φιλοσοφίας για θεολογικούς σκοπούς, συντελώντας έτσι κατά πολύ στην έναρξη της Σχολαστικής φιλοσοφίας.

Στην αρχή της δεύτερης, φαινόμενα οικονομικών και κοινωνικών ανακατατάξεων (παράλληλα των πνευματικών δραστηριοτήτων) χαρακτηρίζουν τον χώρο της Δυτικής Ευρώπης. Φαινόμενα ανόρθωσης, συγκρότησης αστικής ζωής, ανόδου των εμπορικών δραστηριοτήτων, εμφάνισης μιας πρώτης βιομηχανικής παραγωγής, αναπτύσσονται και εξαπλώνονται μέσα σε ένα κόσμο που οι κοινωνικές κατηγορίες εξακολουθούν να είναι οι κατηγορίες του *αυτοδύναμου χωριού και της φεουδαρχικής ιεραρχίας*.

Η βασική αντίληψη που δεσπόζει, σε όλη την διάρκεια του Μεσαίωνα, είναι η *ιδέα μιας θρησκείας που αγκαλιάζει όλους τους τομείς της ανθρώπινης ζωής: το τελικό πρότυπο για τους ανθρώπινους θεσμούς και δραστηριότητες είναι η θρησκεία*. Η θρησκευτική σκέψη του Μεσαίωνα υποτάσσει κάθε ενδιαφέρον και δραστηριότητα στην υπηρεσία ενός και μόνου σκοπού: αυτού που καθορίστηκε από το *θείο σχέδιο του σύμπαντος*. Η Εκκλησία είναι η χριστιανική κοινότητα μέσα στα πλαίσια της οποίας *οφείλει να πραγματοποιηθεί ο σκοπός αυτός*. Επιπλέον, είναι η ιεραρχία που ορίστηκε από το Θεό που θα διερμηνεύσει αυτόν τον σκοπό, αυτή αγκαλιάζει ολόκληρη την ζωή και η εξουσία της είναι απόλυτη. Η θρησκεία γίνεται ο μεγαλύτερος πολιτικός θεσμός και φιλοδοξεί να είναι όχι μόνο μια πίστη αλλά και ένας πολιτισμός⁵⁷.

⁵⁴ B. Russell, *History of Western Philosophy*, unwin university books, 1967.

⁵⁵ X. Γιανναρά, *Σχεδιασμός στη φιλοσοφία*, σελ. 146, Ο Αυγουστίνος δεν γνωρίζει ελληνικά και έχει επηρεαστεί, κυρίως από τον Κικέρωνα, βλ. B. Russell

⁵⁶ F. C. Copleston, (1972) *A history of Medieval Philosophy*, University of Notre Dume Press.

⁵⁷ X. Γιανναρά. Βλέπε επίσης, W. Windelband – H. Heimsoeth, *Εγχειρίδιο Ιστορίας της Φιλοσοφίας*, Β' Τόμος, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης, 1982. A. Hyman & J. Walsh, *Philosophy in the Middle Ages*, Hackett Indianapolis 1977.

Αυτή η αντίληψη παραμένει βασική για την μεσαιωνική σκέψη ενώ αναζητά διαρκώς μια σύνθεση με την εξωτερική τάξη πραγμάτων, που κάτω από την ανάπτυξη και εξάπλωση των καινούργιων σχέσεων και δραστηριοτήτων βρίσκεται σε συνεχή διάσταση με το σύστημα αξιολογήσεων, ιδανικών και των κανόνων ηθικής συμπεριφοράς της εκκλησιαστικής διδασκαλίας. Μέσα σε αυτό το κλίμα, της συνεχούς τάσης για σύνθεση, θα πρέπει να ειπωθεί το έργο των Σχολαστικών: *αιτία και σκοπός των συλλογισμών τους ήταν να λύσουν τα προβλήματα που δημιουργούσαν οι εξελίξεις και να συμβιβάσουν τις ανανεωτικές τάσεις που εκδηλώθηκαν με την παραδοσιακή διδασκαλία που κήρυττε η Εκκλησία.*

Στις νέες συνθήκες που διαμορφώνονται με την εκκόλαψη της αστικής τάξης των πόλεων και τις αντιθέσεις μεταξύ κοσμικής (αυτοκράτορας) και εκκλησιαστικής εξουσίας, οι τριβές και οι συγκρούσεις γίνονται αναπόφευκτες. Η εξασθένηση της κεντρικής εξουσίας ευνοεί την δημιουργία οργανώσεων αυτοπροστασίας με κύρια έκφραση τις συντεχνίες, τους δήμους, τα Πανεπιστήμια (12ος αι.), τα μοναχικά τάγματα (φραγκισκανοί, δομινικανοί, ιησουΐτες) με σκοπό την αμοιβαία προστασία χωρίς αναφορά σε ανώτερη εξουσία. Η διαμάχη, μεταξύ αυτοκράτορα και Εκκλησίας λήγει με την επικράτηση του πρώτου γύρω στον 14ο αιώνα. Εν τω μεταξύ σημαντικές τεχνικές επιτεύξεις έρχονται στο προσκήνιο και καθορίζουν την νέα εποχή. Αυτές είναι:

Ο υδρόμυλος, η νέα ζεύξη του ίππου, το ναυτικό πηδάλιο, η πυξίδα και το κινητό ιστίο, η πυρίτιδα, το ωρολόγιο και τέλος η τυπογραφία. Ο υδρόμυλος αποτελεί διδασκαλία για τον πολλαπλασιασμό της δύναμης του ανθρώπου, υπόδειγμα συγκεντρωτικής οικονομίας που συναθροίζει πολλούς ανθρώπους. Η νέα ζεύξη του ίππου και του πετάλου εξασφαλίζει ένα ταχύ μεταφορικό μέσον. Η χρήση του ναυτικού πηδαλίου, του κινητού ιστίου και της πυξίδας ανεξαρτητοποιεί τις θαλάσσιες μεταφορές οδηγώντας σε νέους ορίζοντες το εμπόριο, την πολιτική τάξη, την κοσμολογία. Η πυρίτιδα ανέτρεψε την κοινωνική ισορροπία προς όφελος του χωρικού και έναντι του σιδερόφρακτου ιππότη, του απλού πολίτη έναντι του ευγενούς.

Το ωρολόγιο δεν αποτελεί απλώς μια συσκευή για την μέτρηση της χρονικής διάρκειας αλλά *αποτελεί την πύλη μέσα από την οποία εισόρμησε στην ιστορία η διάσταση του χρόνου. Ως τεχνολογικό αντικείμενο, είναι μια μηχανή που παράγει ομοιόμορφα δευτερόλεπτα, λεπτά και ώρες με ένα πρότυπο γραμμικής παραγωγής. Επεξεργασμένος, με αυτό τον ομοιόμορφο τρόπο, ο χρόνος αποχωρίζεται από τους ρυθμούς της ανθρώπινης εμπειρίας. Με δυο λόγια βοηθά να δημιουργηθεί η εικόνα ενός αριθμητικά ποσοτικοποιημένου και μηχανικά κινουμένου σύμπαντος. Ο χρόνος παύει να μετριέται με την μοναδικότητα της ατομικής εμπειρίας, να είναι ψυχολογικός χρόνος, αρχίζει να μετριέται με αφηρημένες ομοιόμορφες μονάδες και να εμποτίζει ολόκληρη την αισθητηριακή ζωή. Η εργασία, το φαγητό, ο ύπνος, κατέληξαν να συγχρονίζονται περισσότερο με το ρόλοι παρά με τις οργανικές ανάγκες. Μαζί με την*

τυπογραφία και την γραμμική παραγωγή έδωσαν ένα μέσο και ένα πρότυπο ομοιόμορφου κατακερματισμού των διαδικασιών⁵⁸.

Η φύση παρουσιάζεται για πρώτη φορά σε τέτοιο μεγάλο βαθμό χορηγός ζωής και θησαυροφυλάκιο της γνώσης. Η ανάγκη να αποκαλυφθούν τα άγνωστα της φύσης χάριν των νέων αιτημάτων, φέρει στο κέντρο του ενδιαφέροντος την σημασία των φυσικών γεγονότων και αποδεσμεύει την φύση από την πνευματική κηδεμονία της Εκκλησίας παρουσιάζοντάς την ως πρώτον μέγεθος του κόσμου, όχι μόνον ως δημιουργήμα, *Vesticum Dei*, αλλά ως ισοδύναμον του Θεού. Χωρίζεται έτσι ο Θεός από την κοσμική πραγματικότητα με όριο που διαστέλλει το γνωστό από το άγνωστο, το εμπειρικά υπαρκτό από το εμπειρικά ανύπαρκτο. Η βαθμιαία έκπτωση του Θεού από τον κόσμο βρίσκει την πρώτη διατύπωσή της στην ανασκευή της θεωρίας της κίνησης από τους νομιναλιστές του 14ου αι. Buridanus, Αλβέρτου της Σαξωνίας και του Oresme που μελετούν το φαινόμενο της κίνησης με βάση τη δυναμική ώθηση *impetus* των σωμάτων:

Όπως ένα σώμα κινείται από την ώθηση που δέχθηκε σε κάποια στιγμή έτσι και ο κόσμος την στιγμή της Δημιουργίας εδέχθη από το Θεό μια ώθηση, η οποία τον κινεί συνεχώς, χωρίς να χρειάζεται πλέον η θεϊκή επέμβαση, αφού η ορμή του, όπως τονίζει ο Buridanus δεν φθείρεται ούτε λιγοστεύει. Η εσωτερική λειτουργία του κόσμου αισθητικοποιείται με τη λειτουργία του ωρολογιακού μηχανισμού και ο Δημιουργός της *Machina mundi* παρομοιάζεται με τον ωρολογοποιό που κάποτε δημιούργησε το αυτοκινούμενο μηχάνημα⁵⁹!

Χωρίς την προϋπόθεση ενός υπερβατικού σημείου αναφοράς η φύση και όχι η Αγία Γραφή παρουσιάζεται, τώρα, ως κύρια πηγή της γνώσης. Η γνώση συνδέεται οριστικά με την ανάγκη του χρήσιμου αποτελέσματος, δικαιώνεται από την ωφελιμότητά της, υπακούει στην δεσμευτική αναγκαιότητα του θετικού αποτελέσματος. Ο κόσμος εξαντικειμενικεύεται στις διαστάσεις του ανθρώπινου μικρόκοσμου, ως διανοητική σύλληψη, αισθητή παρατήρηση και μετρητό μέγεθος. Ο ιδιαίτερος χαρακτήρας της φύσεως του ανθρώπου είναι, μέσω εκείνων τα οποία του είναι γνωστά, ν'ανιχνεύσει τα άγνωστα⁶⁰. Κυρίαρχη αντίθεση ανάμεσα στο υπερβατικό (*Transcendens*) και στο εγκόσμιο (*Immanens*) χαρακτηρίζει τον μεσαιωνικό κόσμο τόσο στο κοινωνικό-πολιτικό επίπεδο όσο και στο πνευματικό.

Τον 11ον αιώνα, εμφανίζονται δυο τάσεις στο χώρο της Δυτικής θεολογίας: των *διαλεκτικών* και των *αντιδιαλεκτικών*: ή καλύτερα της νοησιαρχίας και λογοκρατίας από την μια και από την άλλη των προσκολλημένων στην παράδοση και την αυθεντία. Κυριότερος εκπρόσωπος των διαλεκτικών είναι ο Berengar de Tours (+1088). Κατά την διδασκαλία του η πίστη πρέπει να υποτάσσεται στην γνώση, η αυθεντία στον λόγο, η Αγία Γραφή στην διαλεκτική⁶¹.

Οι αρνητές αυτού του πνεύματος εξήραν την υποταγή της γνώσης στην έξ αποκαλύψεως αλήθεια. Κυριότερος εκπρόσωπός τους είναι ο Πέτρος Damiani

⁵⁸ Mc Luhan, Media, ελληνική μετ. εκδ. Κάλβος.

⁵⁹ Mc Luhan, Media.

⁶⁰ Hugo του Αγίου Βίκτωρος, 1096 -1141.

⁶¹ B. Russell, History of Western Philosophy, σ.410

(+1072)⁶². Αμφισβητεί τους νόμους της νόησης, που κατ'αυτόν έχουν αξία για πεπερασμένα όντα μόνο και όχι για το άπειρο Όν και τις υπερβατικές αλήθειες. Επιμένει ότι ο Θεός μπορεί να κάνει πράγματα που να αντιβαίνουν τον νόμο της μη αντίφασης και θεωρεί ότι η διαλεκτική οφείλει να είναι *απλή θεραπευνίδα της πίστεως*. Μια μέση οδό ακολουθεί ο Lanfranc (+1089) αρχιεπίσκοπος του Canterbury ο οποίος αποκρούει μεν την υπερτίμηση της διαλεκτικής που έχει ως συνέπεια να κλονίζεται το κύρος κάθε αυθεντίας, προσπαθεί όμως να υπερασπίσει την αξία της διαλεκτικής με το να αναδεικνύει τις υπηρεσίες που μπορεί να προσφέρει στη Θεολογία: *εφ'όσον δεν υπερβαίνει η διαλεκτική τα προσήκοντα όρια και χρησιμοποιείται ορθώς, συντελεί τα μέγιστα εις την ανοικοδόμηση και στερέωση της πίστεως*.

Ο μαθητής του Lanfranc, ο Ιταλός Άνσελμος, (St Anselm, 1093-1109), αρχιεπίσκοπος του Canterbury, ο οποίος έκανε χρήση εκτός του Αυγουστίνου και πολλών στοιχείων από τον Πλάτωνα, καθόρισε την μεταξύ πίστεως και γνώσης σχέση κατά τέτοιο τρόπο ώστε να θεωρείται ο πατήρ της σχολαστικής φιλοσοφίας⁶³. Ο Άνσελμος θεωρεί (σε συμφωνία με τον Αυγουστίνο) την πίστη ως πρώτο και θεμελιώδες πιστεύομεν *ίνα γνωρίσωμεν. Η πίστη είναι αυτοτελής και δεν χρειάζεται λογικές και επιστημονικές βάσεις, ρέπει όμως προς λογική σύλληψη και διασαφήνιση του περιεχομένου της, διότι ο άνθρωπος επιθυμεί φύσει να διαγνώσει την λογική αναγκαιότητα των αληθειών της πίστεως, τας οποίας με ταπεινοφροσύνην απεδέχθη*. Οι αποδείξεις του Άνσελμου περί του Θεού είναι οι πρώτες στην σχολαστική φιλοσοφία που ακολουθώντας μια συνεπή εννοιοκρατία εγκαινίασε μια νέα περίοδο θεολογικών συζητήσεων πάνω στην *σχέση πίστης - γνώσης*⁶⁴.

Τον ίδιο αιώνα μετατοπίζεται το πρόβλημα και των συζητήσεων στο πρόβλημα των *γενικών - καθολικών - εννοιών (Universalia)*. Η εμφάνιση του *νομιναλισμού* (ονοματοκρατίας) αποτελεί μια προδρομική φάση του αγγλικού εμπειρισμού και συνιστά μια διαμάχη για τις γενικές έννοιες⁶⁵. Οι απαντήσεις στο πρόβλημα έχουν τρεις κατευθύνσεις. Κατά την πρώτη (πλατωνική - αυγουστίνεια εκδοχή) οι γενικές έννοιες προϋπάρχουν και προηγούνται οντολογικά των αισθητών πραγμάτων (*Universalia ante rem*). Η δεύτερη λύση του προβλήματος (σύμφωνα με την διδασκαλία του Αριστοτέλη) δέχεται ότι οι γενικές έννοιες ενυπάρχουν στα πράγματα ως είδη (*Universalia in rem*). Η τρίτη απάντηση ισχυρίζεται ότι οι γενικές έννοιες ούτε *ante rem* ούτε *in rem* υφίστανται, αλλά συγκροτούνται εκ των υστέρων στον ανθρώπινο νου, ως αφαιρετικές συλλήψεις - έννοιες (*Universalia post rem*). Κυριώτεροι εκπρόσωποι της τρίτης άποψης είναι οι Roscellinus (1050 -1123) και William Occam (1300 -1349)⁶⁶.

⁶² B. Russell, σ. 407.

⁶³ B. Russell, σ. 410.

⁶⁴ X. Γιανναρά, σελ 154.

⁶⁵ X. Γιανναρά, σελ 154.

⁶⁶ B. Russel, History of Western Philosophy, p.455 και X. Γιανναρά, σελ 154.

Ο Occam αποτελεί μια επαναστατική στιγμή για την φιλοσοφία. Η βασική του θέση είναι ότι η μόνη αποδεκτή κατηγορία είναι εκείνη του *ατομικού πράγματος* του συγκεκριμένου, αυτό που ο αριστοτέλης ονομάζει *πρωταρχική ουσία*. "όλα τα άλλα για τον Occam είναι ονόματα που δίνουν οι άνθρωποι στα πράγματα για να συνεννεούνται"⁶⁷. Εκείνο που πετυχαίνει ο νομιναλισμός είναι ότι στερώντας τις γενικές έννοιες από το υπερβατικό δεδομένο (in deo ή in mondo) οντολογικό τους περιεχόμενο, απογυμνώνει τη νοητική σύλληψη από τον μεταφυσικό χαρακτήρα της και μεταθέτει τη δυνατότητα της γνώσης στην ατομική εμπειρική πιστοποίηση του πραγματικού. Ο νομιναλισμός αποτελεί τον προάγγελο του αγγλικού εμπειρισμού.

2. 6 Η είσοδος του Αριστοτέλη - Ακμή του Σχολαστικισμού

Τον 12ο αιώνα αρχίζει η πολύ σημαντική επίδραση των Αράβων⁶⁸ οι οποίοι είχαν διαβάσει και εργαστεί πάνω στους αρχαίους έλληνες φιλόσοφους και μαθηματικούς και τους είχαν δει με ένα νέο μάτι. Εκείνο που πρέπει να αναφερθεί είναι η τάση που ξεκινά, κυρίως από την Σχολή της Σάρτρης όπου δίδαξαν ο Πέτρος Αβελάρδος (1079 -1142, Abelard), ο Πέτρος Λομβαρδός (+1164), ο Αλανός εκ Λίλλης (+1205) κ.ά, για την εις άτοπον μέθοδο παραγωγής των αληθειών της πίστης από μερικά πρωταρχικά αξιώματα.

Ο Αριστοτέλης γίνεται ευρύτερα γνωστός και αρχίζει να επηρεάζει τον πνευματικό βίο της Ευρώπης, σε δυο φάσεις. Μόλις στα μέσα του 12ου αιώνα μεταφράζεται στα λατινικά (από τα αραβικά) το αριστοτελικό Όργανο, τα Αναλυτικά, τα Τοπικά και οι Σοφιστικοί Έλεγχοι. Ως την εποχή εκείνη η Ευρώπη γνώριζε μόνο αποσπάσματα της αριστοτελικής Λογικής, από την μετάφραση και τον σχολιασμό που είχε εκπονήσει ο Boethius (480 -525 μ.χ). Σε δεύτερη φάση στα μέσα του 13ου αι. μεταφράζονται και τα υπόλοιπα βιβλία του Αριστοτέλη. Η διδασκαλία του Αριστοτέλη έρχεται σε αντίθεση με την χριστιανική διδασκαλία, αφού ο κόσμος σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, δεν δημιουργήθηκε εκ του μηδενός αλλά είναι αιώνιος και η φύση είναι οντολογικά αυθύπαρκτη κ.τ.λ.

Φορέας του αριστοτελισμού αποβαίνει το δομινικανικό τάγμα υπό την ηγεσία του Αλβέρτου του Μεγάλου (Albertus Magnus 1193 -1280) και του Θωμά του Ακινάτη (Aquinas 1225 - 1274). Ο Αλβέρτος είναι ο πρώτος που επιχειρεί τον *διαχωρισμό πίστης και γνώσης*. Ο Θωμάς είναι πνεύμα οξύ, προικισμένο με αξιοθαύμαστη ικανότητα για συστηματοποίηση και χωρίζει, όπως ο δάσκαλός του, την πίστη από την γνώση: *γνώση σημαίνει αποδεικνύναι πίστη σημαίνει δέχεσθαι τι ως αληθές επί τη βάσει της αυθεντίας*. Ωστόσο, για τον Θωμά η γνώση προπαρασκευάζει την πίστη, δημιουργεί τα λογικά θεμέλια της πίστης και επομένως προηγείται από αυτήν.

Η άποψη του Θωμά άργησε να επικρατήσει, αλλά με την αποδοχή της η αριστοτελική Λογική γίνεται δεκτή στην Ευρώπη, ως να επρόκειτο για το

⁶⁷ D. W. Smith, Intentionality Naturalized? P. 86. In the Naturalizing Phenomenology Ed. J. Peticot & F. Varela. & B. Pachoud & J. M. Roy Stanford University Press (1999).

⁶⁸ I. M. Bochenski, A History of Formal Logic, Chelsea, 1970.

ολοκλήρωμα της φιλοσοφίας, και ως αποκλειστικό όργανο για την κατάκτηση της ορθής, θετικής και αδιαμφισβήτητης γνώσης. Η αλήθεια ταυτίζεται με το αποτέλεσμα της μεθοδολογικής ακρίβειας, η γνώση εξαντλείται στο υποχρεωτικό συμπέρασμα της ορθής συλλογιστικής. Έτσι, όταν ολοκληρώνεται η λατινική μετάφραση του αριστοτελικού έργου είναι αργά να αντιληφθούν τη σχετικότητα της τεχνικής των συλλογισμών μέσα στο οικοδόμημα της φιλοσοφίας του Σταγειρίτη. Η μέθη του ενθουσιασμού, για την αποτελεσματικότητα της ορθής συλλογιστικής, δεν αφήνει περιθώρια για την κατανόηση του δυναμισμού της αριστοτελικής θεωρίας.

Η αντικειμενική κατοχύρωση της αλήθειας, η ταύτιση της αλήθειας με το αποτέλεσμα της μεθοδολογικής ακρίβειας, οδηγεί τους Δυτικούς θεολόγους στην διαστολή της πίστης από τη Θεολογία και στην οργάνωση της δεύτερης σε αυτόνομη επιστήμη⁶⁹. Το αντικείμενο της μεταφυσικής - ακριβώς όπως τα αντικείμενα της φυσικής - υποτάσσεται με απόλυτη πιστότητα στις απαιτήσεις της αριστοτελικής *demonstratio* (αποδεικτικής μεθόδου). Η Θεολογία αναδεικνύεται σε επιστήμη που δεν έχει τίποτα να ζηλέψει από τη θετικότητα των φυσικών επιστημών.

Το 13ο αιώνα η διατύπωση και ανάπτυξη μιας αλήθειας οργανώνεται μεθοδικά με κανόνες, αξιώματα, αρχές, πολλαπλές διαιρέσεις. Το σύνολο μιας πραγματείας διαιρείται σε μέρη, τα μέρη σε κεφάλαια, τα κεφάλαια σε παραγράφους, οι παράγραφοι σε άρθρα. Οι θέσεις κατοχυρώνονται με συστηματική αναίρεση των αντιθέσεων, ο αναγνώστης προωθείται προοδευτικά από φράση σε φράση, σε μια ολοκληρωμένη διανοητική διασάφηση της αλήθειας. Τέτοιο είναι το βιβλίο του Θωμά του Ακινάτη το *Summa Theologica* το οποίο χαρακτηρίζεται ως προς την μεθοδικότητά του ως η πρώτη τεχνολογία και εργοστάσιο που παράγει την αλήθεια του.

2. 7 Η έξοδος από τον Μεσαίωνα

Ανακεφαλαιώνοντας τις καινούργιες αντιλήψεις που επικρατούν στον ευρωπαϊκό χώρο, τις καταγράφουμε:

- Στροφή προς τις ωφελιμιστικές δυνατότητες της φύσης.
- Απομάκρυνση του Θεού από τον Κόσμο.
- Παρουσίαση της μηχανής ως ερμηνευτικού αξιώματος του κόσμου.
- Εισαγωγή της ομοιογενούς μέτρησης του χρόνου με την εκτεταμένη χρήση του ρολογιού.

Το επόμενο ιστορικό βήμα θα είναι η μεταφορά της αριστοτελικής επιστημολογίας από το χώρο της συστηματικής θεολογίας στην περιοχή της εμπειρικής πραγματικότητας δηλ. την κοσμολογία και την φυσική. Η διαστολή της πίστης από τη Θεολογία, της μεταφυσικής από την επιστήμη ανοίγει το δρόμο για τη μεθόδευση και συστηματοποίηση της γνώσης σε όλους τους χώρους του επιστητού δηλ. για τον περιορισμό της γνώσης στα όρια της διανοητικής σύλληψης και νοηματικής έκφρασης.

⁶⁹ B. Russell και K. I. Λογοθέτου, *Η Φιλοσοφία της Αναγεννήσεως*, ΟΕΣΒ, 1955.

Η Αναγέννηση ήταν αποτέλεσμα πολλών ιστορικών γεγονότων τα κυριότερα των οποίων καταγράφονται ότι είναι:

- Η άλωση της Κωνσταντινούπολης (1453), γεγονός που έστειλε πολλούς Έλληνες λογίους εις την Δύση όπου και έγιναν μεταλαμπαδευτές της ελληνικής παιδείας.
- Η ανακάλυψη της Αμερικής (1492) η οποία δρομολογεί μια νέα κοσμολογική αντίληψη αλλά και την αναζήτηση νέων κόσμων.
- Η εφεύρεση της τυπογραφίας στην Ολλανδία και την Γερμανία γύρω στο 1440⁷⁰.

Η Αναγέννηση πνευματικά χαρακτηρίζεται από την γνωριμία με τα έργα του Πλάτωνα, την νέα ανάγνωση του Αριστοτέλη από μεταφράσεις που γίνονται κατ'ευθείαν από τα ελληνικά και την μετάφραση άλλων μαθηματικών συγγραφέων εκτός του Ευκλείδη, όπως του Πάππου, του Απολλώνιου, ή του Αρχιμήδη. Η φιλοσοφία, για τα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες θα δεχθεί μια ισχυρή μετατόπιση σε ένα έδαφος κατάλληλα προετοιμασμένο σε όλη την διεργασία της μεσαιωνικής σκέψης και υπαγορεύεται από τα εξής χαρακτηριστικά.

Η φιλοσοφία της ουσίας των πραγμάτων εγκαταλείπεται και το αίτημα της υπολογισιμότητας αρχίζει να αποκτά προτεραιότητα. Στην σχολή της Παδουάς διατυπώνεται στον 13^ο αιώνα το ότι μετριέται υπάρχει. Τα στοιχεία, που θα καθορίσουν το θετικό επιστημονικό πνεύμα της νεότερης εποχής, την σημασία της μεθόδου και την μαθηματοποίηση της φυσικής, αναδεικνύονται μέσα από την κατανόηση και απόρριψη της Αριστοτελικής άποψης για την κίνηση, και της σχέσης κόσμου και Μαθηματικών. Οι διδασκαλίες των δυο μεγάλων σοφών της αρχαιότητας, του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη συγκρίνονται ως προς την δυνατότητα περιγραφής του Κόσμου. Αυτό προϋπέθετε την καταστροφή αυτού του Κόσμου

δηλαδή την εξαφάνιση της ιδέας ενός κόσμου με πεπερασμένη δομή, ιεραρχικά διατεταγμένου και ποσοτικά διαφοροποιημένου από οντολογική άποψη. Η ιδέα αυτή αντικαταστάθηκε από εκείνη ενός Σύμπαντος, χωρίς καθορισμένα όρια και μάλιστα απείρου, το οποίο διέπουν και καθιστούν ενιαίο οι ίδιοι παγκόσμιοι νόμοι. Ενός Σύμπαντος στο οποίο όλα τα πράγματα ανήκουν στο ίδιο επίπεδο Όντος, σε αντίθεση με την παραδοσιακή αντίληψη, που διέκρινε και έφερνε αντιμέτωπους δυο κόσμους, του Ουρανού και της Γης⁷¹.

Η φιλοσοφία της κίνησης στον Αριστοτέλη και η απόρριψή της κατά την Αναγέννηση αποτελεί βασικό άξονα όπου διαφαίνεται το πέρασμα από ένα σύστημα σκέψης σε ένα άλλο. Ο Αριστοτέλης έχει εμπρός του ένα κόσμο περιορισμένο, μια Γη ακίνητη. Η αφαίρεση του κενού χώρου, βασική για την νεότερη Μηχανική είναι για αυτόν ακατανόητη⁷².

Στην αριστοτελική δυναμική κάθε σώμα θεωρείται ότι έχει την τάση να βρίσκεται στο φυσικό του τόπο και να επανέρχεται σε αυτόν αν απομακρυνθεί βίαια.

⁷⁰ Η τυπογραφία καθόρισε ανεξίτηλα τί από την εποχή εκείνη και μετά μπορούσε να θεωρηθεί γνώση, Mc Luhan, Media.

⁷¹ Α. Κουρέ, Γαλιλαίος και Πλάτων, ΝΕΥΣΙΣ, Ι, σελ. 51 -83, 1994

⁷² στο ίδιο

Αυτή η τάση εξηγεί και τη φυσική κίνηση ενός σώματος: κίνηση που το επαναφέρει στον φυσικό του τόπο από τον βραχύτερο και ταχύτερο δρόμο. Κάθε κίνηση προϋποθέτει ένα είδος κοσμικής αταξίας, μια διατάραξη της ισορροπίας του σύμπαντος, διότι είναι το άμεσο αποτέλεσμα κάποιας βίας ή αντιθέτως το αποτέλεσμα προσπάθειας του Όντος για αντιστάθμιση αυτής της βίας, για επανάκτηση της τάξης⁷³.

Η κίνηση δεν διατηρείται όπως η ακινησία. Η κάθε αλλαγή από την ακινησία χρειάζεται ένα αίτιο για να ερμηνευθεί. Οποιαδήποτε κίνηση χρειάζεται ένα κινούν που συντηρεί την κίνηση, όσο εκείνη διαρκεί, απαιτεί σε όλη την διάρκεια τη συνεχή δράση ενός εξαιρετικού κινούντος που βρίσκεται σε επαφή με το κινούμενο σώμα⁷⁴. Η λογική του κοινού νου υπάρχει σε αυτή την αντίληψη. Αν δεν σπρώξουμε κάτι αυτό δεν κινείται. Μέσα στο σύστημά του που περιέχει μια καλά συγκροτημένη σχέση παραδοχών και συμπερασμάτων. Όλα στο κόσμο δικαιολογούνται και όπου διαφαίνονται κενά, όπως στην κίνηση μιας πέτρας, ενός βέλους, ενός βλήματος επιστρατεύονται δικαιολογίες, όπως η αντίδραση του περιβάλλοντος μέσου αέρα ή ύδατος. Η πέτρα επανασπρώχνεται από τον αέρα ή το νερό!

Είναι εκπληκτικό, πώς αυτή η απλή προφανής παρατήρηση μένει σε ένα περιθώριο, ασήμαντο χάριν της θεωρίας που τόσο "καλά" προσδιορίζει και επεξηγεί τον κόσμο για 2.000 χρόνια. Αποτελεί ένδειξη, ακόμη πιο εντυπωσιακή και από εκείνη του γεωκεντρικού συστήματος του Πτολεμαίου, για το πόσο η θεωρία (ως ιδεολογία) μπορεί να παρακάμπτει και να επικαλύπτει προφανείς διαπιστώσεις και βεβαιότητες του ανθρώπου. Την απάντηση στο σκεπτικισμό, που προκαλεί αυτό το γεγονός, δεν την δίνουν παρά μόνο οι πρόσφατες επιστημολογικές θεωρήσεις (Dewey, Bachelard, Popper, Feyerabend) περί διαρκούς διαψευσιμότητας της επιστήμης και της επιφύλαξης προς την κάθε είδους ακραία επανάπαυση στον εκάστοτε ορθολογισμό.

Οι συνεχιστές του Αριστοτέλη, σε όλη την διάρκεια του Μεσαίωνα, προσπάθησαν να καλύψουν το κενό αυτό στην τέλεια κατά τα άλλα θεωρία του επινοώντας την έννοια *impetus*. Το κινούν μεταδίδει στο κινούμενο ή του εντυπώνει κάτι που το καθιστά ικανό να κινηθεί. Το *impetus* είχε ένα αμφίβολο οντολογικό κύρος και απασχόλησε τους Σχολαστικούς μέχρι και τον 17ο αιώνα όπου και εγκαταλείφθηκε μέσα στην νέα θεώρηση του κόσμου που προέκυψε από την μαθηματικοποίηση της κινηματικής. Η σημερινή εκπαίδευση περιέχει ως προϋπόθεση αυτή τη μαθηματικοποίηση και αυτό δημιουργεί εμπόδια στην κατανόηση της μεταβατικής κατάστασης που ανέκυψε τον 17ο αι. Ο νεότερος άνθρωπος είναι εμποτισμένος με την αντίληψη ότι απέναντί του έχει οντότητες προς μέτρηση, *res extensa*, και είναι αυτή η μέτρηση που εξασφαλίζει την αντικειμενικότητα με την οποία είμαστε αναγκασμένοι να καταλαβαίνουμε τον κόσμο. Εμείς ως *υποκείμενα* εξασφαλίζουμε την ορθή επικοινωνία μας και συνεννόηση μας μέσω ενός συστήματος μετρήσεων και συσχετισμών αυτών των μετρήσεων.

⁷³ στο ίδιο

⁷⁴ στο ίδιο

Χαρακτηριστικό της αρχαίας ελληνικής επιστήμης είναι ότι δεν είχε το εργαλείο του πειραματισμού⁷⁵ εκτός ίσως ύστερα στον Αρχιμήδη και τον Ήρωνα. Λέγεται ότι ο πρώτος φυσικός της νεοτερικότητας είναι ο Αρχιμήδης⁷⁶, εκείνος όμως μελέτησε μόνο την Στατική.

Ωστόσο, την άποψη αυτή δεν ήταν και τόσο απλό να την ισχυρισθεί κανείς γιατί έπρεπε να βγει από ένα σύστημα εννοιών που η αποβλεπτικότητα τους αποκλίνει από το να βοηθά στην συγκρότηση μιας μαθηματικής φυσικής. Η φυσική δεν είναι εφαρμοσμένη γεωμετρία. Η γήινη ύλη ποτέ δεν μπορεί να δείξει ακριβή σχήματα. Οι μορφές δεν αποδίδουν ποτέ πλήρως και τελείως τον κόσμο. Αυτό ξέφυγε από τον Πλάτωνα. Είναι μάταιη η προσπάθεια να δομηθεί μια μαθηματική φιλοσοφία της φύσεως. Δεν είναι δυνατή κατά τον Αριστοτέλη, μια μαθηματική θεωρία της ποιότητας. Τα μαθηματικά των αρχαίων, διεκδικώντας την αναζήτηση του αναλλοίωτου σε ένα κόσμο όπου τα πάντα ήταν ρευστά, είχαν παγιδευτεί με το ξεκίνημά τους στην περιγραφή ενός κόσμου ανύπαρκτου και άχρονου. Η ακρίβεια και η αυστηρότητά τους είχαν μόνο αισθητική και παιδευτική αξία, υστερούσε όμως σε αξία της φυσικής, για την περιγραφή της φύσης. Τα μαθηματικά δεν ασχολούνται με την κίνηση, διακήρυσσαν κατηγορηματικά οι σοφοί της εποχής⁷⁷.

Για τον Αριστοτέλη, ο κενός χώρος (ο χώρος της γεωμετρίας) αναιρεί εξ' ολοκλήρου την έννοια της τάξης: σε ένα κενό χώρο όχι μόνο δεν υπάρχουν *φυσικοί τόποι* αλλά καθόλου τόποι. Ο φυσικός εξετάζει πραγματικά αντικείμενα, ο γεωμέτρης λογικές σχέσεις αφηρημένων αντικειμένων. Οπότε είναι επικίνδυνη για τον Αριστοτέλη η εφαρμογή μεθόδου καθαρά γεωμετρικής μεθόδου για την μελέτη της φυσικής πραγματικότητας⁷⁸.

Έπρεπε να δράσουν πλήθος ιστορικά γεγονότα για να φτάσει ο άνθρωπος στην επανάσταση της νεοτερικότητας, την οποία δεν πρέπει να την δούμε στην πρόταση του Κοπέρνικου για το ηλιοκεντρικό σύστημα, ούτε στο κάψιμο της βούλας του Πάπα από τον Λούθηρο. Η μεγάλη στιγμή της έναρξης της νεοτερικότητας είναι η στιγμή που ο νεαρός Γαλιλαίος με τους παλμούς της καρδιάς του χρονομετρά την κίνηση της καντήλας στην Μητρόπολη της Πίζας.

Την στιγμή που τα δυο ανομοιογενή μεγέθη χρόνου και μήκους μπαίνουν σε αναλογία, τη στιγμή που τα μαθηματικά βρίσκουν τρόπο να αναπαραστήσουν την κίνηση του κόσμου.

Μετά την προσπάθεια του Γαλιλαίου που διακήρυττε ότι το μεγάλο βιβλίο της φύσης μπορεί να διαβαστεί μόνον από εκείνους που ξέρουν τη γλώσσα με την οποία είναι γραμμένο και η γλώσσα αυτή είναι τα μαθηματικά⁷⁹.

Το πρώτο που είχε να διορθώσει ο Γαλιλαίος ήταν η πλατωνική αντίληψη. *Στις αποδείξεις όσων έχουν σχέση με την φύση, λέει ότι δεν πρέπει να αναζητούμε τη μαθηματική ακρίβεια.* Έπειτα, είχε να παρακάμψει την έννοια της ποιότητας στις

⁷⁵ Β. Φάρινγκτον, Η επιστήμη στην αρχαία Ελλάδα, Κάλβος 1969.

⁷⁶ στο ίδιο και Α. Renyi, Διάλογοι για τα Μαθηματικά, μετ. Μ. Μυτιληναίου και Τ. Σπύρου, εκδ. Διογένης, 1979.

⁷⁷ Α. Κουρέ, Γαλιλαίος και Πλάτων.

⁷⁸ στο ίδιο

⁷⁹ Στα ίδια

θεωρήσεις του, αφού αυτή δεν αποτελεί πηγή γνώσης. Μετά προχώρησε με την πίστη ότι *πρέπει να μετρήσει κανείς ό,τι μπορεί να μετρηθεί, και να κάνει να μετράται ότι δεν μπορεί να μετρηθεί*⁸⁰.

Η πεποίθηση του Πλάτωνα ότι ο άνθρωπος που μπορεί να κατανοήσει τη φύση των αριθμών συμμετέχει στη θεότητα⁸¹, ανανεώνεται με την εισβολή της διάστασης του χρόνου στις μετρήσεις. Η μαθηματικοποίηση της σκέψης μας αρχίζει. Η μεγάλη σημασία της *αναλογίας* για τα ελληνικά Μαθηματικά έχει καταδειχθεί από πολλούς⁸². Ωστόσο, η χρήση της αναλογίας γίνεται με αυστηρή προσήλωση στην ομογένεια των παραγόντων. Ο Πλάτων στον Τίμαιο κάνει μια πολύ σημαντική προσομοίωση που αναδεικνύει μια κοσμολογική αντίληψη και προαναγγέλλει την σύγχρονη μαθηματική φυσική. Μια χαοτική κατάσταση της ύλης του κόσμου προηγείται της αρχής του: Φωτιά, Αέρας, Νερό και Γη βρίσκονται σε μη-αρμονική και άτακτη κίνηση, περνούν ελεύθερα το ένα στο άλλο, δεν είναι πρωτίστως, τίποτα άλλο παρά πλημμελώς και ατάκτως κινούμενα. Έρχονται εις τάξη με την παραγωγή μιας αυτοσυντηρούμενης ισορροπίας έτσι ώστε το ακατάπαυστο πέρασμα από το ένα στο άλλο να οδηγεί σε ευσταθή ηρεμία. Η *Αναλογία* προσιδιάζει καλύτερα σε αυτό τον σκοπό, επειδή υφαίνει μια σταθερή σύνδεση, ένα σταθερό δεσμό, μεταξύ των κοσμικών στοιχείων, ένα δεσμό που παραμένει άρρηκτος κατά την πορεία όλων των εσωτερικών αλλαγών και των δυνατών μεταθέσεων αυτών των στοιχείων εντός της αναλογίας... χάρη στην αϋλότητα αυτής της αναλογίας, ως *ψυχής*, εξασφαλίζεται η ολότητα που εξασφαλίζει την τάξη... Τα πάντα βρίσκονται σε σταθερό λόγο, όπως η Φωτιά με τον Αέρα και ο Αέρας με το Νερό και όπως ο Αέρας με το Νερό έτσι και το Νερό με τη Γη⁸³.

Ενώ ως τότε τα ποσά στους λόγους είναι ομοιογενή, π.χ μήκος/μήκος εμβαδόν/εμβαδόν αποτολμάται το ξεπέραςμα, αφού όλα πια μετρώνται και είναι αριθμοί κι έτσι αποκτούν ομοιογένεια. Στους αρχαίους οι λόγοι χρησιμοποιούνται περισσότερο ως εργαλείο σύγκρισης και δικαιολόγησης και όχι ως εργαλείο μέτρησης, ratio⁸⁴. Άρα αν S_1, S_2 είναι διαστήματα και T_1, T_2 χρόνοι φιάχνονται οι αναλογίες $S_1/T_1 = S_2/T_2$ στην περιγραφή του εκκρεμούς⁸⁵.

Οι επιτυχίες που επακολουθούν εξασφαλίζουν για τα Μαθηματικά μια περίοπτη θέση μέσα στο σώμα των επιστημών που αναπτύσσονται και θεριεύουν με βάση πια τα Μαθηματικά και το πείραμα.

⁸⁰ στο ίδιο και στο και J. Hemleben, Γαλιλαίος, ΟΚΕ, 1968.

⁸¹ Στο ίδιο

⁸² A. Szabo, *Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών*, Τ.Ε.Ε, 1973.

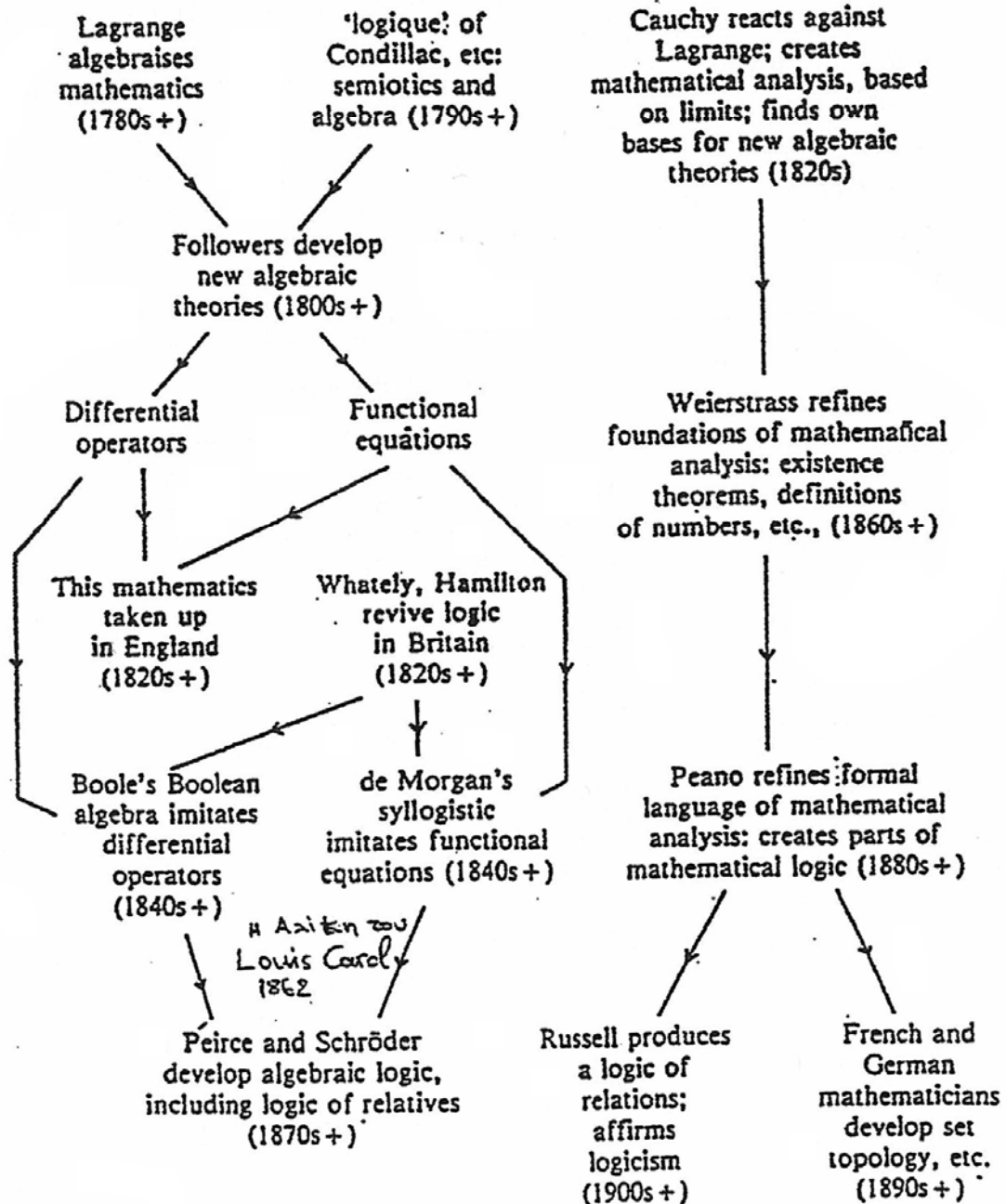
⁸³ J. Klein, *Κόσμος της Φυσικής και ο Φυσικός Κόσμος*, Νεύση 7, 1998.

⁸⁴ Η αρχαία φιλοσοφία χαρακτηρίζεται από ορθολογισμό ενώ η νεότερη όπου και προέχει η μέτρηση ως ρασιοναλισμός.

⁸⁵ A. Κουρέ, Γαλιλαίος και Πλάτων.

I. Grattan Guinness

Sketch of logics/mathematics in the 19th century



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Η ΘΕΩΡΙΑ ΓΝΩΣΗΣ ΤΩΝ ΝΕΟΤΕΡΩΝ ΧΡΟΝΩΝ

3. 1 Descartes

Στην παράγραφο αυτή θ'αναφερθούμε στην νέα φιλοσοφία που εγκαινιάζεται μέσα στον αιώνα του ορθολογισμού με κύριο εκφραστή της τον Descartes (1592-1650). Εκείνο που χαρακτηρίζει τον Descartes είναι η μεθοδική αμφιβολία του, δηλαδή ένας προσποιητός συστηματικός σκεπτικισμός, για τις όποιες αλήθειες δεν παράγονται με μια σίγουρη μέθοδο. Τα έργα του κυρίως *Κανόνες για την καθοδήγηση του Πνεύματος* (1629) και *Ο λόγος περί της μεθόδου* (1637)¹, προτείνουν ένα τέτοιο αυστηρό λογικό πρόγραμμα παραγωγής της αλήθειας κατά το πρότυπο των Μαθηματικών. Η πρότασή του βρίσκεται σε άμεση προέκταση των μεθόδων των Σχολαστικών μόνο που είναι στραμμένη στην αναγνώριση και κατανόηση των αληθειών που προκύπτουν από τον κόσμο και όχι από την θρησκεία. Επιχειρεί να καταστήσει τα θεμέλια της γνώσης αδιάσειστα. Η εμπιστοσύνη του στην απόλυτη γνωστική ικανότητα του λόγου, κατατάσσει σήμερα τον ορθολογισμό του στα Δογματικά Φιλοσοφικά συστήματα². Στο έργο του υπάρχει η δογματική παραδοχή ότι *η λογική και η οντολογική τάξη συμπίπτουν*³.

Τον Descartes τον απασχολεί από πού προέρχονται οι γενικοί συλλογισμοί και η βεβαιότητα στις αποδείξεις μας. Πώς, δηλαδή, υπάρχουν στο μυαλό μας γενικές προτάσεις που σχηματίζονται μακριά από τα συγκεκριμένα και ειδικά⁴ και λέει:

*ο τρόπος με τον οποίο μεταφέρεται η κοινή ιδέα από το ένα αντικείμενο στο άλλο είναι η απλή σύγκριση. Χάρη σε αυτήν μπορούμε να υποστηρίξουμε με βεβαιότητα ότι το ζητούμενο είναι παρόμοιο με αυτό ή εκείνο, ή εντελώς ίδιο ή ίσο με κάποιο δεδομένο. Επομένως, σε κάθε λογικό συμπέρασμα μόνο με σύγκριση μπορούμε να γνωρίσουμε την αλήθεια. Ας πάρουμε ένα παράδειγμα: Κάθε A είναι B, κάθε B είναι C, άρα κάθε A είναι C. Σ'αυτήν την περίπτωση συγκρίνουμε το ζητούμενο με το δεδομένο, δηλαδή το A και το C κατά τούτο, ότι δηλαδή και το ένα και το άλλο είναι B κ.ό.κ. Επειδή όμως, οι τύποι των συλλογισμών δεν μας βοηθούν να συλλάβουμε την αλήθεια των πραγμάτων, θα είναι χρήσιμο στον αναγνώστη να απορρίψει όλους τους τύπους των συλλογισμών και να κατανοήσει εν γένει, ότι αν δεν αποκτηθεί με απλή καθαρή ενόραση ενός μεμονωμένου πράγματος, θα αποκτηθεί με σύγκριση δυο ή περισσότερων πραγμάτων μεταξύ τους*⁵.

¹ R. Descartes, *Κανόνες για την καθοδήγηση του Πνεύματος*, Εκδ. Εγνατία 1976, & *Ο λόγος περί της μεθόδου*, εκδ. Παπαζήση 1976.

² Θ. Βορέα, *Εισαγωγή εις την Φιλοσοφία*, Α. Γιανναρά, *Μαθήματα Εισαγωγής στη Φιλοσοφία και Φιλοσοφίας της Φύσεως*, Παπαζήση 1977, Ε. Μουτσόπουλος, *Εισαγωγή εις την Θεωρίαν της Γνώσεως*, 1970.

³ Ν Αυγελής, πρόλογος στο R. Descartes, *Κανόνες*.

⁴ E.W. Beth / J. Piaget, *Mathematical Epistemology and Psychology*, σελ. 6, Reidel P.C., 1966.

⁵ R. Descartes, *Κανόνες για την καθοδήγηση του Πνεύματος*, XIV, σελ 119.

Στο απόσπασμα βλέπουμε τον αναλογικό και συγχρόνως αναπαραστατικό τρόπο του σκέπτεσθαι⁶. Το αναπαραστατικό, αναλυτικό πνεύμα είναι απόρροια της Άλγεβρας την μέθοδο της οποίας ο Descartes είχε αποδεχθεί. Επίσης, το ζήτημα του γενικού τον απασχολεί. Συγκεκριμένα γράφει (1641):

Όταν φαντάζομαι ένα τρίγωνο, μολονότι δεν υπάρχει ίσως σε κανένα μέρος του κόσμου, παρά μονάχα στη σκέψη μου μια τέτοια μορφή (και δεν υπήρξε ποτέ) δεν παύει ωστόσο να έχει μια κάποια φύση ή μορφή ή ορισμένη ουσία αυτής της μορφής, η οποία είναι αμετάβλητη και αιώνια, χωρίς να την έχω επινοήσει εγώ και πού, με κανένα τρόπο, δεν εξαρτάται απ'το μυαλό μου. Όπως φαίνεται, απ'το ότι μπορούμε να αποδείξουμε διάφορες ιδιότητες του τριγώνου αυτού, δηλαδή πώς οι τρεις γωνίες του έχουν άθροισμα ίσο με δυο ορθές, πώς η μεγαλύτερη γωνία αντικρίζει τη μεγαλύτερη πλευρά και άλλα παρόμοια, τις οποίες τώρα, είτε το θέλω είτε όχι, αναγνωρίζω πολύ καθαρά και με πολλή προφάνεια ότι του ανήκουν, μολονότι δεν το σκέφτηκα πριν καθόλου, όταν φανταζόμουν για πρώτη φορά ένα τρίγωνο⁷.

Σε αυτή την παρατήρηση ο Descartes, εκφράζει την απορία και τον θαυμασμό του μπροστά στην μαθηματική αλήθεια η οποία προκύπτει ως αποκάλυψη μιας προϋπάρχουσας πραγματικότητας, ένας πλατωνισμός δηλαδή, που ωστόσο έχει μια απόκλιση από τον αντικειμενικό ιδεαλισμό, αφού οι ιδέες εμφανίζονται ως έμφυτες, εγκαταστημένες μέσα στον ανθρώπινο νου από τον ίδιο το Θεό και έχουν μια οντολογία ιδεαλιστικού χαρακτήρα ως προϊόντα του νου. Τις ιδέες στους Στοχασμούς τις χωρίζει σε τρεις κατηγορίες: τις έμφυτες, τις επίκτητες και σε εκείνες που δημιουργούνται στο ίδιο το άτομο⁸.

Για τον Descartes, η γνώση των πραγμάτων εξαρτάται από την γνώση του ίδιου του πνεύματος. Χωρίζει την κόσμο σε *υλικό* και *νοητό*. Τον διαχωρισμό αυτό τον ονομάζουμε σήμερα Καρτεσιανό Δυϊσμό και απασχολεί τόσο την φιλοσοφία όσο και την ψυχολογία⁹. Με την σκέψη αυτή βάζει τα θεμέλια του νεότερου ιδεαλισμού. Η αλήθεια, όμως, φαίνεται να έχει κάτι από τη δομή του ανθρώπινου πνεύματος, υπόκειται στους βασικούς όρους της νόησης. Η μέθοδος, επίσης γι' αυτόν, δεν είναι μόνο εργαλείο για την συγκρότηση του κόσμου αλλά εκφράζει κάτι από την δομή του ίδιου του πνεύματος. Το πρόβλημα της μεθόδου δεν είναι άλλο από το πρόβλημα της φύσης και των ορίων της γνώσης¹⁰. Η μέθοδός του είναι εμπνευσμένη από τα Μαθηματικά, εξαιτίας της ασφάλειας και της προφάνειας των συλλογισμών τους και των σταθερών θεμελίων τους¹¹. Για τούτο λέει:

... απ'όλους που αναζήτησαν την αλήθεια μέσα στις επιστήμες, μόνο οι μαθηματικοί μπόρεσαν να βρουν μερικές αποδείξεις, ... να μην παραδέχομαι τίποτα για αληθινό, αν δεν το ξέρω ολοφάνερα αληθινό.... να αποφεύγω προσεκτικά τη βιασύνη και την

⁶ D. Judovitz, Subjectivity and Representation in Descartes, Camb. Un. Pr. 1988.

⁷ R. Descartes, Μεταφυσικοί Στοχασμοί, Στοχασμός (V), Αναγνωστίδη.

⁸ Α. Γιανναρά, Ο αγγλικός εμπειρισμός, Παπαζήση 1977.

⁹ Earl Hunt, What Is a Theory of Thought?, p. 3-50. In The Nature of Cognition of Cognition, edit. R. J. Sternberg 1999, MIT Press.

¹⁰ Ν. Αυγελής, πρόλογος στο Κανόνες για την καθοδήγηση του Πνεύματος.

¹¹ R. Descartes, Ο λόγος περί της μεθόδου, σελ. 10, εκδ. Παπαζήση 1976.

*προκατάληψη, και να μην περιλαμβάνω στην κρίση μου τίποτα παραπάνω απ'ό,τι θα παρουσιάζεται στον νου μου τόσο καθαρά και τόσο ευδιάκριτα, ώστε να μη μου δίνεται καμιά ευκαιρία να αμφιβάλλω γι'αυτό*¹².

Το έργο της αναλυτικής μεθόδου που προτείνει σταματάει ακριβώς στο σημείο όπου φτάνουμε στην *ενόραση* των απλών φυσικών προτάσεων. Κανόνες όμως για την νοητική πράξη της ενόρασης δεν μπορούμε να υπαγορεύσουμε. Η ενόραση έχει ως άμεση πηγή το φυσικό φως του πνεύματος σ'όλη την καθαρότητα και βεβαιότητά του. Με την *παραγωγή* η γνώση απλώνεται πέρα από τα απλά δεδομένα της ενόρασης, σε όλες τις δυνατές αλήθειες¹³. Καμία επιστήμη δεν οικοδομείται με άλλο τρόπο παρά με την ενόραση και την παραγωγή¹⁴. Βέβαια ο Descartes με την μέθοδό του δεν κάνει τίποτε άλλο από το να καταστρέφει στην ουσία το δεδομένο των αισθήσεων, το οποίο δεν ικανοποιεί το αίτημα της απόλυτης βεβαιότητας και να το αντικαθιστά με την ορθολογική κατασκευή¹⁵. Και το ερώτημα που τίθεται είναι κατά πόσο αυτό το μαθηματικό, παραγωγικό μοντέλο που προτείνει μπορεί να εξηγήσει το φυσικό κόσμο, ένα κόσμο συμπτωματικών γεγονότων. Η εμπειρία έρχεται απλά να επαληθεύσει την ενέργεια της καθαρής νόησης. Η φύση δεν είναι παρά πραγμάτωση μαθηματικών ιδεών¹⁶.

3. 2 Ο αγγλικός εμπειρισμός

Το κύρια χαρακτηριστικά των άγγλων φιλοσόφων είναι: κοινός νους, δυσαρέσκεια για την πολυπλοκότητα, ισχυρή προτίμηση για το συγκεκριμένο έναντι του αφηρημένου. Γενικά στην Βρετανία συναντάμε την κυριαρχία ενός πρακτικού πνεύματος¹⁷.

F. Bacon (1561 - 1626). Βασικό του έργο το *Novum Organum*.

Η διδασκαλία του περί των ειδώλων και η διερεύνηση των ποικίλων υποκειμενικών προκαταλήψεων, που στέκονται εμπόδιο στον πορισμό της γνώσης, αποτελούν το πιο αποδοτικό και πιο γόνιμο τμήμα της φιλοσοφίας του. Ο ανθρώπινος νους, κατά τον Bacon, είναι παρόμοιος προς καθρέφτη με ανώμαλη επιφάνεια, που δεν αντανακλά ομαλά τις ακτίνες των πραγμάτων, αλλά ανακατεύει τη δική του φύση με τη φύση των πραγμάτων, την παραμορφώνει και την ασκημίζει. Οι πλάνες δημιουργούνται από τις συγχύσεις στα νοήματα των λέξεων και είναι απαραίτητη η κάθαρση του πνεύματος για να διαβαστεί το βιβλίο της φύσεως.

¹² R. Descartes, Ο λόγος περί της μεθόδου, II, σελ. 20, Η φιλοσοφική του μέθοδος τον οδηγεί στο να εκλάβει ως *πρώτη αρχή* του συστήματός την αυτονόητη και αυτοαναφερόμενη φράση του *σκέπτομαι άρα υπάρχω*, που γίνεται αφετηρία για την φιλοσοφία του υποκειμένου και της συνείδησης για την νεωτερικότητα, βλέπε στο παραπάνω σελ. 32.

¹³ N. Αυγελής, πρόλογος στο Κανόνες...

¹⁴ R. Descartes, Κανόνες για την καθοδήγηση του Πνεύματος, IV, σελ 35.

¹⁵ N. Αυγελής, πρόλογος στο Κανόνες...

¹⁶ Στο προηγούμενο.

¹⁷ K. Matthews, *British Philosophers*, William Collins of London 1944.

Η εμπειρία δεν είναι ταυτόσημη με την άμεση κατ'αίσθηση εντύπωση της πραγματικότητας. Η εμπειρία είναι, κατ'αυτόν, δυο ειδών: η κοινή και η γνήσια μεθοδευμένη, η ευμέθοδος, οργανωμένη και διαρθρωμένη. Η κοινή έννοια της εμπειρίας ταυτίζεται με την συντυχία, την τύχη ενώ η άλλη με το πείραμα. Σε αυτή την διάκριση και στην μεθοδικά οργανωμένη πειραματική, επιστημονική εμπειρία έγκειται η συμβολή του Bacon στην κριτική της γνώσης. Κάθε αλήθεια, για τον Bacon, είναι θυγατέρα της εποχής της. Το φιλοσοφείν ταυτίζεται με την αυτοθεώρηση και την αυτοσκόπηση στον καθρέφτη της εποχής. Προϋπόθεση, για μια ρύθμιση και τάξη της ζωής, είναι η ορθή εκτίμηση των πραγματικών μεγεθών, των ιδίων και των ξένων, που ο Bacon αποκαλεί *αληθινή μαθηματική επιστήμη του πνεύματος*¹⁸.

Thomas Hobbes (1588-1697), με κύριο έργο το *Λεβιάθαν* (1651).

Ο Hobbes ακολουθεί τον Bacon στην αναζήτηση της αληθινής γνώσης που βρίσκεται στην εύρεση των αιτίων, στην θεωρία της ύλης όμως διαφέρει ριζικά απ'αυτόν, αφού πιστεύει όχι στην αυθαίρετη μελέτη των ποιοτήτων, αλλά στις μαθηματικές σχέσεις που κρύβονται πίσω από τα φαινόμενα, σύμφωνα με την στροφή του Γαλιλαίου. Θεωρεί τους νόμους της Γεωμετρίας σημαντικούς όχι μόνο για την γνώση της φύσης αλλά και για όλη την γνώση και προτείνει την παραγωγική μέθοδο. Η απλή εμπειρική γνώση των κατ'αίσθηση δεδομένων δεν αρκεί, χωρίς την ενατένιση του εσωτερικού δεσμού των αιτίων. Προς τούτο χρειάζεται αναθεώρηση της έννοιας του νοείν.

Συνεχίζοντας την νομιναλιστική παράδοση του Ockam, θεωρεί τις λέξεις σημεία τα οποία δημιουργούμε εμείς στο πνεύμα μας. Η εκλογή των σημείων και ο τρόπος σύνδεσης τους είναι ολότελα αυθαίρετος και εξαρτάται από την κρίση εκείνων που πρώτοι τα όρισαν. Σύμφωνα με αυτή την αντίληψη, *η αλήθεια δεν βρίσκεται στα πράγματα αλλά στα ονόματα και στην σύγκριση των ονομάτων που γίνεται στην πρόταση*, θυμίζοντας πάλι την άποψη του Αριστοτέλη ότι *η αλήθεια βρίσκεται στην διάνοια (κρίση) και όχι στα πράγματα*¹⁹.

John Locke (1632 -1704). Κύριο έργο του το *Δοκίμιο πάνω στην ανθρώπινη νόηση* (*An essay concerning human understanding*, 1690). Αποφασιστική είναι η θεωρία του για τις ιδέες. Στο *Δοκίμιο* γράφει:

Υπάρχει μια καθιερωμένη αντίληψη ανάμεσα σε μερικούς ανθρώπους ότι μέσα στο πνεύμα υπάρχουν μερικές έμφυτες αρχές, μερικές πρωταρχικές έννοιες, κοινές έννοιες, γραπτά σημεία, γράμματα, που κατά κάποιο τρόπο εγγράφονται στο πνεύμα

¹⁸ Α. Γιανναρά, Ο αγγλικός εμπειρισμός, Β. Russel, History of Western Philosophy και Κ. Matthews, British Philosophers.

¹⁹ Α. Γιανναρά, Ο αγγλικός εμπειρισμός και ο γαλλικός διαφωτισμός.

του ανθρώπου. Η ψυχή τα προσδέχεται στην πρώτη καταβολή της υπάρξεώς της και τα συναποκομίζει, όταν έρχεται στον κόσμο²⁰.

Ο Αγγλος φιλόσοφος μετέθεσε το πρόβλημα της Καρτεσιανής αμφιβολίας και το "σκέπτομαι άρα υπάρχω" σε ζήτημα δυνατότητας της γνώσης και απάντησε με την απόλυτη εμπειριστική εκδοχή. Θεώρησε ότι μόνη πηγή γνώσης είναι οι αισθήσεις και η εμπειρία, απέρριψε τις έμφυτες ιδέες και προσπάθησε έτσι να ερμηνεύσει το φαινόμενο της νόησης. Κάθε λογής αντικείμενο της εσωτερικής αντίληψης ορίζεται ως ιδέα. *Οτιδήποτε αντιλαμβάνεται ο νους ή οτιδήποτε αποτελεί άμεσο αντικείμενο εσωτερικής αντίληψης, σκέψης ή νόησης, το αποκαλώ ιδέα*²¹.

Επίσης επιχειρεί την ψυχολογική αποστασιοποίηση του γενικού με τις εξής σκέψεις:

Στη σφαίρα του πραγματικού δεν υπάρχουν γενικά όντα. Υπόσταση πραγματική έχουν μόνο τα ατομικά πράγματα που αναλογούν με τις μεγαλύτερες και μικρότερες ομοιότητες τους, ταξινομούνται σε είδη και γένη. Αν μείνουμε στη σφαίρα των ιδεών διαπιστώνουμε ότι οι εμφανίσεις πραγμάτων είναι πλέγματα από "απλές ιδέες". Σε πολλά από τα πλέγματα αυτά επανέρχονται, χωριστά ή καθ'ομάδες, οι ίδιες απλές ιδέες και τα ίδια φαινομενικά γνωρίσματα. Στα πράγματα αυτά δίνουμε "ονόματα" χρησιμοποιώντας προς τούτο όχι μόνο κύρια ονόματα, αλλά ως επί το πλείστον προσηγορικά. Το γεγονός, ωστόσο, ότι μπορούμε μονοσήμαντα να ονομάζουμε πολλά πράγματα μέσω ενός και του αυτού γενικού ονόματος αποδεικνύει ότι σ'αυτό το γενικό όνομα αντιστοιχεί κατανάγκη ένα γενικό νόημα, μια "γενική ιδέα".

Κοιτάζοντας προσεκτικότερα με ποιον τρόπο το γενικό όνομα συσχετίζεται προς τα αντικείμενα της οικείας τάξης, διαπιστώνουμε ότι ο συσχετισμός αυτός υπάρχει διαμέσου ενός και του αυτού γνωρίσματος (ή πλέγματος γνωρισμάτων), το οποίο είναι κοινό σε όλα αυτά τα αντικείμενα, και ότι το μονοσήμαντο του γενικού ονόματος ισχύει μόνο εφόσον τα αντικείμενα παίρνουν το όνομά τους με βάση αυτό και μόνο το γνώρισμα, (με βάση την "ιδέα" αυτού και μόνο του γνωρίσματος). Η νόηση λοιπόν του γενικού, η οποία πραγματώνεται στις γενικές σημασίες, προϋποθέτει την "αφαιρετική ικανότητά" μας, δηλαδή την ικανότητα να "αποχωρίζουμε" από τα φαινόμενα πράγματα, που μας δίνονται ως συμπλέγματα γνωρισμάτων, επί μέρους ιδέες, ιδέες μεμονωμένων γνωρισμάτων, και να τις συνδέουμε με λέξεις που είναι οι γενικές σημασίες αυτών των γνωρισμάτων. Ότι ένας τέτοιος αποχωρισμός είναι δυνατός και ότι πραγματικά συμβαίνει μας εγγυάται το γεγονός ότι κάθε γενικό όνομα έχει την δική του σημασία, ότι κάθε γενικό όνομα είναι φορέας μιας ιδέας ενός γνωρίσματος που συνδέεται αποκλειστικά με αυτό. Μας το εγγυάται ακόμη το γεγονός ότι μπορούμε να πάρουμε οποιοδήποτε γνώρισμα αδιακρίτως και να το κάνουμε ιδιαίτερη σημασία ενός νέου γενικού ονόματος. Είναι σαφές ... ότι το γενικό και το καθολικό δεν ανήκουν στην πραγματική υπόσταση των πραγμάτων, αλλά αποτελούν επινοήματα και δημιουργήματα του νου, φτιαγμένα από αυτόν για να τα χρησιμοποιήσει ο ίδιος, και αφορούν μόνο σε σημεία, είτε αυτά είναι λέξεις είτε παραστάσεις. Οι λέξεις είναι

²⁰ Α. Γιανναρά, Ο αγγλικός εμπειρισμός και Β. Russell, παραπάνω 584.

²¹ Βλέπε Ε. Husserl, Δεύτερη λογική έρευνα, μετ. Ν. Σκουτερόπουλος, 1985. Οι ιδέες του θυμίζουν τις κοινές έννοιες των Στωϊκών, Α. Γιανναρά, Ο αγγλικός εμπειρισμός. Κ. Λογοθέτου, Νεωτέρα Φιλοσοφία, Τομ. 2. ΟΕΔΒ 1964.

γενικές, ...όταν χρησιμεύουν ως σημεία γενικών ιδεών και έτσι μπορούν να χρησιμοποιούνται αδιακρίτως για πολλά επιμέρους πράγματα: "και οι ιδέες είναι γενικές όταν τίθενται ως τα υποκατάστατα πολλών επιμέρους πραγμάτων".... η γενική φύση τους δεν είναι παρά η ιδιότητά τους - που την οφείλουν στο νου - "να δηλώνουν ή να υποκαθιστούν πολλά επιμέρους" γιατί η σημασία που έχουν είναι μια σχέση που τους την έχει προμηθεύσει ο ανθρώπινος νους.... οι άνθρωποι πλάθοντας αφηρημένες ιδέες και συνδέοντάς τις στο μυαλό τους με τα ονόματα που δίνουν σ'αυτές τις ιδέες, κατορθώνουν να προσδιορίζουν τα πράγματα και να μιλούν γι'αυτά ωσάν τα πράγματα να ήσαν δέσμες (bundles), προκειμένου να διευκολυνθεί και να γίνει πιο άνετη η πρόοδος και η ανακοίνωση της γνώσης τους, γνώσης που δεν θα προχωρούσε παρά με βραδύ ρυθμό, αν οι λέξεις και οι σκέψεις τους έμεναν προσηλωμένες σε ατομικά μόνο αντικείμενα.

Φυσικά ο σχηματισμός αυτών των "αφηρημένων" ή "γενικών ιδεών", αυτών των "επινοήσεων" και των τεχνασμάτων του πνεύματος έχει τις δυσκολίες του, οι ιδέες αυτές δεν μας "προσφέρονται τόσο εύκολα όσο έχουμε την τάση να πιστεύουμε. Δεν απαιτείται π.χ. προσπάθεια και ικανότητα για να σχηματίσουμε την "γενική ιδέα ενός τριγώνου" (η οποία ωστόσο δεν συγκαταλέγεται στις περιεκτικότερες και τις δυσκολότερες), γιατί αυτό το τρίγωνο δεν πρέπει να είναι "ούτε οξυγώνιο, ούτε ορθογώνιο, ούτε ισόπλευρο αλλά όλα αυτά και συνάμα τίποτε από αυτά". Πρόκειται, σ'αλήθεια για κάτι ατελές, για κάτι που δεν μπορεί να υπάρξει, για μια ιδέα στην οποία έχουν ενωθεί μέρη πολλών και ασυμβίβαστων μεταξύ τους ιδεών. Φυσικά το πνεύμα, με την ατέλεια που το χαρακτηρίζει, χρειάζεται τέτοιες ιδέες και σπεύδει όσο μπορεί προς αυτές, γιατί έτσι η γνώση μεταδίδεται και διευρύνεται πιο εύκολα. Ωστόσο, εύλογα μπορούμε να εικάσουμε ότι τέτοιες ιδέες αποτελούν ένδειξη της ατέλειάς μας²².

Η κριτική, που γίνεται από τον Husserl στην άποψη του Locke για το γενικό τρίγωνο είναι, εκτός των άλλων η εξής:

αν τη γενική σημασία την ονομάσουμε έννοια, αν το κοινό γνώρισμα το καλέσουμε βάθος της έννοιας, και αν κάθε υποκείμενο που έχει αυτό το γνώρισμα το καλέσουμε αντικείμενο της έννοιας, τότε το άτοπο του Locke είναι το να εκλάβουμε το βάθος της έννοιας και ως αντικείμενο της ή να υπαγάγουμε το βάθος της έννοιας στο εννοιολογικό πλάτος της δηλαδή στο βάθος της έννοιας του τριγώνου υπεισέρχεται και το πλάτος των ειδικότερων ειδών στα οποία υποδιαιρείται η έννοια²³.

Η απάντηση στο ερώτημα από που προέρχεται η βεβαιότητά μας χωρίς την χρήση της έννοιας του γενικού τριγώνου εδόθη πολύ νωρίς από τον Ιρλανδό φιλόσοφο G. Berkeley. Οι αποδείξεις κατά τον Berkeley δεν αντλούν το γενικό τους κύρος από την γενική ιδέα, αλλά από το ότι κατά την απόδειξη δεν κάνουμε χρήση των επί μέρους χαρακτηριστικών ενός συνόλου²⁴.

²² Απόσπασμα από το Essay στο E. Husserl, Δεύτερη λογική έρευνα, σελ. 78.

²³ Απόσπασμα στο E. Husserl, σελ 87. Βάθος (intention) της έννοιας ονομάζουμε το σύνολο των χαρακτηριστικών και πλάτος (extention) το σύνολο των όντων που ανήκουν στην έννοια. Η έννοια σπονδυλωτό ως Σ. θυλαστικά, πτηνά, ερπετά, τετράποδα, κλπ. Η έννοια δηλώνεται ως Σxyz και όχι απλώς Σ. Οι μεταβλητές παραμένουν ως δυνατότητα πλήρωσης.

²⁴ E. Husserl, σελ 87.

Μια άλλη κατηγορία βασική στην φιλοσοφία του Locke είναι η *γνωστική προοπτικότητα*, κάτι που θα δούμε αργότερα στην φαινομενολογία του Husserl. *Ο καθένας μας γνωρίζει τόσο, όσο του επιτρέπει η προοπτική του τοποθέτησή*²⁵. Ο Locke αν και ξεκίνησε την φιλοσοφία του με την άρνηση των έμφυτων ιδεών που εισήγαγε ο Descartes δεν διαφέρει από εκείνον όσο θα ήθελε αφού πιστεύει ότι υπάρχουν *έμφυτες δυνάμεις* που εξελίσσονται αμέσως με την λειτουργία της κατ'αίσθηση εμπειρίας, η οποία παρέχει την πρώτη ύλη για τη λειτουργία των δυνάμεων αυτών. Βέβαια, αυτό που τον διαφοροποιεί δραστικά από τον τελευταίο είναι ότι ο Descartes δέχεται ότι από μόνη την ικανότητα του νοείν, χωρίς τη βοήθεια της εμπειρίας γεννιούνται παραστάσεις ουσιαστικού περιεχομένου. Τέτοιες είναι λ. χ. η έννοια της ουσίας ή η ιδέα του θεού²⁶.

Για να προχωρήσουμε λίγο βαθύτερα στην επιστημολογία του Locke πρέπει να διακρίνουμε μια άλλη βασική έννοια που πρότεινε για την συγκρότηση του νου. Η έννοια αυτή ήταν η έννοια του *αναστοχασμού* ή της *αυτοαντίληψης* (reflection). Η αναστοχασμός, μια κατ' αίσθηση δύναμη, συνειδητοποιεί τις ενέργειες και τις καταστάσεις του πνεύματος μας, ως αντικείμενο και όχι ως γέννημά της:

Όλη η γνώση μας στηρίζεται στην εμπειρία και παράγεται σε τελευταία ανάλυση από αυτή. Αλλά η εμπειρία είναι διφυής, τα αντικείμενα που προσφέρει στη γνώση προέρχονται από δυο πηγές: την αίσθηση (sensation) και την αναστοχασμό ή την εσωτερική αίσθηση. Επίσης, διακρίνει απλές (εντυπώσεις) και σύνθετες ιδέες. Αίσθηση και αναστοχασμός είναι οι πηγές των απλών ιδεών. Η πηγή των σύνθετων είναι η νόηση. Αυτή σχηματίζει με την τροποποίηση των απλών παραστάσεων της εκτάσεως, της διάρκειας και της ενότητας, τις μαθηματικές εποπτείες και έννοιες, αυτή φέρει τα αντικείμενα σε συνάφεια μεταξύ τους και αναγνωρίζει τις σχέσεις που τα διέπουν. Τις αφηρημένες έννοιες τις σχηματίζει η νόηση με την αποδέσμευση των αντικειμένων από τις ιδιαίτερες συνθήκες της ύπαρξής τους μέσα στο χρόνο και τον τόπο²⁷.

George Berkeley (1685 - 1753), κύρια έργα : Principles of Human Knowledge, (1710), Theory of Vision, Principles και Dialogues Between Hylas and Philonous²⁸.

Ο Berkeley είναι σημαντικός στην φιλοσοφία κυρίως για την πλήρη άρνηση της ύλης και για μια σειρά έξυπνων επιχειρημάτων²⁹.

Επηρέασθηκε ιδιαίτερα από τον Locke και αντιμετώπισε το πλέον αδύνατο σημείο της επιστημολογίας του που ήταν οι ιδέες, οι οποίες για τον Locke ήταν στο νου, ενώ το *πράγμα*, το οποίο η ιδέα αναπαριστούσε, ήταν στον εξωτερικό κόσμο. Ο Berkeley αναρωτήθηκε, αφού όλα όσα γνωρίζει ο νους είναι οι ιδέες του, γιατί να υποθέτουμε ότι ο εξωτερικός κόσμος υπάρχει; Όλα όσα υπάρχουν στον κόσμο δεν

²⁵ Α. Γιανναρά, Ο αγγλικός εμπειρισμός και ο γαλλικός διαφωτισμός.

²⁶ Α. Γιανναρά, Ο αγγλικός εμπειρισμός, σελ 61.

²⁷ Α. Γιανναρά, Ο αγγλικός εμπειρισμός, σελ 72.

²⁸ Κ. Matthews, British Philosophers, σελ 27.

²⁹ Β. Russell, History of Western Philosophy, σελ. 623.

έχουν καμιά ύπαρξη δίχως το νου μου, αφού το είναι τους έγκειται στο ότι είναι αντιληπτά, το οποίο και έχει ως συνέπεια, καθόσον δεν είναι ενεργά αντιληπτά από εμένα ή δεν υπάρχουν στο νού μου ή σε οποιοδήποτε άλλο δημιουργικό πνεύμα, θα πρέπει ή να μην έχουν ύπαρξη ή να συντηρούνται μέσα στο νου κάποιου εξωτερικού πνεύματος³⁰. Εγκαινιάζει έτσι την υποκειμενική ιδεοκρατία, τον λεγόμενο σολιψισμό. Έτσι, κατ'αυτόν δεν υπάρχουν καθολικές παραστάσεις παρά μόνον ατομικές και επιπλέον, εκείνος που προκαλεί σε εμάς αυτές τις παραστάσεις δεν είναι άλλος από τον Θεό.

Στην συνέχεια της κριτικής του, ο Berkeley, ενάντια στις γενικές ιδέες του Locke γράφει:

Όταν θέλουμε να συνδέσουμε τις λέξεις μας με ένα ορισμένο νόημα και κάνουμε λόγο μόνο για αυτό που μπορούμε να εννοήσουμε, είμαστε υποχρεωμένοι, νομίζω, να αναγνωρίσουμε ότι "μια ιδέα, η οποία καθαυτή είναι ιδέα για κάτι επιμέρους" γίνεται γενική "καθώς χρησιμεύει στο να αναπαριστά όλες τις άλλες επιμέρους ιδέες αυτού του είδους ή στο να τις υποκαθιστά". Για να γίνει αυτό φανερό με ένα παράδειγμα, ας φανταστεί κανείς ότι ένας γεωμέτρης αποδεικνύει με ποιο τρόπο μια ευθεία τέμνεται σε δυο ίσα μέρη. Χαράσσει μια μαύρη γραμμή μήκους ενός εκατοστού, "η γραμμή αυτή", που καθαυτή αποτελεί μια επιμέρους ευθεία γραμμή, "είναι αναφορικά με αυτό που σημαίνεται διαμέσου αυτής, γενική" γιατί με τον τρόπο που χρησιμοποιείται εδώ η γραμμή αυτή" αναπαριστάνει όλες τις επιμέρους γραμμές" αδιακρίτως. Έτσι "ότι αποδεικνύεται γι'αυτήν" αποδεικνύεται και για όλες τις γραμμές ή, με άλλα λόγια, για μια γραμμή εν γένει. Όπως ακριβώς η επιμέρους γραμμή με το να "χρησιμεύει ως σημείο" γίνεται γενική, όμοια και το όνομα "γραμμή", που καθαυτό είναι κάτι επιμέρους, με το να χρησιμεύει ως σημείο γίνεται γενικό. Και καθώς η γενικότητα εκείνης της ιδέας δεν έγκειται στο ότι αποτελεί ένα σημείο που υποδηλώνει μια αφηρημένη ή γενική γραμμή, αλλά στο ότι ένα "σημείο προς υποδήλωση κάθε επιμέρους ευθείας γραμμής, η οποία θα ήταν δυνατό να υπάρξει", επιβάλλεται να δεχθούμε ότι και η λέξη "γραμμή" οφείλει τη γενικότητά της στην ίδια αιτία, δηλαδή στο γεγονός ότι δηλώνει διαφορετικές επιμέρους γραμμές αδιακρίτως³¹.

Ο Husserl, που παραθέτει το παραπάνω απόσπασμα του Berkeley, επισημαίνει το λανθασμένο επιχείρημα, ως προς την δέσμευση του Berkeley στις ατομικές παραστάσεις που συγκροτούν το γενικό και την εμπειριστική του τάση να βλέπει την ευθεία που βοηθητικά κάνει χρήση για την απόδειξή του ο γεωμέτρης. Διότι, οι ατομικές παραστάσεις είναι περιορισμένου χαρακτήρα, αφού οι γενικές έννοιες προκύπτουν από την διαμεσολάβηση μιας διυποκειμενικής γλώσσας που προσφέρει τις μορφές ανάδειξης και ανέλιξης της αφαίρεσης. Η δε ευθεία του γεωμέτρη δεν είναι το σημείο αναφοράς της απόδειξης, η απόδειξη δεν γίνεται για αυτή την ευθεία, είναι απλά το στήριγμα - όσο αυτό καθίσταται δυνατό - για την διανοητική σύλληψη του διανοήματος *μια ευθεία εν γένει*³².

³⁰ K. Matthews, *British Philosophers*, σελ. 28.

³¹ Απόσπασμα του E. Husserl, σελ 136.

³² E. Husserl, σελ 138.

David Hume (1711 - 1776), κύριο έργο το *Treatise of Human Nature* (1739).

Ο D. Hume επηρεάστηκε τα μέγιστα από τους Locke και Berkeley. Η φιλοσοφία και των τριών αφορά περισσότερο στην επιστημολογία παρά στην οντολογία³³. Ο Hume δέχεται σε μεγάλο βαθμό τις αναλύσεις των προγενεστέρων του προσπαθώντας να εκλεπτύνει το σύστημά τους. Ο Hume καταρχήν άλλαξε ολόκληρο το σύστημα του Locke που συγκροτείτο από ιδέες περιορισμένες σε ένα επίπεδο ατομικό, εκτός από εκείνες που ο Locke ονόμαζε ιδέες της άμεσης εντύπωσης. Ακόμη συνέταξε ένα κατάλογο από ιδέες και εντυπώσεις κατά την μέθοδο του Locke και επιδόθηκε σε μία νέα ανάλυση. Ιδέες αφηρημένες όπως της *ανθρωπότητας* διαφέρουν από την εντύπωση, όπως είναι *το να βλέπεις τον ήλιο*, αφού η ιδέα είναι αμυδρή ενώ η εντύπωση ζωννή και ισχυρή. Το ότι πιστεύω στην ύπαρξη του ήλιου ενώ δεν πιστεύω στην ύπαρξη της αφηρημένης έννοιας της *ανθρωπότητας* είναι απλά αποτέλεσμα της ζωννότητας της εντύπωσης σε αντίθεση προς την ιδέα. Απόδειξη ωστόσο της φυσικότητας του ήλιου δεν υπάρχει. Αν κάποια εντύπωση ή ιδέα ενεργεί στον νου μας με μια ιδιαίτερη ένταση, λέμε ότι την *πιστεύουμε*. Αυτό ακριβώς, είναι για τον Hume ότι εννοούμε γνώση. Επιπλέον, αυτό που εννοούμε όταν λέμε ότι πιστεύουμε ισοδυναμεί με τη πίστη σε μια συνήθεια.

Για παράδειγμα, όταν πιστεύουμε ότι ο ήλιος θα ανατείλει αύριο, η πίστη μας έγκειται απλά σε μια ισχυρή ιδέα, η οποία βασίζεται στην συνήθεια του ότι έχουμε παρατηρήσει αναρίθμητες φορές στο παρελθόν. Όσον αφορά τον φυσικό νόμο της αιτιότητας και του αποτελέσματος, ο Hume τον αντικαθιστά απλά με το *αίσθημα* της πίστης, που βασίζεται στην συνήθεια. Είναι το σημείο που αργότερα θα ξεκινήσει την φιλοσοφική του σκέψη ο Kant και θα του κάνει κριτική³⁴.

Για κάποιον λοιπόν που δεν μπορεί να είναι παρά μόνο να *αισθάνεται* βέβαιος για το ότι ο ήλιος θα ανατείλει την επόμενη ημέρα, είναι προφανές ότι όλες οι επιστήμες είναι απατηλές και στην πραγματικότητα αδύνατες. Τα γεγονότα δεν υφίστανται ουδεμία επικοινωνία³⁵. Ο Hume πραγματεύεται το πρόβλημα του εξωτερικού κόσμου σε σχέση με τις ιδέες μας γι'αυτόν. Ο Berkeley είχε κάνει ξεκάθαρο ότι δεν χρειάζεται καθόλου να υποθέσουμε την ύπαρξη του εξωτερικού κόσμου, τουλάχιστον με την συνήθη έννοια. Ο Hume είπε ότι:

αφού οι φιλόσοφοι συμφωνούν ότι όλα όσα γνωρίζουμε είναι οι ιδέες μας και αφού δεν έχουμε άμεση επαφή με τον εξωτερικό κόσμο (παρά μόνο με την μεσολάβηση των ιδεών), πώς αποκτούμε (come by) αυτή την ασυνήθη έννοια³⁶;

³³ Δ. Αναπολιτάνος, σελ 135.

³⁴ Η έννοια της αιτιότητας, που στον χώρο των φαινομένων δεν είχε χάσει την αντικειμενική της πραγματικότητα, αλλιώς θα ήταν παράδοξη η πρακτική της χρησιμότητα μιας θεωρητικά μηδαμινής και παντελώς άχρηστης έννοιας, βλέπε σελ 222 στο Μ. Δημητρακόπουλου, *Διαλεκτική Ψυχολογία και Υπερβατική Συνειδησιολογία στην Κριτική Ιδεοκρατία του Καντ*, Αθήνα 1983.

³⁵ Β. Μπαρζελιώτη, *Γνωσιοθεωρία*, σελ. 157.

³⁶ Κ. Matthews, *British Philosophers*, σελ. 32.

Ο φιλόσοφος κοιτά στο γραφείο του και στα χαρτιά του, αυτά είναι εδώ, εδώ ήταν και χθες και προχθές. Βλέπει την φωτιά, είναι λίγο διαφορετική από ότι ήταν λίγο πριν, αλλά από την θερμοκρασία και τα χαρακτηριστικά της φλόγας λέει "η ίδια φωτιά". Από αυτές τις παρατηρήσεις, ο Hume συμπεραίνει ότι όταν μια εντύπωση επανέρχεται σε εμάς, είτε αναλλοίωτη (όπως το γραφείο) είτε με αναμενόμενες και συμφυείς αλλαγές (όπως η φωτιά), η φαντασία μας (που μοιάζει με βάρκα που συνεχίζει την κίνησή της όταν το κουπί σηκώνεται), επιμένει στο αίσθημα στους χρόνους μεταξύ των διακοπόμενων εντυπώσεων και κατασκευάζει ένα ατομικό αντικείμενο έξω από αυτήν. Έτσι, αναρωτιέται ο Hume, αποκτούμε την ιδέα της "ταυτότητας του αντικειμένου;" Μα το μόνο αντικείμενο του οποίου έχουμε πείρα είναι μια αδιάκοπη αντίληψη (εδώ ο Hume κάνει χρήση της έννοιας αντίληψης που χρησιμοποιούσε ο Berkeley αντί της δικής του εντύπωσης). Αν τώρα, έχουμε μια σειρά διακοπόμενων αλλά όμοιων αντιλήψεων (αισθήσεων, όπως είναι το να δούμε τον ήλιο σε πολλές περιπτώσεις) και η φαντασία νοιώθει ρήγματα μεταξύ αυτών, έχουμε ακόμη μια ταυτόσημη αντίληψη, αλλά όχι ένα εξωτερικό αντικείμενο.

Ο Hume προσδίδει μια τέτοια σχέση μεταξύ αίσθησης και πραγματικότητας που θυμίζει την σημερινή πεποίθησή μας για την ψευδαίσθηση της συνεχούς εικόνας που προκαλεί ο κινηματογράφος. Ο ανθρώπινος νους είναι για τον Hume, απλά μια δέσμη ή αλυσίδα από αντιλήψεις (αισθήματα) και δεν είναι δύσκολο να υποθέσουμε ότι όλα αυτά τα αισθήματα προέρχονται από ένα κόσμο έξω από τον νου. Αυτό το κάνει η φαντασία που υπερπηδά τα κενά μεταξύ όμοιων αντιλήψεων. Ο *εξωτερικός κόσμος* είναι απλά το *όνομα* που αποδίδουμε σε αυτές τις φανταστικά εξωτερικευμένες αντιλήψεις. Τελικά πιστεύουμε αυτά τα εξωτερικά αντικείμενα³⁷.

Ο Hume θεωρεί σημαντική την θεωρία για τις παραστάσεις του Berkeley και προτείνει την επενέργεια του *συνειρμού* που τις ανακαλεί και τις συνθέτει την κάθε φορά. Γράφει,

Ένας μεγάλος φιλόσοφος έχει αμφισβητήσει την καθιερωμένη άποψη ... και έχει υποστηρίξει ότι όλες οι γενικές ιδέες δεν είναι παρά ατομικές ιδέες διαπλεγμένες με ένα ορισμένο όνομα, που τους προσδίδει μια περιεκτικότερη σημασία και επενεργεί ώστε στη δεδομένη περίπτωση να ανακαλούνται στη μνήμη άλλες όμοιες ατομικές ιδέες. Θεωρώ την άποψη αυτή μίαν από τις πιο μεγάλες και πιο ανεκτίμητες ανακαλύψεις των τελευταίων χρόνων³⁸.

Η κατευθυντήρια γραμμή των ψυχολογικών αναλύσεων του Hume που αφορούν στην αφαίρεση είναι:

Αν οι παραστάσεις (που έχουμε κάθε φορά στο πνεύμα μας) είναι από τη φύση τους ατομικές και συνάμα περιορισμένες ως προς τον αριθμό τους, δεν είναι δυνατό να γίνονται γενικές, ως προς αυτό που αναπαριστούν, και να περικλείουν απεριόριστο αριθμό άλλων παραστάσεων παρά μόνο δυνάμει του εθισμού. Μια ατομική παράσταση γίνεται γενική, καθώς διαπλέκεται μ'ένα γενικό όνομα, δηλαδή με ένα όνομα που από

³⁷ K. Matthews, *British Philosophers*, σελ. 32.

³⁸ Απόσπασμα του E. Husserl, σελ 148.

συνήθεια έχει συνδεθεί με πολλές άλλες ατομικές παραστάσεις και έχει συνάψει (συνειρμική) σχέση με αυτές, ώστε να τις ανακαλεί εύκολα στη φαντασία³⁹.

Αυτή η χρησιμοποίηση των παραστάσεων, πέρα από τα όρια της φύσης τους, βασίζεται στο γεγονός ότι μπορούμε να συγκεντρώνουμε στο πνεύμα μας κάθε δυνατή ποιοτική και ποσοτική διαβάθμιση κατά ένα ατελή τρόπο, που ωστόσο ανταποκρίνεται στους σκοπούς της ζωής... Όταν έχουμε διαπιστώσει ότι πολλά αντικείμενα, που τα συναντάμε συχνά, έχουν ομοιότητα, χρησιμοποιούμε για όλα το αυτό όνομα, άσχετα από τις διαφορές που αντιλαμβανόμαστε ως προς τις διαβαθμίσεις της ποσότητας και της ποιότητας τους, και άσχετα από κάθε άλλη διαφορά που είναι δυνατό να εμφανίζεται σ'αυτά. Όταν αυτό μας έχει γίνει πια συνήθεια, ο ήχος εκείνου του ονόματος γεννά μέσα μας αρχικά την παράσταση ενός από εκείνα τα αντικείμενα, πράγμα που έχει ως αποτέλεσμα να συλλαμβάνει η φαντασία το αντικείμενο αυτό με όλες τις ιδιαίτερες ιδιότητές του και τις αναλογίες του. Όπως όμως προϋποθέτουμε, η αυτή λέξη έχει συχνά χρησιμοποιηθεί και για άλλα ατομικά αντικείμενα, τα οποία ως προς ορισμένες απόψεις τους διαφέρουν από την παράσταση που είναι άμεσα παρούσα στο πνεύμα μας. Τις παραστάσεις όλων αυτών των ατομικών αντικειμένων δεν μπορεί να τις ανακαλέσει η λέξη. "Αγγίζει" ωστόσο, αν επιτρέπεται να το πώ έτσι, την ψυχή και ανακαλεί εκείνο τον εθισμό, που τον έχουμε αποκτήσει παρατηρώντας εκείνα τα ατομικά αντικείμενα. Τα ατομικά πράγματα δεν υπάρχουν στο πνεύμα μας ως πραγματικά γεγονότα αλλά μόνο δυνάμει, στη φαντασία μας δεν τα "ξεχωρίζουμε" όλα, απλώς παραμένουμε πάντοτε έτοιμοι να φέρουμε μπρος στα μάτια μας οποιοδήποτε από αυτά, ανάλογα με το τί χρειαζόμαστε. Επειδή η ανάπλαση όλων των παραστάσεων, τις οποίες αφορά το όνομα, είναι στις πιο πολλές περιπτώσεις αδύνατη, συντέμνουμε εκείνη την εργασία δια μέσου μιας μερικής μόνο θεώρησης. Συνάμα, έχουμε την πεποίθηση ότι από μια τέτοια σύντμηση δεν προκύπτουν σοβαρές αδυναμίες για την σκέψη μας⁴⁰.

Με αυτή την περιγραφή ο Hume προαναγγέλλει τον τρόπο της απομνημόνευσης της πληροφορίας και του σχηματισμού αρχείων που χρησιμοποιεί ο σύγχρονος Η/Υ και η ανάλυση της τεχνητής νοημοσύνης.

Isaak Newton (1643 -1727), κύριο έργο Μαθηματικές αρχές της Φιλοσοφίας της Φύσεως⁴¹.

Ο μεγάλος φυσικός και μαθηματικός συνέβαλε τα μέγιστα στην αντίληψη της μαθηματοποίησης της φυσικής με την θεμελίωση της Μηχανικής και της Οπτικής. Δημιούργησε, παράλληλα με τον Leibniz, αλλά περισσότερο πειστικά, τον Απειροστικό Λογισμό και συνέβαλε σε όλους τους ζωντανούς μαθηματικούς κλάδους της εποχής του. Τα έργα του αποπνέουν την νέα φιλοσοφία της μαθηματικής φυσικής, παρόλο που βρίθουν από τις αναφορές του στο Θεό και το μεγαλείο του,

³⁹ Απόσπασμα του E. Husserl, σελ 154.

⁴⁰ Απόσπασμα του E. Husserl, σελ 155.

⁴¹ Isaac Newton, Philosophiae naturalis Principia Mathematica, (1687), Cabridge U.P. 1972.

που αναδεικνύεται με την μαθηματική ανάγνωση του κόσμου. Ο Newton (σύγχρονος του J. Locke, που εκείνο τον καιρό προτείνει τον *αισθησιοκρατικό μονισμό* του), αναλύει τον υλικό κόσμο στα στοιχεία του, τα οποία δεσπόζονται από ένα καθολικό νόμο, απελευθερώνει την Φυσική από τις απόκρυφες δυνάμεις και ποιότητες αφήνοντας στη δικαιοδοσία της μόνο σχέσεις κατ'αίσθηση αντιληπτές και μαθηματικά διατυπώσιμες.

Ο δρόμος που ακολουθεί ο Newton, στην μελέτη της φύσης, δεν είναι εκείνος της παραγωγικής μεθόδου, που πρότεινε ο Descartes, αλλά ο δρόμος της *αναλύσεως*. Δεν αρχίζει με την θέση γενικών εννοιών και θεμελιωδών αρχών, για ν'ανοίξει με συλλογιστική πορεία το δρόμο προς την γνώση του μερικού και του δεδομένου, η σκέψη του κινείται σε αντίστροφη διεύθυνση. Η μέθοδός του είναι επαγωγική αλλά τέτοια ώστε να φτάνει σε παραγωγικά συμπεράσματα. Αποτελεί σύνθεση επαγωγικής και παραγωγικής μεθόδου και προσεγγίζει την μέθοδο της σύγχρονης Φυσικής. Το *δεδομένο* (datum) είναι τα *φαινόμενα*, το *ζητούμενο* (quaesitum), οι αρχές. Ο δρόμος οδηγεί όχι από τις έννοιες και τις αρχές στα φαινόμενα, αλλά αντίστροφα. Η τάξη, η νομοτέλεια και ο νόμος δεν αναζητούνται ως κανόνες προ των φαινομένων αλλά δείχνονται μέσα στα φαινόμενα, αφού αποτελούν την μορφή της εσωτερικής τους σύνδεσης και της έμμονης συνάφειάς τους⁴².

Για τον χώρο αναπτύσσει, αντίθετα από τον Leibniz, την αντίληψη του απόλυτου χώρου, ως μιας άπειρης, ακίνητης και ομοιόμορφης αρχής, που αποτελεί και την προϋπόθεση της απόλυτης κίνησης και της αρχής της αδράνειας. Ο χώρος δεν είναι υλική ουσία αλλά αποτελεί πλαίσιο της ύλης και φορέας των εξ αποστάσεως επιδράσεων, μεσίτης ανάμεσα στα υλικά όντα και τον Θεό. Αντίθετα, ο Leibniz απορρίπτει το είδωλο του απόλυτου και ομοιογενούς χώρου, ένα ον υποδεέστερο και παράγωγο της δυναμικής πολλαπλότητας των σχέσεων και των όντων⁴³. Το ίδιο άπειρος και ομοιόμορφος ως πλαίσιο είναι ο χρόνος στον Newton.

⁴² Α. Γιανναρά, Ο αγγλικός εμπειρισμός, σελ 11, Κ. Ι. Λογοθέτου, Η Φιλοσοφία της Αναγεννήσεως, ΟΕΣΒ, 1955, D. J. Struik, Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών, Ζαχαρόπουλος, 1982.

⁴³ Α. Γιανναρά, Κεφάλαια από τη Θεωρητική Φιλοσοφία του Καντ, σελ 77, εκδόσεις Παπαζήση, 1977.

3. 3. Ο Kant¹

Το έργο του Kant αποτελεί σταθμό στην νεότερη φιλοσοφία. Ο Kant με τη *Κριτική του Καθαρού Λόγου* το 1781², διεκδικεί ότι εγκαινιάζει μια κοπερνίκεια επανάσταση για την φιλοσοφία ώστε αυτή να γίνει επιστήμη με αντικείμενο τον κριτικό έλεγχο των δικών της αρχών αλλά και κάθε άλλης επιστήμης. Ζει σε μια εποχή που η επιστήμη έχει αποκτήσει ένα ικανοποιητικό κύρος έναντι της θρησκείας και των προκαταλήψεων, καθόσον παράγει διαρκώς καινούργια αποτελέσματα κι ιδέες ενώ η εικόνα του κόσμου αλλάζει καθημερινά. Οι νευτώνεια Μηχανική έχει ήδη αποδείξει τις δυνατότητες εξήγησης των μυστηρίων του Σύμπαντος ενώ τα Μαθηματικά έχουν κάνει εκπληκτικές προόδους μετά τους Vieta, Descartes, Fermat, Galileo, Kepler, Newton, Leibniz, Bernoulli, Euler, Lagrange. Ανταποκρινόμενος στο πνεύμα του Διαφωτισμού της εποχής του, δεν θα αναζητήσει ένα θεμέλιο στη γνώση όπως έκαναν τα μέχρι εκείνη την εποχή τα προκριτικά φιλοσοφικά συστήματα (π.χ. κάποιο πραγματικό όν, όπως τα αντικείμενα της εμπειρίας ή το cogito), αλλά τις *συνθήκες* κάτω από τις οποίες ο νους εξασφαλίζει την δυνατότητα να γνωρίζει, δηλαδή ενδιαφέρεται για ένα *υπερβατολογικό* θεμέλιο.

Η κριτική άποψη για τον Kant καθιστά το πνεύμα ενεργό προς όλες τις κατευθύνσεις αρνούμενο μετά από αυτό τόσο την απόλυτη μονοκρατορία του λόγου όσο και την απόλυτη εγκατάλειψη στον μονισμό των αισθήσεων που οδήγησαν τους άγγλους φιλόσοφους στην αυθαιρεσία του σολιψισμού και του αγνωστικισμού. Θέτει ως καθήκον του ανθρώπου να ακολουθεί τον *κοινόν λόγον*, που συνέχει τα πάντα, να συμμορφώνεται και να ομολογεί προς αυτόν και όχι να εγκλωβίζεται στην σφαίρα των υποκειμενικών αντιλήψεων και βιωμάτων. Αποβλέπει στην κριτική που ασκεί ο ίδιος ο λόγος πάνω στον εαυτό του, δηλαδή μια αυτοκριτική του νου, μια διαρκή μελέτη της αναστοχαστικής λειτουργίας του. Η ανθρώπινη συνείδηση γίνεται πλέον ο ψύχραιμος αναλυτής, τόσο των φαινομένων του κόσμου όσο και των προβολών και των προδιαθέσεων του ίδιου του νου πάνω στην πραγματικότητα. Προτείνεται μία διαδικασία αυτοκάθαρσης των συμπερασμάτων του νου και των μεθόδων του ως αναπόφευκτη και προδιαγράφει τον δρόμο που πρέπει να ακολουθεί η επιστήμη επανεξετάζοντας διαρκώς τα εργαλεία της, ώστε να συμβάλει στην διαμόρφωση της εικόνας του κόσμου.

¹ Immanuel Kant (1724 - 1804), γεννήθηκε κι έζησε στο Königsberg της Ανατολικής Πρωσίας, (σημερινό Kaliningrad, της Λευκορωσίας).

² I. Kant, *Κριτική του Καθαρού Λόγου* μετ., Α. Γιανναρά Παπαζήση 1977. Τόμοι 1 και 2. ΚΚΛ.

Το κλασσικό ερώτημα, που ξεκινά από την πλατωνική σκέψη και διατρέχει όλη τη φιλοσοφία, που αφορά στον καθολικό χαρακτήρα των Μαθηματικών ξανατίθεται: **Πώς είναι δυνατά τα καθαρά Μαθηματικά;**³ Πώς δηλαδή μπορώ και συλλαμβάνω θεωρήματα που έχουν ισχύ σε κάθε δυνατό κόσμο και είναι συμβατά με την πραγματικότητα. Επίσης, μετά το αδιέξοδο του αγνωστικισμού του Hume, μπαίνει το ερώτημα κατά πόσο είναι δυνατή η σύλληψη έγκυρων νόμων για τα φυσικά φαινόμενα; Δηλαδή: **Πώς είναι δυνατή η καθαρή Φυσική;**⁴

Τα ερωτήματα της φιλοσοφίας καθορίζονται πλέον κατά επιστημολογικό τρόπο και ως πρώτη ύλη επιλέγεται όχι το οντολογικό ζήτημα του κόσμου αλλά ο τρόπος με τον οποίο αποφαινόμεστε για τον κόσμο, δηλαδή τις κρίσεις μας. Υποστηρίζεται πως η γνώση πρέπει να βασίζεται σε κρίσεις a priori (το οποίο δεν παραπέμπει σε καμία χρονική προτεραιότητα, αλλά στην ανεξαρτησία από την εμπειρία), επειδή μόνο όταν οι κρίσεις είναι αποσυνδεδεμένες από τα ενδεχόμενα της εμπειρίας θα μπορούσαν να είναι αναγκαίες και ταυτόχρονα συνθετικές.

Αφετηρία του υπήρξε ο αγγλικός εμπειρισμός και μάλιστα στην πλέον ώριμη εκδοχή του, όπως αυτή εκφράστηκε με τον D. Hume. Ο αγγλικός εμπειρισμός επεσήμανε πρώτος την μέθοδο της αυτοπαρατηρησίας ή της ενδοσκόπησης στην προσπάθεια περιγραφής των υποκειμενικών παραστάσεων. Ο Hume προσπαθούσε να εξηγήσει τη προέλευση της αιτιότητας με την γενετική της δημιουργία ρωτώντας: *Πώς γεννιέται υποκειμενικά η παράσταση της αιτιότητας;* και συνδέοντας την αιτιότητα με τον συνειρμό και την συνήθεια. Η επανάληψη μιας τυχαίας σύνδεσης γεγονότων μας οδηγεί στο συμπέρασμα να πούμε επαγωγικά ότι το ένα είναι αποτέλεσμα του άλλου. Είναι προφανές ότι η μέθοδος του οδηγούσε την φιλοσοφική διερεύνηση σε αυτό που ονομάστηκε ‘ψυχολογισμός’ καθόσον αυτή εμπλέκει τα προσωπικά βιώματα διαμόρφωσης της έννοιας και στέκεται σε αυτά, ενώ αφήνει άλυτο *το πρόβλημα της δυνατότητας της εμπειρίας και του αντικειμενικού κύρους της γνώσης*⁵.

Ο Kant συμμερίζεται την εχθρότητα του Hume προς τις τολμηρές μεταφυσικές δεσμεύσεις και την πεποίθηση του ότι οι γενικές κρίσεις δεν μπορεί να θεμελιώνεται στην εμπειρία. Στο σημείο αυτό ακριβώς φαίνεται η στροφή του και οι λύση που δίνει. Γι αυτόν η γνώση της εμπειρίας για να απαλλαγεί από την τυχειότητα και την αβεβαιότητα των κοινών εμπειρικών κρίσεων, πρέπει ν'αποκτήσει χαρακτήρα a priori. Μια πρόταση, όπως η ισχύ της αιτιότητας πρέπει

³ I. Kant, Προλεγόμενα, Δωδώνη, μετ. Τζαβάρα 1982.

⁴ Στο ίδιο

⁵ ΚΘΦΚΓ. σελ 17.

να ισχύει a priori. Γιατί τότε, από που θα αντλούσε η εμπειρία την βεβαιότητά της, αν όλοι οι κανόνες δεν ήσαν παρά μόνο εμπειρικοί, δηλαδή τυχαίοι; Μια έννοια, όταν επιβάλλεται στη σκέψη μας με αναγκαιότητα, *κατάγεται από την a priori δύναμη της γνώσεως και δίχως ένα τέτοιο σύνδεσμο φιλοσοφία και επιστήμη μένουν δίχως κύρος. Φιλοσοφία και επιστήμη, προϋποθέτουν τον έγκυρο χαρακτήρα καθολικών (γενικών) κρίσεων, όπως εκείνες της επαγωγικής γενίκευσης και της αιτιώδους σχέσεως.*

Ακόμη, άσκησε κριτική στη μεταφυσική του Leibniz, ο οποίος θεωρούσε ως δεδομένο ότι ο ανθρώπινος νους μπορεί να φτάσει, μέσα από καθαρή σκέψη, σε αλήθειες σχετικά με οντότητες, που από την ίδια τους τη φύση δεν μπορούν να είναι αντικείμενα εμπειρίας, όπως ο Θεός, η ανθρώπινη ελευθερία και η αθανασία της ψυχής. Για τον Kant το πρόβλημα της μεταφυσικής είναι να εξηγήσει πώς οι αρχές της μπορούν να είναι από τη μια αναγκαίες και καθολικές, και από την άλλη να περιλαμβάνουν γνώση του πραγματικού ώστε να εξοπλίζουν τον ερευνητή με τη δυνατότητα γνώσης ευρύτερης απ' αυτήν που εμπειριέχεται αναλυτικά σε ό,τι αυτός ήδη γνωρίζει. Ωστόσο, διατηρεί μια από τις βασικές παραδοχές του Leibniz για τον χωροχρόνο ότι αυτός δεν είναι στοιχείο της πραγματικότητας, αλλά αναγκαία συνθήκη και ταξινομικό πλαίσιο του κόσμου των φαινομένων⁶.

Ο Kant για να προχωρήσει διαχωρίζει ως προς την λειτουργία τους την **αίσθηση** (αισθητικότητα) από την **διάνοια** καθώς και τα φαινόμενα από τα νοούμενα. Ο διαχωρισμός αυτός είναι παλιός κι ανάγεται στην εποχή του Πλάτωνα. 'Η εμπειρία, λέει, είναι αναμφισβήτητο το πρώτο προϊόν που η νόησή μας φέρνει στο φως, όταν κατεργάζεται το άμορφο υλικό των κατ'αίσθηση εντυπώσεων. Και γι'αυτόν ακριβώς το λόγο (ή εμπειρία) είναι η πρώτη διδαχή...'. Οι παραστάσεις της είναι ατομικές και ονομάζονται **εποπτείες**. Ωστόσο, οι εποπτείες δεν είναι μόνο **αισθητηριακές** αλλά και **καθαρές**, a priori εποπτείες που αφορούν και καθορίζουν τον τύπο και την μορφή των παραστάσεων των αντικειμένων που μπορούμε να σχηματίσουμε μέσω των αισθήσεων, όπως είναι οι a priori εποπτείες του χώρου και του χρόνου⁷. Η εμπειρία δεν είναι το μοναδικό πεδίο, όπου περιορίζεται η διάνοιά μας. '(Η εμπειρία) μας λέει ότι αυτό υπάρχει έτσι και όχι αλλιώς. Για τούτο ακριβώς και δεν μας προσπορίζει καμιά αληθινή καθολικότητα⁸. Η αναγκαιότητα λείπει από την εμπειρία, γιατί αυτή μας λέει μόνο τον τρόπο, πώς ένα πράγμα είναι φιαγμένο και όχι ότι δεν μπορεί να είναι αλλιώς. Η

⁶ Δ. Αναπολιτάνος, Εισαγωγή στην Φιλοσοφία των Μαθηματικών, σελ. 148.

⁷ Οι εποπτείες βρέθηκαν κατά καιρούς στο επίκεντρο της κριτικής από φιλόσοφους και μαθηματικούς ως μια θολή κατηγορία από μέρους του Kant, βλέπε Γ. Ρουσόπουλος *Η εποπτεία στα Μαθηματικά*, Νεοελληνική Παιδεία, τομ. 4, τχ 12, 1988 (116-126).

⁸ ΚΘΦΚΓ, σελ 28.

εμπειρία δίνει στις κρίσεις μόνο μια *υποθετική* και *σχετική* καθολικότητα, σαν αυτή που μας δίνει η μέθοδος της *επαγωγής*⁹. Το ότι μέχρι τώρα ξέρω ότι όλα τα σώματα πέφτουν και υποθέτω ότι θα συμβαίνει και στο μέλλον είναι κρίση εμπειρική χωρίς καθολικό κύρος. Μια κρίση έχει αυστηρή καθολικότητα όταν εκπηγάει από μια ιδιαίτερη πηγή γνώσεως, δηλαδή την δύναμη της γνώσεως *a priori* (εκ των προτέρων). Τέτοιες κρίσεις καθολικές είναι οι κρίσεις των Μαθηματικών και της Λογικής⁹. Επίσης η διάνοια είναι η ικανότητα του πνεύματος που επιτρέπει να συντίθεται οι παραστάσεις μέσω ορισμένων κανόνων ώστε να δίνονται *έννοιες*, δηλαδή παραστάσεις με ενότητα και καθολικότητα.

Στην μέχρι τότε φιλοσοφική παράδοση οι κρίσεις χωριζόταν σε *αναλυτικές* εκείνες που ίσχυαν σε όλους τους δυνατούς κόσμους και οι αρνήσεις τους δεν μπορούσαν να ισχύουν σε κανένα κόσμο (κρίσεις *a priori*, ανεξάρτητες της εμπειρίας) και οι *εμπειρικές* (*a posteriori* κρίσεις) που προέκυπταν από την εμπειρία κι είχαν ενδεχομενικό χαρακτήρα. Ο Kant θα μιλήσει για *a priori αναλυτικές κρίσεις* και θα προσθέσει άλλο ένα σύστημα κρίσεων τις *a priori συνθετικές*. Στην Κριτική του εξηγεί την σημασία των παραπάνω διακρίσεων: 'Σε όλες τις κρίσεις όπου νοείται η σχέση ενός υποκειμένου προς ένα κατηγορούμενο η σχέση αυτή είναι κατά δυο τρόπους δυνατή. 'Η το κατηγορούμενο B ανήκει στο υποκείμενο A, ως κάτι που περιέχεται ήδη (συγκεκριμένα) στην έννοια A ή το κατηγορούμενο B βρίσκεται ολότελα έξω από την έννοια A, μολονότι στην πραγματικότητα βρίσκεται συνδεδεμένο μαζί του. Στην πρώτη περίπτωση ονομάζω την κρίση αναλυτική, στην άλλη συνθετική. Άρα, αναλυτικές κρίσεις (οι καταφατικές) είναι εκείνες όπου η σύνδεση του κατηγορουμένου με το υποκείμενο νοείται ως ταυτότητα, ενώ εκείνες, όπου η σύνδεση αυτή νοείται χωρίς την έννοια της ταυτότητας, πρέπει να ονομάζονται συνθετικές. Θα μπορούσε κανείς να ονομάσει τις πρώτες εξηγητικές (διασαφητικές) τις δεύτερες διευρύνουσες κρίσεις, γιατί οι πρώτες δεν προσθέτουν με το κατηγορούμενο τίποτε στην έννοια του υποκειμένου παρά μόνο την αποσυνθέτουν (διαιρούν) με την ανάλυση στις μερικές της έννοιες που είχαν ήδη νοηθεί (αν και συγκεκριμένα) μέσα σ'αυτή¹⁰.

Αντίθετα, οι άλλες (οι συνθετικές) προσθέτουν στην έννοια του υποκειμένου ένα κατηγορούμενο, που δεν είχε νοηθεί μέσα σε αυτήν και που δεν θα μπορούσε να εξαχθεί με κανενός είδους ανάλυση της. Π.χ. όταν λέγω: όλα τα σώματα είναι εκτατά, αυτό αποτελεί κρίση αναλυτική. Γιατί δε χρειάζομαι να πάω πέρα (υπερβώ) από την έννοια

⁹ ΚΘΦΚΓ, σελ 32.

¹⁰ Ας δώσουμε εδώ ένα πιο απλό παράδειγμα αναλυτικής κρίσης την «όλοι οι πετεινοί είναι κοκόρια».

αυτή που συνδέω με τη λέξη σώμα, για να βρω την έκταση ενωμένη μαζί της, παρά μόνο να μερίσω ή ν'αναλύσω εκείνη την έννοια (σώμα), δηλ. να συνειδητοποιήσω μόνο το πολυειδές ή πολλαπλό, που κάθε φορά νοώ με την έννοια σώμα για να συναντήσω μέσα σε αυτή το κατηγορούμενο εκτατό. Άρα η κρίση αυτή είναι αναλυτική. Αντίθετα, όταν λέγω: όλα τα σώματα έχουν βάρος, τότε το κατηγορήμα είναι κάτι ολότελα διάφορο από εκείνο που νοώ γενικά με την απλή έννοια του σώματος. Κατά συνέπεια, η προσθήκη αυτού του κατηγορουμένου δίνει (δημιουργεί) μια κρίση συνθετική.

Οι εμπειρικές κρίσεις καθ'εαυτές είναι όλες τους συνθετικές. Γιατί θα ήταν άτοπο να θεμελιώσει κανείς μια αναλυτική κρίση πάνω στην εμπειρία. Δεν χρειάζεται καθόλου να βγω έξω από την έννοιά μου, για να σχηματίσω μια κρίση, και συνεπώς δεν έχω ανάγκη από τη μαρτυρία της εμπειρίας για το σχηματισμό της. Ότι ένα σώμα είναι εκτατό, αυτό είναι μια πρόταση που ισχύει *a priori* και όχι κρίση εμπειρική. Γιατί προτού προσφύγω στην εμπειρία, έχω όλους τους όρους για την κρίση μου κλεισμένους μέσα στην έννοια (του σώματος), από'που μπορώ να εξαγάγω κάλλιστα το κατηγορήμα σύμφωνα με την αρχή της αντιφάσεως και έτσι να συνειδητοποιήσω συγχρόνως την αναγκαιότητα της κρίσεως, μια αναγκαιότητα που δε θα μου δίδασκε ποτέ η εμπειρία.

Αντίθετα, ενώ στην έννοια "σώμα γενικά" δεν εγκλείω καθόλου το κατηγορούμενο του βάρους, ωστόσο η έννοια αυτή δηλώνει ένα αντικείμενο της εμπειρίας μέσω ενός μέρους της ίδιας (της εμπειρίας) κι έτσι σ'αυτό το μέρος μπορώ να προσθέσω και άλλα μέρη της ίδιας εμπειρίας από εκείνα που ανήκαν στο πρώτο (το αντικείμενο σώμα). Μπορώ να γνωρίζω την έννοια του σώματος από πριν *αναλυτικά* μέσω των γνωρισμάτων της εκτάσεως, του αδιαχώρητου, της μορφής κλπ, που όλα νοούνται μέσα σε αυτήν την έννοια. Αν τώρα διευρύνω τη γνώση μου και ξαναρίξω τη ματιά μου στην εμπειρία, από'που άντλησα αυτή την έννοια του σώματος, τότε βρίσκω και την ιδιότητα του βάρους πάντα ενωμένη με τα παραπάνω γνωρίσματα και συνεπώς την προσθέτω συνθετικά ως κατηγορούμενο σ'εκείνη.

Άρα, η εμπειρία είναι εκείνη, πάνω στην οποία στηρίζεται η δυνατότητα της συνθέσεως του κατηγορουμένου της βαρύτητας με την έννοια του σώματος, γιατί και οι δυο έννοιες, μολονότι η μια δεν εμπειριέχεται στην άλλη, εν τούτοις συνανήκουν, αν και μόνο τυχαία, ως μέρη ενός όλου, δηλονότι της εμπειρίας, η οποία δεν είναι η ίδια (η εμπειρία) τίποτε άλλο παρά μια συνθετική ένωση των εποπτειών'.

Οι Κατηγορίες

Στην *Υπερβατική Αναλυτική* (το πλέον σκοτεινό μέρος της πραγματείας του) υποστήριξε ότι η φυσική είναι *a priori* και συνθετική επιστήμη, επειδή στη διάταξη της εμπειρίας χρησιμοποιεί έννοιες ειδικού τύπου. Οι έννοιες αυτές, που τις ονόμασε *κατηγορίες*, ‘δεν απορρέουν από την εμπειρία αλλά μάλλον υπονοούνται σε αυτήν και, κατά συνέπεια, είναι *a priori* ή καθαρές, σε αντίθεση προς τις εμπειρικές. Όμως η διαφορά τους, από τις εμπειρικές έννοιες, δεν συνίσταται μόνο στην προέλευσή τους. Συγκεκριμένα, ο ρόλος τους στη διαδικασία της γνώσης είναι διαφορετικός, επειδή ενώ οι εμπειρικές έννοιες χρησιμεύουν για να συσχετίζουν επιμέρους εμπειρίες και να παρουσιάζουν έτσι λεπτομερειακά πώς είναι διατεταγμένη η εμπειρία, ο ρόλος των κατηγοριών είναι ο καθορισμός της γενικής μορφής που πρέπει να πάρει αυτή η επιμέρους τάξη. Όντως, ανήκουν στο ίδιο το πλαίσιο της γνώσης, αλλά, αν και είναι αναγκαίες για την αντικειμενική γνώση, η μόνη γνώση που μπορούν να προσφέρουν είναι αυτή των αντικειμένων δυνατής εμπειρίας. Παράγουν έγκυρη και πραγματική γνώση μόνο όταν θέτουν σε τάξη αυτό που είναι δεδομένο στον χώρο και στον χρόνο’¹¹.

Οι κατηγορίες θεωρούνται θεμελιώδεις έννοιες του νου που δεν δέχονται περαιτέρω ανάλυση σε πιο στοιχειώδεις έννοιες κι αποτελούν την γενική μορφή ή είδος της νοήσεως. Η κατηγορία σχηματίζεται με αφαίρεση κι ελάττωση του βάθους των επί μέρους εννοιών ενώ αυξάνεται το πλάτος τους. Ο Αριστοτέλης αριθμεί τις Κατηγορίες σε δέκα *ουσίαν, ποσόν, ποιον, σχέσιν, τόπον, χρόνον, θέσιν, έχειν, πράττειν, πάσχειν*. Ο Kant δεν είδε οντολογικά τις κατηγορίες αλλά τις σύνδεσε με τα είδη της κρίσης. Οι Κατηγορίες είναι θεμελιώδεις ή στοιχειώδεις έννοιες ή καθαρές μορφές της διάνοιας, οι οποίες αποτελούν την βάση για όλες τις εμπειρικές μας γνώσεις, αλλά καθορίζουν την πραγματικότητα μόνο ειδολογικά, αφού η δυνατότητα της εμπειρίας κρέμεται από την εφαρμογή τους πάνω στο υλικό της εποπτείας. Είναι ειδολογικοί όροι της γνώσεως γιατί είναι *a priori*. Την *ύλη* της γνώσης την έχουμε *a posteriori* (εκ των υστέρων), από την εποπτεία. Κατηγορίες είναι ακριβώς οι όροι της σύνθεσης του πολλαπλού της εποπτείας μέσα στην ενότητα της έννοιας. Ο Kant αναφέρει δώδεκα Κατηγορίες:

- 1) Ποσότητας: ενότης, πολλαπλότης, ολικότης.
- 2) Ποιότητας: πραγματικότης, αρνητικότης, περιορισμός.
- 3) Αναφοράς: υπόστασις και τυχαίον, αιτία και αποτέλεσμα, αντιστοιχία.
- 4) Τροπικότης: δυνατότης, ύπαρξη, αναγκαιότης.

¹¹ στο ίδιο

Η παραδοσιακή μεταφυσική προσπαθούσε να εφαρμόσει τις κατηγορίες της διάνοιας πέρα από το όριο κάθε δυνατής εμπειρίας και από λογική αναγκαιότητα να εξαγάγει οντολογικά συμπεράσματα, χωρίς να τις υπάγει στο κριτήριο της αισθητικότητας, στα ίδια τα πράγματα καθεαυτά¹². Όπως δε περιγράφει ο Kant, μόνον έτσι επιτυγχάνεται η έγκυρη κατασκευή της πραγματικότητας ως φαινόμενο. Γιατί το ενέργημα που γεννά την συνθετική κρίση a priori είναι το (υπερβατικό) ενέργημα, που οργανώνει το χώρο και το χρόνο κατά τις κατηγορίες, δηλ. το ενέργημα που δίνει στη φύση τους θεμελιώδεις νόμους της. Θυμίζουμε λοιπόν τη σύνοψη του στο: **έννοιες δίχως περιεχόμενο είναι κενές και εποπτείες δίχως έννοιες είναι τυφλές.**

Εκείνο που βλέπει ο Kant για τις Κατηγορίες θυμίζει την μετέπειτα αντιμετώπιση του θέματος μέσα στην φιλοσοφία της γλώσσας όταν παρατηρεί¹³: 'Το να βγάλουμε από την κοινότυπη γνώση τις έννοιες, που δε στηρίζονται πάνω σε καμιά ιδιαίτερη εμπειρία κι όμως βρίσκονται μέσα σε κάθε εμπειρική γνώση, της οποίας αποτελούν τροποντινά απλώς και μόνο τη μορφή της σύνδεσης, δεν απαιτούσε περισσότερη σκέψη ή περισσότερη διορατικότητα από όση απαιτείται για να βγάλουμε από μια γλώσσα τους κανόνες χρησιμοποίησης των λέξεων κι έτσι να μαζέψουμε τα στοιχεία μιας Γραμματικής (και πράγματι αυτές οι δυο έρευνες είναι μεταξύ τους πολύ συγγενικές)'.

Για την κατηγορία της αιτιότητας, στην οποία αναφερθήκαμε και παραπάνω σε σχέση με την εκφορά κρίσεων που αφορούν σε αυτή ο Kant λέει, 'Ας πάρουμε την πρόταση : καθετί που συμβαίνει έχει την αιτία του. Με την έννοια του " καθετί που συμβαίνει" νοώ κατιτί το υπαρκτό, του οποίου προηγείται ένας ορισμένος χρόνος κλπ. και από αυτή την έννοια είναι δυνατό να συναχθούν αναλυτικές κρίσεις. Αλλά η έννοια της αιτίας *κείται εντελώς εκτός εκείνης της έννοιας* και δηλώνει κάτι διαφορετικό από το "κάθετί που συμβαίνει", άρα δεν εμπεριέχεται καθόλου μέσα στην παράσταση (του καθετί που συμβαίνει). Πώς λοιπόν φθάνω στο σημείο να αποδώσω στο όπως περιγράφει ο Kant, όπως περιγράφει ο Kant, "ό,τι συμβαίνει" κάτι διαφορετικό από το ίδιο και να διαγνώσω ότι η έννοια της *αιτίας*, αν και δεν περιέχεται *σ'εκείνο* (το ό,τι συμβαίνει), ωστόσο ανήκει *σ'αυτό και μάλιστα κατ' αναγκαιότητα;*'

Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι η θέση του για την αιτιότητα να την αποδέχεται a priori υπέστη μεγάλο πλήγμα μέσα στις σύγχρονες θεωρίες της κβαντομηχανικής κλίνοντας την πλάστιγγα τουλάχιστον

¹² ΚΚΛΓ (B25).

¹³ Προλεγόμενα, σελ 120.

όσον αφορά τον μικρόκοσμο σε θέσεις που θυμίζουν τον Hume. Ωστόσο, αυτό δεν μειώνει την παραπάνω ανάλυση του.

Επίσης είναι σκόπιμο να πούμε εκείνο που θεωρήθηκε ως το πλέον αδύνατο σημείο της καντιανής φιλοσοφίας είναι η ιδέα του *καθ'αυτό* πράγματος, μια μεταφυσική παραδοχή του, πέρα από κάθε γνώση πράγματος. Ότι το *καθ'αυτό* των πραγμάτων μας μένει άγνωστο, καθόσον εμείς συναντούμε μόνο τα φαινόμενά τους. Εξάλλου, από τα πράγματα νοούμε *a priori* μονάχα εκείνο που εμείς οι ίδιοι θέτουμε μέσα σε αυτά¹⁴.

3. 4 Ο Kant και η κατασκευαστική αντίληψη των Μαθηματικών

Η πιο ενδιαφέρουσα από τις παραπάνω κλάσεις κρίσεων που αναφέραμε είναι η κλάση των *a priori* συνθετικών αληθών προτάσεων. Η σημασία τους για την καντιανή φιλοσοφία των μαθηματικών είναι ιδιαίτερα μεγάλη. Η άποψη του Kant είναι ότι οι **μαθηματικές κρίσεις είναι στο σύνολο τους *a priori* συνθετικές**. Μέχρι τότε οι φιλόσοφοι επειδή θεωρούσαν ότι όλοι οι συλλογισμοί των μαθηματικών βαίνουν σύμφωνα με την αρχή της μη αντίφασης (πράγμα που απαιτεί η φύση κάθε αποδεικτικής βεβαιότητας), και σχημάτισαν την πεποίθηση ότι και οι θεμελιώδεις αρχές έπρεπε να γνωρίζονται σε συμφωνία με την αρχή αυτή. Σε αυτό το σημείο ωστόσο έγκειται για τον Kant η πλάνη, γιατί μια συνθετική πρόταση μπορεί πράγματι να γνωσθεί σύμφωνα με την αρχή της μη αντίφασης, αλλά μόνον στην περίπτωση που προϋποθέτει κανείς μian άλλη συνθετική πρόταση απ'όπου μπορεί αυτή να εξαχθεί, και ποτέ αυτήν καθ'εαυτήν.

΄Κατ'αρχήν πρέπει να σημειωθεί ότι οι κυρίως μαθηματικές προτάσεις είναι πάντα κρίσεις *a priori* και όχι εμπειρικές, γιατί παρακολουθούνται από αναγκαιότητα, που δεν μπορεί να αντληθεί από την εμπειρία. Βέβαια, θα μπορούσε κανείς να σκεφθεί, ότι η πρόταση $7 + 5 = 12$ είναι ως κρίση αναλυτική και προκύπτει από την έννοια του αθροίσματος του εφτά και του πέντε σύμφωνα με την αρχή της μη αντίφασης. Αλλά, αν προσέξει κανείς καλύτερα, θα βρει ότι η έννοια του αθροίσματος 7 και 5 δεν περιέχει τίποτε άλλο παρά μόνο τη συνένωση δυο αριθμών σε ένα και μόνο, χωρίς καθόλου να νοείται ποιος είναι αυτός ο μόνος αριθμός που συμπεριλαμβάνει και τους δυο. Η έννοια του δώδεκα δεν νοείται καθόλου, παρά μόνο από το γεγονός ότι εγώ απλώς νοώ εκείνη τη συνένωση του εφτά και του πέντε, γιατί, όσο και αν αναλύσω την έννοια που έχω ενός τέτοιου δυνατού αθροίσματος, δεν θα βρω μέσα σ'αυτό το δώδεκα. Πρέπει

¹⁴ ΚΚΛ, ΒΧVIII.

κανείς να προχωρήσει πέρα από αυτές τις έννοιες καλώντας σε βοήθεια κάποια εποπτεία που να αντιστοιχεί σε μια από τις δυο έννοιες, π.χ. τα πέντε δάχτυλά του ή πέντε σημεία, και έτσι να προσθέσει μια από τις μονάδες που είναι δοσμένες από την εποπτεία του αριθμού πέντε στην έννοια του εφτά. Γιατί παίρνω πρώτα τον αριθμό 7 και, χρησιμοποιώντας για την έννοια του 5 τα δάχτυλα του χεριού μου ως εποπτεία, προσθέτω τώρα με την βοήθεια της εποπτικής εικόνας στον αριθμό εφτά μια-μια τις μονάδες που είχα πάρει πρώτα μαζί, για να σχηματίσω τον αριθμό 5, κι έτσι βλέπω να προκύπτει το δώδεκα. Το ότι το 7 θα έπρεπε να προστεθεί στο 5, αυτό βέβαια το σκέφτηκα στην έννοια ενός άθροισματος $= 7 + 5$, αλλ'όχι ότι το άθροισμα αυτό θα ήταν ίσο με τον αριθμό δώδεκα. Άρα, η αριθμητική πρόταση είναι πάντα συνθετική. Αυτό θα το καταλάβει κανείς ακόμη πιο καθαρά, αν πάρει ως παράδειγμα μεγαλύτερους αριθμούς, γιατί τότε είναι πρόδηλο, ότι, όπως κι αν στριφογυρίσουμε τις έννοιες μας, δεν θα μπορέσουμε ποτέ χωρίς τη βοήθεια της εποπτείας να βρούμε το άθροισμα με μόνη την ανάλυση των εννοιών μας¹⁵... Για τον ίδιο λόγο δεν είναι αναλυτική και οποιαδήποτε θεμελιώδης αρχή της Γεωμετρίας. Ότι η ευθεία γραμμή ανάμεσα σε δυο σημεία είναι η πιο σύντομη, αυτό είναι μια συνθετική πρόταση. Γιατί η έννοια "ευθύ" δεν περιέχει τίποτε σχετικό με μέγεθος παρά μόνο ποιότητα. Άρα, η έννοια του πιο σύντομου αποτελεί πέρα για πέρα προσθήκη και δεν μπορεί να αντληθεί με καμιάν ανάλυση από την έννοια της ευθείας γραμμής. Εδώ, λοιπόν πρέπει κανείς να καταφύγει στη βοήθεια της εποπτείας που μόνο χάρη σ'αυτή είναι η σύνθεση δυνατή¹⁶.

Ο Kant, λοιπόν, για πρώτη φορά τόσο ξεκάθαρα στην φιλοσοφία, απορρίπτει την πλατωνική θεώρηση των Μαθηματικών και προετοιμάζει τις κατασκευαστικές αντιλήψεις στην φιλοσοφία (και την διδακτική των Μαθηματικών) του 20ου αιώνα. Στην Κριτική του Καθαρού Λόγου γράφει¹⁷:

‘Η φιλοσοφική γνώση είναι η γνώση του λόγου εξ εννοιών, η μαθηματική γνώση η εκ κατασκευής των εννοιών. Κατασκευάζει μια έννοια σημαίνει εκθέτειν (παριστάνειν) a priori την αντιστοιχούσαν εις την έννοια αυτή εποπτεία. Για την κατασκευή μιας έννοιας, απαιτείται, συνεπώς, μια **μή εμπειρική εποπτεία**, η οποία, ως εποπτεία, είναι, κατ'ακολουθίαν, ένα μοναδικό (ενικό) αντικείμενο,

¹⁵ Τη θέση αυτή για τον συνθετικό χαρακτήρα της αριθμητικής θα αρνηθεί εκατό χρόνια αργότερα ο Frege στα ‘Θεμέλια της Αριθμητικής’. Ωστόσο, ο Frege δεν θα αρνηθεί τον συνθετικό χαρακτήρα της γεωμετρίας.

¹⁶ Ας μην ξεχνούμε ότι το σημείο, η ευθεία, το επίπεδο αποτελούν ιδεατές κατασκευές της καθαρής εποπτείας που δεν συναντώνται πουθενά στην πραγματικότητα.

¹⁷ ΚΚΚΛ, τόμος 6, σελ 362, Α714-Β742.

αλλά ως κατασκευή μιας έννοιας (μιας καθολικής παραστάσεως), πρέπει τουλάχιστον να εκφράζει στην παράσταση καθολικό κύρος για όλες τις δυνατές εποπτείες που συνανήκουν υπό την έννοια. Έτσι κατασκευάζω ένα τρίγωνο, καθ'όσον παριστώ το ανταποκρινόμενο σ'αυτή την έννοια αντικείμενο, είτε δι'απλής φαντασίας, στην καθαρή εποπτεία, είτε επίσης σύμφωνα μ'αυτήν επί του χάρτου, στην εμπειρική εποπτεία, αλλά και στις δυο περιπτώσεις εντελώς a priori χωρίς να έχω δανεισθεί το πρότυπο γι αυτό από οποιανδήποτε εμπειρία. Το κατ'ιδίαν κεχαραγμένο εκεί σχήμα είναι εμπειρικό και χρησιμεύει μολαταύτα, χωρίς να παραβλάπτεται η καθολικότης του, για να εκφράζει την έννοια, αφού κατά την εμπειρική αυτή εποπτεία η προσοχή πάντα στρέφεται πάνω μοναχά στο ενέργημα της κατασκευής της έννοιας - για την οποία πολλοί προσδιορισμοί, όπως π.χ. του μεγέθους, των πλευρών και των γωνιών είναι εντελώς αδιάφοροι - και από τις διαφορές αυτές, που δεν μεταβάλλουν την έννοια του τριγώνου, γίνεται συνεπώς αφαίρεση'.

Έτσι ο φιλόσοφος παρατηρεί, 'στο νου εκείνου που απέδειξε πρώτος ότι στο ισόπλευρο τρίγωνο όλες οι γωνίες είναι ίσες έλαμψε ένα φως, γιατί βρήκε ότι δε χρειαζόταν να παρακολουθεί βήμα προς βήμα αυτό που έβλεπε στο σχήμα ή στην ψιλή¹⁸ έννοια του σχήματος κι έτσι να αποτυπώνει, τρόπον τινά, ιδιότητες του, αλλά να το παραγάγει σύμφωνα με την a priori ιδέα που σχημάτισε γι'αυτό ο ίδιος και την παράσταση που του έδωσε μέσω εννοιών (εκ κατασκευής). Βρήκε ακόμα ότι, για να έχει βέβαιη a priori γνώση από κάτι, δεν ήταν ανάγκη να προσθέτει στο πράγμα τίποτε άλλο παρά αυτό που συναγόταν αναγκαία από εκείνο που είχε θέσει ο ίδιος εκεί μέσα σύμφωνα με την έννοια του πράγματος'.

Δηλαδή, ότι στα πράγματα αλλά και στα Μαθηματικά πρέπει να σκεφτόμαστε με την αρχή ότι 'σε αυτά νοούμε a priori μοναχά εκείνο που εμείς οι ίδιοι θέτουμε μέσα σε αυτά¹⁹'. Ο Μαθηματικός που κατασκευάζει ένα τρίγωνο και φέρνει τις διχοτόμους των γωνιών δεν ενδιαφέρεται αν αυτές θα συμπέσουν στο σχήμα του, αφού μια μικρή έλλειψη ακρίβειας στην κατασκευή αρκεί να το αποτρέψει. Εκείνο που έχει αξία γι'αυτόν είναι η απόδειξη που στηρίζεται στις λογικές δεσμεύσεις με τις οποίες έκανε την κατασκευή αυτή μέσα στην καθαρή εποπτεία. Μέσα σε αυτές τις παρατηρήσεις βλέπει κανείς τον αφηρημένο τρόπο που σκέφτεται ένας μαθηματικός που ενώ χρησιμοποιεί συγκεκριμένες εγγραφές ή σχήματα αυτά έχουν μια θέση στηρίγματος στην διαπραγματεύσή του κι αντιπροσωπεύουν την γενική περίπτωση που νοείται στα συνδηλούμενα της συζήτησης. Δηλαδή, η συγκεκριμένη περίπτωση που εικονίζεται ή η δήλωση

¹⁸ ψιλό: όταν αναφέρομε σε κάτι χωρίς να το φαντάζομαι ή να το αναπαριστάνω όπως το νοώ.

¹⁹ ΚΚΛ, Β1

‘έστω ένα τρίγωνο’ παραπέμπουν στην γενική. Είναι ενδεικτική η θέση του Kant, ‘Άρα η φιλοσοφική γνώση θεωρεί το Μερικό μονάχα στο Γενικό, η μαθηματική το Γενικό μέσα στο Μερικό, και μάλιστα μέσα στο Ατομικό, αλλά παρόλα αυτά (το θεωρεί) a priori και δια μέσου του λόγου, έτσι ώστε, όπως αυτό το Ατομικό είναι προσδιορισμένο κάτω από ορισμένους γενικούς όρους κατασκευής, έτσι ακριβώς και το αντικείμενο της έννοιας, εις την οποίαν το Ατομικό αυτό ανταποκρίνεται μόνον ως σχήμα της, να πρέπει κατ'ανάγκη να νοείται καθολικώς προσδιορισμένο’.

Χώρος, χρόνος, άπειρο:

Ο χώρος και ο χρόνος είναι εκείνες οι εποπτείες, τις οποίες τα καθαρά Μαθηματικά θέτουν ως βάση όλων των γνώσεων και κρίσεων τους, οι οποίες θεωρούνται ως αποδεικτικές και συνάμα αναγκαίες, γιατί τα Μαθηματικά οφείλουν να παρουσιάζουν, δηλαδή να κατασκευάζουν, όλες τις έννοιες τους πρώτα μέσα στην εποπτεία, και τα καθαρά Μαθηματικά μέσα στην καθαρή εποπτεία. Τα Μαθηματικά (μια και δεν μπορούν να προχωρούν αναλυτικά, δηλαδή με ανάλυση των εννοιών τους, παρά μόνο συνθετικά) είναι αδύνατο να προχωρήσουν έστω κι ένα βήμα όσο τους λείπει η καθαρή εποπτεία, γιατί μόνο αυτή δίνει το υλικό για συνθετικές κρίσεις a priori. Η Γεωμετρία θέτει ως υπόβαθρο την εποπτεία του καθαρού χώρου. Η Αριθμητική σχηματίζει τους αριθμούς της με διαδοχική προσθήκη των μονάδων μέσα στο χρόνο... Αλλά και οι δυο αυτές παραστάσεις δεν είναι παρά εποπτείες, γιατί αν κάποιος αφαιρέσει από τις εμπειρικές εποπτείες των σωμάτων και των μεταβολών τους κάθε τι το εμπειρικό, δηλαδή οτιδήποτε ανήκει στις αισθήσεις, εξακολουθεί να παραμένει ο χώρος και ο χρόνος, οι οποίοι συνεπώς είναι καθαρές εποπτείες και οι οποίες υπάρχουν a priori ως θεμέλιο των εμπειρικών εποπτειών και για τούτο δεν μπορούν να λείψουν ποτέ²⁰.

Ο χώρος και ο χρόνος δεν είναι αντικείμενα ανεξάρτητα αλλά *πηγές της γνώσεως, όροι της δυνατότητας της εμπειρίας ή μορφές εποπτείας*, γιατί οι μορφές δεν μπορούν να εμφανίζονται στα περιεχόμενα της πραγματικής εμπειρίας²¹. Υπάρχει δε ένας χώρος, απόλυτος που επεκτείνεται σε τρεις διαστάσεις και αυτός καθορίζει ως πραγματική αρχή τη δυνατότητα της ύλης. Αποτελεί θεμελιώδη έννοια μέσα μας και πραγματικότητα έξω από εμάς²². Ο χώρος δεν είναι έννοια εμπειρική, γι'αυτό αποτελεί παράσταση αναγκαία και a priori, χωρίς το a priori να σημαίνει ότι προηγείται χρονικά της

²⁰ Προλεγόμενα, σελ. 61.

²¹ ΚΘΦΚΓ, σελ. 83.

²² ΚΘΦΚΓ, σελ. 82.

εμπειρικής γενέσεως της παραστάσεως του χρόνου, γιατί το a priori προηγείται και της χρονικής εμπειρίας²³.

Πάνω σ'αυτή την a priori αναγκαιότητα της παραστάσεως του χώρου βεβαιώνει ο Kant και την αποδεικτική ισχύ όλων των γεωμετρικών αξιωμάτων και της δυνατότητας της a priori κατασκευής τους. Αν δηλαδή, η παράσταση του χώρου ήταν αποκτημένη εκ των υστέρων, αν είχε αντληθεί από την εξωτερική εμπειρία, τότε τα μαθηματικά αξιώματα δεν θα ήταν, παρά κατ'αίσθηση αντιλήψεις και θα είχαν χαρακτήρα τυχειότητας και όχι αναγκαιότητας²⁴.

Ο χρόνος δεν είναι ούτε πραγματικό όν ούτε αντικειμενικό, αλλά μια μορφή a priori της εσωτερικής εμπειρίας, η οποία, σε συνάρτηση με τις δώδεκα νοητικές κατηγορίες, επιτρέπει την λειτουργία της διάνοιας, καθώς εποπτεύουμε τις εσωτερικές μας καταστάσεις και την σχέση των παραστάσεων μας²⁵.

Είναι γνωστό σήμερα, ότι ο Kant δεν είχε δίκιο που πίστευε ότι το αναλλοίωτο και σταθερό αισθητηριακό μας χωρικό πλαίσιο ήταν τρισδιάστατο κι ευκλείδειο, και πως ο χρόνος είναι ευκλείδειος. Στην αντίληψη αυτή η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας έδωσε το αποφασιστικό χτύπημα. Το σφάλμα του όμως αυτό, που οφείλεται στην αδυναμία του να δει τον κόσμο πέρα από τις επιστημονικές δυνατότητες του καιρού του, δεν μειώνει την αξία των φιλοσοφικών του συλλήψεων.

Η καντιανή διάκριση ανάμεσα σε ένα δυνητικό και ένα πραγματικό άπειρο είναι σχεδόν ίδια με την αντίστοιχη αριστοτελική. Δυνητικό άπειρο είναι εκείνο για το οποίο έχουμε έναν θεωρητικό αλγόριθμο κατασκευής, αλλά που δεν θεωρείται ως κάτι το τελειωμένο, όπως είναι το πραγματικό άπειρο. Ωστόσο η θέση του παρουσιάζει και σημαντικές διαφορές. Για τον Αριστοτέλη η έννοια του πραγματικού απείρου δεν έχει δικαίωμα ύπαρξης στα πλαίσια του νοητού μας σύμπαντος, ενώ για ο Kant δεν θεωρεί ότι το πραγματικό άπειρο πρέπει να απορριφθεί ως έννοια λογικά αδύνατη (καθόσον είναι έννοια μη κατασκευάσιμη)²⁶. Η έννοια του πραγματικού απείρου είναι εσωτερικά συνεπής, και λειτουργεί θαυμάσια στα πλαίσια του λογισμού μας.

²³ ΚΘΦΚΓ, σελ. 86.

²⁴ ΚΘΦΚΓ, σελ. 88.

²⁵ Κ. Μουτσόπουλου, σημειώσεις Εισαγωγής εις την Φιλοσοφίαν.

²⁶ Αναπολιτάνος, σελ. 157.

3.4 Τα Μαθηματικά πριν και μετά τον Kant

Τα Μαθηματικά και η Μετατόπιση του 17ου αιώνα

Ένα βασικό χαρακτηριστικό στα Μαθηματικά των αρχαίων ελλήνων είναι η χρήση του λόγου μεγεθών ως διαλεκτικό εργαλείο απόδειξης. Τα μεγέθη αυτά είναι πάντα ομογενή (μήκος/μήκος, εμβαδόν/εμβαδόν). Οι λόγοι ποτέ δεν λογίζονται ως αριθμητικές διαιρέσεις και ως κλάσματα. Αυτό θα προκύψει σε μια άλλη εποχή του ρασιοναλισμού όπου το κλάσμα θα γίνει ratio. Είναι μια πεποίθηση που συναντιέται εν πρώτοις στην σχολή της Παδούας: *ό,τι μετράται υπάρχει* και υποδεικνύει την νέα οντολογία που θα αναδείξει η αναγέννηση. Την αντίληψη αυτή θα ενισχύσει η επικράτηση του αραβικού αριθμητικού συστήματος και θα ενστερνιστεί κι ο Γαλιλαίος κάνοντας Μαθηματική κινητική και χρήση μη ομογενών λόγων διαστήματος/λόγο¹.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό των μαθηματικών αντικείμενων (υπό την αριστοτελική επίδραση) είναι ότι μπορούν να γίνουν αντιληπτά από τις αισθήσεις μόνο σε εικόνες, ενώ τα ίδια, στην αναλλοίωτη σύστασή τους, είναι προσιτά μόνο στον στοχαστικό νου, κι υπάρχουν απείρως πολλά τέτοια αντικείμενα. Ωστόσο, κανείς δεν αμφισβητεί ότι η μαθηματική επιστήμη, ως τέτοια, έχει να κάνει με αυτά τα "καθαρά" μορφώματα η φύση των οποίων μπορεί να προσεγγιστεί μόνο από την διάνοια². Οι έννοιες της αφορούν σε κάθε περίπτωση τα συγκεκριμένα αντικείμενα καθαυτά. Αν μιλήσουμε στην γλώσσα των Σχολαστικών είναι *intentiones primae πρώτες αναφορές*, - δηλαδή έννοιες που αναφέρονται άμεσα σε συγκεκριμένα αντικείμενα. Αυτό βρίσκεται σε αρμονία με τα μέσα παράστασης που χρησιμοποιεί η ελληνική επιστήμη. Οι γραμμές που φέρονται στο σχήμα παρουσιάζουν το αντικείμενο, το απεικονίζουν. Το σχήμα μπορεί ευθέως να μετασχηματιστεί σε μια εικόνα, αν τα ευθύγραμμα τμήματα και οι λόγοι των ευθυγράμμων τμημάτων, από τα οποία αποτελείται, θεωρηθούν μήκη και τιμές αριθμητικώς καθορισμένα. Η δυνατότητα, ταύτισης πρώτης αναφοράς και δεύτερης αναφοράς βασίζεται επομένως σε αυτό, στο ότι το σχήμα κατανοείται ως σχήμα που έχει ήδη μετασχηματιστεί σε εικόνα. Η σχηματική απεικονιστικότητα είναι κατά συνέπεια το στοιχείο που μας επιτρέπει να φωτίσουμε τη γενίκευση της *Αριθμητικής* σε Άλγεβρα ή, μ'άλλα λόγια, να "ενοποιήσουμε" γεωμετρία και άλγεβρα³.

¹ Koyré A, (1994), Γαλιλαίος και Πλάτων, *ΝΕΥΣΙΣ*, 1 σελ. 51-83.

² J. Klein, Ο Κόσμος της Φυσικής και ο Φυσικός Κόσμος, Νεύση 7, 1998.

³ J. Klein. Στο σημείο αυτό να δώσουμε κάποια στοιχεία χρήσιμα για την διδακτική. Η αριθμητική που διδάσκεται στο Δημοτικό είναι μια αριθμητική με έννοιες πρώτης αναφοράς. Οι αριθμοί παραπέμπουν

Θα προσπαθήσουμε εδώ να παρουσιάσουμε την διαφορά με το Διόφαντο. Τα έξι σωζόμενα βιβλία του Διόφαντου διδάσκουν πώς επιλύονται υπολογιστικά προβλήματα, τα οποία σήμερα είναι γνωστά ως εξισώσεις 1ου και 2ου βαθμού. Ο Διόφαντος χρησιμοποιεί μια σειρά συντομογραφιών για τους αγνώστους και τις δυνάμεις τους. Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα μιας τέτοιας γραφής.

$$\zeta^{\circ} \beta \overset{\circ}{M} \bar{\gamma} \text{ ίσοι εισίν } \overset{\circ}{M} \sigma^{\circ} \zeta$$

Δηλαδή, *αριθμοί δυο μονάδες τρεις ίσοι μονάσι επτά* που σημαίνει δυο αριθμοί και τρεις μονάδες είναι ίσα προς επτά. Το σημείο ζ είναι ταχυγραφικό σημείο του *αριθμός*. Το σύμβολο M είναι συντομογραφία του *μονάς ή μονάδες*. Σήμερα (μετά τον Vieta 1600) αυτό το γράφουμε $2x + 3 = 7$. Οι μονάδες είναι αριθμημένα αντικείμενα, είναι *ενάδες*, δηλαδή αντικείμενα που διακρίνονται από άλλα ομοειδή και καταχωρούνται ως απομονωμένα όντα. Ο αριθμός στην αρχαιότητα δεν σημαίνει αριθμός γενικά, αλλά αριθμός ορισμένων αντικειμένων: *πας αριθμός τινός έστι*⁴. Παρόλη την ιδεατότητα των αριθμών αυτές σκιάζουν και αναδεικνύονται στον κόσμο ως μορφές του. Στην καθημερινή ζωή έχουμε συχνά να κάνουμε με αριθμούς ορατών και απτών αντικειμένων,

το καθένα από τα οποία είναι στην κάθε περίπτωση ακριβώς *ένα*. Ωστόσο η δυνατότητα απαρίθμησης, όπου αρθρώνουμε ξανά και ξανά τις ίδιες λέξεις, δηλαδή, *δυο, τρία, τέσσερα* κ.λ.π., ενώ αναφερόμαστε σε διαφορετικά σύνολα, παραπέμπει σε αντικείμενα εντελώς διαφορετικού είδους, συγκεκριμένα πράγματα, σε *άυλες, καθαρές ενάδες*, σε *καθαρές μονάδες*. Η ελληνική επιστήμη της αριθμητικής ασχολείται με αυτές τις μονάδες⁵. Αυτός είναι ο λόγος που ο ορισμός του αριθμού στον Ευκλείδη διατυπώνεται ως εξής: *το εκ μονάδων συγκείμενον πλήθος*, δηλαδή πλήθος αποτελούμενον εκ μονάδων. Στην αριθμητική του Διόφαντου ο κάθε μεμονωμένος αριθμός είναι αριθμός από τέτοιες μονάδες. Ακόμη κι ο άγνωστος αριθμός που πρέπει να υπολογιστεί είναι ένας τέτοιος αριθμός από μονάδες παρόλο που στην αρχή είναι άγνωστος και πρέπει να υπολογιστεί, υπ' αυτή και μόνο την έννοια είναι απροσδιόριστος. Αυτός είναι ο λόγος που η αριθμητική του Διόφαντου δεν έφτασε ποτέ στον αφηρημένο συντελεστή δηλαδή από την εξίσωση $2x + 3 = 7$ στην εξίσωση $ax + b = c$. Για τον Vieta η αντικατάσταση του 2 από το a ήταν δυνατή

πάντα σε αντικείμενα, τόσα αυγά, τόσα μήλα. Στο γυμνάσιο το παιδί είναι σε θέση να δει τους αριθμούς χωρίς αναφορικότητα, σκέφτεται με έννοιες δεύτερης αναφοράς οπότε και καθίσταται δυνατή η διδασκαλία της Άλγεβρας, βλέπε Σ. Βοσνιάδου, Η Ψυχολογία των Μαθηματικών, Gutenberg 1995.

⁴ Θέση του Αριστοτέλη, όχι του Πλάτωνα.

⁵ Αυτή την άποψη υποστηρίζουν κι Α. Raftopoulos, The Spatial intuition of Number and the Number line, p. 17-36, Mediterranean Journal for Research in Mathematical Education, Vol. 1, No. 2 (2002). S. Gaukroger, The Genealogy of Knowledge, Ashgate, Aldershot – Brookfield USA-Singapore-Sydney 1997.

επειδή η έννοια *δύο* δεν αναφέρεται πια άμεσα σε κάποιο αντικείμενο, δηλαδή σε δυο καθαρές μονάδες, αλλά έχει ήδη από μόνη της ένα πιο γενικό χαρακτήρα. Στον Vieta *δυο* δεν σημαίνει πια *δυο ορισμένα αντικείμενα*, αλλά τη γενική έννοια της δυαδικότητας εν γένει. Με άλλα λόγια για τον Vieta η έννοια του δυο έχει χαρακτήρα *intentio secunda*. Δεν σημαίνει πλέον ούτε αναφέρεται σε ένα ορισμένο αριθμό αντικειμένων, αλλά στον γενικό αριθμητικό χαρακτήρα αυτού ακριβώς του αριθμού, ενώ το σύμβολο *a* παριστάνει τον γενικό αριθμητικό χαρακτήρα ενός εκάστου και κάθε αριθμού. Υπό αυτή την έννοια το σημείο *α* παριστάνει "περισσότερα" από το σημείο 2. Η αντικατάσταση του 2 από το *a* είναι μόνο λογική απαίτηση. Εξάλλου όπως φαίνεται από τις πρώτες μεταφράσεις του Διόφαντου στα Λατινικά το 1621 εγκαταλείπεται το *έξι μονάδες* για το απλό *έξι*⁶.

Το πέρασμα στα συμβολικά Μαθηματικά έδωσε μεγάλη ώθηση στην επιστήμη. Οι Descartes, Fermat και άλλοι ανέπτυξαν αναλυτικές μεθόδους που θα οδηγήσουν στην Αναλυτική Γεωμετρία κι αργότερα στον Απειροστικό Λογισμό.

Τα Μαθηματικά του 18ου αιώνα

Ο 18ος αιώνας υπήρξε ιδιαίτερα παραγωγικός όχι μόνο για την φιλοσοφία αλλά ιδιαίτερα για τα Μαθηματικά. Μετά την δημιουργία του Απειροστικού Λογισμού⁷ από τους Newton και Leibniz (1646 - 1716) και την μεγάλη επιτυχία που είχε στην ουράνια μηχανική ένα νέο πεδίο άνοιξε για τους μαθηματικούς της εποχής εκείνης. Ονόματα όπως οι Bernoulli Johann και Jakob, Euler, Langrange, Laplace, D'Alembert, εργάζονται πυρετωδώς σε αυτούς τους νέους κλάδους του Απειροστικού της μηχανικής και της άλγεβρας. Μπροστά τους αποκαλύπτονται οι πολύμορφες πλευρές των αποτελεσμάτων που αναδεικνύουν την κομψότητα και την συμμετρία των Μαθηματικών, την ίδια στιγμή που η προσαρμογή τους στη φυσική και την ουράνια μηχανική αποκαλύπτει μια θεϊκή ομορφιά που επιβεβαιώνει την αναγγελία του Γαλιλαίου (ότι ο Θεός έγραψε με μαθηματικά ψηφία τον κόσμο). Τα κείμενα του Newton βρίθουν από τέτοιες αναφορές θαυμασμού για το μεγαλείο του Θεού που του αποκαλύπτεται! Έννοιες όπως απείρως μεγάλο και απείρως μικρό βρίσκονται στην ημερήσια διάταξη ενώ την ίδια στιγμή που παραμένουν σκοτεινές ως προς την οντολογία τους και ενδεχομένως την νομιμότητα της χρήσης τους.

⁶ J. Klein.

⁷ Στάθη Γιαννακούλια, Απειροστικός Λογισμός, Η Ιστορική του Εξέλιξη από τον 5^ο π. Χ. έως τον 19^ο Αιώνα, Αθήνα 2006.

Τα καρτεσιανά μαθηματικά που ξεκίνησαν με τα προγράμματα αλγεβροποίησης των Vieta, Descartes, Fermat, κ.ά, δρομολογήθηκαν, ως μια επιστήμη βέβαιη τα συμπεράσματα της οποίας ήταν τόσο αξιόπιστα που θα μπορούσαν να μας βοηθήσουν να στηρίξουμε τις έρευνές μας για τον φυσικό κόσμο, κατά την υπόδειξη του Γαλιλαίου. Ωστόσο, η ανάπτυξη των νέων αυτών μαθηματικών ιδεών (π.χ. Απειροστικού), αναγκαίων για να περιγράψουν την κίνηση, προκάλεσε μια σειρά αμφιβολιών που ήταν ανάγκη να ξεπεραστούν. Οι προσπάθειες ήταν σε πολλές κατευθύνσεις. Ο D' Alambert επιχείρησε ορισμούς των ορίων (η τέμνουσα ευθεία ενός κύκλου γίνεται στο όριο εφαπτομένη, κ.λ.π). Ο Langrange δεν πείθεται μην μπορώντας να ξεκαθαρίσει τι γίνεται όταν το $\Delta y/\Delta x$ έφτανε στο όριο. Αμφισβητεί τα Μαθηματικά που κάνουν χρήση του απείρου και προτείνει την Αναλυτική Μηχανική του στηριγμένη στην Άλγεβρα και απαλλαγμένη όσο το δυνατό από τις εποπτείες του χώρου⁸.

Kant και η εποπτεία⁹

Όπως είδαμε σύμφωνα με τον Kant η γνώση συγκροτείται μέσω των εννοιών και των *εποπτειών*. Οι εποπτείες αντιδιαστέλλονται από τις έννοιες. Οι εποπτείες είναι άμεσες αισθητηριακές παραστάσεις των αντικειμένων της εμπειρίας και διευκολύνουν την συγκρότηση των εννοιών ως στηρίγματα και ως αναφορές. Αλλά οι εποπτείες είναι *εμπειρικές* ή *a priori* (καθαρές): για τον Kant, οι καθαρές εποπτείες αφορούν και καθορίζουν τον τύπο ή τη μορφή των παραστάσεων που μπορούμε να αποκτήσουμε μέσω των αισθήσεων. Για τα μαθηματικά είναι γνωστές ως *a priori* εποπτείες του χώρου (γεωμετρία) και του χρόνου (αριθμητική). Η φύση του νου λοιπόν είναι τέτοια που καθορίζει τα αντικείμενα που προσλαμβάνουμε μέσω των αισθητηρίων οργάνων ως αντικείμενα στο χώρο και το χρόνο (για τούτο οι εποπτείες αυτές είναι *a priori*).

Η εποπτεία είναι μία απ' τις πιο αμφιλεγόμενες έννοιες στην ιστορία των Φυσικών Επιστημών και δη των Μαθηματικών που απ' τη φύση τους είναι αφηρημένα. Ήδη απ' την ανάπτυξη των πρώτων μαθηματικών εννοιών, κάπου στα βάθη του χρόνου, η εμπειρία και κυρίως η εποπτεία αποτέλεσαν το κίνητρο για την ενασχόληση με αυτές τις έννοιες. Ωστόσο, οι αντίθετες απόψεις όλων αυτών συγκλίνουν στο γεγονός ότι η εποπτεία υπήρξε οδηγός της σκέψης πολλών μαθηματικών και όχι μόνο καθοδήγησε, αλλά και εδραίωσε πολλές μαθηματικές αλήθειες, γεγονός που υποδεικνύει τη

⁸ Οι ενστάσεις τους (όπως και του Langrange και L. Carnot θυμίζουν τον Ζήνωνα, βλέπε D. J. Stuijk, Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών, σελ. 219.

⁹ Γ. Ρουσόπουλου, Εποπτεία στα Μαθηματικά, Νεοελληνική Παιδεία, Τομ. 4, τχ. 12 1988, (116-126).

δυσκολία πλήρους αποκλεισμού της από καθετί μαθηματικό.

Τα Μαθηματικά του 19ου αιώνα

Μετά τον Kant και με αφορμή της αμφιλεγόμενης απόψεως του για τα Μαθηματικά αυτά βρέθηκαν σε μεγάλη κρίση. Το κύριο επιστημολογικό αίτημα που προβάλλεται όλο τον 19^ο αιώνα είναι το αίτημα της αυστηρής διατύπωσης τους ή καλύτερα θεμελίωσής τους. Τι εννοούμε όταν λέμε *όριο*, τι όταν λέμε *συνάρτηση*. Ο ευκλείδειος χώρος δεν μπορεί να είναι μοναδικός.

Ο Cauchy έκανε χρήση της έννοιας του ορίου του D'Alembert για να ορίσει την παράγωγο των συναρτήσεων αλλά αυτό έγινε κατά τρόπο περισσότερο ακριβή από ό,τι είχε ως τότε κατορθωθεί. Ο Cauchy μαζί με τους Gauss, Dirichlet, Abel και Bolzano ανήκουν στους πρωτοπόρους της νέας επίμονης απαίτησης για μαθηματική αυστηρότητα κατά το πρώτο μισό του 19ου αιώνα¹⁰. Η προσπάθεια για ακρίβεια και θεμελίωση συνεχίστηκε καθ'όλη την διάρκεια του 19ου αιώνα. Όσο για την Γεωμετρία οι φυσιογνώμιες των Gauss, Lobachevsky, Bolyai, Riemann, Hilbert θα τις δώσουν μια τελείως διαφορετική προοπτική από εκείνη που υπήρχε την εποχή του Kant.

Μια σχετικά πρώιμη, αλλά εντελώς σαφής προαναγγελία των λογιστικών προγραμμάτων ήταν η εργασία του Dedekind¹¹, στην οποία θεμελίωνε τους πραγματικούς αριθμούς με την γνωστή μέθοδο των τομών Dedekind. Το εγχείρημα του Dedekind δεν σκόπευε μόνο στους πραγματικούς αριθμούς αλλά σε ολόκληρη την Ανάλυση. Μέχρι τότε η έννοια της κίνησης, στον Απειροστικό, αξιοποιούσε την γεωμετρική έννοια του συνεχούς φορέα μιας καμπύλης έννοια κατ'εξοχήν, διαισθητική καταγόμενη από την έννοια του συνεχούς φορέα των αρχαίων Ελλήνων, που δεν είχε ποτέ θεμελιωθεί αυστηρά. Την εποχή εκείνη μια άλλη προσπάθεια θεμελίωσης επιχειρείται από το Cantor με αποτέλεσμα όλα τα Μαθηματικά πλέον (γεωμετρία, ανάλυση, άλγεβρα) να αποκτήσουν μια ενιαία με βάση την θεωρία των συνόλων.

Αυτό που επικρατεί κατά τον 19ο αιώνα είναι μια τάση που είχε αρχίσει με τον Leibniz, και αυτό ήταν όχι μόνο η αλγεβροποίηση των Μαθηματικών αλλά και η αλγεβροποίηση της ίδιας της Σκέψης. Αυτό είχε στον νου του ο G. Boole όταν προτείνει το 1848, μια άλγεβρα των προτάσεων στις έρευνες πάνω στους νόμους της Σκέψης. Οι De Morgan, G.

¹⁰ D. J. Struik, σελ. 244-5.

¹¹ R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen (1888), αγγλική μετάφραση στις Dover, με τον τίτλο Essays on the Theory of Numbers. Περιγραφή της θεμελίωσης κατά Dedekind στο παράρτημα.

Jevons, J. Venn, όλοι βρετανοί κάνουν προσπάθειες για την αλγεβροποίηση της Λογικής, καθώς επίσης ο E. Schröder στην Γερμανία προετοιμάζουν το κλίμα για την Μαθηματική Λογική που θα προτείνουν ο G. Frege στην Γερμανία και B. Russel στην Βρετανία στο τέλος του 19ου αιώνα¹².

Η πορεία αυτή είναι που θα οδηγήσει από την Άλγεβρα στο Computing, κατά την διατύπωση του Machoney. Η αντίληψη του μετρήσιμου μεγέθους που μας έφερνε αντιμέτωπους με τον κόσμο ως *res extensa*, και θα μετρούσαμε απ'αυτόν εκείνο που μπορούσε να μετρηθεί, κατά την υπόδειξη του Γαλιλαίου προχωρεί ακόμη περισσότερο με την δημιουργία του εργαλείου της Μαθηματικής Λογικής. Αυτό καθιστά την ίδια την Γλώσσα, ή μάλλον ότι από τις δηλώσεις της φυσικής γλώσσας μπορεί να εισαχθεί σε φόρμουλες της Μαθηματικής Λογικής, υπολογιστικό μέσο. Ωστόσο οι πρώτοι εργάτες αυτής της επιστήμης είχαν στο νου του μια άλλη επιταγή. Το πώς θα απαλλαχθεί από τις *a priori* συνθετικές κρίσεις που πρότεινε ο Kant καθώς και εκείνη την "σκοτεινή" έννοια της καθαρής εποπτείας που είχε κληρονομηθεί από την προηγούμενη φιλοσοφία. Όπως και να χειριζόταν κανείς τα Μαθηματικά αυτές οι ιδέες, ως προκαταλήψεις έρχονταν να συσκοτίσουν την καθαρότητα και την εγκυρότητα που τα Μαθηματικά διεκδικούσαν για τον εαυτό τους. Οι ιδέες του ορίου, του συνεχούς φορέα μιας γραμμής, του ευκλείδειου ή μη χώρου υποψίαζαν τους Μαθηματικούς για μια άλλη πορεία που έπρεπε να ακολουθηθεί. Στην πορεία αυτή τα Μαθηματικά έπρεπε να φανούν ότι αποτελούν κρίσεις *a priori* αναλυτικές και μπορούν να προκύψουν από την Λογική. Αυτές οι σκέψεις της θεμελίωσης κυριαρχούν στο τέλος του 19ου αιώνα. Παραθέτουμε τον παρακάτω Πίνακα από την *Επιστημολογία των Μαθηματικών* του Γ. Ρουσόπουλου και τον Πίνακα της σελίδας 103 και τον Πίνακα του Grattam Guinness σελ. 104.

Επιστημολογική-ιστορική ανίχνευση της έννοιας της συνάρτησης.

Ας δούμε λίγο την γέννηση κι εξέλιξη της ιδέας της συνάρτησης κατά την πορεία θεμελίωσης των Μαθηματικών στην διάρκεια του 19^{ου} αιώνα.

Πρώιμες μορφές συναρτησιακών συσχετισμών μπορούμε να ανιχνεύσουμε και στην αρχαιότητα, αλλά ένας συνθετικός ορισμός δεν στάθηκε σε εκείνη την εποχή αναγκαίος¹³. Η επιστήμη, μέσα στο νέο εννοιολογικό πλαίσιο που κυριάρχησε, κατάφερε το ξεπέραςμα των επιστημολογικών εμποδίων, που δεν της επέτρεπαν να μελετήσει την κίνηση

¹² Mathematics of 19th Century, Birkhäuser Verlag, 1992.

¹³ Boyer C.B. (1944), Historical Stages in the Definition of Curves, *Mathem. Magazin*, t. 19, pp.294-310.

και να κάνει μαθηματική κινητική¹⁴. Από τα τέλη του 17^{ου} αιώνα αυτή η υπολογιστική αντίληψη οδήγησε στην δημιουργία του Απειροστικού Λογισμού. Διάφορες διεργασίες που θα διαρκέσουν τρεις και πλέον αιώνες θα προκαλέσουν ένα μεγάλο αριθμό αποτελεσμάτων και θα ανοιχτεί ένας ευρύς ορίζοντας μαθηματικών εμπειριών, που θα απαιτήσει όλο και πιο εκλεπτυσμένα εργαλεία, όπως η ιδέα της συνεξάρτησης κάποιων μεταβλητών και διατυπώνονται οι πρώτοι ορισμοί που αφορούν την συνάρτηση από τους Bernoulli, Euler, Cauchy κ.ά.

Για τον Bernoulli 1718:

“Η ποσότητα που συντίθεται με οποιοδήποτε τρόπο από μια μεταβλητή και σταθερές”

Για τον Euler ο οποίος παρουσιάζει για πρώτη φορά την συνάρτηση με το σύμβολο $f(x)$ δίνει το 1747 τον ορισμό:

“Μια αναλυτική έκφραση μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών συνδεδεμένων με τα σημεία της Άλγεβρας και άλλους αριθμούς ή αμετάβλητες ποσότητες”.

Τα μειονεκτήματα εκείνων των ορισμών ήταν κυρίως ότι έβλεπαν συμμετρικά εξαρτημένα κι ανεξάρτητη μεταβλητή, όπως εμφανίζονται σε μια σχέση, (π.χ εξίσωση κύκλου) και δεν μπορούσαν να αποχωρίσουν την χρονικότητα από την ιδέα της μεταβλητής, αναπόφευκτη κληρονομιά για μια έννοια που γεννήθηκε κατά την μελέτη της κίνησης.

Ο Βασάκος¹⁵ κρίνει ότι δεν πρέπει να άρεσε στον Euler αυτός ο πρώτος ορισμός κι αποπειράται ένα δεύτερο το 1775.

“Μια ποσότητα θα ονομαζόταν συνάρτηση μόνο όταν εξαρτιόταν από μια άλλη ποσότητα με ένα τέτοιο τρόπο ώστε, εάν η τελευταία ποσότητα αλλάξει η πρώτη να υφίσταται αλλαγή από μόνη της”.

Ο Cauchy προσπαθεί να ξεπεράσει την χρονικότητα της μεταβλητής και δίνει τον ορισμό:

“Όταν μεταβλητές ποσότητες συνδέονται μεταξύ τους κατά τέτοιο τρόπο ώστε όταν δίνεται η τιμή της μιας από αυτές να μπορούμε να προσδιορίσουμε τις τιμές των άλλων, τότε συνήθως εννοούμε ότι αυτές οι μεταβλητές ποσότητας μπορούν να εκφραστούν μέσω της μιας από αυτές, η οποία τότε παίρνει την ονομασία ‘ανεξάρτητη μεταβλητή’. Οι απομένουσες ποσότητες που εκφράζονται μέσω της ανεξάρτητης μεταβλητής είναι

¹⁴ Koyré A.

¹⁵ Βασάκος Θωμάς, *Η έννοια της Συνάρτησης στους μαθητές του Λυκείου και Ενέργειες κατανόησης-εμπόδια που σχετίζονται με τον ορισμό της συνάρτησης*, preprint.

εκείνες που μπορούμε να ονομάσουμε ‘συναρτήσεις’ αυτής της μεταβλητής”.

Πρέπει εδώ να παρατηρήσουμε τον συνειρμό του $f(x)$ (function) με την ιδέα της λειτουργίας, διαδικασίας έννοιες δυναμικές σε αντίθεση με την μετάφραση συνάρτηση.

Θα μεσολαβήσουν οι Θεωρίες του Fourier για την ανάλυση σε δυναμοσειρά μιας τυχαίας κι οσοδήποτε πολύπλοκης συνάρτησης (ανάλυση σε τριγωνομετρικές σειρές με κανονικότητα) και τελικά ο Dirichlet στην ομώνυμη συνάρτηση ορισμένη στο $[0,1]$ και τέτοια ώστε να είναι 1 σε κάθε x ρητό κι -1 σε κάθε x άρρητο. Δηλαδή αφού έχει προηγηθεί μια σειρά πολύ πολύπλοκων ή πολύ ειδικών εργαλείων που οι μαθηματικοί κατασκεύασαν στην θεωρητική πρακτική τους τελικά ο Dirichlet 1837 θα καταλήξει σε μια πιο γενική διατύπωση:

“Η μεταβλητή y είναι συνάρτηση της μεταβλητής x η οποία ορίζεται στο διάστημα $a < x < b$, αν σε κάθε τιμή της μεταβλητής x από αυτό το διάστημα αντιστοιχεί μια μόνη τιμή της μεταβλητής y , ανεξάρτητα από τη μορφή της αντιστοιχίας”¹⁶.

Κατά αρχή, στον ορισμό αυτό εμφανίζεται ξεκάθαρα το **μονοσήμαντο** της τιμής y . Ακόμη, αν και διατηρείται ο όρος μεταβλητή ενέχει πλέον θέση νοητής επιλογής ενός στοιχείου του συνόλου των πραγματικών αριθμών $a < x < b$ και είναι πλέον ανεξάρτητη από την εμμονή σε μια εποπτική είτε χρονική διάσταση. Εκείνο ωστόσο που αποτελεί το μεγάλο βήμα σε αυτό το ορισμό, σε σχέση με τους παλιότερους, είναι η επιλογή από όλες τις σχέσεις εκείνων που εμπεριέχουν τον συσχετισμό της μορφής πολλά – ένα, προσδίδοντας στην έννοια κάτι πιο ισχυρό από τον απλό συσχετισμό: Η συνάρτηση, στην μαθηματική πρακτική, αποτελεί μια ειδική σχέση που προσφέρεται ιδιαίτερα στους υπολογισμούς. Στην ουσία πρόκειται για την **εκτίμηση** ενός μεγέθους ψ η οποία όμως **ανάγεται** στην εκτίμηση ενός άλλου μεγέθους χ μέσω μιας σχέσης που τα συνδέει. Το ψ έρχεται να αποτελέσει τον στόχο, που επιδιώκεται να γνωρίζουμε την τιμή του, σε ένα πλαίσιο διαχείρισης, την στιγμή που το χ μας είναι το άμεσα προσπελάσιμο. Μια μέτρηση ενός μεγέθους έχει πάντα μία τιμή και εδώ ίσως οφείλεται η προτίμηση της κοινότητας να θεωρεί ως συναρτήσεις σχέσεις μονότιμες, οι οποίες σε ένα χ αντιστοιχούν ένα μόνο ψ . Η δυνατότητα πολλές μετρήσεις να έχουν το ίδιο αποτέλεσμα οδηγεί με φυσικό τρόπο στην αποδοχή αυτού που αποκαλούμε σχέση πολλά-ένα, για ορισμένες συναρτήσεις. Με αυτή την οπτική θα λέγαμε ότι η συνάρτηση

¹⁶ Davis & Herch, σελ. 257, Η Μαθηματική Εμπειρία, εκδόσεις Τροχαλία, 1981, Menheim, σελ. 44

προσφέρεται ως διαμεσολαβητικό εργαλείο, δηλαδή ως **διαμεσολαβημένη εκτίμηση** ή ακόμη ως περιγραφή.

Ο Fraenkel¹⁷ εκφράζει χαρακτηριστικά το συγκεκριμένο ζήτημα ως εξής: “Η συνάρτηση $T = f(t)$ που χαρακτηρίζει το θερμογράφο είναι μονότιμη, για κάθε στιγμή t αντιστοιχεί μια κάποια θερμοκρασία. Αν, οποτεδήποτε, ρωτήσουμε σε ποια χρονική τιμή είχαμε μια συγκεκριμένη θερμοκρασία η απάντηση δίδεται από μια συνάρτηση - Η αντίστροφη της συνάρτησης $T = f(t)$ είναι εν γένει μη μονότιμη καθόσον διαφορετικές χρονικές στιγμές έχουν διαφορετική μπορεί να έχουν την αυτή θερμοκρασία. Η ιδέα του μονότιμου αλλά μη αναπόφευκτα αντιστρεπτού είναι χρήσιμη στην ανάλυση”.

Όσο προχωρεί η προσπάθειες για Θεμελίωση κατά τον 19^ο αιώνα τόσο και προκύπτουν νέες ιδέες για τον ορισμό της συνάρτησης. Η πορεία απάλειψης της χρονικότητας της μεταβλητής και έτσι στον Dedekind συναντάμαι.

“Με την απεικόνιση ενός συστήματος S ένας κανόνας γίνεται αντιληπτός όταν με αυτόν σε κάθε στοιχείο s του S αντιστοιχίζεται ένα μοναδικό αντικείμενο το οποίο ονομάζεται εικόνα του s και συμβολίζεται $f(s)$. Θα λέμε επίσης ότι το $f(s)$ αντιστοιχεί στο στοιχείο s και ότι το $f(s)$ δημιουργείται από την απεικόνιση f μέσω του στοιχείου s . Αυτό το s μετασχηματίζεται από την απεικόνιση f σε $f(s)$ ”.

Θα ακολουθήσουν τα παραδείγματα συναρτήσεων του είδους της καμπύλης του Peano (συνεχής συνάρτησης του $[0,1]$ που γεμίζει το τετράγωνο ή του Weierstrass που είναι συνεχής συνάρτηση αλλά πουθενά παραγωγίσιμη (βλέπε παράρτημα στο τέλος).

Τέλος, ο σύγχρονος ορισμός της συνάρτησης διαμορφώνεται μετά τον Hausdorff (1914), ο οποίος δίνει τον ορισμό του διατεταγμένου ζεύγους. Κατά συνέπεια, μπορούμε να πούμε εν συντομία τα εξής: Η συνάρτηση ως τυπική μαθηματική έννοια αποτελεί μια νοητική κατασκευή που ολοκληρώθηκε σχετικώς πρόσφατα μέσα στη επιστήμη. Πρόκειται για μια **σύννοψη** και **ενοποίηση** πολλών εν πρώτοις διαφορετικών εμπειριών και νοητικών εργαλείων, που μαθηματικοί και επιστήμονες εν γένει χρησιμοποίησαν για να λύσουν προβλήματα και να συγκροτήσουν θεωρίες. Εφόσον αποτελεί το επιστέγασμα μιας μεγάλης πορείας πρόκειται για μια

¹⁷ A. Fraenkel, Abstract Set Theory, σελ 23, 1963, Springer Verlag.

πολύ αφηρημένη έννοια που κρύβει της ιδέες που την γέννησαν και αυτό αποτελεί στοιχείο δυσκολίας για τους μαθητές¹⁸.

¹⁸ Dubinky E. & Harel G. (1992), The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy, *Mathematical Association of America (MMA)* και ιδιαίτερα μέσα σε αυτό το Sierpinska A: (1992), On understanding the notion of function.

ΜΕΡΟΣ II

Η ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΑ ΤΟΥ 20ου ΑΙΩΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Αναζήτηση του πλαισίου δικαιολόγησης

4.1 Από τον Frege

Η επίδραση του Kant στην φιλοσοφία και ιδιαίτερα των Μαθηματικών του 19^{ου} αιώνα υπήρξε αποφασιστική. Το φιλοσοφικό του σύστημα στηρίχθηκε και αντιπροσώπευε την θεμελίωση της επιστήμης του καιρού του. Ωστόσο, τα αποτελέσματα της Φυσικής και των Μαθηματικών ήρθαν να αλλάξουν εν μέρει αυτή την άποψη. Οι *a priori* εποπτείες του χώρου και του χρόνου οι οποίες έχουν νόημα στο πλαίσιο της νευτώνειας Φυσικής αποκτούν εντελώς νέο περιεχόμενο στο πλαίσιο της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας. Στο επίπεδο της κβαντομηχανικής θεωρίας αναδεικνύεται ένας πιθανοκρατικός χαρακτήρας των φυσικών νόμων που είναι αντίθετος στην επίσης *a priori* καντιανή κατηγορία της αιτιότητας.

Στα Μαθηματικά, οι εξελίξεις επιφυλάσσουν ανατροπές στο καντιανό οικοδόμημα. Η Μαθηματική Ανάλυση τείνει να ξεπεράσει τις συνθήκες που την ανέδειξαν ως μελέτη της κίνησης μέσα στο χώρο και τον χρόνο και να γίνει ένας καθαρά αφηρημένος κλάδος. Η ιδέες των Cauchy, Dirichlet, Bolzano, Weierstrass, Dedekind, Frege, Peano, Cantor, οδηγούν στην κατανόηση των μαθηματικών ιδεών ως λογικά συστήματα, χωρίς αναφορά σε συγκεκριμένες εποπτείες, π.χ της μεταβλητής μιας συνάρτησης με χρονικές συμπαραδηλώσεις. Ακόμη, η αξιωματική θεμελίωση της αριθμητικής από τον Peano, κι η απόλυτα λογική θεμελίωση από τον Frege. Στη Γεωμετρία έχουμε την εμφάνιση των μη ευκλείδιων Γεωμετριών. Ο Hilbert προχωρεί στην αξιωματικοποίηση της Γεωμετρίας κατά τέτοιο τρόπο ώστε τα στοιχεία του γεωμετρικού χώρου να χάσουν την αυτόνομη συγκρότησή τους και να εξαρτώνται πλέον στις σχέσεις μεταξύ τους.

Όπως περιγράψαμε στα προηγούμενα Κεφάλαια, από τον Descartes είχε αρχίσει μια αναζήτηση επιστημολογικών θεμελίων. Με τον Frege (1848-1945), παρατηρούμε μια επιστροφή σε ιδέες του Αριστοτέλη, όπου ως απαρχή της φιλοσοφίας ορίζεται η Λογική. Το Λογικό πρόβλημα προηγείται του επιστημολογικού. Ο Frege επιδόθηκε σε μια βαθύτερη ανάλυση της Λογικής, στην παράδοση όπως έλεγε του Kant. Ωστόσο, τόνισε ακόμη περισσότερο την ιδέα των κρίσεων του Kant και δεν έλαβε ως δομικό στοιχείο καθόλου την έννοια αλλά την πρόταση. Το νόημα ενός όρου για τον Frege δεν εξαρτάται από τον εκάστοτε εξατομικευμένο νου. Η στροφή αυτή ανέδειξε τα σημασιολογικά προβλήματα (θα λέγαμε προβλήματα νοήματος, δηλαδή τι εννοούμε όταν λέμε κάτι) που αφορούν τη

μελέτη των νόμων της σκέψης, όχι ως ατομικής συνείδησης, αλλά ως αντικείμενο δημόσιας επικοινωνιακής διυποκειμενικής λειτουργίας (πλαίσιο δικαιολόγησης). Το νόημα πλέον μιας έννοιας εκφράζεται μέσα στη πρόταση και τα νοήματα των λέξεων που την αποτελούν κι αφορά σε ένα σύνολο σκέψεων και ιδεών που είναι μεταβιβάσιμα από γενιά σε γενιά. Αυτή η ανεξαρτησία των νοημάτων από τις ατομικές ιδιαιτερότητες, που οδηγεί σε μια **αντικειμενική σημασιολογία**, είναι πρωταρχικό ζήτημα στη φιλοσοφία του.

Η **σημασία** (το νόημα) ενός όρου έχει αντικειμενικό χαρακτήρα και συνδέεται με τον τρόπο παρουσίασης σε μια πρόταση, είτε αυτός ο τρόπος περιέχεται στο αντίστοιχο σήμα - όνομα, είτε αυτός καθορίζεται από την αντίστοιχη περιγραφή. Εκτός από την σημασία διακρίνουμε και μια άλλη παράμετρο, συνδεδεμένη με την έννοια που δεν περιέχεται στην πρόταση που είναι η **αναφορά** της έννοιας. Η σημασιολογία με τους όρους Αυγερινός και Αποσπερίτης, έχουν την ίδια αναφορά, τον πλανήτη Αφροδίτη. Το πρώτο άστρο όμως βγαίνει το πρωί ενώ το άλλο βράδυ. Επίσης, υπάρχουν σημασίες δίχως αναφορές, όπως ο μυθολογικός μονοκέρατος. Το νοηματικό περιεχόμενο, κατά τον Frege, της εκάστοτε πρότασης και του όρου πρέπει να επιδέχεται μια συγκεκριμένη ανάλυση, μέσα στην κοινότητα που χρησιμοποιεί την γλώσσα όπου αυτά λέγονται. Αξίζει εδώ να παρατηρήσουμε ότι ύστερα από αυτή την παραδοχή, έχουμε τη μετατόπιση της φιλοσοφίας προς την μετέπειτα ονομαζόμενη φιλοσοφία της γλώσσας.

Μια επί μέρους παράδοση του αγγλικού εμπειρισμού είναι εκείνη του J. S. Mill¹, ο οποίος υποστηρίζει το επαγωγικό των λογικών και των μαθηματικών αρχών και τις βλέπει ως καταστάλαγμα ορθολογικής συμπεριφοράς, ως συνθήματα ιστορικά αποκτημένα² (εμπειριστική γνωσιολογία). Η πρόταση του Mill συνίσταται στην ευλογοφανή διαίσθηση ότι η εμπειρία μας, για τον φυσικό κόσμο, είναι αρκετά πλούσια, για να στηρίζει και τα μαθηματικά (αριθμητική, γεωμετρία). Για τον Mill, δεν υπάρχει άλλη πραγματικότητα από αυτή που συγκροτούν τα υλικά αντικείμενα και ο φυσικός κόσμος. Στην εκδοχή αυτή, τα μαθηματικά αποτελούν την πιο γενική θεωρία των υλικών αντικειμένων και του κόσμου μας³. Σε αυτή την θέση, ο Frege ασκεί μια έντονη κριτική ακολουθώντας ένα άλλο ρεύμα φιλοσόφων και μαθηματικών του 19^ο αιώνα που είναι η αδιάλλακτη επιμονή ότι τα μαθηματικά πρέπει να βασίζονται μόνο στη λογική και ότι όλα όσα παραπέμπουν στη διαίσθηση πρέπει να αποκλεισθούν αυστηρά από αυτά⁴.

Με το Frege αρχίζει μια πολεμική προς τον **Ψυχολογισμό** και τις μεθόδους του (τάση που επικρατούσε στην εποχή του και που προσπαθούσε να αναγάγει τις Λογικές δομές του νου σε ψυχολογικές παραμέτρους). Ο Ψυχολογισμός αναζητά το

¹ J. S. Mill, A system of Logic ratiocinative and inductive, London, 1875. Οι απόψεις του Mill έχουν ανθρωπολογικό υπόβαθρο και πρέπει να θυμίσουμε ότι αναπτύσσονται στην Αγγλία (1870) εποχή που κυριαρχούν οι γενετικές ανθρωπολογικές Θεωρίες με εξέχουσα την Θεωρία του Darwin.

² Sir A. J. Ayer, Γλώσσα, Αλήθεια και Λογική, σελ 74.

³ Γ. Ρουσόπουλου, επιστημολογία των Μαθ/κών, σελ. 140, εκδόσεις Gutenberg.

⁴ Οι συζητήσεις αυτές που αναπτύχθηκαν με βάση το έργο του Frege για τα "Θεμέλια της Αριθμητικής" αποτελούν την εστία που συνδέει την προβληματική του λογισμού με εκείνη της Φαινομενολογίας όσο και της σύγχρονης ψυχολογίας μαθηματικών και θα αναφερθούμε εκτενέστερα σε άλλο Κεφάλαιο.

νόημα των λέξεων σε όρους εσωτερικών διαδικασιών και προσπαθεί να εξηγήσει τους τύπους σκέψης και λόγου με όρους της εμπειρικής φύσης του ανθρώπινου νου. Κατά Frege, η τάση αυτή συγχέει το ενέργημα του 'κρίνειν' με το περιεχόμενο της κρίσης, εξαρτώντας έτσι την αντικειμενικότητα και διυποκειμενικότητα του δεύτερου από την υποκειμενικότητα και σχετικότητα του πρώτου. Ο ψυχολογισμός αντλεί την καταγωγή του στον αγγλικό εμπειρισμό και συγχέει το περιεχόμενο της κρίσης, το *εννόημα* με τις ιδέες του Locke που παράγονται από το υποκείμενο με τη βοήθεια γλωσσικών και νοητικών μηχανισμών. Το περιεχόμενο της κρίσης είναι μια αφηρημένη οντότητα η οποία υπάρχει ανεξάρτητα από την κρίση μας. Η υποκειμενική εκδοχή είναι κάτι που υπακούει στους νόμους του συνειρμού και ανήκει στις εσωτερικές αναπαραστάσεις. Η λογική του νοήματος αναδεικνύεται στις εξωτερικές αναπαραστάσεις, όπου η αλήθεια τους υπάρχει ανεξάρτητα του υποκειμένου που την εκφέρει. (Με την γλώσσα του Piaget, ο ψυχολογισμός ανάγει το ατομικό γεγονός σε κανονιστική αρχή⁵). Έτσι, ο Frege κάνει διάκριση μεταξύ, σκέπτεσθαι και σκέψης ενεργήματος κι εκείνου που αφορά το ενέργημα.

Ο Dedekind στην διάλεξή του το 1872⁶ "*Συνέχεια και οι ασύμμετροι αριθμοί*", επιδιώκει να αποδείξει, ότι ο απειροστικός λογισμός μπορεί να γίνει καθαρά αριθμητικά κι εντελώς ανεξάρτητα από οποιεσδήποτε γεωμετρικές αποδείξεις. Στην εργασία του, το 1888, έκανε ένα βήμα παρά πέρα στην προσπάθεια του για μια *καθαρή λογική δομή της επιστήμης των αριθμών*. Ο Frege⁷ σε αυτή την κατεύθυνση, πρότεινε ένα πιο λεπτομερή τρόπο τυποποιώντας κάθε ορισμό και κάθε απόδειξη με ένα στον ακριβή συμβολισμό του την δυνατότητα του οποίου έδειξε στην "*Έννοιογραφία*"⁸.

Οι συναρτήσεις κι οι έννοιες, σύμφωνα με τον Frege, λογικά προηγούνται των συγκεκριμένων αντικειμένων. Οι έννοιες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την παραγωγή νέων αντικειμένων, κάθε μια από τις οποίες προκύπτει, ως συλλογή όλων των αντικειμένων που ήδη υπάρχουν και που ανήκουν στην έννοια. Αυτή η αντίληψη έχει κάτι από την ιδέα του Πλάτωνα όπου το συγκεκριμένο μετέχει μιας γενικής ιδέας, η οποία και προηγείται. Η πίστη του Frege, στη λογική προτεραιότητα των εννοιών και των συναρτήσεων, είχε ως αποτέλεσμα να εισάγει τον όρο *λογικά αντικείμενα*, για όλες εκείνες τις οντότητες που προκύπτουν με τον παραπάνω τρόπο⁹.

Οι προτάσεις ενέχουν αξία συνάρτησης. Έτσι εάν $\varphi(x)$ είναι μια προτασιακή συνάρτηση με άτομα (μεταβλητές), θα σημαίνει ότι για την x , (και όλα τα αντικείμενα που μπορούν να αντικαταστήσουν την x) παράγει πρόταση με αληθοτιμές A ή Ψ . Τα αντικείμενα αυτά τα λέμε ότι ανήκουν στην πρόταση $\varphi(x)$. Σε μια τέτοια περίπτωση, η αναφορά της προκύπτουσας πρότασης είναι κάποια από τις δύο αληθοτιμές A, Ψ , οι οποίες, όπως ξέρουμε, αποτελούν το πεδίο τιμών της έννοιας

⁵ J. Piaget, Σοφία και Ψευδαισθήσεις της Φιλοσοφίας, μετάφραση Κ. Παπαγιώργη, Εκδόσεις Γνώση 1987 και L. Smith, What Piaget Learned from Frege, Developmental Review 19, 133-153 (1999).

⁶ βλέπε Παράρτημα του Γ. Ρουσόπουλου, Επιστημολογία των Μαθηματικών (PEM).

⁷ Τα Θεμέλια της Αριθμητικής, μετάφραση Γ. Ρουσόπουλου, εκδ. Νεφέλη.

⁸ Στο Παράρτημα (PEM).

⁹ Δ. Αναπολιτάνος, Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών.

$\varphi(x)$, όταν αυτή θεωρηθεί ως συνάρτηση. Τα αντικείμενα που, αντικαθιστώντας την x , παράγουν προτάσεις, των οποίων η σημασία είναι η αληθοτιμή A , λέμε ότι ανήκουν στην έννοια $\varphi(x)$, δηλαδή στο πλάτος της έννοιας. Εντελώς αντίστοιχη, αν και τεχνικά πιο σύνθετη, είναι η περίπτωση των τύπων που διαθέτουν περισσότερες από μια ελεύθερες μεταβλητές¹⁰. Εκείνο που έκανε το συμβολικό σύστημα, που πρότεινε για την Λογική ο Frege, καινοτομία ήταν η εισαγωγή των ποσοδεικτών του *δια κάθε* και του *υπάρχει* ως λειτουργικούς τελεστές που δρούσαν στο εωτερικό της πρότασης. Η μέχρι τότε έστω και συμβολική λογική που είχε προταθεί, Π.χ από τον G. Boole (1848) θεωρούσε τις προτάσεις ως πακέτα αληθοτιμών χωρίς εσωτερικές μεταβλητές. Η εμβέλεια μιας τέτοιας Λογικής ήταν περιορισμένη. Το σύστημα του Frege κι αργότερα το πλέον ευέλικτο σύστημα των Russell και Whitehead ήταν ένα συμβολικό πλαίσιο πολύ πλούσιο που μπορούσε να αξιοποιηθεί τόσο από τα Μαθηματικά όσο κι από την Φιλοσοφία και την Γλωσσολογία.

Ας δώσουμε ένα παράδειγμα της πρότασης- συνάρτησης. Έστω η μαθηματική συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - 2x$. Αυτή δεν αποτελεί έννοια γιατί δεν εκφέρεται σε μορφή πρότασης την οποία μπορούμε να αποτιμήσουμε ως αληθή ή ψευδή. Για να αντιληφθούμε τι είναι μια έννοια θα πρέπει να γράψουμε μια εξίσωση, π.χ. $3x^2 - 2x = 7x - 6$ η οποία ανάλογα με την εκάστοτε αντικατάσταση της μεταβλητής x θα καθίσταται πρόταση που ισχυρίζεται ότι ισχύει η ισότητα των δυο μελών. Π.χ. η αντικατάσταση $x = 2$ δημιουργεί την πρόταση $3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 7 \cdot 2 - 6$, ήτοι $8 = 8$ που είναι πάντα αληθής. Οι τιμές ή η τιμή της $x = 2$ για την οποία η Έννοια (πρόταση, συνάρτηση με μια ευρεία σημασία) παίρνει την τιμή A , και λέμε ότι ανήκει στην εν λόγω Έννοια. Το 2 και το 1 λοιπόν, ως λύσεις της παραπάνω εξίσωσης, ανήκουν στην Έννοια. Έτσι μέσω των Εννοιών ορίζονται τα αντικείμενα ως πληρώσεις συναρτήσεων- προτάσεων.

Οι αριθμοί είναι τέτοια λογικά αντικείμενα. Ο ορισμός τους προϋποθέτει κάποια απόδειξη της ύπαρξής τους. Δηλαδή, θα πρέπει να διασφαλισθεί εκ των προτέρων ότι ο ορισμός, που επιχειρείται, δεν στερείται νοήματος. Έτσι, αφού το κατηγορήμα προϋποτίθεται του αντικειμένου, το μηδέν ορίστηκε ως εξής¹¹:

0 είναι ο αριθμός που ταιριάζει στην έννοια: *δεν ταυτίζεται με τον εαυτό του*.
ενώ για το 1,

1 είναι ο αριθμός που ταιριάζει στην έννοια: *ταυτίζεται με το 0*.

2 είναι ο αριθμός που ταιριάζει στην έννοια: *ταυτίζεται με το 0 ή με το 1...*

Εξάλλου, για να είναι οι αριθμοί κάποιου είδους αντικείμενα πρέπει να μπορούμε να διατυπώσουμε μια πρόταση η οποία να εκφράζει ότι δυο αριθμοί είναι ταυτόσημοι. Η γενική μορφή αυτής της πρότασης είναι $\alpha = \beta$ όπου 'α' και 'β' είναι ονόματα των αντικειμένων. Δηλαδή, να εξασφαλίσουμε συνθήκες ταυτότητας για όλα τα μέλη αυτής της τάξης:

Ο αριθμός που ανήκει στην έννοια F είναι ταυτόσημος μ' αυτόν που ανήκει στην έννοια G.

¹⁰ Στο ίδιο σελ 227.

¹¹ Τα Θεμέλια της Αριθμητικής, σελ 154.

Παραπέμποντας έτσι στην ταύτιση μέσω του αυτού πλάτους των εννοιών.

4.2 Στον Russell

Ο Frege είχε δει καλύτερα από οποιονδήποτε προηγούμενό του, τι ήταν αυτό που συνεπάγεται την αναγωγιμότητα της ολότητας της αριθμητικής στη Λογική. Αλλά παρόλο έναν αξιοθαύμαστο συμβολισμό που είχε επινοήσει για αυτό το σκοπό, η προσπάθειά του για μια παραγωγή της αριθμητικής από την Λογική, κατέστη τελικά ανεπιτυχής. Ο B. Russell του ανακοίνωσε την ανακάλυψή του, το γνωστό ως *παράδοξο του Russell*¹² (για τον τρόπο που ο Frege συγκροτούσε τις προτάσεις) μια ανακάλυψη που απέδειξε ότι η πολύ προσεκτικά δομημένη λογική βάση του Frege δεν ήταν επαρκής να αντέξει το βάρος της αριθμητικής. Περαιτέρω, οι Russell και Whitehead στο *Principia Mathematica* (1905) ανανέωσαν την προσπάθεια του Frege, προτείνοντας έναντι του παραδόξου, τη λεγόμενη *θεωρία των τύπων*¹³ την οποία δεν θα εξηγήσουμε εδώ, αλλά μπορούμε ισοδύναμα να πούμε ότι αυτό αφορά σε μια Θεωρία Συνόλων οροθετημένη σε αξιώματα μιας και η αντινομία μπορούμε να τη περιγράψουμε ως την λογική αδυναμία του να θεωρήσω την έννοια *το σύνολο όλων των συνόλων*. Βασική διαφορά, ανάμεσα τον Frege και τον Russell, είναι ότι ο πρώτος αποδίδει στους ορισμούς ένα ρόλο οντολογικής αποκάλυψης λογικών αντικειμένων, με μια πλατωνική πρόθεση, ενώ ο δεύτερος τους βλέπει ως εργαλεία χωρίς οντολογική βαρύτητα¹⁴.

Το σύστημα του *Principia Mathematica* αποτελεί την οριστική ενσάρκωση της λογιστικής αντίληψης των μαθηματικών - όχι, φυσικά, ως σύστημα μαθηματικών για κοινή χρήση από τους μαθηματικούς, αλλά ως μια εξιδανικευμένη σύνθεση των αυστηρών μαθηματικών (τα Μαθηματικά ως οικοδόμημα προτάσεων), η οποία εφοδιάζει αποδεδειγμένες γενικές αρχές, τις οποίες οι συνηθισμένες μαθηματικές έρευνες μπορούν να αποφύγουν. Δηλαδή, σε αυτή την προοπτική τα Μαθηματικά εμφανίζονται, όπως τα είχε δει ο Thomae, ως ένας μηχανισμός παραγωγής ταυτολογιών.

Ωστόσο, το λογιστικό πρόγραμμα δεν είναι δίχως μειονεκτήματα. Η θεμελίωση των Μαθηματικών πάνω στην Λογική πλήρως, αποτελεί ένα ακατόρθωτο στόχο για να πραγματοποιηθεί, όπως αναφέρουν οι Davis - Herch¹⁵ και ο Ernest¹⁶, αφού στο *Principia Mathematica*, στη σελίδα 150 αποδεικνύεται μόλις η βασική αυτονόητη αρχή ότι $1 + 1 = 2$. Πόσο μάλλον, αν θα απαιτούσαμε με τον ίδιο υπερσχολαστικό τρόπο να αποδείξουμε όλα τα μαθηματικά θεωρήματα που υπήρξαν

¹² Έστω ότι έχουμε το σύνολο των στοιχείων που πληρούν μια πρόταση ϕ και αυτό ορίζεται ως $\{x \in A \mid \phi(x)\}$. Η αντινομία του Russell έγκειται στον ότι ως ϕ δεν μπορώ να νοήσω την πρόταση $x \notin x$. Αν δεν υπήρχε αυτός ο περιορισμός τότε το $R = \{x \mid x \notin x\}$ θα ήταν σύνολο. Το R αποτελείται από τα σύνολα που δεν ανήκουν στον εαυτό τους. Μα τότε η πρόταση $R \in R$ είναι αληθής και ψευδής; Αν $R \in R$ τότε $R \notin R$ και αν $R \notin R$ τότε $R \in R$.

¹³ Βλέπε Δ. Αναπολιτάνο

¹⁴ Στο ίδιο

¹⁵ P. Davis - R. Herch, Η Μαθηματική Εμπειρία, εκδόσεις Τροχαλία, 1992.

¹⁶ P. Ernest, The Philosophy of Mathematics Education, Fulmer Press, 1991.

και θα υπάρξουν στο μέλλον¹⁷. Εκείνο βέβαια που έδειξαν οι Frege και Russell ήταν ότι είναι δυνατό, αν κι ομολογουμένως πολύ δύσκολο, να αναλύσουμε την αριθμητική σε καθαρά λογικούς όρους κι έτσι να την εκθέσουμε ως ένα προϊόν της αφηρημένης σκέψης, που είναι εξ'ολοκλήρου ανεξάρτητο από τη διαίσθηση. Ήταν παραπέρα εύλογο ότι αφού η αριθμητική έχει αναλυθεί κατά αυτόν τον τρόπο, πολλοί άλλοι κλάδοι των καθαρών μαθηματικών μπορούν να αντιμετωπισθούν όμοια, αφού έχουν ήδη αναχθεί σε αριθμητική για καθ'αυτό μαθηματικούς σκοπούς.

Λογική και αντικειμενική πραγματικότητα: Έχοντας ερμηνεύσει λογιστικά τα Μαθηματικά, γίνονται ένα οικοδόμημα προτάσεων τακτοποιημένο, ως παραγωγικό σύστημα βασισμένο πάνω σε ένα μικρό αριθμό αξιωμάτων, το οποίο εκφράζει απλές αλήθειες της Λογικής. Είναι ένα τυπικό σύστημα, με την έννοια ότι είναι δομημένο συντακτικά με τη χρήση ενός μικρού αριθμού κανόνων, όπως είναι το Modus Ponens¹⁸. Βέβαια, οι πρωταρχικές ιδέες και οι πρωταρχικές προτάσεις, του Principia, δεν είναι αυθαίρετα αξιώματα, αλλά έχουν επιλεγεί με την πίστη ότι ανταποκρίνονται στις αντικειμενικές λογικές αρχές.

Οι λογικές αρχές, που έχουν θεωρηθεί ως πρωτογενείς, πρέπει κατ'αυτή την έννοια να είναι απόλυτες και πρέπει να αντιστοιχούν στη μορφή και τη δομή του γνωστού κόσμου. Το Principia Mathematica, γίνεται με αυτό τον τρόπο, κάτι πολύ περισσότερο από ένα αυθαίρετο τυπικό σύστημα. Είναι το τυπικό σύστημα, που αναδεικνύει, σε μία συμβολική μορφή τη λογική δομή του αληθινού κόσμου και μέσω μιας μεθόδου παραγωγής συμπερασμάτων παρουσιάζει μία a priori θεωρία του κόσμου. Στο Principia, αναπτύσσεται μια άποψη που θα συνοψίζαμε ως εξής:

Κάθε τυπικό σύστημα πρέπει να εισάγεται με την απαίτηση των:

(α) κατάλληλων αξιωμάτων, δηλαδή των γενικών αξιωμάτων του λογισμού που χρησιμοποιείται και ενδεχομένως ειδικών αξιωμάτων για τη συγκεκριμένη θεωρία που εξετάζεται,

(β) των κανόνων της διαδικασίας που είναι διαθέσιμοι στην παραγωγή των καινούργιων τύπων και

(γ) ένα πεδίο ορισμού των μεταβλητών (ατόμων).

Στο Principia τα λογικά αξιώματα είναι ξεκάθαρα καθορισμένα και δεν υπάρχουν καθόλου ειδικά αξιώματα (που να αφορούν σε ειδικές μαθηματικές δομές), καθόσον όλες οι μαθηματικές οντότητες μπορούν αν χρειαστεί να εκφραστούν με όρους των λογικών οντοτήτων, μέσω ρητά διατυπωμένων ορισμών. Οι κανόνες παραγωγής δεν έχουν διασαφηνιστεί πλήρως, αλλά η παράλειψη αυτή μπορεί να ξεπεραστεί χωρίς δυσκολία. Έτσι, μόνο το πεδίο που παραμένει εντελώς απροσδιόριστο είναι εκείνο του ορισμού των μεταβλητών. Αυτό το πεδίο σε μια τυπική θεωρία θα είναι μη λογικές πρωταρχικές έννοιες, ικανές να καθορίσουν το νέο σε κάθε θεωρία που δημιουργείται, όπως για παράδειγμα η τάξη N_0 των

¹⁷ Δημοσιεύονται κάθε χρόνο 200.000 Θεωρήματα στο P. Davis - R. Hersh.

¹⁸ Modus Ponens ο κανόνας της λογικής που λέει ότι από τη πρόταση Φ και τη πρόταση $\Phi \rightarrow \Psi$ παράγεται η Ψ .

φυσικών αριθμών στο σύστημα αριθμητικής του Peano¹⁹ ή η τάξη των σημείων στο σύστημα της ευκλείδειας Γεωμετρίας του Hilbert.

Στο σύστημα του Russell, εάν $\varphi(x)$ είναι μία προτασιακή συνάρτηση με (άτομα) μεταβλητές, η πρόταση $\forall (x)\varphi(x)$ μπορεί μονάχα να σημαίνει *κάθε άτομο που έχει την ιδιότητα φ* και $\exists (x)\varphi(x)$ μπορεί μονάχα να σημαίνει ότι *υπάρχει κάποια μεταβλητή (άτομο) στο καθολικό πεδίο ορισμού που έχει την ιδιότητα φ* . Τώρα παρόλο που το Principia Mathematica είναι ένα σύστημα Λογικής εκφρασμένο σε μία συμβολική γλώσσα, δεν υπάρχει καμία ξεκάθαρη ένδειξη για το τι θα είναι οι μεταβλητές (άτομα). Στις ανεπίσημες περιγραφές, ο Russell δίνει παραδείγματα στα οποία individuals (άτομα, μεταβλητές, χαρακτήρες) θεωρούνται άνδρες, μυθικά πρόσωπα και τα συναφή. Με μια τέτοια εκδοχή τα *άτομα* μπορεί να είναι *έσχατες οντότητες* στις οποίες ο υπάρχων κόσμος καταλήγει να επιμερισθεί, ύστερα από μια φιλοσοφική ανάλυση. Οδηγούμαστε σε αναλύσεις του *κόσμου*, όπως αυτόν που οραματίστηκε ο Wittgenstein, όταν μίλησε για ένα κόσμο από ατομικά γεγονότα, τα οποία εμφανίζονται ως συνδυασμοί *οντοτήτων*²⁰.

4. 3 Ο λογικός εμπειρισμός

Ο Λογικός εμπειρισμός είχε δυο κυρίως ζώνες ανάπτυξης. Από τη μια αντιλήψεις που αναπτύχθηκαν στην ηπειρωτική Ευρώπη στο τέλος του 19^{ου} αιώνα κι αρχές του 20ου κι αποσκοπούσαν σε μια προσπάθεια αντιμεταφυσικής κατανόησης της σύγχρονης επιστήμης. Αυτό ήταν το πνεύμα των θέσεων τόσο του Mach όσο και του Poincaré. Την ίδια εποχή, στην Βιέννη υπήρχε μια ανάπτυξη της φιλοσοφίας της επιστήμης με αντιλήψεις συγγενείς του αγγλικού εμπειρισμού και μια ομάδα επιστημόνων, φυσικοί, μαθηματικοί, κοινωνιολόγοι, οικονομολόγοι, συγκρότησε ένα κύκλο που σκοπό είχε να διαμορφώσει της φιλοσοφικές αρχές που θα ταίριαζαν στο σύγχρονο επιστημονικό περιβάλλον, σε μια εποχή που η φυσική και τα μαθηματικά άλλαζαν κυριολεκτικά την εικόνα του κόσμου. Εξάλλου, αποτελέσματα εκείνης της εποχής είναι η θεωρία της σχετικότητας αλλά κι η κβαντομηχανική θεωρία. Ένας θεωρητικός φυσικός (μαθητής του Max Planck, είχε αποκτήσει φήμη για την ερμηνεία που είχε δώσει στη θεωρία της σχετικότητας) ο Moritz Schlick²¹ έτυχε να ηγηθεί αυτού του φιλοσοφικού κύκλου της Βιέννης με τον οποίο συνδέθηκαν ονόματα όπως του F. Frank, H. Hahn, K. Gödel, R. Carnap κι άλλων. Οι προηγούμενοι, εκτός της επίδρασης του αγγλικού εμπειρισμού που δέχτηκαν είχαν επηρεασθεί κι από τους Leibniz, Feuerbach και Frege. Σε επαφή με τον Κύκλο της Βιέννης, χωρίς να ανήκουν, ήταν οι Karl Popper και Ludwig Wittgenstein (1889-1951). Ο Popper θα αποτελέσει μια εναλλακτική λύση στο λογικό εμπειρισμό και θα τον συναντήσουμε στο Κεφάλαιο για τις διαψευστικές θεωρίες. Ο δεύτερος θα αποτελέσει τον κύριο συνδετικό κρίκο με το άλλο ρεύμα σκέψης, που συνέκλινε με

¹⁹ Τα αξιώματα της αριθμητικής του Peano είναι: **1.** $1 \in \mathbb{N}$, **2.** $a \in \mathbb{N} : a = a$, **3.** $a, b \in \mathbb{N} : a = b \rightarrow b = a$, **4.** $a, b, c \in \mathbb{N} : a = b \ \& \ b = c \rightarrow a = c$, **5.** $a = b \ \& \ b \in \mathbb{N} \rightarrow a \in \mathbb{N}$, **6.** $a \in \mathbb{N} \rightarrow a + 1 \in \mathbb{N}$, **7.** $a, b \in \mathbb{N} : a = b \rightarrow a + 1 = b + 1$.

²⁰ G. Kneebone, Math/cal Logic and the Foundations of Math/s, σ. 246.

²¹ M. Schlick, Εισαγωγή στη φιλοσοφική σκέψη, Εγνατία.

εκείνο του κλίματος της Βιέννης, κι αυτό ήταν η καλλιέργεια μιας φιλοσοφίας της Λογικής και της γλώσσας που είχε αρχίσει πολύ νωρίς στο Cambridge κι αποτελείτο κυρίως από τους G. H. Moore και Bernard Russell.

Η στροφή προς την γλώσσα και τη Λογική που άνθησε τότε στην Αγγλία, αντλεί την καταγωγή της κυρίως στην παράδοση του εμπειρισμού των W. Ockham, J. Locke, G. Berkeley, D. Hume και J. S. Mill. Η βασική θέση του εμπειρισμού λέει πώς μόνο με την παρατήρηση και τον πειραματισμό μπορούμε να αποκτούμε δικαιολογημένεςπίστεις για τον κόσμο. Αλλά πρέπει να παρατηρήσουμε εδώ την πρωταρχική ιδέα που ξεκινά από τον πατριάρχη του αγγλικού νομιναλισμού William Ockham (1288-1347), που δεν δέχεται άλλη κατηγορία σκέψης εκτός της κατηγορίας του συγκεκριμένου²². Υπάρχουν στο κόσμο μόνο τα πράγματα και τα ονόματα που τους δίνουμε. Η ιδέα αυτή είναι που θα απολήξει στην κατηγορία του ατομικού δεδομένου, ιδέα που διαβρέχει όλη την σκέψη του αγγλικού εμπειρισμού. Η αναλυτική φιλοσοφία ολόκληρη δεν είναι παρά ένας εμπειρισμός, μόνο που αυτός, αντί να βασίζεται σε ιδέες και έννοιες, στηριζόταν αποκλειστικά σε προτάσεις²³ και τις μεταβλητές με ατομικές πληρώσεις.

Για τους αναλυτικούς φιλόσοφους όμως Μαθηματικά και Λογική δεν βασίζονται στην εμπειρία κι αν και μπορούν να αναχθούν γενετικά σε αυτή, η ισχύς τους όμως παραμένει ανεξάρτητη από αυτήν. Η Λογική δεν αναφέρεται στους νόμους του είναι αλλά δίνει κανόνες διάταξης των σκέψεων. Οι νόμοι της Λογικής αφορούν αποκλειστικά το συμβολικό επίπεδο άρθρωσης των σκέψεων κι όχι τον εμπειρικό κόσμο. Η αριθμητική κι οι κανόνες της είναι εσωτερικοί μέσα στο σύστημα των αξιωμάτων της, ενώ η Γεωμετρία δεν περιγράφει τον μοναδικό χώρο αλλά συνιστά συνεπή μοντέλα με πολλές διαφορετικές ενδεχόμενες υλοποιήσεις καθόσον υπάρχουν Γεωμετρίες αλληλοαποκλειόμενες.

Οι αναλυτικοί φιλόσοφοι, B. Russell, G. E. Moore, L. Wittgenstein, G. Ryle, J. L. Austin, P. F. Strawson, R. Carnap, A. J. Ayer, W. V. Quine κ.ά. διαμόρφωσαν δυο κύριους δρόμους²⁴: Τον δρόμο που ακολούθησε ο Carnap, στην κατασκευή, μιας ιδεατής γλώσσας απαλλαγμένης από τις ελλείψεις των φυσικών γλωσσών για την επιστήμη και την κατεύθυνση του Wittgenstein για τον οποίο προέχει η ανάλυση της καθημερινής γλώσσας με σκοπό τη φιλοσοφία.

Για τους λογικιστές (Frege, Russell), οι λογικές αρχές είχαν θεωρηθεί ως πρωταρχικές και κατ' αυτή την έννοια έπρεπε να είναι απόλυτες, να αντιστοιχούν στη μορφή και τη δομή του γνωστού κόσμου. Ο Wittgenstein (είχε βρεθεί πολύ νωρίς στο Cambridge) προσπάθησε να δει την άποψη του Principia ως βασική φιλοσοφία για μια a priori θεωρία του κόσμου. Το εγχείρημα αυτό του είχε δώσει την δυνατότητα να προτείνει την οργάνωση της κάθε επιστημονικής γλώσσας. Του προσέφερε μια τεχνητή, πλούσια γλώσσα με ιδιαίτερα αναπτυγμένες εκφραστικές

²² D. W. Smith, Intentionality Naturalized? In Naturalized Phenomenology, (Ed. J. Petitot, F. Varela, B. Pachoud, J-M. Roy, Writing Science, pp 83-110, Stanford California, 1999. The Cambridge Companion to Ockham, Cambridge U.P. 1999.

²³ Θ. Βέϊκος, Αναλυτική Φιλοσοφία, Σμίλη και Δ. Αναπολιτάνο.

²⁴ R. Carnap, πρόλογος Ν. Αυγελή.

δυνατότητες, που υποσχόταν συνέπεια και πληρότητα²⁵. Διακήρυξε την θέση του μέσα στους οξείς αφορισμούς του με τους οποίους ξεκίνησε το έργο του *Tractatus*²⁶:

Ο κόσμος είναι όλα όσα συμβαίνουν, αυτή είναι η ουσία.

Ο κόσμος είναι η ολότητα των γεγονότων και όχι των πραγμάτων.

Ο κόσμος καθορίζεται από τα γεγονότα και από το πώς αυτά είναι όλα τα γεγονότα.

Διότι η ολότητα των γεγονότων καθορίζει και τα δυο πράγματα και αυτό που συμβαίνει, καθώς και όλα όσα δεν συμβαίνουν.

Τα γεγονότα μέσα στο λογικό χώρο είναι ο κόσμος.

Ο κόσμος τεμαχίζεται σε γεγονότα.

Καθένα από αυτά μπορεί να συμβαίνει ή να μην συμβαίνει και όλα τα άλλα να μένουν τα ίδια.

Αυτό που συμβαίνει, το γεγονός, είναι η ύπαρξη των καταστάσεων πραγμάτων.

Ένα ατομικό γεγονός είναι ένας συνδυασμός από αντικείμενα (π.χ. οντοτήτων, πραγμάτων).

Είναι ουσιαστικό για το πράγμα το να μπορεί να είναι συστατικό στοιχείο μιας κατάστασης πραγμάτων.}....

Ο Wittgenstein, ισχυρίζεται ότι δεν μπορούμε να μιλήσουμε για την σχέση γλώσσας και πραγματικότητας ενώ συγχρόνως πιστεύει ότι τα όρια του νοητού ταυτίζονται με τα όρια της γλώσσας και, κατά συνέπεια, το κύριο έργο που απομένει στη φιλοσοφία είναι η κριτική ανάλυση της γλώσσας²⁷.

Η σχολή της Βιέννης θα συνεχίσει αυτό το πρόγραμμα των Frege και Wittgenstein. Μέσα στις απόψεις των νεοθετικιστών του κύκλου, τα προβλήματα της φιλοσοφίας που δεν μπορούν να διατυπωθούν μέσα σε ένα πειστικό τυπικό σύστημα προτάσεων, είναι *ψευδοπροβλήματα*²⁸. Αυτό που μπορούμε να έχουμε είναι μόνο μετρήσιμα δεδομένα, τυπικές θεωρίες και προτάσεις επαληθεύσιμες ή όχι. Επίσης, η *αρχή της επαληθευσιμότητας*, που αποδίδεται στον Wittgenstein, επιβάλλει ότι το νόημα μιας πρότασης ταυτίζεται με τη μέθοδο επαλήθευσής της.

Για τον Carnap, η φιλοσοφία χωρίζεται σε *Μεταφυσική, Ψυχολογία και Λογική*. Εκ των τριών θα αποδεχθεί τελικά μόνο την Λογική εφόσον η Μεταφυσική είναι χωρίς νόημα ενώ η Ψυχολογία είναι μια πειραματική επιστήμη. Το έργο της *λογικής ανάλυσης* συνίσταται στην ανάλυση της γνώσης, στην ανάλυση των προτάσεων της επιστήμης και της καθημερινής ζωής, με σκοπό να καταστήσουμε σαφή τη σημασία και τις σχέσεις τους. Πρωταρχικό καθήκον της λογικής ανάλυσης μιας ορισμένης πρότασης είναι να βρεί τη μέθοδο επαλήθευσής της. Το ζήτημα είναι: Ποιοί λόγοι μπορούν να υπάρχουν που να επιβεβαιώνουν την πρόταση αυτή; Ή πώς μπορούμε να βεβαιωθούμε για την αλήθεια ή το ψεύδος της; Το ερώτημα αυτό, λέει ο Carnap, οι φιλόσοφοι το ονομάζουν επιστημολογικό. Έτσι, ο Carnap

²⁵ G. Kneebone, *Math/cal Logic and the Foundations of Math/s*, σ. 246.

²⁶ L. Wittgenstein, *Tactatus Logico Philosophicus*, Παπαζήσης, 1978.

²⁷ Πρόλογος του Β. Κάλφα στο T. Kuhn, *Η δομή των επιστημονικών επαναστάσεων*.

²⁸ R. Carnap, *Philosophical Foundation of Physics*, Basic Books, Inc, 1966.

δίδει ένα δικό του ορισμό της επιστημολογίας εντοπίζοντας αποκλειστικά μέσα στο πλαίσιο δικαιολόγησης: *Επιστημολογία ή φιλοσοφική θεωρία της γνώσης δεν είναι τίποτε άλλο από ένα ιδιαίτερο τμήμα της λογικής ανάλυσης, που συνήθως συνδέεται με ψυχολογικές έρευνες σχετικές με τον τρόπο που συντελείται η γνώση*²⁹.

Η γλωσσική ανάλυση είναι δυνατόν να διακριθεί στην *σημαντική* (σημασιολογία) και στην *σύνταξη*. Με τον όρο *σημασιολογία* εννοούμε τη γενική μελέτη των γλωσσικών σημείων ή συμβόλων.

Η *Σύνταξη* εξετάζει τις σχέσεις των συμβόλων μεταξύ τους.

Η *Σημαντική* ή *σημασιολογία*, εξετάζει τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ συμβόλων και πραγμάτων που δεν είναι σύμβολα, δηλαδή τις σχέσεις αναφοράς και νοήματος.

Η *Πραγματική* ή *πραγματολογία*, εξετάζει τις σχέσεις των συμβόλων με πράγματα που δεν είναι σύμβολα και που περιλαμβάνουν ενέργειες του ομιλητή³⁰.

Το πρόγραμμα του Carnap ήταν η διερεύνηση των κανόνων που πρέπει να υπακούει ένα γλωσσικό σύστημα. Έπρεπε δηλαδή, να κατασκευαστούν γλωσσικά συστήματα που να έχουν δική τους νομοτέλεια και δικές τους δυνατότητες ανάπτυξης. Η ανάπτυξη της γλώσσας με αυτή την σημασία παίρνει συστηματική μορφή ως λογική σύνταξη της γλώσσας. Για την Μεταφυσική, διατυπώνει την θέση ότι οι προτάσεις της δεν έχουν εμπειρικό χαρακτήρα και δεν μπορούν να επαληθευτούν μέσα στην εμπειρία. Κατά συνέπεια, η Μεταφυσική δεν έχει νόημα κι ακόμη ότι αποτελείται από ψευδο-προτάσεις της, που οφείλονται σε λάθη λογικής σύνταξης της γλώσσας, είναι α- νόητες. Ισχυρίζεται, όπως κι ο μαθητής του A. J. Ayer³¹, ότι η πηγή της μεταφυσικής είναι η γλωσσική σύγχυση κι η ανυπακοή στους κανόνες που ρυθμίζουν την σημαντική χρήση της γλώσσας. Αυτό σημαίνει διαφορά μεταξύ γραμματικής και λογικής σύνταξης και τονίζεται ο κριτικός χαρακτήρας της φιλοσοφίας. Ο φιλόσοφος αναλυτής ενδιαφέρεται για τον τρόπο με τον οποίο μιλάμε για τα πράγματα. Όλα τα φιλοσοφικά προβλήματα με νόημα ανήκουν στην σύνταξη. Φιλοσοφία σημαίνει λογική της επιστήμης, λογική ανάλυση των επιστημονικών προτάσεων, όρων, εννοιών και θεωριών. Με αυτή την προσέγγιση, η φιλοσοφία γίνεται κλάδος της λογικής³². Οι γενικές αφαιρέσεις που αφορούν την ουσία των πραγμάτων ανήκουν, κατά τους αναλυτικούς, στην Μεταφυσική.

Στο πρόγραμμα του νεοθετικισμού, σε όλες τις μορφές του, έχουμε μια προσπάθεια εξασφάλισης της εγκυρότητας των συμπερασμάτων με:

- 1) την χρήση παρατηρήσεων του υλικού κόσμου
- 2) την αξιοποίηση των αναλυτικών προτάσεων, που τις θεωρούν λογικές ταυτολογίες. Αυτές στηρίζονται στην αρχή της μη αντίφασης.

Αντίθετα από τον Kant, θεωρούν τα μαθηματικά αναλυτικές κρίσεις, δηλαδή ταυτολογίες. Το ότι τα Μαθηματικά, ως ταυτολογίες, προσφέρουν κάποιες πληροφορίες το εξηγούν με το ότι ξετυλίγουν τις διαφορετικές όψεις μιας και της

²⁹ R. Carnap, Φιλοσοφία και λογική σύνταξη, Εκδόσεις Εγνατία, 1976, σελ 26 και 110.

³⁰ Π. Χριστοδουλίδης, Σημασιολογία, Δευκαλίων 17, 1977.

³¹ Sir A. J. Ayer, Γλώσσα Αλήθεια και Λογική, Τροχαλία.

³² A. Ayer, Γλώσσα, Αλήθεια και Λογική, σελ 51

αυτής κατάστασης. Χρησιμοποιείται το *κριτήριο της επαληθευσιμότητας* για την γνησιότητα των όποιων δηλώσεων. Αφού μια φράση είναι εμπειρικά σημαντική, αν και μόνο αν είναι γνωστός ένας τρόπος επαλήθευσής της, αυτό μπορεί να συμβεί τόσο για προτάσεις που αφορούν ταυτολογίες όσο και για προτάσεις της πειραματικής φυσικής που προσφέρονται σε εμπειρική επαλήθευση. Οι οντολογικές παραδοχές για τον Wittgenstein του Tractatus δεν έχουν νόημα. Ερωτήματα σε σχέση με το *πράγμα καθαυτό* του Kant, το αν υπάρχει εσωτερικός ή εξωτερικός κόσμος είναι χωρίς νόημα, αφού δεν υπάρχει τρόπος επαλήθευσής τους.

Αν με τις παραπάνω πεποιθήσεις προσπαθούσαμε να απαντήσουμε στο ερώτημα *τι είναι αλήθεια;* θα οδηγηθούμε σε ένα αδιέξοδο. Μια θεωρία αλήθειας που θα στηριζόταν στην εγκυρότητα των προτάσεων θα παρέπεμπε αναπόφευκτα στην συντακτική συνέπεια κάποιων παραδοχών μας, που αφορούν στην σχέση των συμβόλων κι από εκεί και πέρα στην δική μας αυθαίρετη απόδοση σημασίας σε αυτά τα σύμβολα και τις προτάσεις. Η αλήθεια μοιάζει με αυτό που ο Wittgenstein λέει ότι αν προσπαθήσουμε να δούμε τι κρύβεται πίσω από μια ζωγραφιά στον τοίχο, το μόνο που θα καταφέρουμε είναι να κάνουμε καρούμπαλα στο κεφάλι μας. Σύνταξη και σημασιολογία μας στήνουν ένα αδιαπέραστο φράγμα με την πραγματικότητα.

Άμεση συνέπεια αυτών των θεωρήσεων υπήρξε το Θεώρημα του Tarski, που έλεγε ότι *η αλήθεια δεν ορίζεται* (κατέληγε εν ολίγοις σε εκείνο που ο Αριστοτέλης είχε ισχυριστεί πριν από 2400 χρόνια), ότι η αλήθεια που θα ορίσουμε μέσα σε ένα τυπικό σύστημα θα αντλεί τις αληθοτιμές της από εκείνες που εμείς θα της δώσουμε από την πραγματολογική σχέση μας με τον κόσμο. Εάν λοιπόν γράψουμε σε ένα τυπικό σύστημα, με τα σύμβολα αυτού του συστήματος, ότι *το χιόνι είναι άσπρο*, αυτό θα είναι αληθές, *αν το χιόνι είναι άσπρο*³³. Η θεωρία αυτή για την αλήθεια ονομάζεται *αντιστοιχιστική*. Οι τυπικές γλώσσες από μόνες τους δεν είναι τίποτα άλλο από σύνταξη, όπως είναι οι γλώσσες ενός Η/Υ. Παρεμβάλλεται ο άνθρωπος, για να αποδώσει στα σύμβολα αναφορές και σημασίες.

Ο νεοθετικισμός, κατά την άποψη του Whitehead, από τον φόβο της μεταφυσικής κατέληξε, *να παρερμηνεύει τόσο την φύση του εμπειρικού δεδομένου όσο και την φύση της εμπειρικής πράξης*³⁴. Η αναλυτική φιλοσοφία οδηγείται σε αδιέξοδα νοηματοδότησης. Η φιλοσοφική κατηγορία του *Εγώ* δεν μπορεί να ορισθεί μέσα σε αυτή τη φιλοσοφία, αφού αυτό το *Εγώ* δεν προσφέρεται ως εμπειρία³⁵. Η υπερβολή που προκύπτει από την δογματική δέσμευση του *esse est percipi* (το είναι, είναι αντιλαμβάνεσθαι) του Berkeley. Ωστόσο, υπήρξαν κι άλλοι νεοθετικιστές φιλόσοφοι όπως ο Schlick, που αρνήθηκαν από πολύ νωρίς αυτή την ακραία εκδοχή. Κατ'αυτούς υπάρχει μια κατηγορία προτάσεων η εγκυρότητα των οποίων συνίσταται στο να καταγράψουν μια άμεση εμπειρία: αυτές οι προτάσεις είναι απόλυτα βέβαιες, όπως η πρόταση *εγώ πονώ*. Επίσης, ο ιδρυτής της αναλυτικής φιλοσοφίας του G. E. Moore³⁶ αρνείται αυτές τις υπερβολές και μιλά για έννοιες, όπως εκείνες της

³³ Α. Γιανναρά, Μαθήματα Εισαγωγής στην Φιλοσοφία και Μ. Μυτιληναίου, Λογική, 1995.

³⁴ Λ. Μπαρτζελιώτη, Γνωσιοθεωρία, σελ. 183.

³⁵ Sir A. J. Ayer, Γλώσσα Αλήθεια και Λογική, κεφάλαιο 7.

³⁶ G. E. Moore, Μια υπεράσπιση του κοινού νου, μετάφραση, δευκαλίων 15, 1975.

σωματικότητάς μου που δεν χρειάζονται καμία ανάλυση για να γίνουν δεκτές. Ωστόσο, οι προτάσεις αυτού του τύπου δεν έγιναν ποτέ δεκτές από τους ακραιφνείς λογικιστές της πρώτης περιόδου, για τους οποίους δεν υπάρχουν βέβαιες εμπειρικές προτάσεις³⁷. Η άποψη αυτή δεν δέχεται την επιστημολογική αξία του βιώματος ως τελικό κριτήριο για κάθε εμπειρία καθόσον αυτό είναι άκρως υποκειμενικό.

Η προσπάθεια τελικά του Carnap να κατασκευάσει ένα αυτόνομο συντακτικό σύστημα έχει ως πρότυπο για την διατύπωση της μετα-θεωρίας του την θεωρία αποδείξεων του D. Hilbert. Όπως είδαμε, ο Hilbert πρώτος επιχείρησε μια τυπική ανάλυση της γλώσσας με σκοπό να θεμελιώσει τα Μαθηματικά. Ο Carnap απέτυχε, όπως απέτυχε και το πρόγραμμα του Hilbert. Οι επιπτώσεις του Θεωρήματος του Gödel στην Λογική και τη φιλοσοφία των μαθηματικών υπήρξαν καταλυτικές. Ο ίδιος ο Carnap αναγνωρίζει τελικά ότι η συντακτική ανάλυση της γλώσσας πρέπει να συμπληρωθεί με την διερεύνηση των σημασιολογικών σχέσεων ανάμεσα στις προτάσεις. Τα φιλοσοφικά προβλήματα δεν αποσαφηνίζονται κι οπωσδήποτε δεν λύνονται με ανάλυση μονάχα τυπικών σχέσεων ανάμεσα στα σύμβολα. Παραπέρα, ο Carnap ισχυρίζεται ότι η υπόθεση του Wittgenstein, ότι οι οντολογικές παραδοχές ήταν χωρίς νόημα, ήταν λανθασμένη. Γι' αυτόν υπάρχουν παραδοχές που όμως αφορούν στη γλώσσα μόνο.

Όπως έλεγε ο Wittgenstein οι φιλόσοφοι επεξεργάζονται γλωσσικά παιχνίδια, αλλά όπως μια μύγα μπαίνει σε ένα μπουκάλι και μετά παγιδεύεται έτσι κι οι φιλόσοφοι χάνονται μέσα στις μυγοπαγίδες τους! Την ίδια τύχη είχαν κι οι βασικές παραδοχές των αναλυτικών. Το ρεύμα του λογικού θετικισμού έδειξε μεγάλη εμπιστοσύνη στην αρχή της επαληθευσιμότητας. Η ισχύς της αρχής δεν ήταν καθόλου προφανής, γιατί κι αυτή με τη σειρά της αποτελούσε πρόταση μη επιστημονική που δεν μπορούσε να επαληθευτεί! Η ίδια αρχή απέκλειε ως στερούμενους νοήματος όλους τους επιστημονικούς όρους. Ο Carnap προσπάθησε να διορθώσει. Την αντικατέστησε βαθμιαία με την *επιβεβαιωσιμότητα*: *μια πρόταση έχει νόημα μόνο αν μπορεί να επιβεβαιωθεί, δηλαδή μας επιτρέπει να παράγουμε απ' αυτήν αληθείς προτάσεις*. Με τη λύση αυτή προχωρά στην ιδέα του πραγματιστή Dewey, που θα αναφέρουμε παρακάτω αναφερόμενοι στον Πραγματισμό.

Σε μια πιο πρόσφατη περίοδο, οι απόψεις στα πλαίσια της φιλοσοφίας της γλώσσας αλλάζουν. Στα τελευταία γραπτά του Wittgenstein³⁸ δημιουργείται μια αντίστροφη τάση. Αμφισβητείται η γνωστική σημασία των τεχνητών γλωσσών και προβάλλεται ως πεδίο ανάλυσης η φυσική γλώσσα, η καθημερινή γλώσσα με όλες τις ιδιομορφίες της. Παύει να ενδιαφέρει μόνο η καταφατική μορφή προτάσεων κι αναπτύσσεται η *πραγματολογική* διάσταση της γλώσσας, δηλ. η σχέση του λόγου με τον ομιλητή. Παράλληλα ο Wittgenstein στην ώριμη περίοδο μετακινείται από την αντίληψη του γλωσσικού νοήματος σε εκείνη του νοήματος ως πολύμορφης χρήσης και, επιπλέον, αρνείται τη δυνατότητα της οποιασδήποτε θεωρίας κριτηρίων είτε εφαρμογής της τυπικής λογικής είτε συστηματοποίησης των εννοήσεων της κοινής

³⁷ Sir A. J. Ayer, Γλώσσα, Αλήθεια και Λογική, σελ 95.

³⁸ Φιλοσοφικές έρευνες, Παπαζήση

γλώσσας ή του κοινού νου, για την απάντηση σε φιλοσοφικά ερωτήματα³⁹. Επίσης, στις Φιλοσοφικές έρευνες κάνει λόγο για την σημασία του *κόσμου της ζωής*, του *βιόκοσμου*, όπως τον ονομάζει η φαινομενολογία, που απαραίτητα συμμετέχει στην νοηματοδότηση. Τα νοήματα προσδιορίζονται τελικά από την πράξη, λέει ο Wittgenstein, *το νόημα είναι η χρήση*. Στο σημείο αυτό ο Wittgenstein ξεπερνά τον νομιναλισμό του αγγλικού εμπειρισμού που πάσχιζε να καταλάβει τις λέξεις έξω από την χρήση τους⁴⁰ καθώς ο ορισμός της πράξης είναι αδύνατος σε μια φιλοσοφία εγκλεισμένη αυστηρά στην σύνταξη.

Στην επιστήμη οι όροι και τα αντικείμενά της προσεγγίζονται σε πλαίσια που δεν απομονώνουν έννοιες και γεγονότα ως μεταβλητές. Ένας φυσικός, κοιτώντας ένα θάλαμο φυσαλίδων, μπορεί να διαπιστώσει την ύπαρξη ενός μεσονίου και ενδεχομένως να το ορίσει. Αντίθετα, ένας που δεν έχει γνώσεις φυσικής δεν θα δει τίποτα. Κάθε παρατήρηση προϋποθέτει μια πλήρη θεωρητική συγκρότηση και εμποτίζεται από αυτή. Οι ιδέες αυτές βάλουν ενάντια στα βασική ιδέα του συγκεκριμένου παρατηρησιακού δεδομένου. Αυτή η ιδέα που ξεκινά από την έναρξη του αγγλικού νομιναλισμού του Ochkam ξεπερνιέται από τον Sellars⁴¹ δείχνοντας ότι είναι ένας μύθος, μια μυθοπαγίδα. Το συγκεκριμένο γίνεται τέτοιο μέσα σε όρους πλαισίου, δηλαδή προηγούνται όροι γενικοί ώστε να θεματοποιηθεί το συγκεκριμένο. Αυτή είναι μια ιδέα εγγελιανής προέλευσης, όπου το συγκεκριμένο αναδεικνύεται ως τομή γενικότητων που μεσολαβούν στην συλληψή του⁴².

Σε αυτή την πορεία τριβής των επιχειρημάτων του λογικού εμπειρισμού, ο McDowell διαπιστώνει την συλλειτουργία και μη διακριτότητα αισθητικότητας και διάνοιας, μέσα από την οποία ο εμπειρισμός κατέληγε σε απονενομημένα επιχειρήματα. Ενώ σχετικό με αυτά τα επιχειρήματα είναι το Γερονικόλα-Μυτιληναίου⁴³ που παρατηρούν το άστοχο της απομόνωσης των τύπων της σύνταξης από την σημασιολογία, στην πλειονότητα των μαθηματικών δομών, αποδίδοντας σε έναν τέτοιο διαχωρισμό ένα πλήθος παραδόξων στην φιλοσοφία ιδιαίτερα των μαθηματικών. Επίσης οι φιλόσοφοι των Μαθηματικών κράτησαν μια πιο επιφυλακτική στάση για το πόσο η Λογική και τα Μαθηματικά θα μπορούσαν να είναι ταυτόσημα, όπως κατέληξε να ισχυρίζεται το πρόγραμμα των Λογικιστών και σήμερα πια αποφαίνονται πως μάλλον η Λογική είναι κλάδος των Μαθηματικών παρά το αντίθετο⁴⁴.

Σε αυτή την κατεύθυνση κινείται και ο Quine με μια πραγματιστική πλέον εκδοχή. Στη βάση του φιλοσοφικού σχεδίου μιας φυσικοποιημένης γνωσιολογίας αμφισβητεί ότι τα Μαθηματικά κι Λογική αποτελούν σύστημα συμβατικών προτάσεων που δεν διαψεύδονται εμπειρικά. Τα βασικά εργαλεία της γλώσσας, με

³⁹ Σ. Βιρβιδάκης, Η παρουσία του Καντ στη σύγχρονη αγγλόφωνη φιλοσοφία, Νέα Εστία, Έτος 78^ο, Τόμος 156, Δεκέμβριος 2004.

⁴⁰ Θ. Βέικος, Αναλυτική Φιλοσοφία, εκδόσεις Σμίλη, σελ 28.

⁴¹ W. Sellars, Ο εμπειρισμός και η φιλοσοφία του νου, μετάφραση Χ. Μαρσέλος, Εστία 2005.

⁴² Καρελ Κοζικ, Η Διαλεκτική του Συγκεκριμένου, μετάφραση Λ. Χατζηπροδρομίδης, Εκ. Οδυσσέας 1975.

⁴³ Ε. Γερονικόλα – Μ. Μυτιληναίου, Ο Μαθηματικός ξέρει για τι μιλάει, σελ. 33- 74, ΝΕΥΣΙΣ, 2002.

⁴⁴ Leon Henkin, Are Logic and Mathematics Identical? In D. M. Cappel & J. C. Higgins, People – Problems – Results, Vol. II, pp. 223 – 232, Wadsworth 1984.

τα οποία ιεραρχείται η ανθρώπινη δράση, κατανέμεται ο χρόνος και ενέργειες, αποτελούν τις απαραίτητες έννοιες για μια μαθηματική συζήτηση. Τέτοια κλειδιά της λογικής μας αποτελούν οι όροι όπως ναι, όχι, και, ή, έπεται, ακολουθεί, συνεπάγεται, προκύπτει, αν, τότε, αν και μόνο αν, υπάρχει, για όλα, εκτός από, υπάρχει ένα, για κάθε και πλήθος άλλες λέξεις που αποτελούν την βάση της καθημερινής μας επικοινωνίας μέσα σε διαμορφωμένους κοινωνικά λογικούς κανόνες⁴⁵. Ένα μεγάλο μέρος αυτού του κώδικα υπάρχει αποτυπωμένο στο παιδί, πριν να έλθει σε επαφή με την έννοια του αριθμού ως έννοιας επανάληψης και συνάθροισης. Αναπόφευκτα λοιπόν, η πρώτη μαθηματική εμπειρία στο παιδί θα αναδυθεί μέσα από μια γλωσσική επαφή. Η άποψη αυτή που βλέπει τις γενικές αρχές της σκέψης ως κανονιστικές αρχές κοινωνικής συμπεριφοράς φαίνεται ως ανανέωση των απόψεων του Mill. Επίσης, για τον Quine η Επιστήμη είναι ένα ενιαίο σύνολο που συγκροτείται στη βάση της εμπειρίας χωρίς ωστόσο να είναι ευθύγραμμο αναγώγιμο σε αυτήν. Οι παραπάνω απόψεις, όπως τον παρατηρεί ο P. Ernest⁴⁶, υπαινίσσονται ένα κοινωνικό κονστρουκτιβισμό, για τον οποίο θα αναφερθούμε παρακάτω.

Νεότεροι φιλόσοφοι, όπως ο H. Putnam, ή J. Searl, W. Sellars, προσπάθησαν να περισώσουν την αναλυτική παράδοση δανείζονται ιδέες από την ηπειρωτική φιλοσοφία και τη φαινομενολογία, όπως εκείνη της αποβλεπτικότητας, κάτι που θα ήταν αδύνατο μέσα στα πλαίσια της πρώιμης αναλυτικής μεθόδου⁴⁷.

⁴⁵ βλέπε P. Ernest, The philosophy of Mathematics Education και W. V. Quine, Elementary logic, Harper torchbooks, και Φιλοσοφία της Λογικής, Ζαχαρόπουλος.

⁴⁶ P. Ernest, The philosophy of Mathematics Education.

⁴⁷ J. Searl, Νους, Εγκέφαλος και Επιστήμη και H. Putnam, Τα πολλά πρόσωπα του Ρεαλισμού, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

4. 4 Η ένσταση του Brouwer στον λογικισμό

Σύμφωνα με τη άποψη των Frege και Russell, τα Μαθηματικά είναι ταυτόχρονα και αντικειμενικά και απόλυτα. Εδραιωμένα στην καθαρή λογική, οι δηλώσεις τους (εάν δεν έχουν επηρεαστεί από υποκειμενικά σφάλματα) εκφράζουν έσχατες αλήθειες και κατανοούνται ως άχρονα. Στην εκδοχή αυτή διακρίνουμε έναν πλατωνισμό. Αυτή η αξίωση απορρίπτεται από τους μαθηματικούς και τους φιλοσόφους που προτιμούν να βλέπουν τα Μαθηματικά ως μία μορφή δραστηριότητας. Ο Brouwer (Ολλανδός, Τοπολόγος και φιλόσοφος 1881-1966) είχε επιτεθεί ακριβώς σε αυτή την μεταφυσική απολυτότητα της Λογικής. Πρότεινε την λεγόμενη *διαισθητική* (intuitionism) φιλοσοφία για τα Μαθηματικά¹, η οποία εμφανίζεται ως μία ακραία μορφή της αντι-λογιστικής φιλοσοφίας. Ο Brouwer πρεσβεύει² ότι *όλη η λογική είναι ιστορικά συνθηκολογημένη* και ότι κανένα ιδιαίτερο σύστημα της λογικής δεν είναι δεσμευτικό πάνω σε όλους τους ανθρώπους και σε όλες τις εποχές. Η μεγαλύτερη συμβολή του έγκειται στο ότι επέστησε την προσοχή μας στη σχετικότητα της λογικής κι αποκάλυψε κάποια αυθαιρεσία στα υποτιθέμενα αντικειμενικά μαθηματικά. Γι αυτόν τα Μαθηματικά είναι, όπως ήθελε ο Kant κατασκευές της καθαρής εποπτείας.

Για να καταλάβουμε τις ενστάσεις του ιντουϊσιονισμού, ως προς την απολυτότητα της λογικής, θα δώσουμε μερικά παραδείγματα με άπειρα σύνολα, όπου και η αμφιβολία για την *αρχή του αποκλεισμένου μέσου* ή *τρίτου* όπως αλλιώς λέγεται μπορεί να γίνει κατανοητή. Ο Brouwer δεν δέχεται ότι η αρχή του τρίτου ισχύει όταν έχουμε να κάνουμε με άπειρα σύνολα στα Μαθηματικά. Υπάρχει μια γνωστή εικασία που αφορά στο σύνολο των φυσικών αριθμών, η εικασία του Goldbach: *κάθε άρτιος αριθμός είναι άθροισμα δυο πρώτων*. Η εικασία ισχύει για κάθε άρτιο από αυτούς που μπορώ εύκολα να ελέγξω. Δεν έχω όμως απόδειξη που να δείχνει ότι αυτό ισχύει για κάθε άρτιο. Μια πλατωνική αντίληψη για τα Μαθηματικά θα πίστευε ότι η απάντηση αυτή υπάρχει, είναι μια και δεδομένη και απλά δεν την έχουμε ακόμη ανακαλύψει. Η απόφαση ναι ή όχι μας περιμένει κάπου μέσα στο πλατωνικό σύμπαν των ιδεών. Για τους ιντουϊσιονιστές όμως στην συγκεκριμένη περίπτωση δεν υπάρχει μόνο ναι ή μόνο όχι υπάρχει και μια τρίτη κατάσταση. Όμοια το ερώτημα, αν ο αριθμός 100^{100} είναι άθροισμα δυο πρώτων. Η απάντηση θα ήθελε την εύρεση ακριβώς των δυο αριθμών. Ας δούμε τώρα το επόμενο παράδειγμα.

Άλλο παράδειγμα είναι ο αριθμός $\tilde{\pi}$, ο *π καπέλο*. (Στην θέση του π μπορούμε να πάρουμε οποιονδήποτε ασύμμετρο). Σκεφτόμαστε ως εξής: Ελέγχουμε αν στο ανάπτυγμα του π υπάρχουν 200 συνεχόμενα μηδενικά, (η επιλογή σε μηδενικά είναι αυθαίρετη αφού θα μπορούσαμε να πάρουμε μια τυχαία ακολουθία ενός αριθμού συμβόλων). Στα 5.000 χιλιάδες πρώτα ψηφία του αναπτύγματος μια τέτοια

¹ Εδώ δεν κάνουμε φιλοσοφία των Μαθηματικών, απλά θυμίζουμε κάποιες βασικές θέσεις χρήσιμες για τη Διδακτική των Μαθηματικών. Για μια λεπτομερέστερη παρουσίαση, βλέπε Δ. Αναπολιτάνου, Εισαγωγή στην Φιλοσοφία των Μαθηματικών, εκδόσεις Νεφέλη, 1982.

² G. T. Kneebone, *Math/cal Logic and the Foundations of Math/s*, σ. 246.

ακολουθία φ δεν υπάρχει³. Μετά ορίζουμε τον αριθμό $\tilde{\pi}$. Αν μπορούσαμε να ελέγξουμε το πρώτο δισεκατομμύριο από ψηφία και να βρούμε μέσα σε αυτά μια ακολουθία φ με 200 συνεχόμενα μηδενικά, τότε ο $\tilde{\pi}$:

1. αποτελείται από τα n πρώτα ψηφία του π , αν το πρώτο μηδενικό ψηφίο της ακολουθίας φ αρχίζει από το νιοστό ψηφίο κι ο n είναι περιττός

2. έχει ένα 1 στο $n+1$ ψηφίο του π και εκεί τελειώνει, αν το πρώτο μηδενικό ψηφίο της φ είναι το νιοστό κι ο n είναι άρτιος.

Δεν ξέρουμε αν ο $\tilde{\pi}$ υπάρχει, και αν υπάρχει με τις προϋποθέσεις που θέσαμε ακριβώς πιο πάνω, μπορούμε να αλλάξουμε τις απαιτήσεις θέτοντας στη θέση της ακολουθίας φ , 300 συνεχόμενα ψηφία μηδενικά ή μια άλλη ακολουθία⁴. Η μέθοδος για την κατασκευή του $\tilde{\pi}$ είναι πλήρης. Ξέρουμε ακόμη ότι α) $\tilde{\pi} = \pi$ αν μια τέτοια ακολουθία φ δεν υπάρχει. β) Αν ο π περιέχει μια τέτοια ακολουθία φ και αυτή ξεκινά σε άρτια θέση, τότε θα είναι $\tilde{\pi} > \pi$. γ) Αν ξεκινά σε περιττή θέση θα είναι $\tilde{\pi} < \pi$.

Τώρα ας υπολογίσουμε τη διαφορά $Y = \pi - \tilde{\pi}$. Τί είναι το Y θετικός, αρνητικός ή μηδέν; Ο Y είναι ένας αριθμός και κατά τον νόμο της τριχοτομίας ένας αριθμός είναι θετικός, αρνητικός ή μηδέν. Το επιχείρημα των ιντουϊσιονιστών είναι ότι καμιά από τις τρεις δεν είναι αληθής. Το Y είναι κάτι από τις τρεις περιπτώσεις, αν κάποιος το καθορίσει με ένα συγκεκριμένο υπολογισμό. Μέχρι τότε δεν ισχύει καμιά. Έτσι, η μαθηματική αλήθεια εξαρτάται από τον χρόνο, είναι υποκειμενική, αν και δεν εξαρτάται από την κατασκευαστική συνείδηση ενός εκάστου μαθηματικού.

Κάθε συμπέρασμα που βασίζεται πάνω σε ένα συλλογισμό που αφορά απειροσύνολο είναι ατελές, αν στηρίζεται στην αρχή της αποκλίσεως του τρίτου. Ο ιντουϊσιονισμός είναι κάτι πολύ περισσότερο από μία φιλοσοφική διευκρίνιση των μαθηματικών θεωριών και ο Brouwer δίνει ένα σκελετό του γενικότερου υπόβαθρου της σκέψης του στο έργο του: *Μαθηματικά, Επιστήμη και Γλώσσα* (1928). Το σύστημα των ιντουϊσιονιστικών Μαθηματικών, με την κατάργηση του αποκλεισμένου τρίτου, για τα άπειρα σύνολα, γίνεται πολύ δυσκίνητο στις αποδείξεις, αλλά έχει το πλεονέκτημα ότι δεν αντιμετωπίζει παράδοξα. Κάνει διαφορετικές αποδείξεις για ένα πλήθος θεωρήματα και δεν δέχεται το αξίωμα της επιλογής.

4.5 Το περατοκρατικό πρόγραμμα του Hilbert

Ο Hilbert είναι ο μεγάλος μαθηματικός, ο οποίος στα 1900 επεχείρησε έναν απολογισμό των αντιλήψεων του για τη μαθηματική έρευνα στην διάσημη διάλεξή του σχετικά με τα Μαθηματικά προβλήματα, το καλοκαίρι του 1900 στο 2ο Διεθνές Συνέδριο των Μαθηματικών που έγινε στο Παρίσι, ο Hilbert σηματοδότησε το

³ P. Davis - R. Hersh, Η Μαθηματική Εμπειρία, σελ. 352.

⁴ Η Γενική περίπτωση διατυπώνεται στο Γ. Ρουσόπουλο, Επιστημολογία των Μαθηματικών.

ξεκίνημα ενός καινούργιου αιώνα με την υπόδειξη πιθανών μελλοντικών εξελίξεων μέσα στα Μαθηματικά, σκιαγραφώντας έναν κατάλογο με αυτά που έκρινε ότι είναι τα πιο σημαντικά άλματα προβλήματα που αντιμετώπιζαν οι μαθηματικοί. Τα προβλήματα, είκοσι τρία τον αριθμό, τα επέλεξε μέσα από όλα το πλέγμα των Μαθηματικών, κι ήταν εκείνα που του φάνηκαν ως τα πλέον ικανά να προκαλέσουν καινούργιες σημαντικές προόδους. Η μετέπειτα ιστορία των μαθηματικών κατά τη διάρκεια του αιώνα δικαίωσε τον Hilbert για το τι είχε πρώτιστη αξία για τα Μαθηματικά στις μέρες του.

Ο Hilbert τοποθετήθηκε στο ζήτημα της φιλοσοφίας των Μαθηματικών και στη διαμάχη που είχε ξεσπάσει σε σχέση με την λογική ή κατασκευαστική άποψη των Μαθηματικών. Σύμφωνα με την άποψη του Hilbert, οι μαθηματικοί διαπραγματεύονται πάντα με την παραγωγική δομή των εννοιολογικών συστημάτων. Ξεκινούν με ένα μικρό σώμα εννοιών, που είναι ενδεχομένως ασαφείς, διαισθητικές ή τυχαία προσδιορισμένες, ίσως ακόμη επιβεβλημένες από την εμπειρία ή που έχουν γίνει αποδεκτές μέσω μιας πράξης αξιωματικοποίησης. Συνεχίζουν με την απομόνωση μικρού αριθμού από γενικές αρχές, που θα υπηρετήσουν ως αξιώματα και έπειτα αναπτύσσουν τις συνέπειες που παράγονται από τα αξιώματα αυτά. Γνωρίζουμε εξάλλου ότι από ένα απλό σύνολο αξιωμάτων μπορούν να προέλθουν πολύ πλούσιες θεωρίες, σχεδόν ανεξάντλητες όσον αφορά το μαθηματικό τους ενδιαφέρον, όπως στην περίπτωση των φυσικών αριθμών. Όταν ένας κλάδος των μαθηματικών έχει καθοριστεί επαρκώς, ώστε να μπορεί να υπάρχει μια κοινή ομοφωνία απόψεων, όσον αφορά τις θεμελιώδεις αρχές πάνω στις οποίες έχει στηριχτεί, η εξέλιξή του εξασφαλίζεται μέσα από συνεχείς προσπάθειες των μαθηματικών να επιλύσουν τα όποια προβλήματα μπορεί να παρουσιασθούν, είτε μέσω της απόδειξης εικασιών, είτε μέσω της έκθεσης μιας απόδειξης της αδυνατότητας τους⁵. Η πεποίθηση της επιλυσιμότητας του κάθε μαθηματικού προβλήματος είναι ένα πανίσχυρο κίνητρο για τη δουλειά των μαθηματικών. Τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα των μαθηματικών κατά την άποψη του Hilbert μπορούν να συνοψισθούν στα εξής:

1. Τα Μαθηματικά έχουν συλληφθεί ως μια καθαρή, διανοητική θεωρία των παραγωγικά ιδεατών συστημάτων, τα οποία μπορεί εξίσου ορθά να έχουν αποσπαστεί από την εμπειρία ή να έχουν επινοηθεί αυθαίρετα. Άλλωστε υπάρχει μια διαρκής αλληλεπίδραση ανάμεσα στα αφηρημένα Μαθηματικά και στη συγκεκριμένη εμπειρία.

2. Τα Μαθηματικά είναι μια αυτόνομη μελέτη, ελεύθερη να επιλέγει έννοιες και αξιώματα, να αναπτύσσει διαδικασίες, και τελικά περιορίζεται από τη μοναδική υπερβαίνουσα συνθήκη της συνέπειας.

⁵ G. Kneebone, *Math/cal Logic and the Foundations of Math/s*, σ. 325.

3. Τα Μαθηματικά επιπλέον, ασχολούνται περισσότερο με την επίλυση εκκρεμών προβλημάτων και τη δημιουργία ισχυρών νέων εννοιών και μεθόδων, παρά με το να ατενίζουν τη γνώση που έχει ήδη κατακτηθεί⁶.

Το πρόγραμμα του Hilbert και τα Θεωρήματα μη πληρότητας της αριθμητικής του K. Gödel⁷.

Με την παραπάνω προοπτική ήταν συνδεδεμένο και το καθαυτό φιλοσοφικό πρόγραμμα του Hilbert με το οποίο επιχείρησε να θεραπεύσει το οικοδόμημα των Μαθηματικών από τα παράδοξα που κλόνισαν τα θεμέλια τους. Πήρε ίση απόσταση από τον Λογικισμό και τον Ιντουϊσιονισμό και πρότεινε ένα πρόγραμμα (μεθοδολογικό), που ονομάστηκε πρόγραμμα του Hilbert. Θα έπρεπε να αποκατασταθεί η εμπιστοσύνη μας στα Μαθηματικά ώστε να επανακτήσουν το αληθινό τους πρόσωπο ως πρότυπο επιστήμης. Έβλεπε μια τέτοια προσπάθεια ως αναγκαιότητα για όλη την ανθρώπινη σκέψη. Έτσι, θεώρησε ως σημαντική έννοια για τα Μαθηματικά την έννοια της συνέπειας, δηλαδή ότι τα Μαθηματικά δεν πρέπει να μας οδηγούν σε αντιφάσεις.

Το πρόγραμμα του Hilbert, θα έπρεπε να πραγματοποιηθεί σε τρία στάδια:

1. Ξεκαθαρίζουμε και απομονώνουμε το μη προβληματικό και άμεσα αποδεκτό κομμάτι των Μαθηματικών. Αυτό το κομμάτι που κανείς δεν αμφισβητεί, και όλοι το θεωρούν βάση της Μαθηματικής σκέψης, ονόμασε *περατοκρατικό*. Αυτό το μέρος των Μαθηματικών που αναφέρεται σε έννοιες και μεθόδους που ορίζονται με άμεσο συνδυαστικό πεπερασμένο τρόπο.

2. Το προβληματικό μέρος των Μαθηματικών που είναι *απειροκρατικό* και αναφέρεται σε άπειρες ολότητες ή μεθόδους και στο οποίο εμφανίστηκαν παράδοξα (αντιφάσεις), προσπαθούμε να το περιγράψουμε και να το αποδώσουμε σαν ένα *μεγάλο τυπικό (formal) σύστημα*. Τα αντικείμενα (έννοιες) σε αυτό το σύστημα ορίζονται τυπικά και η ύπαρξή τους εξαντλείται πλήρως από τον τυπικό ορισμό τους. Οι αποδείξεις μετασχηματίζονται σε πεπερασμένες ακολουθίες από τύπους και έτσι μπορούμε να ορίσουμε τυπικά πότε οδηγούν σε αντιφάσεις. Έτσι, το προβληματικό μέρος των Μαθηματικών περιγράφεται από μη προβληματικές έννοιες και μεθόδους (δηλαδή περατοκρατικές).

3. Δείχνουμε ότι το μεγάλο αυτό τυπικό σύστημα είναι *συνεπές* (δεν οδηγεί σε αντιφάσεις). Δηλαδή, πρέπει να δείξουμε ότι *δεν υπάρχει απόδειξη σε αυτό το τυπικό σύστημα που ο τελικός της τύπος να είναι μια αντίφαση*.

Αν ένα τέτοιο εγχείρημα πετύχαινε, θα είχαμε οριστικά θεραπεύσει τα Μαθηματικά από την επιδημία των παραδόξων, και θα είχε αποκατασταθεί η

⁶ Στο ίδιο

⁷ Την παράγραφο αυτή την συνέταξε ο Μ. Μυτιληναίος⁺.

εμπιστοσύνη στην βεβαιότητα των μαθηματικών αντικειμένων και μεθόδων, παρόλο που οι μαθηματικές έννοιες και μέθοδοι θα είχαν απογυμνωθεί στο μεγάλο αυτό τυπικό σύστημα από κάθε άλλο περιεχόμενο, και θα είχαν αντικατασταθεί από τον τυπικό σκελετό τους. Αυτός ο τυπικός σκελετός είναι που παρουσιάζει την ασθένεια και αν θεραπεύαμε αυτόν, τότε θα είχαμε εξασφαλίσει την καθολική υγεία των Μαθηματικών. Η τυπική τεχνική γλώσσα είχε δοθεί από τον λογισμό. Ο Hilbert γενίκευε αυτή την ιδέα για οποιαδήποτε τυπική γραφή των Μαθηματικών.

Δυστυχώς το πρόγραμμα του Hilbert κατέρρευσε από τα Θεωρήματα του K. Gödel. Ουσιαστικά τα Θεωρήματα αυτά δείχνουν το αδύνατο της επιτυχίας του προγράμματος του Hilbert, καθόσον για αυτόν η αριθμητική είναι η βάση για όλα τα Μαθηματικά.

Θεώρημα 1^ο. (K. Gödel 1931), Μη πληρότητας της αριθμητικής: *υπάρχει αληθής πρόταση του συστήματος τέτοια ώστε ούτε αυτή ούτε η άρνησή της να αποδεικνύεται με εργαλεία του συστήματος.*

Θεώρημα 2^ο. (K. Gödel 1931), Μη πληρότητας της αριθμητικής: *Οποιοδήποτε συνεπές σύστημα που είναι ισχυρό όσο η αριθμητική του Peano , δεν μπορεί να αποδείξει τη συνέπεια του (δεν μπορεί με εργαλεία του συστήματος να αποδειχθεί η μη αντιφατικότητά του).*

Το δεύτερο Θεώρημα μας δείχνει ότι το τρίτο στάδιο του προγράμματος του Hilbert δεν μπορεί να επιτευχθεί. Η αποτυχία αυτή ήταν εξίσου μια αποτυχία του Λογικισμού ως περατοκρατικού τυπικού συστήματος.

4. 6. Ο φορμαλισμός των Bourbaki

Η επίδραση που είχε ο Hilbert με τις θεμελιωτικές του απόψεις⁸, υπήρξε ιδιαίτερα έντονη στους Bourbaki⁹. Τα Μαθηματικά έχουν κατανοηθεί από τους Bourbaki¹⁰, ως η μελέτη των δομών (ή ως τα συστηματικά υποδείγματα των σχέσεων), που η κάθε δομή χαρακτηρίζεται από ένα κατάλληλο σύνολο αξιωμάτων. Στα Μαθηματικά, όπως αυτά υφίστανται σήμερα, υπάρχουν τρεις μεγάλες οικογένειες δομών: οι μήτρες - δομές, οι οποίες κυριαρχούν στην ολότητα των μαθηματικών. Δηλαδή: αλγεβρικές δομές, τοπολογικές δομές και διατακτικές δομές. Οποιαδήποτε συγκεκριμένη δομή θεωρείται σύμφυτη με ένα συγκεκριμένο σύνολο E, το οποίο λειτουργεί ως ένα πεδίο χαρακτηριστικών για την αντίστοιχη θεωρία. Μια αλγεβρική δομή προκύπτει από έναν ή περισσότερους κανόνες σύνθεσης. Ένας τέτοιος κανόνας μπορεί να είναι ένας εσωτερικός κανόνας σύνθεσης, με άλλα λόγια,

⁸ που εκφράστηκαν και στο βιβλίο του στο έργο του: (1899), D. Hilbert, Θεμέλια της Γεωμετρίας, μετ. Σ. Παπαδόπουλος, Τροχαλία, 1995.

⁹ Ομάδα γάλλων μαθηματικών που εξέδωσε μεγάλο αριθμό εργασιών και βιβλίων σε όλους τους κλάδους των Μαθηματικών, με το κοινό όνομα Nikola Bourbaki, μεταξύ των 1930 – 1960.

¹⁰ Nikola Bourbaki, Elements de mathématique.

μια σχέση τριών όρων $x \cdot y = z$, η οποία συνδέει με οποιοδήποτε διατεταγμένο ζεύγος (x, y) των στοιχείων του E ένα μοναδικά καθορισμένο στοιχείο z του E , ή μπορεί να είναι ένας εξωτερικός κανόνας της σύνθεσης, ο οποίος συνδέει με οποιοδήποτε στοιχείο x του E κάποιο στοιχείο a ενός δεύτερου σταθερού συνόλου Ω (που ονομάζεται *περιοχή των πράξεων*) ένα καθορισμένο στοιχείο $a \perp x$ του E . Σε οποιαδήποτε περίπτωση, ο κανόνας έχει καθορισθεί μέσω κατάλληλων αξιωμάτων.

Μια *τοπολογική δομή* έχει οριστεί για το E , όταν σε κάθε στοιχείο του E έχει δοθεί ένα σύνολο υποσυνόλων του E , ως οικογένεια των *περιοχών* του και η σχέση μεταξύ στοιχείου και περιοχής πάλι, εξασφαλίζεται από κατάλληλα αξιώματα. Ένα σύνολο E με μια τοπολογική δομή παραπέμπει σε ένα τοπολογικό χώρο. Τέλος, μια δομή *διάταξης* έχει οριστεί μέσω της σχέσης xRy η οποία είναι μεταβατική και αυτοπαθής.

Μια από τις απλούστερες και πιο γνωστές σχέσεις των αλγεβρικών δομών είναι εκείνη της ομάδας. Για τη δομή αυτή χρειαζόμαστε το βασικό σύνολο E , τον εσωτερικό κανόνα της σύνθεσης $x \cdot y = z$ και το σταθερό στοιχείο e του E έτσι ώστε:

- i) Για όλα τα x, y, z στο E , $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- ii) Για κάθε x στο E , $e \cdot x = x \cdot e = x$ και
- iii) Για κάθε x στο E υπάρχει ένα y στο E τέτοιο ώστε: $y \cdot x = x \cdot y = e$.

Με δυο εξωτερικούς κανόνες της σύνθεσης μπορούμε να έχουμε τις πιο λεπτομερείς δομές του δακτυλίου και του πεδίου, και με ένα εσωτερικό κανόνα και έναν εξωτερικό μπορούμε να έχουμε εκείνο του διανυσματικού χώρου. Πάρα πολλοί διαφορετικοί τύποι της αλγεβρικής δομής είναι δυνατοί και το μεγαλύτερο μέρος της αφηρημένης άλγεβρας μπορεί να τυποποιηθεί σαν μια θεωρία τέτοιου είδους δομών. Με την τοπολογική δομή διερευνάται η συνέχεια¹¹.

Η άποψη των Bourbaki είχε ιδιαίτερη επίδραση στην διδασκαλία των Μαθηματικών κατά την περίοδο 1960 – 1980. Την εποχή εκείνη υπήρχε η πεποίθηση ότι: η θεμελιωτική διατύπωση και παρουσίαση των Μαθηματικών μέσω μιας αφηρημένης Θεωρίας Συνόλων και την αποφυγή της παραπομπής στην διαίσθηση και τα σχήματα βοηθούσε στην μάθηση και κατανόηση. Η αποτυχία υπήρξε παταγώδης σε όλο τις χώρες και το εγχείρημα χαρακτηρίστηκε ως Μεταγνωστικό ολίσθημα, δηλαδή την επιλογή μιας γνώσης που διαμεσολαβεί για να διευκολύνει ενώ από μόνη της είναι πιο δύσκολη¹².

Μια σημαντική επίδραση των Bourbaki στην ψυχολογία είναι εκείνη του Στρουκτουραλισμού. Ο Στρουκτουραλισμός, η αντίληψη ότι ο κόσμος, βιολογικά συστήματα, φυσικοί νόμοι, ανθρώπινη σκέψη, εμπεριέχουν δομές που τα καθορίζουν και ο άνθρωπος τις ανακαλύπτει διαμόρφωσε ένα πλήθος ιδεών και αποτελούν ακόμη και σήμερα μια άποψη συζητήσιμη¹³.

¹¹ Nikolas Bourbaki, Elements of Mathematics - Theory of sets, 1967.

¹² Michel Henry, Διδακτική των Μαθηματικών, μετάφραση 2006.

¹³ J. Piaget, Στρουκτουραλισμός, Εκδόσεις Καστανώτη 1972. M. Otte, , Limits of Constructivism: Kant, Piaget and Peirce, Science & Education 7, 425-450, 1998.

4.7 Πραγματισμός: έναρξη του μεταμοντέρνου και των διαψευστικών θεωριών

Ο *πραγματισμός* προέρχεται από τις ελληνική λέξεις *πράγμα* και *πράξη* και αποτέλεσε την καθαυτή φιλοσοφία της αμερικανικής ηπείρου. Ο ίδιος επικαλείται την ιστορία της φιλοσοφίας για να ισχυριστεί ότι πραγματιστικό πνεύμα είχαν πολλοί κλασσικοί φιλόσοφοι, όπως ο Σωκράτης, ο Αριστοτέλης, ο Descartes ή οι άγγλοι εμπειριστές. Για τους πραγματιστές *αληθής είναι η γνώση που είναι χρήσιμη και προάγει την ανθρώπινη ζωή*. Ο πρώτος που διατύπωσε πραγματιστικές αντιλήψεις ήταν ο φιλόσοφος λογικός και σημειολόγος, C. Peirce (1839 -1914) στην πραγματεία (1878) του με τίτλο *Πώς καθιστούμε σαφείς τις ιδέες μας*¹.

Η κάθε έννοια, για τον Peirce, αντλεί την σημασία της από τις πρακτικές επιπτώσεις της. Γιατί κάθε έννοια και κρίση εμπλέκεται με την εν γένει ενέργεια του βίου. Οι λογικές κατηγορίες γίνονται κανονιστικές αρχές του ανθρώπινου βίου². Η παραπάνω εκδοχή (θα τη συναντήσουμε αργότερα και στον Quine) για την σχέση λογικής και καθημερινής γλώσσας φιλοδοξεί να τεκμηριώσει μια πραγματιστική εκδοχή για την επιστημολογία της Λογικής. “Για να πετύχουμε την τέλεια σαφήνεια στις ιδέες που αναφέρονται σε ένα αντικείμενο, πρέπει να κοιτάξουμε τα πρακτικά αποτελέσματα, που αυτό είναι σε θέση να προκαλέσει, να κοιτάξουμε τι είδους εντυπώσεις πρέπει να περιμένουμε απ' αυτό, να προσέξουμε τις αντιδράσεις που θα μας προκαλέσουν και να είμαστε έτοιμοι γι' αυτές. Ωστε, η κατανόηση ενός πράγματος, από μέρους μας, δεν είναι τίποτε άλλο παρά η νοητική σύλληψη αυτών των αποτελεσμάτων”³.

Η πραγματιστική θεωρία για την αλήθεια επεδίωξε να γεφυρώσει το χάσμα μεταξύ της υποκειμενικής διάθεσης και της αντικειμενικής πραγματικότητας, συνδυάζοντας:

- α) το νόημα των σημείων με την διάθεση της πίστεως,
- β) την διάθεση της πίστεως με τις προτάσεις της αντικειμενικής πραγματικότητας,
- γ) τις προτάσεις με τις κρίσεις, τις λογικές αλήθειες με τις συνθήκες που διαμορφώνουν την αλήθεια.

Κατά την διατύπωση του Peirce, η αλήθεια συνεπάγεται μια άπειρη σειρά από διαπιστώσεις με συνέπεια, σε μια τυχαία δεδομένη στιγμή καμία συγκεκριμένη πίστη να μην είναι δυνατόν να θεωρηθεί εξ ολοκλήρου αληθής. Αντίθετα, ένα στοιχείο σφαλερότητας και ασάφειας είναι πάντα αναπόφευκτο σε κάθε πίστη ή ιδέα.

Για τον W. James (αμερικανός θεμελιωτής της ψυχολογίας, φίλος του Peirce συνιδρυτής του πραγματισμού) η ίδια η πίστη για ένα γεγονός είναι δυνατόν από μόνη της να αποτελέσει συνθήκη πραγματοποίησης του γεγονότος. Η πράξη της πίστεως είναι δυνατόν να συντελέσει στην αποκάλυψη της αλήθειας της πίστεως⁴. Οι θεωρίες δεν αποτελούν απάντηση σε αινίγματα, τέλος των ερευνών, αλλά όργανα και

¹ Δ. Σφενδόνη Μένζου, Η φιλοσοφία του Πραγματισμού του C. Peirce., εκδόσεις Σακούλα- Θεσσαλονίκη.

² Θ. Βορέα, Εισαγωγή εις την Φιλοσοφίαν, ΟΕΔΒ, 1972, σελ 68.

³ Απόσπασμα του Peirce από τον W. James, στο Πραγματισμός, σελ 52.

⁴ Λ. Μπαρζελιώτη, Γνωσιοθεωρία.

μεθόδους για νέες έρευνες. Ο πραγματισμός αδιαφορεί για τις μεταφυσικές κατηγορίες των πρώτων αρχών, των αναγκαιοτήτων και στρέφεται προς τα αποτελέσματα και τις συνέπειες. Ο James επικρίνει τον ορθολογισμό με το εξής χαρακτηριστικό:

“Από την εποχή που παρατηρήθηκε η πρώτη συμφωνία, η πρώτη ομοφωνία ανάμεσα στους λογικούς, μαθηματικούς, φυσικούς και χημικούς συλλογισμούς – που είναι οι πρώτοι νόμοι - οι άνθρωποι παρασύρθηκαν τόσο από την γοητεία, την σαφήνεια την απλότητα τους, ώστε έφτασαν στο σημείο να πιστέψουν πώς βρήκαν το κλειδί που αποκρυπτογραφεί το αυθεντικό κείμενο των αιώνιων και ακατάλυτων βουλών του Υψίστου. Νομίζουν ... πως κι εκείνος σκέφτεται με τετραγωνικές ρίζες, με κωνικές τομές, με αναλογίες.... όπως το αστρονομικό σύστημα του Πτολεμαίου, ο χώρος του Ευκλείδη, η λογική του Αριστοτέλη και η μεταφυσική των σχολαστικών φιλοσόφων εξυπηρέτησαν τις ανάγκες τους ανθρώπινου πνεύματος για αιώνες. Όμως ήρθε μια ώρα, που η συσσωρευμένη ανθρώπινη εμπειρία έσπασε τα πλαίσια, ξεπέρασε τα όρια που έβαζαν οι παραπάνω ιδέες και τα συστήματα, ώστε σήμερα να είναι σχετικά μόνο αληθινά, να είναι αληθινά μόνο στα πλαίσια που καθόριζε η τότε εμπειρία. ... καμία θεωρία δεν αναπαριστά τέλεια την αλήθεια, αλλά όλες προσφέρουν κάποιο όφελος”.

“Οι ιδέες μας, μας βοηθούν κατά ικανοποιητικό τρόπο να έρθουμε σε επαφή με άλλους τομείς της εμπειρίας μας, να τους απλουστεύσουμε... από την στιγμή που μια ιδέα καταφέρει να μας μεταφέρει μέσα στο χώρο της εμπειρίας, από ένα σημείο σε άλλο, από την στιγμή που θα γίνει, ανάμεσα σε εμάς και στα πράγματα, συνδετικός δεσμός, που ικανοποιεί τις απαιτήσεις μας και τις πρακτικές ανάγκες μας και απλοποιεί το έργο μας, μας εξασφαλίζει την σιγουριά που επιδιώκουμε στη δράση μας, τότε αυτή η ιδέα θα είναι μια ιδέα αληθινή⁵.

Οι δυσκολίες που αντιμετώπισε ο πραγματισμός κατά την εξήγηση της σημασίας της έννοιας "αλήθεια" και οι διαφορετικές απόψεις που είχαν διατυπωθεί συνετέλεσαν, ώστε ο Dewey να εγκαταλείψει τις έννοιες "αλήθεια" ή "ψεύδος" και να τις αντικαταστήσει με άλλες λιγότερο παραπλανητικές. Άλλος λόγος ήταν η εναντίωση του προς την αντιστοιχιστική θεωρία της αλήθειας.

Μέσα σε ένα τέτοιο πλαίσιο αναπτύχθηκε η *οργανική θεωρία* του Dewey. Ο Dewey φιλόσοφος και παιδαγωγός αντικατέστησε την αλήθεια με την έννοια της έρευνας. “Η έρευνα είναι ο ρυθμιστικός και κατευθυνόμενος μετασχηματισμός μιας ακαθόριστης κατάστασης σε μια έτσι καθορισμένη ως προς τις συνιστώσες κατευθύνσεις της και σχέσεις, ώστε να μετατρέψει τα στοιχεία της αρχικής κατάστασης σε ένα όλο. Η έρευνα αφορά στους αντικειμενικούς μετασχηματισμούς του αντικειμενικού θέματος⁶.

Η κρίση, κατά τον Dewey, διαφέρει από την πρόταση. Η πρόταση έχει χαρακτήρα μεσολαβητικό, αναπαραστατικό και συμβολικό, ενώ η κρίση έχει άμεση υπαρξιακή σημασία. Η κρίση αφορά στις γενικές συνέπειες της έρευνας, στην δημιουργία των καταλλήλων συνθηκών για την αναδόμηση και τον μετασχηματισμό

⁵ W. James, Πραγματισμός.

⁶ B. Russel, History of Western Philosophy, σελ. 777.

μιας απροσδιόριστης κατάστασης. Η υπαρξιακή αναδόμηση, που τελικά επιτυγχάνεται, αποτελεί την βάση για την θεμελίωση που παρέχει η κρίση στην πίστη και στην γνώση, ή για ό,τι ο Dewey αποκαλεί θεμελιωμένη βεβαιότητα⁷. Η έννοια της αλήθειας, όπως η έννοια της θεμελιωμένης βεβαιότητας, συνδέεται αναπόσπαστα με την θεωρία της έρευνας. Έτσι, “η διαπίστωση την οποία εγγυάται η έρευνα, σχετίζεται προς την απροσδιόριστη κατάσταση, όπως ακριβώς η λύση σχετίζεται με το πρόβλημα. Το πρόβλημα καθορίζει τις συνθήκες της απάντησης, αλλά η απάντηση δίνει λύση στο πρόβλημα. Η δημιουργία των συνθηκών αντιμετώπισης του αποτελεί το κύριο χαρακτηριστικό της αλήθειας. Η αντιμετώπιση των δυσκολιών ενός προβλήματος αποκλείει την τύχη και την εικασία, ενώ η έρευνα, η ερμηνεία και η ανάλυση του προβλήματος παρεμβαίνουν, για να δώσουν την απάντηση, την θεμελιωμένη βεβαιότητα⁸.

Γενικώς, είναι δυνατόν να λεχθεί ότι η αλήθεια κατά τον Dewey, ευρίσκεται στην σχέση μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου σταδίου έρευνας (της προβληματικής καταστάσεως) και του τελευταίου (της κρίσεως, της λύσεως, του μετασχηματισμού). Η "αλήθεια" δηλαδή συσχετίζει τις δυο αυτές επιμέρους καταστάσεις: το πρόβλημα και την απάντηση. Με άλλα λόγια, η σχέση ευρίσκεται ανάμεσα στην αρχική κατάσταση των συνθηκών, των οποίων η ποιότητα χαρακτηρίζεται ως προβληματική, και στην τελική που χαρακτηρίζεται ως προσδιοριστική, πλήρης, κλειστή και λυμένη. Το δεύτερο στάδιο συνθηκών αποτελεί την θεμελιωμένη βεβαιότητα ή την αληθινή πίστη, που συνιστά γνώση⁹.

Στην επιστημολογία του Dewey, το *πρόβλημα* είναι κάτι περισσότερο από συγκυριακή άσκηση δεξιοτήτων. Είναι τρόπος, οδός συγκρότησης της "αληθούς" εικόνας του κόσμου. Οι θεωρήσεις αυτές αφορούσαν στην γενικότερη επιστημολογία αλλά παράλληλα σκόπευαν άμεσα σε διδακτικά μοντέλα¹⁰. Η θεωρία γνώσης συνδεόταν αναπόφευκτα με μια θεωρία μάθησης και στον Dewey βρίσκεται η ρίζα της ιδέας της Λύσης Προβλήματος¹¹. Μια ανάλογη στάση πραγματισμού διακρίνεται στα παράλληλα αιτήματα που συνέταξε η Michele Artigue¹².

5.3 Η Φαινομενολογία

Μια άλλη θεωρητική στάση, η οποία φιλοδοξούσε να ξεπεράσει τα αδιέξοδα της κλασσικής επιστημολογίας είναι η φαινομενολογία. Φιλόσοφοι από αυτούς που αναφέραμε όπως ο Bachelard, ο James, ο Brouwer, H. Weil, S. Lesniewski, είχαν επηρεαστεί από την φαινομενολογία. Ο ολλανδός Ludwig Landgrebe εφήρμοσε την

⁷ J. Dewey, *Logic: The Theory of Inquiry*, (New York, 1938), σελ 120 & *Experience and Education*, Collier MackMillan Publishers, 1979. J. Dewey, *Πώς Σκεπτόμεθα*, Εκδόσεις Κατσανά, Αθήνα 1960.

⁸ Στο ίδιο.

⁹ Λ. Μπαρζελιώτη, *Γνωσιοθεωρία*.

¹⁰ J. Dewey, ‘Πώς σκεπτόμεθα’, μετάφραση Γ. Κατσάμα, Εκδόσεις Α. Κατσάμα, 1963.

¹¹ S. Ratner, J. Dewey, E. H. Moore, and the Philosophy of Mathematics Education in the Twentieth Education, *Journal of Mathematical Behavior* 11, 119-158 (1992), J. Dewey, *Experience and Education*, Collier Books, 1938.

¹² Michele Artigue: "Epistemologie et didactique" cahier de didirem no. 3, IREM de Paris 7, 1989, βλέπε M. Henry, *Διδακτική Μαθηματικών*, σελ. 36.

φαινομενολογία στην Παιδαγωγική¹³. Στον 20ο αιώνα, ο όρος φαινομενολογία χρησιμοποιείται κυρίως για να κατονομάσει το φιλοσοφικό εκείνο κίνημα που έχει ως κύριο αντικείμενο την άμεση έρευνα και περιγραφή των φαινομένων ως συνειδητών βιωμάτων, χωρίς θεωρίες για την αιτιώδη ερμηνεία τους (όπως θα έκανε μια ψυχολογική αναφορά σε χημικές δραστηριότητες του νευρικού συστήματος) και όσο το δυνατόν περισσότερο ελεύθερων από ανεξέταστους προϋποθέσεις και προπαροδοχές.

Η ίδια η λέξη ως όρος είναι παλαιότερη, αναγόμενη τουλάχιστον στον 18ο αιώνα, όταν ο Ελβετός μαθηματικός και φιλόσοφος J. H. Lambert τον χρησιμοποίησε για να χαρακτηρίσει το τμήμα εκείνο της γνωσιοθεωρίας του που διαχωρίζει την αλήθεια από την ψευδαίσθηση και την πλάνη. Κατά τον 19ο αιώνα η λέξη συνδυάστηκε κυρίως με το έργο *Φαινομενολογία του Πνεύματος* (1807) του G. Hegel, ο οποίος περιέγραψε την εξέλιξη του ανθρώπινου πνεύματος από την απλή αισθητηριακή εμπειρία ως την *απόλυτη γνώση*.

Πρωτεργάτης της Φαινομενολογίας ήταν ο γερμανός φιλόσοφος Edmund Husserl¹⁴, με τη συγγραφή του έργου *Η Ιδέα της Φαινομενολογίας* (1906). Εν τούτοις, ακόμη και για τον Husserl, η έννοια της φαινομενολογίας, ως μιας νέας μεθόδου προορισμένης να προσφέρει ένα νέο θεμέλιο τόσο στη φιλοσοφία όσο και στην επιστήμη, αναπτύχθηκε σταδιακά και συνέχισε να αλλάζει ως το τέλος της σταδιοδρομίας του. Έχοντας σπουδάσει μαθηματικά, ο Husserl, ένωσε έλξη προς τη φιλοσοφία χάρη στον φιλόσοφο Franz Brentano, που η περιγραφική ψυχολογία του φαινόταν να προσφέρει στέρεη βάση στην επιστημονική φιλοσοφία. Η έννοια της *αποβλεπτικότητας* (βασική έννοια της φαινομενολογίας), δηλαδή η αμεσότητα της συνείδησης προς κάποιο αντικείμενο, ήταν ήδη παρούσα στο έργο του Brentano, *Η Ψυχολογία από εμπειρική άποψη*, (1874). Μέχρι τότε η αποβλεπτικότητα αποδίδεται μόνο στους τομείς της σκέψης και της βούλησης (ως προθετικότητας), αποκλείοντας τον τομέα της αίσθησης. Συγκεκριμένα, ο Brentano αναφέρει:

“Κάθε ψυχικό φαινόμενο χαρακτηρίζει ό,τι οι Σχολαστικοί του Μεσαίωνα ονόμασαν αποβλεπτική (αλλά και νοητική) ενύπαρξη ενός αντικειμένου και που εμείς, μολονότι όχι με εντελώς μονοσήμαντες εκφράσεις, θα ονομάζαμε αναφορά σ'ένα περιεχόμενο, κατεύθυνση προς ένα αντικείμενο (χωρίς με τούτο να εννοείται εδώ μια εμπειρική πραγματικότητα) ή προς την ενύπαρκτη αντικειμενικότητα. Όλα τα ψυχικά φαινόμενα περιέχουν εντός τους κάτι ως αντικειμενικό, μολονότι όχι όλα με όμοιο τρόπο¹⁵”.

Η αφετηρία της έρευνας του Husserl βρίσκεται στην πραγματεία του *Η Έννοια του Αριθμού*¹⁶), και αργότερα στο έργο του *Η Φιλοσοφία της Αριθμητικής*:

¹³ O. F. Bollnow, Φιλοσοφική Παιδαγωγική, μετάφραση, εκδόσεις Γρηγόρη.

¹⁴ E. Husserl (1859-1938). Αρχικά σπουδάζει μαθηματικά κανοντας διδακτορική διατριβή με τον K. Weierstrass, στη θεωρία των μεταβολών. Με τον Brentano στη Βιέννη κάνει ένα διδακτορικό με θέμα την ψυχολογική συγκρότηση των αριθμών. Για τουρο δέχεται την κριτική του Frege ως ψυχολογισμό. Αποποιείται τον Ψυχολογισμό στις ‘Λογικές Έρευνες’. Στο έργο του έχει δεχθεί την επίδραση τόσο του Frege όσο και του Hilbert, βλέπε, *The Cambridge Companion to Husserl*, Cambridge Co. 1999.

¹⁵ μετ. Γ. Ξηροπαϊδή, στο Αποβλεπτικό βίωμα και αναφορά, NEΥΣΙΣ, 4, 1996.

¹⁶ (*Der Begriff der Zahl*, 1887.

Ψυχολογικές και λογικές Έρευνες (1891). Οι αριθμοί δεν βρίσκονται έτοιμοι στη φύση, αλλά προκύπτουν μέσα από μια νοητική δραστηριότητα. Σε αυτό το έργο, απασχόλησε τον Husserl αποκλειστικά το ερώτημα πώς συμβαίνει κάτι σαν τη συγκρότηση των αριθμών; Η πραγματεία αυτή είναι σημαντική για την μεταγενέστερη εξέλιξη του Husserl για δύο λόγους:

1. Επειδή εμπεριέχει τα πρώτα δείγματα των εννοιών *συλλογισμός, συγκρότηση, περιγραφή και θεμελιώδης συγκρότηση του νοήματος*, εννοιών που έπαιξαν αργότερα εξέχοντα ρόλο στη φιλοσοφία του.

2. Γιατί εξέφραζε δύο σημαντικά γεγονότα:

a) μια κριτική του βιβλίου του από τον Frege, ο οποίος είχε κατηγορήσει τον Husserl ότι συνέχεε λογικούς και ψυχολογικούς παράγοντες, και

b) την ανακάλυψη, από τον Husserl, του έργου με τίτλο *Η Θεωρία της επιστήμης* (1837), του Bolzano και της άποψής του σχετικά με τις *αλήθειες καθ'εαυτές*, που οδήγησαν τον ίδιο σε ανάλυση και κριτική εξέταση του ψυχολογισμού¹⁷ και του ερωτήματος, αν η ψυχολογία θα μπορούσε να χρησιμεύσει ως βάση για την καθαρή λογική, πράγμα που αντιλήφθηκε σαφώς ότι δεν ήταν πλέον δυνατό να επιτευχθεί.

Όταν ο Husserl έγραψε το *Philosophie der Arithmetik*, επικρίθηκε από τον Frege για ψυχολογισμό. Στις μετέπειτα μελέτες του για την Λογική αποποιήθηκε τον ψυχολογισμό αλλά αν και αποκήρυξε τον Ψυχολογισμό ο Husserl ποτέ δεν εγκατέλειψε την αρχική φιλοσοφική του θέση για *την καταγωγή μέσα στην υποκειμενική εμπειρία της αντίληψης, των ιδεατών εννοιών και των επιστημονικών αντικειμένων*¹⁸. Αυτό το Θεώρημα της φαινομενολογίας αποτελεί στην ουσία την βασική αρχή του κονστρουκτιβισμού στην διδασκαλία.

Αν όμως δεν ήθελε να καταλήξει στο σολιψισμό, έπρεπε να λύσει το πρόβλημα ποια είναι η *σχέση ανάμεσα στην υποκειμενικότητα της γνώσης και στην αντικειμενικότητα του περιεχομένου της γνώσης*. Με άλλα λόγια έπρεπε να καθορίσει τους όρους και τις διαδικασίες που θα απαντούσαν στο ερώτημα *πώς συγκροτείται μέσα στο υποκείμενο ο αντικειμενικός- διϋποκειμενικός κόσμος, πώς παράγονται καθολικές αλήθειες, επομένως άπειρα μεταβιβάσιμες μέσω της γλώσσας και της γραφής*¹⁹.

Ο *βίocosμος* για τον Husserl αποτελεί τον μόνο βέβαιο επιστημολογικά στοιχείο και η *διϋποκειμενικότητα*²⁰ είναι η μόνη δυνατή προέκταση του μέσω της φυσικής γλώσσας που καταχωρεί τα βιώματα των άλλων. Μέχρι τον Husserl η φιλοσοφική σύσταση του υποκειμένου, που αντλούσε την εκκίνησή της στο καρτεσιανό *cogito*, υποτιμούσε την αντίληψη του *άλλου* και *μου δίδασκε πώς το Εγώ δεν είναι προσιτό παρά μόνο στον εαυτό μου*²¹. Για τον Husserl η *υπερβατική διϋποκειμενικότητα είναι προϋπόθεση της αντικειμενικότητας γενικά*. Η φαινομενολογία υπογράμμισε την μεγάλη επιστημολογική αξία των *βιωμένων*

¹⁷ Βλέπε στην παράγραφο για τον Frege.

¹⁸ J. P. Miller, *Numbers in presence and absence: A study of Husserl's Philosophy of Mathematics*, M. Nijhoff Pub.

¹⁹ J. Derrida, *E. Husserl - Η Φαινομενολογία και το πέρας της Μεταφυσικής*, Εποχές τ. 34, 1966.

²⁰ E. Husserl, *Καρτεσιανοί στοχασμοί*, εκδ. ροές.

²¹ M. Ponty, *Προίμιο στην Φαινομενολογία της αντίληψης*, εκδ. Έρασμος.

εννοιών που μαζί με την *διϋποκειμενικότητα*, παραπέμπουν σε μια *γλωσσικά διαμεσολαβημένη αλληλόδραση* από όπου αντλούν το κύρος τους τα νοήματα.

Στον πρώτο τόμο του έργου του *Λογικές Έρευνες*²², ο Husserl άρχισε με μια κριτική του ψυχολογισμού. Παρόλα αυτά, συνέχισε διεξάγοντας προσεκτική έρευνα των ψυχικών ενεργημάτων, στις οποίες, και μέσω των οποίων δίνονται οι λογικές δομές. Οι έρευνες αυτές θα μπορούσαν να δώσουν την εντύπωση ότι είναι περιγραφικές ψυχολογικές έρευνες, μολονότι δεν τις εννοούσε έτσι ο ίδιος. Το πρόβλημα που τον ενδιέφερε ήταν η ανακάλυψη της βασικής δομής αυτών των ενεργημάτων. Εδώ, η έννοια της αποβλεπτικότητας του Brentano αποκτούσε πλουσιότερο και πιο εκλεπτυσμένο νόημα. Ο Husserl έκανε διάκριση μεταξύ αντιληπτικής και κατηγορικής διαίσθησης και καθόρισε ότι το θέμα της κατηγορικής διαίσθησης βρίσκεται στις λογικές σχέσεις. Το πραγματικό ενδιαφέρον του για τη φαινομενολογία διατυπώθηκε σαφώς για πρώτη φορά στο άρθρο του *Η Φιλοσοφία ως αυστηρή επιστήμη* (1911)²³. Στο έργο αυτό, ο Husserl, πάλεψε με δύο απαράδεκτες απόψεις: τη φυσιοκρατία και τον ιστορισμό.

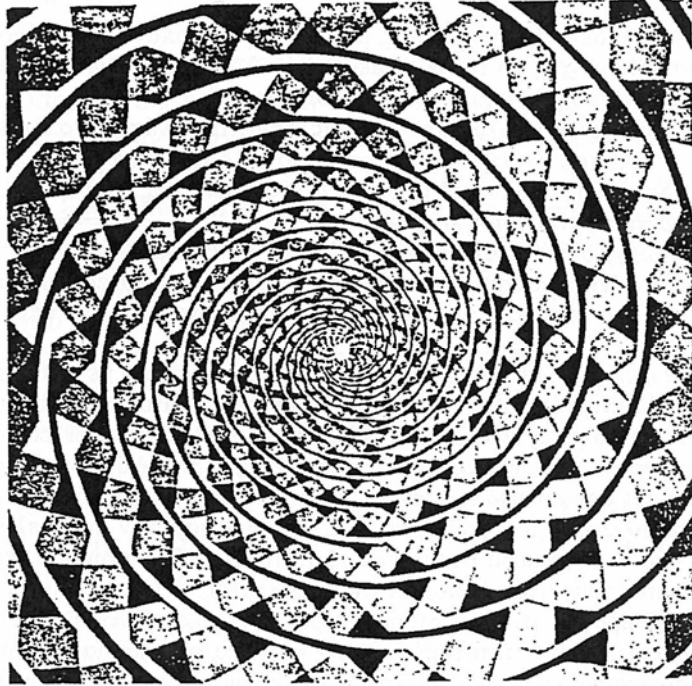
Η φυσιοκρατία επιχειρεί να εφαρμόσει τις μεθόδους των φυσικών επιστημών σε όλους τους άλλους γνωστούς τομείς, συμπεριλαμβανομένου και του τομέα της συνείδησης ώστε ο Λόγος να φυσικοποιεί. Μολονότι, γίνεται τότε μια απόπειρα να βρεθεί μια βάση για τις επιστήμες του ανθρώπου μέσω της Πειραματικής Ψυχολογίας (που ανέπτυξαν τρεις κυρίως ψυχολόγοι W. Wundt και H. Helmholtz και W. James στα τέλη του 19^{ου} αιώνα), αποδεικνύεται πως αυτό είναι αδύνατον επειδή έτσι δεν μπορεί κανείς να συλλάβει ακριβώς τι διακυβεύεται στη γνώση όπως αυτή ανευρίσκεται στις φυσικές επιστήμες. Αντίθετα, ο Brentano εγκαθίδρυσε μια ψυχολογία που ερευνούσε τα ενεργήματα του νου χωρίς την αναγωγή τους σε δομές της φυσιολογίας²⁴. Αυτό που θα πρέπει να εξετάσει ο φιλόσοφος είναι η σχέση μεταξύ συνείδησης και *Είναι*. Πράττοντας έτσι, θα πρέπει να αντιληφθεί ότι από τη σκοπιά της γνωσιολογίας το *Είναι* είναι προσιτό σε αυτόν, μόνον ως συνάρτηση των συνειδητών πράξεων. Θα πρέπει έτσι να εξετάσει με πολλή προσοχή τι συμβαίνει σε αυτές τις πράξεις. Για να γίνει εν μέρει κατανοητό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε ένα παράδειγμα όπως είναι οι σπείρες του Frazer²⁵

²² Μετάφραση στα Ελληνικά του 2ου τόμου, εκδόσεις, Γνώση, 1900.

²³ μετάφραση στο Δευκαλίων 12, 1974.

²⁴ R. Tragesser, Husserl and realism in logic and Math/s, Cam. pr. 1984.

²⁵ Στο ίδιο.



Οι σπείρες του Frazer

απόρροια των βασικών τρόπων της συνείδησης, η σκέψη του Husserl παρέμεινε κοντά στην ψυχολογία²⁷. Όμως, σε αντιδιαστολή με την περίπτωση της ψυχολογίας, στη φαινομενολογία η συνείδηση θεματοποιείται κατά τρόπο πολύ ειδικό και καθορισμένο, δηλαδή στο βαθμό ακριβώς εκείνο που ως συνείδηση είναι ο τόπος όπου θα πρέπει να πραγματοποιείται κάθε είδος συγκρότησης και θεμελίωσης νοήματος²⁸.

²⁷ Ο J. Piaget, στο Σοφία και Ψευδαισθήσεις της Φιλοσοφίας, μετάφραση Κ. Παπαγιώργη, Εκδόσεις Γνώση 1987 παρατηρώντας το κονστрукτιβιστικό πρόγραμμα της φαινομενολογίας λέει: ντροπή μου που δεν είχα διαβάσει Husserl αλλά τοποθετεί τον Husserl στο ψυχολογικό ρεύμα παρά στο Λογικό.

²⁸ **Η βασική μέθοδος κάθε φαινομενολογικής έρευνας**, όπως την ανέπτυξε ο Husserl, είναι η *αναγωγή*: η ύπαρξη του κόσμου θα πρέπει να τεθεί σε παρένθεση, όχι επειδή ο φιλόσοφος θα την αμφισβητούσε, αλλά απλώς επειδή αυτός ο υπαρκτός κόσμος δεν είναι το καθ'αυτό θέμα της φαινομενολογίας (το θέμα της φαινομενολογίας είναι μάλλον ο *τρόπος με τον οποίο συμβαίνει η γνώση του κόσμου*).

Το πρώτο βήμα της αναγωγής συνίσταται στη φαινομενολογική αναγωγή, μέσω της οποίας κάθε δεδομένο μεταλλάσσεται σε φαινόμενο με την έννοια αυτού, το οποίο είναι γνωστό στη συνείδηση και από τη συνείδηση. Η αναγωγή αυτή αναπροσανατολίζει τη θεώρηση του ανθρώπου, κατευθύνοντάς την από τα πράγματα προς τη συνείδηση.

Το δεύτερο βήμα αποτελεί η ειδητική αναγωγή. Το να έλθει κανείς σε επαφή με τη συνείδηση δεν είναι αρκετό. Αντίθετα, τα διάφορα συνειδησιακά ενεργήματα θα πρέπει να γίνονται προσिता με τρόπο, ώστε οι ουσίες τους να μπορούν να γίνουν αντιληπτές. Στην ειδητική αναγωγή θα πρέπει κανείς να παραιτηθεί από καθετί χειροπιαστό, από καθετί που απλώς μπορεί να συμβαίνει έτσι ή αλλιώς. Ένας τρόπος για τη σύλληψη της ουσίας είναι η *ουσιακή εποπτεία*, η *ενόραση των ουσιών* και των *ουσιωδών δομών*. Δεν πρόκειται για κάποιο μυστηριώδες είδος ενόρασης. Σχηματίζει κανείς ένα πλήθος παραλλαγών του δεδομένου και, ενώ διατηρεί την πολλαπλότητα, επικεντρώνει την προσοχή του σε ό,τι παραμένει αναλλοίωτο μέσα στην πολλαπλότητα. Δηλαδή, η ουσία είναι εκείνο το ταυτόσημο, κάτι που παραμένει συνεχώς ο εαυτός του κατά την πορεία της παραλλαγής. Γι'αυτό ο Husserl την αποκαλούσε το μη διαφοροποιούμενο. (Αν νοήσω ένα πράγμα και αναζητήσω νοερά τα χαρακτηριστικά εκείνα που είναι απαραίτητα αυτό είναι η ουσία του, π.χ για το σώμα η εκτατότητα, για την καρτέκλα η σημασία της χρήσης της ως καρτέκλας, δηλαδή μια κατασκευή με τα βασικά χαρακτηριστικά που την διαφοροποιούν απ'οτιδήποτε άλλο.)

Στην Διδακτική των Μαθηματικών αρχικά έχουμε την εισαγωγή του Hans Freudenthal (1983) *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Reidel Publishing Company. Στο βιβλίο αυτό παρουσιάζει μαθηματικές έννοιες μέσα από τις *δυνατές εμφανίσεις τους*. Π.χ. Το μήκος εμφανίζεται στα παιδιά ως ένα σύμβολο που εκφράζει βάθος, ύψος, οριζόντια απόσταση, μήκος μιας κλωστής μη τεντωμένης.

Τα τελευταία χρόνια φαινομενολογικές έννοιες χρησιμοποιούν οι Luis Radford και Tony Brown. Tony Brown²⁹ βάζει ζητήματα εμνηνευτικής φαινομενολογίας και ψυχαναλυτικής σχέσης των υποκειμένων όπως προκύπτει από τις θεωρίες του Lacan. Επίσης, στην Παιδαγωγική φαινομενολογία υπάρχει μέσω *συστημικών* θεωρήσεων, *ερμηνευτικών* θεωρήσεων και της Θεωρίας της επικοινωνιακής διδασκαλίας³⁰.

Ο Luis Radford³¹ χρησιμοποιεί μια σύνθεση θεωριών του Kant, του Vygotsky, του Husserl. Από τον Husserl επικαλείται την σημαντική ιδέα της εξαντικειμενίκευσης (objectification).

Τα υποκείμενα αποβλεπτικά χρησιμοποιούν στην κοινωνική κατασκευή νοήματος αντικείμενα, εργαλεία, γλωσσολογικά επινοήματα και σημεία ώστε να πετύχουν σταθερές μορφές επικοινωνίας, να καταστήσουν εμφανείς τις προθέσεις τους και να επιτύχουν τις δράσεις ώστε να καταφέρουν στοχους στις δραστηριότητες τους καλούμε *σημειωτικό νοήμα της εξαντικειμενίκευσης* (semiotic means of objectification.)

Ενώ, ως αντικείμενο καταδεικνύει αυτό που αναπαριστούμε με αυτά τα σημειολογικά εργαλεία και τις αναπαραστάσεις. Το αντικείμενο υποδεικνύεται με την αναπαραστασή του και δεν ταυτίζεται με αυτήν. Η εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ αποδίδει σε μια αναπαράσταση ένα κύκλο που μπορώ να καταδείξω και με ένα σχήμα στο καρτεσιανό γινόμενο ή να το περιγράψω λεκτικά. Η

αυτό είναι η ουσία του, π.χ για το σώμα η εκτατότητα, για την καρέκλα η σημασία της χρήσης της ως καρέκλας, δηλαδή μια κατασκευή με τα βασικά χαρακτηριστικά που την διαφοροποιούν απ'ότιδήποτε άλλο.)

Το τρίτο βήμα αποτελεί η υπερβατική αναγωγή. Αυτή συνίσταται σε μια αντιστροφή των επιτευμάτων της συνείδησης εκείνης την οποία ο Husserl, ακολουθώντας τον Kant, αποκαλούσε υπερβατική συνείδηση, μολονότι την αντιλαμβάνονταν κατά τον δικό του τρόπο. Το βασικότερο γεγονός που συμβαίνει σ'αυτή τη συνείδηση είναι η δημιουργία της επίγνωσης του χρόνου (της χρονικότητας), μέσω των ενεργειών της προβολής (μέλλον) και της συγκράτησης στη μνήμη (παρελθόν), που είναι κάτι ως αυτοσυγκρότηση. Το να κάνει φαινομενολογία, ήταν για τον Husserl, ισοδύναμο με την επιστροφή σε ένα υπερβατικό Εγώ ως βάση για τη θεμελίωση και τη συγκρότηση κάθε νοήματος. Μόνον όταν έχει κανείς φτάσει στη βάση αυτή, μπορεί να επιτύχει την ενόραση που καθιστά τη συμπεριφορά του καθαρή στην ολότητά της και τον βοηθάει να κατανοήσει πώς δημιουργείται το νόημα, και πώς το νόημα βασίζεται επάνω στο νόημα.

Ο Husserl εργάστηκε επάνω στο θέμα της αποσαφήνισης της υπερβατικής αναγωγής μέχρι τις παραμονές του θανάτου του.

²⁹ T. Brown, (1991) *Hermeneutics and mathematical activity Educational studies of Mathematics* 22, 475-480 & (1996) *The phenomenology of the Mathematical Classroom*, ESM, 31. 115-150. & Lacan, *subjectivity and the task of mathematics education research* ESM, 2007.

³⁰ Φ. Κοσσυβάκη, *Επικοινωνιακή διδασκαλία*, εκδ. Gutenberg, 1998.

³¹ Radford, L. (2003). *Gestures, Speech and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. Mathematical Thinking and Learning*, 5 (1), 71-107 & *The Anthropology of Meaning, Educational Studies in Mathematics* (2006), 61: 39-65.

όποια αναπαράσταση δεν εξαντλεί το αντικείμενο το οποίο βρίσκεται πίσω από αυτή ως *αποβλεπτικό αντικείμενο*.

Ο Husserl έγραψε το “Origins of Geometry”³² ένα άρθρο 25 σελίδων το 1917. Ο Derrida³³ έγραψε ένα βιβλίο το 1962 σχολιάζοντας αυτό το άρθρο τονίζοντας την σημασία του για την φιλοσοφία και την ψυχολογία των μαθηματικών.

‘Η Προέλευση της Γεωμετρίας αφορά στην υπόσταση των ιδεατών αντικειμένων της επιστήμης (των οποίων η γεωμετρία είναι ένα από αυτά), η παραγωγή τους με ενεργήματα ταύτισης όπως ‘το αυτό’ και συγκροτήσεις εξακρίβωσης διαμέσου μιας ιδεατοποίησης και ένα πέρασμα σε οριακή κατάσταση – μια διαδικασία που ξεκινά από τον αισθητηριακό κόσμο που μας περιβάλλει, τον περιορισμένο και προεπιστημονικά υλικό...

Το μαθηματικό αντικείμενο φαίνεται ότι είναι προνομιακό παράδειγμα και μόνιμο νήμα που καθοδηγεί τον συλλογισμό του Husserl. Γιατί το μαθηματικό αντικείμενο είναι *ιδεατό* (ideal). Απόλυτα αντικειμενικό δηλαδή ολικά απαλλαγμένο από την εμπειρική υποκειμενικότητα, είναι παρόλα αυτά μόνο ότι εμφανίζεται ότι είναι. Τοιουτοτρόπως είναι πάντα ήδη *περιορισμένο* στην φαινομενικό του νόημα και η οντότητα του είναι, από το ξεκίνημά του, αντικείμενο της καθαρής συνείδησης’.

Derrida (1962, pp. 25-27)

Επιπλέον, Ο Derrida διαχωρίζει την ιδεατότητα όπως συναντάται στο έργο του Husserl σε αντίθεση των Πλατωνικών ιδεατοτήτων: “Τα ιδεατά αντικείμενα δεν προϋπάρχουν του όποιου υποκειμενικού ενεργήματος, όπως στον παραδοσιακό Πλατωνισμό. Αν έχουν ιστορία πρέπει να συνδέονται με, δηλαδή πρέπει να βρίσκεται στην πρωτοϊδρυτικά ριζωμένη πράξη στην πρωτοϊδεοποίηση βασισμένη στο υπόστρωμα ενός πραγματικά αντιληπτικού κόσμου. Η ιδεατότητα είναι απόλυτα κατασκευαστική και επινοημένη αν και *αχωρόχρονη* (nonspatiotemporal), Derrida (p. 40- 45).

Η αντικειμενικότητα στον Husserl είναι διττή, αυτή η οποία επιτυγχάνεται σε μια άμεση και διαμεσολαβημένη κοινότητα που πραγματοποιείται προφορικά ‘λόγος και απελευθερωμένο αντικείμενο από *ατομική* υποκειμενικότητα που ωστόσο αφήνεται σίγουρα στην έναρξη της κατά τον συγχρονισμό μιας ανταλλαγής μέσα σε μια *ιδρυτική κοινότητα*. Το ενδεχόμενο της *γραφής* θα εξασφαλίσει την απόλυτη μεταβιβασιμότητα του (νοητού) αντικειμένου, η απόλυτη ιδεατή Αντικειμενικότητα - δηλαδή η καθαρότητα της σχέσης της σε μια καθολική υπερβατική υποκειμενικότητα.” Και τότε “κάθε παρόν υποκείμενο είναι απών³⁴”.

Με αυτή τη λογική το υποκείμενο Πυθαγόρας και η κοινότητά τους, ή η αρχαία ελληνική γλώσσα δεν υπάρχουν στην διατύπωσή του θεωρήματος που είναι άπειρα μεταβιβάσιμο. Η εξαντικειμενίκευση του θεωρήματος εμπεριέχει ένα

³² E. Husserl Η προέλευση της Γεωμετρίας, Εκδόσεις Εκκρεμές 2003.

³³ Jacques Derrida, E. Husserl *Origin of Geometry*, Translated by J. Leavey, Nebraska, 1989.

³⁴ Η λειτουργία της εξαντικειμενίκευσης είναι παρούσα μέσα στην προσπάθεια όλων των μαθηματικών όταν προσπαθούν να διατυπώσουν σε καθαρές και σαφείς δηλώσεις τις δαισθητικές προσεγγίσεις κάνοντας κατανοητό για ένα άλλο υποκείμενο που έχει εμπρός του το γραμμένο μόνο.

ανθρωπολογικό χαρακτήρα αλλά ανεξάρτητο του χρόνου πανχρονικό. (omnitemporality – pantemporality)³⁵ και ως επακόλουθο της ‘υπερβατολογικής υποκειμενικότητας’ αποδίδεται η ιστορική διάσταση των ιδεατοτήτων. Με αυτό το νόημα της κατασκευής των εννοιών μέσα από τις πρωτοιδρυτικές πράξεις.

Δηλαδή, στην ‘Προέλευση’ ο Husserl θέτει την κεντρική ερώτηση της επιστημολογίας του: *Πώς οι γεωμετρικές ιδεατότητες... απορρέουν από μια εσωτερική προέλευση, που αποτελεί δομή μέσα στην συνείδηση για το χώρο στην ψυχή του πρώτου επινοητή, για την ιδεατή αντικειμενικότητα.* Η προέλευση αποτελεί έργο ωριμότητας του Husserl και εμπεριέχει τον κύριο στόχο της επιστημολογίας του:

Την σχέση ... μεταξύ της υποκειμενικότητας της διαδικασίας της γνώσης και της αντικειμενικότητας του περιεχομένου της γνώσης³⁶.

Ο αναγνώστης που θα ήθελε να διαβάσει περισσότερα για την Φαινομενολογία καλό και σχετικώς απλό είναι το εγχειρίδιο:

Robert Sokolowski, Εισαγωγή στη Φαινομενολογία, Μετάφραση Π. Κόντος, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών 2003.

Επίσης το

The Cambridge Companion to Husserl, (Ed. B. Smith & D. W. Smith) Cambridge Un.Press 1995.

³⁵ Derrida, σελ. 73

³⁶ Husserl E.: 1982, Logical Investigations, Routledge & Kegan Paul, London. See also The Cambridge Companion to Husserl, 1995.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΠΛΑΙΣΙΟ ΑΝΑΚΑΛΥΨΗΣ Ι

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΑ

5. 1. Οι Διαψευδτικές Θεωρίες

Μέσα σ'αυτή την πορεία της σχετικοποίησης της σημασίας της αλήθειας σ'αυτό τον αιώνα αναπτύχθηκαν και άλλες επιστημολογικές προτάσεις που έθεταν τα ζητήματα σε άλλη βάση. Οι προτάσεις αυτές που οφείλονται στον Bachelard, Popper, Kuhn, Lakatos, Feyerabend, ονομάζονται *διαψευδτικές* (fallibilistic), ή *επισφαλείς*¹.

Τοποθετούν την επιστήμη σε μια άλλη στάση, συμπληρωματική εκείνης που την καταλαβαίνουμε παραδοσιακά. Ξεκινά με την συζήτηση που είχε γίνει για το κριτήριο της επαληθευσιμότητας. Οι φυσικοί νόμοι για τον Popper δεν είναι επαληθεύσιμοι με το τυπικό νόημα που θα ήθελε ο νεοθετικισμός. Έχουν μορφή ολικών προτάσεων και ανοίγουν έναν άπειρο ορίζοντα δυνατών παρατηρήσεων. Η πρόταση, π.χ. *κάθε χαλκός είναι αγωγός ηλεκτρισμού*, που έχει μορφή καθολικού νόμου της φύσης, δεν είναι επαληθεύσιμη, μια και είναι αδύνατο να παρατηρηθεί όλος ο χαλκός μέσα στο σύμπαν. Οι καθολικές προτάσεις αν και δεν μπορούν να επαληθευτούν πλήρως, μπορούν εντούτοις να αναιρεθούν πλήρως με μια αντιλέγουσα πρόταση. Ας πάρουμε την πρόταση “*όλοι οι κύκνοι είναι λευκοί*” διαψεύδεται αμέσως μόλις βρεθεί μαύρος κύκνος. Την πρόταση “*υπάρχει μονοκέρατος*” μπορούμε να την επαληθεύσουμε, ως υπαρκτική πρόταση, αλλά όχι να την αναιρέσουμε. Οι θεωρίες λοιπόν αποτελούν επαγωγικές επαληθεύσεις εμπειρικών δεδομένων. Αυτές γεννιούνται ως υποθέσεις ή εικασίες, που έχουν μια μονόπλευρη σχέση με το υλικό των γεγονότων: *μπορούν να διαψεύδονται μέσα στα γεγονότα και όχι να επαληθεύονται*. Η παρατήρηση, που είναι πάντα ανοιχτή, μπορεί να τις αναιρεί ανακαλύπτοντας το ψεύδος των παρατηρήσιμων συνεπειών. Στη διαδικασία του εμπειρικού ελέγχου λογικό όριο δεν υπάρχει.

Η ανάπτυξη της γνώσης, που συντελείται έτσι σε τρία στάδια,

- α) με τη διαισθητική φανταστική διαμόρφωση μιας εικασίας,
- β) με τη λογική παραγωγή των παρατηρήσιμων συνεπειών της και
- γ) με την έκθεση των συνεπειών αυτών σε εμπειρικό έλεγχο,

¹ P. Ernest, The philosophy of Mathematics Education.

δείχνει ότι τίποτε οριστικό και βέβαιο δεν υπάρχει στην επιστήμη. Το κεφάλαιό της είναι το λάθος και όχι η αλήθεια. Και η κλασσική επιστημολογική σύσταση να επιδιώκεις τη βεβαιότητα στην γνώση αντιστρέφεται:

Να μην τρέπεις προς την βεβαιότητα (μια και η επιστήμη προσφέρει μόνο δοκιμαστικές και διαψεύσιμες προτάσεις). Κάνε τις υποθέσεις σου τόσο απλά ελέγξιμες όσο γίνεται². Αντί για αλήθεια μπορούμε να κάνουμε λόγο μόνο για *επιβεβαίωση* όρος που παραπέμπει ευθέως στις απόψεις του Dewey.

Παλαιότερος από τον Popper, ο Bachelard (1884 - 1962) είχε διατυπώσει, διαψευστικές αντιλήψεις. Εκείνο που έχει αξία στην περίπτωση του Bachelard είναι ότι τις επισημάνσεις του τις συσχέτιζε άμεσα με τις παιδαγωγικές πρακτικές και έδωσε στην επιστημολογία, κάτι που οι άλλοι είχαν παραμελήσει.

Την σύνδεσή της με την Διδακτική. Ο Bachelard γράφει:

“Από την στιγμή που η γνώση έχει ιστορία, το επιστημονικό πνεύμα έχει δομή μεταβλητή... υπάρχουν σκέψεις που δεν ξαναγίνονται: οι σκέψεις που διορθώθηκαν, που πλάτυναν, που συμπληρώθηκαν, δεν ξαναγίνονται, δεν ξαναγυρίζουν στην παλαιά στενάχωρη και επισφαλής περιοχή τους. Βασικά, το επιστημονικό πνεύμα δεν είναι παρά μια συνεχής επανόρθωση της γνώσης, διερεύνηση των ορίων της. Κρίνει το ιστορικό παρελθόν καταδικάζοντάς το, ενώ δομή του είναι η συνείδηση των ιστορικών του πλανών. Από επιστημονική άποψη η αληθογνωσία νοείται ως ιστορική επανόρθωση μιας μακρόβιας πλάνης, η εμπειρία νοείται ως επανόρθωση της κοινότητας και αρχικής ψευδαίσθησης... Η πεμπουσία του στοχασμού είναι να καταλάβει ό,τι δεν έχει καταλάβει. σκέψεις μη ευκλείδειες, μη καρτεσιανές συνοψίζονται σ' αυτή την ιστορική διαλεκτική που αντιπροσωπεύουν είτε ανασκευή μιας πλάνης, είτε επέκταση ενός συστήματος, το συμπλήρωμα μιας σκέψης³”.

Το κεφάλαιο που έχει μεγαλύτερη σημασία στον Bachelard είναι η Θεωρία του για το *επιστημολογικό εμπόδιο*. Ας παρακολουθήσουμε την σκέψη του⁴:

“Αν ερευνήσουμε την επιστημονική πρόοδο από την άποψη των ψυχολογικών συνθηκών θα καταλήξουμε στην πεποίθηση ότι *το πρόβλημα της επιστημονικής γνώσης πρέπει να τεθεί με όρους εμποδίου*. Και λέγοντας εμπόδιο, βέβαια, δεν εννοούμε τα εξωτερικά εμπόδια εννοούμε, όπως η

² Θ.Βέικος, Αναλυτική Φιλοσοφία, σελ. 104.

³ G. Bachelard, *Nouvel esprit scientifique*, Ch. VI, σ. 173, Ο Πολίτης, 12, 1977.

⁴ G. Bachelard, *Formation de l' Esprit Scientifique*, σ. 16-19, στο ίδιο.

πολυπλοκότητα και το παροδικό των φαινομένων, ούτε αιτιόμαστε την αδυναμία των αισθητηρίων και του ανθρώπινου πνεύματος. Γιατί φαίνεται ότι εξαιτίας κάποιας λειτουργικής αναγκαιότητας, οι αργοπορίες και οι διαταραχές εμφανίζονται στην ίδια τη γνωστική διαδικασία, στην ίδια τη γνωστική πρακτική. Στην πρακτική αυτή θα βρούμε αιτίες στασιμότητας, ακόμη και οπισθοδρόμησης, και θα αποκρυπτογραφήσουμε τους λόγους αδράνειας που είναι συνυφασμένοι με την επιστημονική πρόοδο και ονομάζουμε *επιστημολογικά εμπόδια*. Οι αποκαλύψεις του πραγματικού είναι πάντα *αναδρομικές*.

Ο G. Bachelard συνεχίζει με το παρακάτω κείμενο:

“Το πραγματικό δεν είναι ποτέ αυτό που ήταν δυνατό να πιστεύουμε, αλλά πάντα εκείνο που οφείλαμε να σκεφτούμε. Η εμπειρική σκέψη γίνεται καθαρή αναδρομικά, όταν δηλαδή ο συλλογιστικός μηχανισμός έχει ήδη μπει μπροστά. Έτσι, επιστρέφοντας σ'ένα παρελθόν γεμάτο πλάνες, βρίσκουμε την αλήθεια σαν πραγματική μεταμέλεια. Πραγματικά, γνωρίζουμε **ενάντια** στις παρωχημένες γνώσεις μας, καταστρέφοντας τις λανθασμένες, δαμάζοντας κάθετι που, στον ίδιο το στοχασμό, στέκει εμπόδιο στην νοηματοδότηση.... Το ξεκίνημα από το μηδέν για τη θεμελίωση και την ισχυροποίηση μιας ιδέας είναι σκέψη που μόνο σε πολιτισμούς απλής παράθεσης στοιχείων μπορεί να γεννηθεί.... Όταν το πνεύμα αντιμετωπίζει την επιστημονική παιδεία δεν είναι ποτέ νεαρό, μάλιστα είναι πολύ γέρικο, γιατί έχει την ηλικία των προκαταλήψεών του. Για το πνεύμα πρόσβαση στις επιστήμες σημαίνει παραδοχή της απότομης συνειδητοποίησης που καλείται να αμφισβητήσει ένα ολόκληρο παρελθόν”.

Η έννοια του επιστημολογικού εμποδίου, που εισήχθη από τον Bachelard, Εξελίχθηκε και προσαρμόστηκε για τα αντίστοιχα εμπόδια στην διδασκαλία από τον Brousseau. Ο ίδιος ο Bachelard⁵ λέει:

“Στην εκπαίδευση η έννοια του επιστημολογικού εμποδίου έχει επίσης παραγνωριστεί... Ελάχιστοι είναι εκείνοι που ερεύνησαν εις βάθος την ψυχολογία της πλάνης, της άγνοιας και του μη στοχασμού.... Ωστόσο, δεν έχουν σκεφτεί ότι ο έφηβος καταφτάνει στο μάθημα π.χ. της Φυσικής έχοντας ήδη προκατασκευασμένες εμπειρικές γνώσεις. Συνακόλουθα, το πρόβλημα δεν είναι να αποκτήσει ο μαθητής μια πειραματική μόρφωση αλλά, αντίθετα, να *αλλάξει* την προκατασκευασμένη εμπειρική παιδεία του, να ανατρέψει τα συσσωρευμένα από την καθημερινή ζωή εμπόδια. Ένα παράδειγμα: η ισορροπία των πλεόντων σωμάτων γίνεται αντικείμενο μιας οικείας εμπειρικής γνώσης, πράγμα που συνιστά ένα ολόκληρο πλέγμα από

⁵ G. Bachelard, Formation de l' Esprit Scientifique, σελ 16, Ο Πολίτης, 12, 1977.

πλάνες. Κατά γενικό κανόνα, στο σώμα που επιπλέει αποδίδεται μια ενεργητικότητα. Η ιδιότητα αυτή αποδίδεται στο σώμα που *κολυμπάει* ακόμη περισσότερο. Αν επιχειρήσουμε να βυθίσουμε ένα κομμάτι ξύλο στο νερό, ανθίσταται. Συχνά η αντίσταση δεν αποδίδεται στο νερό. Αλλά αφού τα πράγματα έχουν έτσι, γίνεται πολύ δύσκολο να κάνουμε κατανοητή την αρχή του Αρχιμήδη με την εκπληκτική μαθηματική απλότητά της, αν προηγούμενα δεν καταρρίψουμε και δεν αποσυνθέσουμε τη βέβηλη σύνθεση των αρχικών διαισθητικών γνώσεων. Και ειδικότερα αν δεν γίνει αυτή η ψυχανάλυση της αρχικής πλάνης, ποτέ δεν θα μπορέσουμε να κάνουμε κατανοητό ότι το σώμα που επιπλέει και το σώμα που βυθίζεται υπακούουν στον ίδιο νόμο. Έτσι, κάθε επιστημονική παιδεία οφείλει να αρχίσει από μια πνευματική κάθαρση. Κι ύστερα, απομένει το δυσκολότερο έργο: να τεθεί η επιστημονική παιδεία σε κατάσταση διαρκούς επιστράτευσης, ν'αποκαταστήσει την κλειστή και στατική μάθηση με μian ανοιχτή και δυναμική γνώση, να καταστήσει διαλεκτικές όλες τις πειραματικές μεταβλητές και, τέλος, να δώσει στον ορθό λόγο, λόγους να εξελιχθεί”⁶.

“Ο ιστορικός πρέπει να εκλαμβάνει τις ιδέες ως ‘γεγονότα’. Ο επιστημολόγος οφείλει να θεωρεί τα γεγονότα ως ιδέες, εντάσσοντας τες σε ένα σύστημα σκέψεων”⁷.

5.2 Thomas Kuhn

Την δεκαετία του 60 που εμφανίζεται είναι κυρίαρχο το ρεύμα του νεοθετικισμού στην φιλοσοφία της επιστήμης μέσα σε όλο το αγγλοσαξωνικό περιβάλλον. Το προηγούμενο του Popper έδειξε να έχει μικρή επίδραση. Όσο για τον Bachelard ήταν ελάχιστα γνωστός εκτός της ηπειρωτικής φιλοσοφίας, όπως κι άλλοι ιστορικοί επιστημολόγοι με επιρροή από την φαινομενολογία, όπως ο J. Klein και ο A. Koyré.

Το βιβλίο του Thomas Kuhn *Η Δομή των Επιστημονικών Επαναστάσεων*⁸, πρωτοεκδόθηκε το 1962. Κατά τον Kuhn, το ουσιώδες στοιχείο εξέλιξης της επιστήμης επικεντρώνεται στην *απόρριψη ενός “παραδείγματος” (paradigm) και στην αντικατάστασή του από ένα άλλο καινούργιο, μιας διαδικασίας που παίρνει τη μορφή επαναστατικής ανατροπής*

⁶ Στο ίδιο

⁷ στο ίδιο σελ. 60.

⁸ T. Kuhn, *Η Δομή των Επιστημονικών Επαναστάσεων*, Μετάφραση, Γ. Γεωργακόπουλος, Β. Κάλφας. Εκδόσεις Σύγχρονα Θέματα.

του προηγούμενου *status*. Η έννοια του “παραδείγματος”⁹ συνδέεται στενά με την “συνήθη επιστήμη”.

“*Συνήθης επιστήμη*” σημαίνει έρευνα βασισμένη αποκλειστικά πάνω σε ένα ή περισσότερα προγενέστερα επιστημονικά επιτεύγματα, που κάποια συγκεκριμένη επιστημονική κοινότητα αναγνωρίζει ότι της παρέχουν τα θεμέλια για την περαιτέρω πρακτική της... Τα διδακτικά εγχειρίδια παρουσιάζουν το σώμα της παραδεδεγμένης θεωρίας, προβάλλουν αρκετές ή και όλες τις επιτυχείς εφαρμογές της και συγκρίνουν τις εφαρμογές αυτές με παραδειγματικές παρατηρήσεις και πειράματα...

Επιτεύγματα ικανοποιητικά ώστε να προσελκύουν έναν μόνιμο κύκλο υποστηρικτών... Και αρκετά ανοικτά ώστε να αφήνει κάθε είδους πρόβλημα προς λύση για τους λειτουργούς του κύκλου... είναι τα “παραδείγματα” του Kuhn και βέβαια περιλαμβάνουν από κοινού νόμους, θεωρίες, εφαρμογές και όργανα ενώ δίνουν μοντέλα από τα οποία αναδύονται συγκεκριμένες συνεκτικές παραδόσεις επιστημονικής έρευνας.

Κατά την διαδικασία της έρευνας στα πλαίσια της “συνήθους επιστήμης” εμφανίζονται αντινομίες, αντιφάσεις, κάποιες ανωμαλίες, οπότε γίνεται αισθητή η κατάσταση της *κρίσης*.

“Στην επιστήμη ο νεοτερικισμός γίνεται με δυσκολία, η οποία γίνεται φανερή μέσα από την αντίσταση απέναντι σε ένα background που εξυφαίνει η προσδοκία μας. Αρχικά, μόνο το αναμενόμενο και το συνηθισμένο γίνονται αντικείμενα εμπειρίας, ακόμα και στις περιπτώσεις όπου πρόκειται αργότερα να διαπιστωθεί ανωμαλία... Αυτή η συνειδητοποίηση της ανωμαλίας ανοίγει μια περίοδο στην οποία οι εννοιολογικές κατηγορίες προσαρμόζονται μέχρι το σημείο που το αρχικά ανώμαλο σημείο να γίνει αναμενόμενο.”

Κάποια στιγμή οδηγούμαστε στην απόρριψη του “παραδείγματος” και στην τοποθέτηση ενός άλλου: “Η μετάβαση από ένα ‘παραδείγμα’ σε κάποιο άλλο στη διάρκεια μιας κρίσης, από την οποία μετάβαση ενδέχεται να αναδυθεί μια νέα παράδοση ‘συνήθους επιστήμης’, απέχει πολύ από το να είναι μια σωρευτική διαδικασία, μια διαδικασία επεξεργασίας ή επέκτασης του παλαιού ‘παραδείγματος’. Είναι περισσότερο μια επανακατασκευή ολόκληρου του πεδίου με καινούργια θεμελιώδη δομικά υλικά... κατά τη διάρκεια της μεταβατικής περιόδου υπάρχει μια ευρεία αλλά ποτέ πλήρης επικάλυψη των προβλημάτων που μπορούν να επιλυθούν

⁹ Ο P. M. Churchland (στο ‘Η μηχανή της Λογικής – Η Θέση της Ψυχής, μετάφραση Α. Ραφτόπουλου, εκδόσεις Γκοβόστη, 1996) εμφανίζει κάποια συγκεκριμένα παραδείγματα που λειτούργησαν κατά αυτό τον καταλυτικό τρόπο στην ιστορία της φυσικής, όπως για παράδειγμα στην οπτική το φαινόμενο Ντόπλερ Φιζώ, που άλλαξε τις απόψεις των επιστημόνων για την φύση του φωτός καθώς ως εκείνη την στιγμή ήταν σωματιδιακή και όχι κυματική, σελ. 353.

με το παλιό και το νέο ‘παράδειγμα’. Υπάρχει όμως μια αποφασιστική διαφορά στους τρόπους επίλυσης. Όταν ολοκληρωθεί η μετάβαση η επιστημονική κοινότητα θα έχει πλέον αλλάξει την άποψη που έχει για τον κλάδο, τις μεθόδους του και τους στόχους του”.

Οι επιστήμονες της νέας περιόδου βλέπουν τα ίδια πράγματα αλλά με τρόπο ασύμβατο με εκείνο της προηγούμενης περιόδου κι έχει ως παράδειγμα μια ιδέα που προέρχεται από την θεωρία της μορφής (gestalt) το σκίτσο μιας πάπιας που μπορεί κανείς να τη δει και ως λαγό, όπως στο Σχήμα της σελίδας 35.

5.3 Imre Lakatos

Ο I. Lakatos¹⁰ ασκεί κριτική στη θέση του Kuhn, εστιάζοντας κυρίως την προσοχή του στο γεγονός ότι ο τελευταίος δεν προσφέρει μια επαρκή ανάλυση της διαδικασίας επιλογής του νέου ‘παραδείγματος’.

‘Σύμφωνα με τον K. Popper η επιστημονική αλλαγή είναι ορθολογική ή τουλάχιστον, ορθολογικά αναπλάσιμη και εμπίπτει στις εξηγητικές αρμοδιότητες της *λογικής της ανακάλυψης*. Για τον Kuhn η αλλαγή – μετάβαση από το ένα ‘παράδειγμα’ στο άλλο είναι μια μυστικιστική μεταστροφή, η οποία ούτε κατευθύνεται ούτε μπορεί να κατευθυνθεί από ορθολογικούς κανόνες και η οποία υπάγεται, καθ’ολοκληρίαν, στη δικαιοδοσία της *(κοινωνικής) ψυχολογίας της ανακάλυψης*. Η επιστημονική αλλαγή είναι ένα είδος θρησκευτικής μεταλλαγής¹¹. Για τον Lakatos ο Kuhn φαίνεται να ολισθαίνει σε ένα είδος ανορθολογισμού.

Ο Lakatos προσπαθεί να διαμορφώσει ένα νέο πλαίσιο ενδυναμώνοντας περαιτέρω τη θέση του Popper, ώστε οι επιστημονικές επαναστάσεις να μην εμφανίζονται ως μυστικιστικές μεταστροφές, αλλά ως βήματα μιας ορθολογικής διαδικασίας. Η ιδέα σύμφωνα με την οποία υπάρχουν ανταγωνιστικά προγράμματα έρευνας μας οδηγεί στο εξής πρόβλημα: *με ποιο τρόπο απορρίπτονται τα ερευνητικά προγράμματα; ...Υπάρχουν άραγε αντικειμενικοί (όχι, δηλ. κοινωνικοψυχολογικοί) λόγοι απόρριψης ενός προγράμματος;*

Η απάντηση, σε γενικές γραμμές, είναι ότι έναν τέτοιο αντικειμενικό λόγο συνιστά η ύπαρξη ενός αντιπάλου ερευνητικού προγράμματος, το οποίο εξηγεί τις προηγούμενες επιτυχίες του ανταγωνιστή του και υπερέχει αυτού, επιδεικνύοντας μεγαλύτερη *ευρετική ισχύ*¹². Προσοχή όμως: *Ακόμα*

¹⁰ Imre Lakatos, ‘Μεθοδολογία των Προγραμμάτων Επιστημονικής Έρευνας’, Μετάφραση Α. Μεταξόπουλος, Εκδόσεις Σύγχρονα Θέματα, Θεσσαλονίκη 1986.

¹¹ Στο ίδιο, σελ. 83.

¹² Στο ίδιο σελ. 179.

κι' αν το ηττημένο πρόγραμμα είναι ένα παλιό κουρασμένο, κατεστημένο πρόγραμμα που προσεγγίζει το φυσικό σημείο κορεσμού του, ενδέχεται να εξακολουθήσει να ανθίσταται επί ένα μεγάλο χρονικό διάστημα και να αντέχει στα κτυπήματα εφευρίσκοντας περίτεχνους, αυξητικούς του περιεχομένου νεωτερισμούς – έστω κι αν αυτοί δεν στέφονται από εμπειρικές επιτυχίες. Είναι δυσχερέστατο να ηττηθεί ένα πρόγραμμα υποστηριζόμενο από ταλαντούχους επιστήμονες με πλούσια φαντασία. Υπάρχει βέβαια η πιθανότητα ορισμένοι πεισματάρηδες υποστηρικτές του ηττημένου προγράμματος να καταφύγουν σε *ad hoc* εξηγήσεις των πειραμάτων ή σε μια δαιμόνια *ad hoc* αναγωγή του προγράμματος που νίκησε σε αυτό που ηττήθηκε¹³.

Ο Lakatos απορρίπτει την αντίληψη ότι η απόρριψη ενός ερευνητικού προγράμματος οφείλεται σε κάποιο “αποφασιστικό πείραμα”: *Μόνο με μια εξαιρετικά δύσκολη και – απροσδιόριστα – μακρόχρονη διαδικασία μπορεί να καταξιωθεί ένα ερευνητικό πρόγραμμα εκτοπίζοντας τον αντίπαλό του¹⁴... μπορούμε πάντα εκ των υστέρων – να χαρακτηρίσουμε αποφασιστικό ένα πείραμα το οποίο παρέχει κάποιες θεαματικές επιρρωτικές ενδείξεις υπέρ του νικητή, ενώ ταυτόχρονα συνιστά αποτυχία για τον ηττημένο... Είναι ενδεχόμενο ένας τραχύς επιστήμονας να εγείρει αξιώσεις, ισχυριζόμενος ότι το πείραμά του νίκησε ένα πρόγραμμα – και δεν αποκλείεται να ενστερνιστούν τις απόψεις του ακόμα και κάποιες πτέρυγες της επιστημονικής κοινότητας. Αλλά αν, λίγα χρόνια αργότερα, ένας επιστήμονας του ηττημένου στρατοπέδου επεξεργαστεί μια επιστημονική εξήγηση του υποτιθέμενου αποφασιστικού πειράματος εντός των ορίων του ηττημένου, υποτίθεται, προγράμματος (ή σε ακολουθία με αυτό) είναι πιθανό να απολέσει το αποφασιστικό πείραμα, τους τίτλους τιμής που του απονεμήθηκαν και να μετατραπεί από επισφραγιστικό της ήττας στοιχείο σε νέα νίκη του εν λόγω προγράμματος, (σελ 204).*

Έτσι ο Lakatos αποδίδει στον Kuhn μια ανάδειξη της ψυχολογίας της επιστήμης. Αλλά η ψυχολογία της επιστήμης δεν είναι αυτόνομη, γιατί η ορθολογικά ανασυγκροτημένη ανάπτυξη της επιστήμης εκτυλίσσεται στην ουσία σε ένα κόσμο αρθρωμένης γνώσης, που είναι ανεξάρτητη από τα υποκείμενα της γνώσης.

Ο Lakatos ήταν επηρεασμένος από τον Hegel και βλέπει την εξέλιξη της ιστορίας του πνεύματος με εγελιανή διαλεκτική. Μέσα στο αυτό ρεύμα είχε αναπτυχθεί στην δεκαετία του 60 το ρεύμα της κοινωνιολογίας της γνώσης στην οποία κατέληγαν ρεύματα μαρξιστικά, όπως ο Jean Pierre

¹³ Στο ίδιο, σελ. 181.

¹⁴ Στο ίδιο σελ. 188.

Vernant¹⁵ αλλά κι εκείνοι του ανθρωπολογικού ρεύματος του Emile Durkheim¹⁶ ή Levy~Strauss¹⁷.

Εκείνο που έχει ιδιαίτερη σημασία, για τον Lakatos, είναι η άποψη του για την εξελικτικότητα των Μαθηματικών, κάτι που το έδειξε με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα στην διδακτορική του διατριβή υπό την επίβλεψη των Polya και Popper. Στο *Proofs and Refutation* δείχνει την εξέλιξη του τύπου του Euler για τα πολύεδρα που συνδέει τις έδρες E , τις ακμές A , και τις κορυφές K ενός κανονικού πολυέδρου. Ο τύπος αυτός είναι $K-A+E=2$. Με αφορμή την ιστορική ανάδειξη κι εξέλιξη του τύπου αυτού δείχνει την θεωρία του για τα μαθηματικά ως ψευδοεμπειρική επιστήμη υποδεικνύοντας τον δυναμικό χαρακτήρα της μαθηματικής ανακάλυψης. Τα μαθηματικά γι αυτόν σεν αναπτύσσονται μέσα από μια μονότονη αύξηση του αριθμού των αυστηρά εδραιωμένων θεωρημάτων, αλλά μέσα από την ακατάπαυστη βελτίωση υποθέσεων με εικασίες και κριτική, με τη λογική των αποδείξεων και των ανασκευών¹⁸. Η Θεωρία του Lakatos έγινε ένας τρόπος διαβάσματος πλέον της ιστορίας των Μαθηματικών, για παράδειγμα αναφέρομε¹⁹.

Οι διαψευστικές θεωρίες που περιγράφουν την εξέλιξη της επιστήμης δίνουν ένα πλαίσιο να κατανοηθούν οι επιστημονικές έννοιες και προσφέρουν μεγάλη υπηρεσία στην Διδακτική των Μαθηματικών και ιδιαίτερα στις θεωρίες που αφορούν στα *επιστημολογικά εμπόδια* και της ψυχολογικές θεωρίες της *εννοιολογικής αλλαγής*. Αυτά θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια.

¹⁵ J. P. Vernant, Η Καταγωγή της Ελληνικής Σκέψης, μετάφραση Σ. Στανίτσα, εκδόσεις Δίπτυχο 1966.

& Μύθος και Σκέψη στην Αρχαία Ελλάδα, εκδόσεις ΟΛΚΟΣ, 1975.

¹⁶ Emile Durkheim, the elementary forms of the religious life., George Allen & Unwin, 1976.

¹⁷ Levy~Strauss, Άγρια Σκέψη, μετάφραση Καλπουρτζή, Παπαζήση, 1977.

¹⁸ Davis P. J. & R. Hersh, Η Μαθηματική Εμπειρία, Μετάφραση Γ. Αναστασιάδης, 1990, σελ 336.

¹⁹ H. Bos, Arguments on Motivation in Rise and Decline of a Mathematical Theory; *Construction of Equation*, 1637 – 1750, AHES, vol 30, 1984, p. 331 -380. Eric G. Forbes, Descartes and the birth of Analytic Geometry, *Historia Mathematica* 4 (1977), 141-151. A. G.Molland: Shifting the foundations Descartes transformation of Ancient Geometry, *Historia Mathematica*, 3 (1976), 21 - 49.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΠΛΑΙΣΙΟ ΑΝΑΚΑΛΥΨΗΣ II

ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ

6.1 Εισαγωγή - Συμπεριφορισμός

Ο Descartes πίστευε ότι εγκεφαλική και πνευματική λειτουργία μπορούν να θεωρηθούν χωριστά, αν κι οι δυο αυτές ενέργειες εμπλέκονται και παρόλο που δεν μπορούσε να ξέρει πως. Από τότε η θεωρία γνώσης επαναφέρει διαρκώς αυτό το θέμα και αποπειράται απαντήσεις. Σήμερα, με την εξέλιξη της ψυχολογίας και της νευροφιλοσοφίας γνωρίζουμε περισσότερα για αυτή την εμπλοκή αλλά ωστόσο ερωτηματικά παραμένουν. Οι θεωρίες που προσπαθούν να ανάγουν τις πνευματικές λειτουργίες σε εκείνες τις εγκεφαλικές ονομάζονται *αναγωγικές*¹. Οι θεωρίες που αναπτύχθηκαν στην ψυχολογία δέχθηκαν την επίδραση των ρευμάτων που επικρατούσαν στην φιλοσοφία. Αν και όλο τον ρεύμα του Λογικού Θετικισμού ήθελε να επιβάλει την άποψη ότι η φιλοσοφία δεν έχει καμία σχέση με την ψυχολογία, ωστόσο δυο γεγονότα αποτελούν ενδείξεις για το αντίθετο. Η επίδραση που είχε ο νεοθετικισμός στο ρεύμα της ψυχολογίας που καλείται *συμπεριφορισμός* με κύριο και καθαρό εκπρόσωπο τον Skinner, όπως επίσης κι η εκ νέου επαφή γνωσιολογίας και ψυχολογίας που προκάλεσε ο Quine με το άρθρο του (1969) *Φυσικοποιημένη Επιστημολογία*². Ο P. Machamer³ χωρίζει την σύγχρονη ψυχολογία σε τρία ρεύματα: στον *συμπεριφορισμό*, την *γνωσιοκρατία* (cognitivism) ή *κατασκευαστισμός* (constructivism) και τον ρεαλισμό.

Η συμπεριφοριστική προσέγγιση εμφανίστηκε στην αρχή του 20ου αιώνα με τον J. Watson (1919) στις Η.Π.Α. Η επιστημολογική επίδραση του νεοθετικισμού ήταν έντονη σε αυτό το ρεύμα με γνωστότερους υποστηρικτές τον C. Hull και ιδιαίτερα τον B. F. Skinner. Αναζήτησαν το πώς ένας οργανισμός μαθαίνει συμπεριφορές. Ένα ερέθισμα επηρεάζει τον οργανισμό, ο οποίος αντιδρά με κάποια συμπεριφορά. Οι παρακολούθηση της ενίσχυσης ή ελάτωσης της συμπεριφοράς προκαλεί ανάλογες αντιδράσεις και εκμαθήσεις. Σε αυτή την λογική, ο νους του μαθητή ή του τυχαίου ανθρώπου αντιμετωπίζεται ως ένα *μαύρο κουτί* για το οποίο δεν μπορώ να κάνω υποθέσεις παρά μόνο να παρακολουθήσω τις αντιδράσεις του, που θα εκδηλωθούν ως αντιδράσεις σε ερεθίσματα. Έτσι θεωρείται άστοχο να χρησιμοποιηθούν νοητικοί όροι για να εξηγηθεί η συμπεριφορά. Η μέθοδος αυτή

¹ E. Hunt, What is a Theory of Thought pp. 3-49, & R. J. Stenberg, A Dialectical Basis for Understanding the Study of Cognition pp. 51-78, in Stenberg R. J. The Nature of Cognition.

² W. V. O. Quine, Epistemology Naturalized, In Epistemology, The Big Questions, Ed. L. M. Alcoff, Blackwell 1998, pp. 253-265.

³ P. Machamer, Φιλοσοφία της Ψυχολογίας, 483 – 508, στο M. H Salmon & J. Earman & C. Clymour & J. G. Lennox & P. Machamer & J. D. Norton & W. C. Salmon & K. F. Schaffner, (1998), Εισαγωγή στη Φιλοσοφία της Επιστήμης, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

μελετά με την ίδια αποστασιωποίηση μια ομάδα περιστέρια όσο και μια ομάδα μαθητές.

Ο Νόαμ Τσόμσκι άσκησε πρώτος μια κριτική στον συμπεριφορισμό με το επιχείρημα ότι ένας άνθρωπος έχει μια γλώσσα με την οποία μπορεί να παράγει στο μέλλον αμέτρητο αριθμό από προτάσεις που δεν έχουν ποτέ εκφωνηθεί. Αυτό δεν συνδέεται με μια πρότερη ενίσχυση.

Μετά την δεκαετία του 70 και την μελέτη της τεχνητής νοημοσύνης έχουμε την βαθμιαία υποχώρηση της σημασίας του συμπεριφορισμού. Ωστόσο, επέδρασε αποφασιστικά στην επιστήμη της ψυχολογίας επιβάλλοντας τα των κριτήρια ποσοτικών ερευνών και την αντίληψη ότι οι θεωρίες στην ψυχολογία πρέπει να κατασκευάζονται από τα δεδομένα και όχι τις φιλοσοφικές ενδοσκοπήσεις των επιστημόνων. Η πειραματική πιστοποίηση προέχει⁴.

6.2 Κατασκευαστικές Θεωρίες - J. Piaget - Γενετική Επιστημολογία

Ο J. Bruner⁵ ηπήρξε ο ψυχολόγος που επέφερε την ρίξη με τον Συμπεριφορισμό 1957. Οι αναζητήσεις που προέκυψαν με τις μελέτες για “σκεπτόμενες μηχανές” έφερε σε πρωτεραιότητα την συνεισφορά του οργανισμού στη γνώση και τη θεωρία της αντίληψης. Η αντίληψη, υποστηρίχθηκε προχωρεί πέρα από τις πληροφορίες που προσφέρει το περιβάλλον. Ο Bruner κι οι συνεργάτες του αναζωογόνησαν το ενδιαφέρον για τη μελέτη των συγκινησιακών μεταβλητών, καθόσον αξίες, ανάγκες και προσδοκίες επηρεάζουν τα όσα αντιλαμβανόμαστε⁶. Ο Bruner ήταν αυτός που επέβαλε στον αγγλοσαξωνικό κόσμο δυο άλλους σημαντικούς ψυχολόγους τον ελβετό J. Piaget και τον ρώσο L. S. Vygotsky⁷.

Ο Jean Piaget (1896-1980) γεννήθηκε στην Ελβετία. Ασχολήθηκε με τη βιολογία, τη ζωολογία και ενδιαφέρθηκε για τη φιλοσοφία. Ήδη σε ηλικία 15 ετών δέχεται την επίδραση του H. Bergson. Το 1918 υποστηρίζει τη διδακτορική διατριβή με θέμα την οστρακολογία. Παρακολουθεί μαθήματα ψυχολογίας στο Εργαστήριο Ψυχολογίας του Carl Jung, και εκεί ανακαλύπτει την Κλινική Μέθοδο (αρχικά ιδέα του Freud). Ο Piaget είναι ο πρώτος μέσα στην πειραματική ψυχολογία που εισάγει την κλινική συνέντευξη και τις ποιοτικές αναλύσεις, ιδέες που αποτελούσαν ταμπού και ατόπημα για τον συμπεριφορισμό ο οποίος πρότεινε μόνο ποσοτικές μεθόδους⁸. παρατηρώντας τον τρόπο με τον οποίο ο Jung και ο Bleuler διεξήγαγαν τις συνεντεύξεις με τους ψυχικά ασθενείς. Το 1919 πηγαίνει στο Παρίσι και

⁴ P. Machamer, Φιλοσοφία της Ψυχολογίας και T. A. Harley, The Psychology of Language, From Data to Theory, Erlbaum (UK) Taylor & Francis, (1995).

⁵ Jerome Bruner, Πράξεις Νοήματος, Ελληνικά Γράμματα, 1997.

⁶ P. Machamer, Φιλοσοφία της Ψυχολογίας

⁷ R. Gross, Psychology, The Science of Mind and Behaviour, Holder & Stoughton 1996.

⁸ Ginsburg H. (1981), The Clinical Interview in Psychological Research on Mathematical Thinking: Aims, Rationales, Techniques, *For The Learning Mathematics*, 1,3 57-64.

παρακολουθεί μαθήματα Λογικής και Φιλοσοφίας της Επιστήμης στη Σορβόνη, καθώς και Ψυχοπαθολογίας στο Νοσοκομείο Σαλπετριέρ. Στο Παρίσι γνωρίζει το έργο του Αμερικανού ψυχολόγου J. Baldwin, ενός από τους πρωτεργάτες της Πειραματικής Ψυχολογίας.

Την ίδια περίοδο, ο T. Simon, στενός συνεργάτης του A. Binet, του ανέθεσε τη στάθμιση των τεστ συλλογισμού του Burt. Το ενδιαφέρον του Piaget στράφηκε προς το είδος των εσφαλμένων απαντήσεων των παιδιών, πράγμα που τον οδήγησε στη διερεύνηση των βασικών μηχανισμών σκέψης του παιδιού. Η διανοητική ανάπτυξη του παιδιού και του εφήβου θα αποτελέσει έκτοτε το βασικό αντικείμενο των μελετών του. Ωστόσο, ο ίδιος έχει δηλώσει ότι δεν θεωρεί τον εαυτό του παιδοψυχολόγο, με την έννοια ότι το ενδιαφέρον του για το παιδί και την ανθρώπινη νοημοσύνη εντάσσεται στα πλαίσια του ευρύτερου επιστημολογικού του προβληματισμού, που αφορά τη σχέση της βιολογίας με τη γνώση.

Το 1921 έχει ήδη δημοσιεύσει αρκετά από τα αποτελέσματα των ερευνών του και επιστρέφει στην Ελβετία και αναλαμβάνει τη διεύθυνση του Ινστιτούτου Jean-Jacques Rousseau της Γενεύης. Από το 1926 έως το 1929 διετέλεσε καθηγητής Φιλοσοφίας στο Πανεπιστήμιο του Neuchâtel και το 1929 έγινε καθηγητής της Ιστορίας της Επιστημονικής Σκέψης στο Πανεπιστήμιο της Γενεύης. Καθ' όλη τη διάρκεια της ζωής του, δίδαξε σε διάφορα πανεπιστήμια, αλλά το επίκεντρο των δραστηριοτήτων του υπήρξε το Ινστιτούτο J. J. Rousseau, στο οποίο συνέχισε να εργάζεται ακόμα και μετά τη συνταξιοδότησή του το 1974, μέχρι το τέλος της ζωής του. Το 1930 έγινε διευθυντής του Διεθνούς Ινστιτούτου Εκπαίδευσης που υπήρξε πρόδρομος της UNESCO. Ως διευθυντής του Εργαστηρίου Ψυχολογίας του Πανεπιστημίου της Λωζάνης, συνεργάστηκε ως αρχισυντάκτης στην έκδοση της Ελβετικής Επιθεώρησης Ψυχολογίας. Το 1952 έγινε καθηγητής Ψυχολογίας του Παιδιού στο Πανεπιστήμιο της Σορβόνης, και το 1955 ίδρυσε στη Γενεύη το Διεθνές Κέντρο Γενετικής Επιστημολογίας. Πέθανε το 1980 στη Γενεύη.

Στο πρώτο του βιβλίο *Η γλώσσα και η σκέψη του παιδιού*, (1923) μελέτησε τις ιδιαιτερότητες της λογικής του παιδιού, που χαρακτηρίζεται από έναν εγωκεντρισμό, με την έννοια ότι το παιδί αδυνατεί να δει τα πράγματα από τη σκοπιά του άλλου. Ακολούθησε μια σειρά βιβλίων που αναλύουν τα βασικά χαρακτηριστικά της σκέψης του παιδιού, μεταξύ των οποίων είναι: *Η κρίση και ο συλλογισμός του παιδιού*, (1924), *Η φυσική αιτιότητα στο παιδί*, (1927), *Η ηθική κρίση του παιδιού*, (1932), *Μια λεκτική μορφή της σύγκρισης στο παιδί*, (1921), *Η αναπαράσταση του κόσμου στο παιδί*, (1926), *Η γέννηση της νοημοσύνης*, (1936), *Η διαμόρφωση του συμβόλου*, (1946). *Η ψυχολογία της νόησης* (1947), *Εισαγωγή στη Γενετική Επιστημολογία*, (1950), *Οι μετασχηματισμοί των λογικών λειτουργιών*, (1952), *Οι αντιληπτικοί μηχανισμοί*, (1961), *Η εξισορρόπηση των γνωστικών δομών*, (1975).

Η συμβολή των θεωριών του Piaget στις γνώσεις μας για την ανθρώπινη νοημοσύνη, την ανάπτυξη και τη λειτουργία της, παραμένει αναμφισβήτητη. Εκείνο ωστόσο που είναι χαρακτηριστικό είναι η μελέτη του για το καντιανό επιστημικό υποκείμενο, τα βασικά χαρακτηριστικά του νου όσο αφορά τις κατηγορίες του

χώρου του χρόνου, της πιθανότητας, της αναγκαιότητας, της δικαιολόγησης, της μη αντίφασης, του αριθμού, της λογικής⁹. Την επιστήμη αυτή ως μεταίχμιο επιστημολογίας και ψυχολογίας ονόμασε **Γενετική Επιστημολογία**. *Judgement and reasoning in the child*. (1928). *The equilibration of cognitive structures* (1985), *Possibility and necessity Vol. 2* (1987), (& Sieminska) *Child's conception of number*, (1952), (& Garcia) *understanding of causality*, (1974) *Towards a logic of meanings* (1991), (& Garcia & Grize) *Epistemology and psychology of functions* (1977) (& Inhelder) *Child's Conception of Space* (1956), (& Inhelder & Siminska) *Child's conception of Geometry* (1960). *On Contradiction*, (1972). Beth – Piaget, *Epistemology and Psychology of Mathematics*, (1968), *Child's Conception of Time* (1960).

Κονστρουκτιβισμός¹⁰ στη Διδακτική των Μαθηματικών (Η Θεωρία Κατασκευής της Γνώσης). Σύμφωνα με τους Steffe και Kieren, οι έρευνες στη Διδακτική των Μαθηματικών επηρεασμένες από τη Θεωρία της Γενετικής Εξέλιξης του J. Piaget, πέρασαν από διάφορα στάδια προκειμένου να φθάσουν στη σημερινή τους μορφή. Έτσι, μέχρι περίπου τα μέσα της δεκαετίας του 70, ο βασικός στόχος ήταν να δείξουν ότι οι μαθηματικές δομές θα μπορούσαν να χρησιμεύσουν ως μοντέλα περιγραφής των μαθηματικών γνώσεων του παιδιού, όπως οι γενετικές δομές ήταν τα αντίστοιχα μοντέλα της νοητικής ανάπτυξης. Σταδιακά άρχισε να γίνεται κατανοητό το γεγονός ότι οι γενετικές δομές του Piaget ήταν μοντέλα ερμηνείας της συμπεριφοράς του παιδιού και όχι ένα υποθετικο-παραγωγικό σύστημα. Αυτό σημαίνει ότι οι ερευνητές έπρεπε να κατασκευάσουν τα δικά τους μοντέλα προκειμένου να εξυπηρετήσουν τους σκοπούς τους και όχι να χρησιμοποιούν τις παρατηρήσεις του Piaget. Τούτο σηματοδοτεί τη μεγάλη καμπή. Η καμπή αυτή, με τη σειρά της, οδήγησε σε αυτό που σήμερα ονομάζουμε Θεωρία Κατασκευής της Γνώσης (Constructivism), όπου οι ερευνητές παρατηρούν και περιγράφουν τους μηχανισμούς με τους οποίους το παιδί οικοδομεί τις μαθηματικές του γνώσεις, μέσα σε ένα συγκεκριμένο μαθησιακό περιβάλλον.

Τυπικά, η αρχή του Κονστρουκτιβισμού τοποθετείται το 1975, όταν ο Von Glaserfeld παρουσίασε τις ιδέες του στην Εταιρεία J. Piaget της Philadelphia των Η.Π.Α. Οι ιδέες του Glaserfeld, στηριγμένες στη Γενετική Επιστημολογία του Piaget, οδήγησαν στον Ριζοσπαστικό Κονστρουκτιβισμό (Radical Constructivism) και τελικά άνοιξαν το δρόμο για μια νέα εποχή στη μαθηματική εκπαίδευση. Όμως, παρά το γεγονός της ευρείας δημοσιότητας των ιδεών του Glaserfeld, μόλις το 1983 παρουσιάστηκε άρθρο με τη λέξη *constructivism* στον τίτλο του. Στο άρθρο αυτό

⁹ S. Meadows, Piaget's Contribution to Understanding Cognitive Development: An Assessment for the Late 1980s, & H. Ginsburg, Piaget and Education: The Contributions and Limits of Genetic Epistemology, in Ken Richardson & Sue Sheldon, *Cognitive Development to Adolescence*, Open University set book, 1993. Philip M. Davidson. *Genevan Contributions to Characterizing the Age 4 transition*, *Human Development* 1992, 35: 165-171. Α. Δημητρίου, *Γνωστική Ανάπτυξη*, Τομος 1, Piaget και Νεοπιαζετιανοί. ART TEXT, 1993.

¹⁰ Αν θα θέλαμε να αναζητήσουμε βαθύτερα στον χρόνο και τη φιλοσοφία τις ρίζες της κονστρουκτιβιστικής αυτής αντίληψης, θα πηγαίναμε πολύ πίσω και από τον Kant, σε έναν άλλο Γερμανό φιλόσοφο του 16ου αιώνα τον Valentine Weigel (1533 - 1588), Κ. Ι. Λογοθέτου, *Η φιλοσοφία της αναγεννήσεως*, ΟΕΣΒ, 1956.

τονίζεται ότι δεν είναι αποφασιστικές για την νοητική του ικανότητα, οι επεμβάσεις των ενηλίκων καθ'εαυτές που επιδρούν στην κατασκευή της γνώσης του παιδιού, αλλά οι εμπειρίες του παιδιού από αυτές τις επεμβάσεις, έτσι όπως αυτό τις ερμηνεύει βασιζόμενο στις ήδη υπάρχουσες γνώσεις του. Ο ενήλικας δεν μπορεί να προκαλέσει στο παιδί εμπειρίες διαμέσου των δικών του εμπειριών. Επομένως, ο δάσκαλος δίνει τις ευκαιρίες στο μαθητή για μαθηματικές δραστηριότητες, αλλά εξαρτάται από τον ίδιο το μαθητή να οικοδομήσει τη δική του γνώση μέσα από αυτές τις δραστηριότητες.

Γενικά, ο Ριζοσπαστικός Κονστрукτιβισμός προσδιορίζεται από τις ακόλουθες δύο υποθέσεις:

1. Η γνώση κατασκευάζεται ενεργητικά από το υποκείμενο και δεν *συλλαμβάνεται* παθητικά από το περιβάλλον.

2. Η γνώση είναι μια διαδικασία προσαρμογής με τον κόσμο των εμπειριών, κι όχι η ανακάλυψη ενός προϋπάρχοντος κόσμου, ο οποίος είναι ανεξάρτητος από το γνώστη.

Η δεύτερη υπόθεση, η οποία μπορεί να προκαλέσει κι αντιπαραθέσεις, έχει διατυπωθεί από τον Von Glaserfeld ως εξής: *Η πραγματικότητα με μια απόλυτη έννοια βρίσκεται έξω από τη σφαίρα της πειραματικής επαλήθευσης.*

Ο Ριζοσπαστικός Κονστрукτιβισμός έχει σοβαρές συνέπειες για τη μαθηματική εκπαίδευση. Για παράδειγμα, η έννοια της κατανόησης μιας μαθηματικής ιδέας χάνει τον απόλυτο χαρακτήρα της και αποκτά μια *εξατομικευμένη* μορφή, η οποία πρέπει να γίνει αντικείμενο διαπραγμάτευσης μέσα στην τάξη. Έτσι λοιπόν, το νόημα της έννοιας προσδιορίζεται από τη χρήση της στα πλαίσια της μαθηματικής κοινότητας, η οποία δρα στη συγκεκριμένη στιγμή ως μια *επιστημονική κοινότητα*. Δηλαδή, σε κάθε περίπτωση, η έννοια έχει ένα νόημα *κοινωνικά* προσδιορισμένο, που, με τη σειρά του, βασίζεται στα standards της ευρύτερης Μαθηματικής Κοινότητας. Η αντίληψη αυτή επιδρά τόσο στον τρόπο με τον οποίο θα πρέπει να γίνονται οι δραστηριότητες μέσα στην τάξη, όσο και στον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε τη θέση και το ρόλο του δασκάλου μέσα στην τάξη.

Η αποδοχή του Κονστрукτιβισμού είχε επίσης σοβαρή επίδραση στην έρευνα. Ο βασικός σκοπός είναι να μελετήσουμε την κατασκευή των μαθηματικών εννοιών και πράξεων με τις οποίες ο μαθητής προσπαθεί να οργανώσει τις εμπειρίες του. Στο έργο αυτό κυριαρχεί η Γενετική επιστημολογία του Piaget και ιδιαίτερα ο όρος *αναστοχαστική αφαιρετική* διαδικασία (reflective abstraction). Σύμφωνα με την αναστοχαστική αφαιρετική διαδικασία, η μάθηση είναι δυνατή επειδή είμαστε ικανοί να ανακαλύπτουμε κοινές ιδιότητες σε διαφορετικού είδους εμπειρίες, τις οποίες *αποθηκεύουμε* στη μνήμη για μελλοντική χρήση. Η νοητική αναπαράσταση μιας κοινής ιδιότητας είναι αυτό που ονομάζουμε έννοια. Οποτεδήποτε βλέπουμε ή ακούμε κάτι στο περιβάλλον, ανακαλούμε από τη μνήμη μας μια έννοια που θεωρούμε σχετική. Παριστάνοντας τις έννοιες με σύμβολα μπορούμε να τις ανακαλέσουμε ανά πάσα στιγμή χωρίς την ανάγκη εξωτερικού ερεθίσματος. Στην περίπτωση αυτή η έννοια έχει γίνει ένα νοητικό αντικείμενο (mental object), το

οποίο διαπραγματευόμαστε με διάφορους τρόπους. Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να ομαδοποιήσουμε έννοιες από μια κοινή τους ιδιότητα, σχηματίζοντας έννοιες ανωτέρας τάξεως. Οι διαδοχικές αφαιρετικές διαδικασίες που απαιτούνται για τη δημιουργία εννοιών ανωτέρας τάξεως, προσδιορίζουν το νόημα του όρου *reflective abstraction*.

Η κονστρουκτιβιστική¹¹ έρευνα επηρέασε τόσο τη διδακτική πρακτική όσο και τον προσανατολισμό της μαθηματικής εκπαίδευσης. Οι γενικές αρχές στις οποίες στηρίζονται σήμερα τα νέα διδακτικά μοντέλα είναι οι ακόλουθες:

1. Η γνώση είναι πάντα συνδεδεμένη με το γνώστη. Η γνώση κατασκευάζεται πάντα από τον ίδιο και δεν μεταφέρεται.

2. Η νέα γνώση βασίζεται στα ήδη υπάρχοντα γνωστικά σχήματα του υποκειμένου.

3. Η νέα γνώση θεσμοθετείται ως *επίσημη* γνώση μέσα στο περιβάλλον της μαθητικής κοινότητας, η οποία δρα ως *επιστημονική* κοινότητα. Στο νέο αυτό πλαίσιο τα μαθηματικά είναι τόσο δραστηριότητες που επιτρέπουν την κατασκευή της γνώσης, όσο και ένα σύνολο γνώσεων.

6.3 L. S. Vygotsky

Αυτό που χαρακτηρίζει τον L. S. Vygotsky είναι μια αντιδογματική μαρξιστική φιλοσοφία που θεωρεί την ανθρώπινη συνείδηση προϊόν κοινωνικοποίησης και προσδιορισμένης μέσα στο κοινωνικό και οικονομικό σύστημα που εξετάζεται. Ο νους καθορίζεται από κατηγορίες εξαρχής κοινωνικοψυχολογικές που εσωτερικεύονται στην επιμέρους συνείδηση του εκάστοτε ατόμου. Στο σημείο αυτό έχει βασικές διαφορές με τον Piaget. Ο τελευταίος θεωρεί ότι η νοητική ανάπτυξη αρχίζει με ένα εσωτερικό εγωκεντρικό λόγο του παιδιού που βαθμιαία εξελίσσεται σε κοινωνικό. Αντίθετα, ο ρωσος ψυχολόγος θεωρεί ότι ο εγωκεντρικός λόγος του παιδιού είναι αποτέλεσμα ενός πρότερου κοινωνικού λόγου που περιβάλλει το παιδί.

Σχήμα Piaget:

Εξωγλωσσικός αυτιστικός λόγος → εγωκεντρικός λόγος και σκέψη → κοινωνικοποιημένος λόγος και λογική σκέψη

Σχήμα Vygotsky:

κοινωνικός λόγος → εγωκεντρικός λόγος → εσωτερικός λόγος → γραπτή γλώσσα (η άλγεβρα της γλώσσας).

¹¹ Ernst von Glasersfeld (1983), Learning as a Constructive Activity, In J. C. Bergeron & N. Herscovics (Eds) Proceedings of the Fifth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 42-69). Montreal University de Montreal, Faculte de Science se l' Education. & (1991) Radical constructivism in mathematics education. Dortrecht: Kluwer. & Abstraction, representation and reflection: An interpretation of experience and Piaget's approach. In L. P. Steffe (Ed.) Epistemological Functions of Mathematical experience (pp. 45-67). New York: Springer-Verlag. & Jeremy Kilpatrick, What Constructivism Might Be in Mathematics. Η άποψη του συγγραφέα είναι ότι στο πλαίσιο της φαινομενολογίας υπάρχει η σύγκλιση κονστρουκτιβισμού και ρεαλιστικότητας των Μαθηματικών (πλατωνισμού).

Ο Vygotsky στο βιβλίο “Σκέψη και Γλώσσα”¹² μελετά πολλά ζητήματα που αφορούν την διαλεκτική οργάνωση της γλώσσας μέσα στο νού ως διαμεσολαβητικό εργαλείο της κοινωνικοποίησης του ατόμου και της εξασφάλισης της αφαιρετικής σκέψης. Για το ψυχολόγο, μια έννοια κατανοείται όταν έχει ξεπεραστεί και ειδοθεί σε ένα ανώτερο αφαιρετικό επίπεδο. Το παιδί καταλαβαίνει καλύτερα την αριθμητική όταν μάθει την άλγεβρα, γιατί απελευθερώνει αυτή την μάθηση από τις συγκεκριμένες αριθμητικές πράξεις. Σε αυτή την περίπτωση ισχυρίζεται, η προηγούμενη δομή καταρρέει και εμφανίζεται η νέα. Αν π.χ ένα παιδί έχει μάθει να χειρίζεται την ιδέα του x σε μια αναζήτηση αγνώστου σε πρόβλημα, είναι πολύ δύσκολο να ξαναγυρίσει σε λύσεις προβλήματος με τεχνικές προαλγεβρικές που μαθαίνει στην αριθμητική περίοδο¹³. Έχει ενδιαφέρον η θέση του για το παιχνίδι σε σχέση με την αφαιρεμένη σκέψη.

Το παιχνίδι¹⁴

Το παιχνίδι είναι μια ανθρώπινη δραστηριότητα που αρχίζει από την παιδική ηλικία και δεν σταματά ποτέ. Το παιχνίδι διεγείρει την φαντασία όχι μόνο των παιδιών αλλά στοχαστών και φιλοσόφων. Ο Piaget είχε αναδείξει πόση σημασία έχει για το παιδί η λειτουργία δοκιμή – λάθος για την πρωταρχικές καταχωρήσεις που συγκροτούν την σκέψη. Οι φιλόσοφοι της Μαθηματικών συνδέουν το παιχνίδι με τις πλέον βασικές ικανότητες της συνδυαστικής σκέψης που προηγείται κι εκείνη της Λογικής μας. Μια τέτοια είναι η πολύ βασική λεγόμενη Αρχή του Περιστερώνα (αν έχουμε ένα αριθμό από n φωλιές και $n+1$ περιστέρια τότε σε μια φωλιά θα καθίσουν 2 περιστέρια).

Ο άνθρωπος επικοινωνεί με σύμβολα και συνδυασμούς αυτών των συμβόλων με βάση κάποιους κανόνες που επιβάλλουν τόσο οι κοινωνικές συμβάσεις όσο κι η σχέση μας με την φύση. Ο μεγάλος φιλόσοφος του 20ου αιώνα L. Wittgenstein¹⁵ αναφερόμενος σε αυτούς τους συνδυασμούς των συμβόλων με τους οποίους οι άνθρωποι καθορίζουν την επικοινωνία τους και θέτουν τα προβλήματά τους μιλά για Γλωσσικά Παιχνίδια. Έτσι, θέλουν να βλέπουν συχνά το παιχνίδι οι μαθηματικοί όπως για παράδειγμα ο Ζερβός¹⁶ ως ένα σύστημα κανόνων που θυμίζει μαθηματικά ή τα πνευματικά παιχνίδια. Άλλωστε υπάρχει ολόκληρος κλάδος των Μαθηματικών που ονομάζεται Θεωρία των Παιγνίων. Η εκδοχή αυτή θέτει την ιδέα του προβλήματος σε ένα αρκετά εξυψωμένο νοητικό επίπεδο. Ωστόσο, αν ανατρέξουμε στον Vygotsky¹⁷ έχει επεργαστεί μια πλήρη θεωρία για το παιχνίδι:

¹² L. S. Vygotsky (1993), Σκέψη και Γλώσσα, (μετάφραση Α. Ρόδη), ΓΝΩΣΗ.

¹³ Στο ίδιο σελ. 339.

¹⁴ L. S. Vygotsky (1997), Νους και Κοινωνία, (μετάφραση Α. Μπίμπου- Σ. Βοσνιάδου) Gutenberg.

¹⁵ L. Wittgenstein (1977), Φιλοσοφικές Έρευνες, (μετάφραση Π. Χριστοδουλίδης), ΠΑΠΑΖΗΣΗΣ.

¹⁶ Σ. Π. Ζερβός, Πώς μπορούν ο πατέρας και η μητέρα να διδάξουν το παιδί τους νεότερα μαθηματικά (διάλεξη στο Αττικό Λύκειο 1974).

¹⁷ L. S. Vygotsky, Νους και Κοινωνία, Σελ. 157-175.

Το να ορίσουμε το παιχνίδι ως δραστηριότητα που δίνει χαρά στο παιδί θα ήταν ανακριβές για δυο λόγους: Καταρχάς υπάρχουν πολλές δραστηριότητες, όπως για παράδειγμα το πιπίλισμα του δακτύλου, που προσφέρουν στο παιδί πολύ πιο έντονη ευχαρίστηση. Κατά δεύτερο λόγο, υπάρχουν παιχνίδια στα οποία η δραστηριότητα αυτή καθαυτή δεν είναι απολαυστική. Για παράδειγμα, κάποια παιχνίδια προς το τέλος της προσχολικής ηλικίας και την αρχή της σχολικής, δίνουν χαρά στο παιδί μόνο αν το αποτέλεσμα παρουσιάζει ενδιαφέρον. Το ίδιο συμβαίνει και στα αθλήματα (πνευματικά και μη) όπου το παιδί μπορεί να κερδίσει ή να χάσει: παρατηρείται συχνά έντονη δυσαρέσκεια όταν το αποτέλεσμα δεν είναι το επιθυμητό.

Όμως, ενώ η χαρά δεν μπορεί να θεωρηθεί το κύριο χαρακτηριστικό του παιχνιδιού, φαίνεται πως οι θεωρίες που αγνοούν ότι τα παιδιά, παίζοντας, ικανοποιούν τις ανάγκες τους, καταλήγουν στην αυθαίρετη πνευματικοποίησή του. Γενικά, όσον αφορά στην ανάπτυξη του παιδιού, πολλοί θεωρητικοί κάνουν το σφάλμα να μη λαμβάνουν υπόψη τις ανάγκες του, που περιλαμβάνουν οτιδήποτε αποτελεί κίνητρο για δράση. Συχνά, η ανάπτυξη του παιδιού περιγράφεται με την ανάπτυξη των διανοητικών του λειτουργιών: κάθε παιδί αντιμετωπίζεται σαν θεωρητικός που μεταβαίνει από το ένα επίπεδο στο άλλο, και χαρακτηρίζεται από ένα υψηλό ή χαμηλό επίπεδο πνευματικής ανάπτυξης....

Συνήθως τα μικρά παιδιά ικανοποιούν τις επιθυμίες τους άμεσα.... Εάν κατά τα σχολικά χρόνια δεν αναπτύσσονταν οι μη άμεσα πραγματοποιήσιμες ανάγκες, δεν θα υφίστατο παιχνίδι, αφού, όπως φαίνεται, το παιδί ανακαλύπτει το παιχνίδι όταν αρχίζει να βιώνει απραγματοποίητες τάσεις. ... το παιδί της προσχολικής ηλικίας μπαίνει σ'έναν μαγικό κόσμο, όπου οι ανεκπλήρωτες επιθυμίες μπορούν να πραγματοποιηθούν: ο κόσμος αυτός είναι το παιχνίδι....

...Η παλιά αντίληψη ότι το παιχνίδι του παιδιού είναι η φαντασία σε δράση, θα πρέπει να αντιστραφεί: μπορούμε να πούμε πως η φαντασία στους ενήλικες και τα σχολιαρόπαιδα είναι το χωρίς δράση παιχνίδι...

... αν το παιχνίδι γίνεται αντιληπτό ως συμβολικό, υπάρχει κίνδυνος να θεωρηθεί ως δραστηριότητα παρόμοια με την άλγεβρα. Δηλαδή, όπως η άλγεβρα, έτσι και το παιχνίδι μπορεί να θεωρηθεί ως σύστημα σημείων που γενικεύουν την πραγματικότητα χωρίς να έχει τις ιδιότητες που κατά τη γνώμη μου χαρακτηρίζουν το παιχνίδι. Το παιδί θ' αντιμετωπισθεί Σα μαθηματικός που αν και Δε μπορεί ακόμη να γράψει τα σημεία, ωστόσο μπορεί να τα απεικονίσει στην πράξη. Πιστεύω ότι το παιχνίδι δεν είναι πραγματικά συμβολική πράξη... Αρκετοί ερευνητές... αφού εξέτασαν το προσχολικό παιχνίδι μέσα από τη μελέτη του μεταγενέστερου και βασισμένου σε κανόνες παιχνιδιού, συμπέραναν ότι αν κι έχει να κάνει με μια φανταστική κατάσταση, στην πραγματικότητα πρόκειται για παιχνίδι με κανόνες.

Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι δεν υπάρχει παιχνίδι χωρίς κανόνες. Σε κάθε παιχνίδι, η φανταστική κατάσταση εμπεριέχει κανόνες συμπεριφοράς, ακόμη κι όταν αυτοί δεν ορίζονται εξαρχής. Όταν το κοριτσάκι υποδύεται τη μητέρα έχοντας την κούκλα του για παιδί, υιοθετεί τους κανόνες της μητρικής συμπεριφοράς.... Τα μικρά παιδιά μπορούν και ταυτίζονται με το παιχνίδι με την πραγματικότητα... Δυο

αδελφές πέντε κι επτά ετών, πρότειναν η μια στην άλλη να υποδυθούν τις αδελφές – ν αναπαραστήσουν δηλαδή την πραγματικότητα... Η απόφασή τους να παίξουν τις αδελφές, τις ωθεί να υιοθετήσουν κανόνες συμπεριφοράς. Στο παιχνίδι τους αυτό είναι αποδεκτές μόνο πράξεις που συμμορφώνονται με ορισμένους κανόνες: ντύνονται πανομοιότυπα, μιλάνε με τον ίδιο τρόπο και αναπαριστάνουν οτιδήποτε τονίζει την αδελφική τους σχέση... Ό,τι περνάει απαρατήρητο για το παιδί στην πραγματική ζωή, γίνεται κανόνας συμπεριφοράς στο παιχνίδι... η συμπεριφορά θα προκύπτει από κανόνες...

Ωστόσο, όπως αποδείχθηκε, τα αποκαλούμενα ως *παιχνίδια κανόνων* είναι κυρίως παιχνίδια φανταστικών καταστάσεων... το σκάκι για παράδειγμα δημιουργεί μια φανταστική κατάσταση... Παρόλο που δεν προσφέρει άμεσα υποκατάστατα πραγματικής ζωής, είναι ένα είδος φανταστικής κατάστασης. .. κάθε φανταστική κατάσταση κρύβει κανόνες και κάθε παιχνίδι με κανόνες κρύβει μια φανταστική κατάσταση. Η μετάβαση από τα παιχνίδια που έχουν μια ορατή φανταστική κατάσταση και κρυφούς κανόνες στα παιχνίδια με φανερούς κανόνες και κρυφή φανταστική κατάσταση, περιγράφει την εξέλιξη του παιδικού παιχνιδιού.

Δράση και νόημα στο παιχνίδι.

Η επίδραση του παιχνιδιού στην ανάπτυξη του παιδιού είναι τεράστια. ... Πειράματα έχουν δείξει ότι οι πράξεις των μικρών παιδιών καθορίζονται από τους περιορισμούς που ενυπάρχουν σε μια κατάσταση. Για παράδειγμα έχει δειχθεί ότι το παιδί αντιμετωπίζει μεγάλη δυσκολία να αντιληφθεί ότι πρώτα πρέπει να γυρίσει την πλάτη του σε μια πέτρα και μετά να καθίσει επάνω της... Πειράματα έχουν δείξει ότι είναι αδύνατο για τα πολύ μικρά παιδιά να διαχωρίσουν το *πεδίο του νοήματος* από το *οπτικό πεδίο* , επειδή το νόημα και η οπτική εμπειρία είναι συγχωνευμένα....

Τα παιδιά κι αφασικοί Ζούνε σε ένα υπερεαλιστικό κόσμο όπου δεν υπάρχουν συμβολισμοί... βλέπε και J. Gabel, Ψευδής Συνείδηση, εκδόσεις ΑΚΜΩΝ 1978... ένα κοριτσάκι δυο ετών του ζητήσουμε να επαναλάβει την πρόταση «Η Τάνια στέκεται» όταν η Τάνια κάθεται μπροστά της, θα την αλλάξει και θα πει «Η Τάνια κάθεται». Ασθενείς αφασικοί δεν μπορούν να που ψέματα. Ο ασθενής κοιτά το παράθυρο και ο καιρός είναι πολύ καλός. Του ζητείται να πει «Ο καιρός είναι απαίσιος» και ο ασθενής λέει «Ο καιρός είναι υπέροχος».

Κάποια διάσταση ανάμεσα στο νοηματικό και το οπτικό πεδίο εμφανίζεται για πρώτη φορά στην προσχολική ηλικία. Στο παιχνίδι η σκέψη διαχωρίζεται από τα αντικείμενα, και η δράση είναι επακόλουθο ιδεών μάλλον παρά πραγμάτων: ένα κομμάτι ξύλου γίνεται κούκλα κι ένα ραβδί γίνεται άλογο. Η δράση βάσει κανόνων αρχίζει να καθορίζεται από ιδέες κι όχι από τα ίδια τα αντικείμενα... Το παιδί δεν το κάνει αυτό απότομα γιατί του είναι δύσκολο να διαχωρίσει τη σκέψη (το νόημα μιας λέξης) από το αντικείμενο... η λεγόμενη *αντίληψη των πραγματικών αντικειμένων*, δηλαδή και του νοήματος. Αυτό είναι κάτι που δεν έχει το ανάλογό του στην αντίληψη των ζώων. Οι άνθρωποι δεν βλέπουν απλώς κάτι στρογγυλό και μαύρο με δυο δείκτες. Βλέπουν ένα ρολόι, και μπορούν να διαχωρίσουν το ένα αντικείμενο από το άλλο...

Η δομή της ανθρώπινης αντίληψης θα μπορούσε να εκφραστεί μεταφορικά με μια αναλογία στην οποία το αντικείμενο είναι ο αριθμητής και το νόημα ο παρονομαστής (αντικείμενο/νόημα). Αυτή η αναλογία συμβολίζει ότι ολόκληρη η ανθρώπινη αντίληψη συντίθεται από γενικευμένες μάλλον παρά μεμονωμένες αντιλήψεις. Για το παιδί, το αντικείμενο κυριαρχεί στην αναλογία αντικείμενο/νόημα, και το νόημα υπάγεται στο αντικείμενο. Στην κρίσιμη στιγμή, όταν ένα ραβδί γίνεται ο άξονας για να διαφοροποιηθεί το νόημα του αλόγου από ένα αληθινό άλογο, αυτό το κλάσμα αντιστρέφεται και το νόημα υπερισχύει. Έτσι έχουμε την αναλογία νόημα/αντικείμενο.

... Στο παιχνίδι ένα παιδί κάνει αυθόρμητα χρήση της ικανότητας του να διακρίνει τη σημασία από το αντικείμενο χωρίς να καταλάβει ότι το κάνει, όπως επίσης δεν συνειδητοποιεί ότι μιλά σε πεζό λόγο, απλώς το κάνει, χωρίς να δίνει σημασία στις λέξεις. Έτσι, μέσα από το παιχνίδι, το παιδί φτάνει σ' ένα λειτουργικό ορισμό των εννοιών ή των αντικειμένων, και οι λέξεις αποτελούν τμήμα του αντικειμένου. ... στο παιχνίδι υιοθετεί τον τρόπο της ελάχιστης αντίστασης – κάνει ό,τι του αρέσει περισσότερο επειδή το παιχνίδι συνδέεται με την ευχαρίστηση – και συγχρόνως μαθαίνει ν' ακολουθεί τον τρόπο της μεγαλύτερης αντίστασης, καθώς υποτάσσει τον εαυτό του σε κανόνες, και απαρνιέται, έτσι, αυτό που θέλει, αφού η πειθάρχηση στους κανόνες και η αποκήρυξη των αυθόρμητων πράξεων αποτελούν τη μέγιστη ευχαρίστηση στο παιχνίδι.

Το παιχνίδι συνεχώς απαιτεί από το παιδί να ενεργεί ενάντια στις άμεσες παρορμήσεις του. Σε κάθε βήμα το παιδί είναι αντιμέτωπο με μια σύγκρουση ανάμεσα στους κανόνες του παιχνιδιού και στο τι θα έκανε αν μπορούσε ξαφνικά να δράσει αυθόρμητα. .. Το παιδί στο παιχνίδι πετυχαίνει το μέγιστο αυτοέλεγχο.

... Έτσι, το βασικό χαρακτηριστικό του παιχνιδιού είναι ο κανόνας που έγινε επιθυμία. Οι θεωρίες του Spinoza για «την ιδέα που έχει γίνει επιθυμία, την έννοια που μετατρέπεται σε πάθος», βρίσκουν τα πρότυπά τους στο παιχνίδι, που είναι το βασίλειο του αυθορμητισμού και της ελευθερίας. Ο κανόνας επικρατεί, επειδή είναι η πιο δυνατή παρόρμηση. Κανόνας αυτού του είδους είναι ένας εσωτερικός κανόνας αυτοπεριορισμού και αυτοδιάθεσης, όπως λέει ο Piaget, και όχι ένας κανόνας στον οποίο υπακούει το παιδί σαν να είναι νόμος της φύσης. Με λίγα λόγια, το παιχνίδι δίνει νέα μορφή στις επιθυμίες του.

... Όπως έχουμε την αναλογία αντικείμενο/έννοια έχουμε και την αναλογία έννοια/αντικείμενο... Το παιδί δεν συμπεριφέρεται μ' ένα καθαρά συμβολικό τρόπο στο παιχνίδι. Μάλλον σχηματίζει επιθυμίες τις οποίες και πραγματοποιεί, επιτρέποντας βασικές κατηγορίες πραγματικότητας να περνούν μέσα από την εμπειρία του. Το παιδί εκπληρώνει τις ευχές του με το να επιθυμεί. Με το να σκέφτεται ενεργεί... και αντιστρέφει την αναλογία δράση/έννοια σε έννοια/δράση... Η δράση αποσύρεται σε δεύτερη θέση, και παίρνει τη θέση του άξονα. Η έννοια αποχωρίζεται από την πράξη με την ενεργοποίηση μιας διαφορετικής πράξης. Αυτό είναι ένα άλλο παράδειγμα του τρόπου με τον οποίο η ανθρώπινη συμπεριφορά καταλήγει να εξαρτάται από λειτουργίες που βασίζονται σε νοήματα...

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

6. 4 Θεωρίες για την ψυχολογία των Μαθηματικών

Ένα πλήθος γνωστικών θεωριών έχουν αναπτυχθεί. Άλλες εστιάζουν το ενδιαφέρον τους στις συνθήκες διδασκαλίας και άλλες στον τρόπο που ο μαθητής κατανοεί¹. Ιδιαίτερα, το θέμα της κατανόησης εμφανίζεται τα τελευταία χρόνια στο κέντρο του ενδιαφέροντος και αυτό αποτελεί θα έλεγα μια προσπάθεια να φωτίσουμε το 'μαύρο κουτί' του Skinner, που είναι ο νους του μαθητή. Αφετηρία των προσπαθειών αποτελεί κυρίως ο Piaget, αν και δεν είναι η μόνη αφού το ίδιο θέμα απασχόλησε τόσο τους κλασσικούς φιλόσοφους Locke, Hume, Spinoza όσο και νεότερους ψυχολόγους Vygotsky, Skinner, Bruner².

Ο J. Bruner χώρισε την μορφή κατανόησης σε *ενεργητική, εικονική και συμβολική*³. Σύγχρονοι ερευνητές ασχολούνται με το θέμα κι ενδεικτικά αναφέρω, τους Sierpinski⁴, Sfard⁵, Dubinsky⁶, Gray & Tall⁷, Hiebert & Carpenter⁸, Pirie & Kieren⁹. Οι νεότερες εξελίξεις της ψυχολογίας, των νευροεπιστημών της γλωσσολογίας, μελέτες για την τεχνητή νοημοσύνη προσέφεραν πολλές νέες ιδέες για το πώς η κατανόηση μπορεί να επιτευχθεί και να αξιολογηθεί. Θα ήταν σκόπιμο να ρίξουμε μια ματιά στο επιστημολογικό υπόβαθρο κάποιων τέτοιων γνωστικών θεωριών για να διαπιστώσουμε το χρήσιμο των παρατηρήσεων του αλλά και τον περιορισμένο τους χαρακτήρα, όσον αφορά την μαθηματική σκέψη και αφαίρεση. Θα περιγράψουμε βασικές *ενεργητικές* (enactive) θεωρίες που καταγίνονται με την εξήγηση τις λειτουργίας της κατανόησης μαθηματικών εννοιών. Τέτοιες είναι η APOS (1991) θεωρία

¹ Niss M. (1995), Key issues in Mathematics Education in the 1990s – An international Perspective, Β' Πανελλήνιο Συνέδριο, Διδακτική Μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση, Κύπρος Απρίλης 1995.

² J. Bruner, Πράξεις Νοήματος, Ελληνικά Γράμματα, 1997.

³ R. Gross, Psychology, The Science of Mind and Behaviour, Holder & Stoughton 1996 σελ. 646. & J. S. Bruner, The Course of Cognitive Growth, in Cognitive Development to Adolescence, Ed. K. Richardson & S. Sheldon, Open University set book 1993.

⁴ Sierpinski A. (1996), Understanding in Mathematics, The Falmer Press.

⁵ Sfard A. (1991). On the Dual Nature of the Mathematical Conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

⁶ Dubinsky Ed (1991) Reflective Abstraction in Advance Mathematical Thinking, Ed. by David Tall Advance Mathematical Thinking, Kluwer.

⁷ Gray, E. M. & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 2, 115-141.

⁸ Hiebert J. & Carpenter T. P. (1992), Learning and Teaching with understanding, In D. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 65-79). Enschede, The Netherlands: NICD.

⁹ Pirie S. & Kieren T. (1994), Growth in Mathematical Understanding: How can we characterise it and how we represent it? *Educational Studies in Mathematics* 26: 165 – 190.

του Dubinsky, η θεωρία της *εκπραγμάτωσης* της Sfard (1991) ή θεωρία του *procept*, (σύνθετη λέξη παραγόμενη από το process και concept) των Gray & Tall (1994). Οι θεωρίες έχουν ως βάση τη διάκριση *εργαλειακής* (instrumental) και *συσχετισμένης* (relational) νόησης που είχε προταθεί από τον Skemp¹⁰ κι αποτελούν τροποποιήσεις εμνησίων που εκείνος έδωσε στην κατασκευαστική ιδέα του Piaget¹¹.

Η ενεργητική ιδέα της κατανόησης μιας μαθηματικής έννοιας αποτελεί μια γνωστή μεταφορά του γραμματολογικού κανόνα ότι ένα ουσιαστικό παράγεται από ένα ρήμα, όπως παρατηρεί ο Davis¹². Οι αντιλήψεις αυτές υπάρχουν διάσπαρτες σε όλη την σύγχρονη γνωστική επιστήμη και το ιδιαίτερο των παραπάνω ερευνητών είναι ότι επιχειρούν μια εξειδίκευση στο περιβάλλον της διδασκαλίας των μαθηματικών εννοιών. Οι θεωρίες έχουν σκοπό να αναλύσουν τον τρόπο που μια μαθηματική έννοια καταχωρείται στον νου και γίνεται κτήμα του μαθητή, ώστε να ανακαλείται και να χρησιμοποιείται όποτε προκύψει. Διαπιστώνουν σε μια μαθηματική έννοια δυο κυρίως μέρη ένα λειτουργικό - αλγοριθμικό και ένα συμβολικό - εννοιολογικό το οποίο αποτελεί και το μέρος εκείνο που προσφέρεται στην συμβολική διαχείριση και τους υπολογισμούς. Με αυτή κυρίως την διάκριση γίνονται μια σειρά μελέτες σε μαθητές του κατά πόσο σκέφτονται με αλγοριθμικό ή συμβολικό τρόπο.

Η ιδέα του Dubinsky (1991), καθώς αναφέρει ο εμπνευστής της, ξεκινά από τον Piaget. Οι μαθηματικές έννοιες διαμορφώνονται πάνω στην βάση: *ενεργειών* (actions) που ασκούνται βήμα προς βήμα σε *αντικείμενα* (objects) και προσλαμβάνονται ως ιδέες μιας συνολικής *διαδικασίας*, ενώ τελικά πακετάρονται (encapsulated) ως ένα *νοητικό αντικείμενο* που αργότερα θα ενταχθεί σε ένα νοητικό *σχήμα* (schema), ένα δίκτυο σχετικών εννοιών. Με αυτό τον τρόπο ο Dubinsky μας προσφέρει μια πιθανή ρουτίνα καταχώρησης στο νου μιας μαθηματικής έννοιας.

«Μια ενέργεια είναι ένας φυσικός ή νοητικός μετασχηματισμός ώστε να επιτευχθούν άλλα αντικείμενα. Εμφανίζεται ως αντίδραση σε ένα ερέθισμα που το άτομο προσλαμβάνει ως εξωτερικό. Ενδέχεται να πρόκειται για απλή ανταπόκριση ως φυσικό αντανακλαστικό η μια ενέργεια ανάκλησης κάποιου γεγονότος από την μνήμη. Ακόμη, ενδέχεται να πρόκειται για μια πολλαπλή ανταπόκριση που χαρακτηρίζεται από το ότι το κάθε επόμενο βήμα ενεργοποιείται από ό,τι έχει προκύψει προηγουμένως παρά τον συνειδητό έλεγχο του μετασχηματισμού από το

¹⁰ Skemp R., (1977), Relational Understanding Instrumental Understanding, Mathematics Teaching 11, 20 – 26.

¹¹ P. Ernest (1991), The Philosophy of Mathematics Education, *The Falmer Press*, London, σελ. 77.

¹² Davis, R. B (1984). Learning Mathematics: The cognitive science approach to mathematics education, Norwood, NJ: Ablex.

άτομο... Καθώς το άτομο ξανασκέφτεται πάνω σε μια ενέργεια, αρχίζει να εγκαθιστά ένα συνειδητό έλεγχο πάνω της. Τότε μπορούμε να πούμε ότι η ενέργεια εσωτερικεύεται και μετατρέπεται σε διαδικασία. Ενέργειες, διαδικασίες και αντικείμενα οργανώνονται σε δομές που ονομάζουμε σχήματα. Ένα άτομο μπορεί να σκεφτεί πάνω στο σχήμα και να δράση σε αυτό. Το αποτέλεσμα στο σχήμα αυτό γίνεται ένα νέο αντικείμενο¹³».

Η ιδέα αυτή προτείνει ένα τρόπο καταχώρησης στον νου κάποιων εννοιών. Προσφέρει μια ρουτίνα που μας λέει πώς μαθαίνουμε κάτι. Μάλιστα, οι νευρολόγοι Edelman & Tononi¹⁴ έχουν περιγράψει την διαδικασία κατά την οποία όταν μια ρουτίνα λειτουργεί την πρώτη φορά ενεργοποιεί περισσότερα από ένα εγγεφαλικά κέντρα. Η επανάληψη της χαρίζει στον εγκέφαλο το πλεονέκτημα να σπαταλά λιγότερη ενέργεια και να απασχολεί μικρότερες περιοχές. Οι Gray & Tall (2001), το επικαλούνται ως επιχείρημα για να δείξουν μια πιθανή λειτουργία με την οποία ο νους μετατρέπει τις σωματικές εμπειρίες σε ιδέες. Αυτό όμως σε τίποτα δεν διαχωρίζει τις λειτουργίες που μαθαίνει κανείς μαθηματικά ή ποδήλατο.

Με μια ενδιαφέρουσα παραλλαγή εμφανίζεται η πρόταση της Sfard. Προτείνει δυο προσεγγίσεις κατά την ανάπτυξη μιας έννοιας: Μια *λειτουργική* (operational) η οποία εστιάζεται στην διαδικασία και μια *δομική* (structural), η οποία εστιάζεται στα αντικείμενα.

“Ένα επιτυχές πέρασμα από μια δραστική έννοια σε μια δομική μπορεί να αποδοθεί με ένα υπόδειγμα τριών βημάτων: πρώτο πρέπει να υπάρχει μια διαδικασία που να εκτελείται πάνω σε ήδη οικεία αντικείμενα, τότε αναγκαστικά προβάλλουν η ιδέα στροφής της διαδικασίας σε πλέον συμπαγές και συνεκτικό όλο και η ικανότητα τελικά να ειδωθεί αυτή η καινούργια οντότητα ως ένα σταθερό αντικείμενο που με την σειρά του θα αποκτηθεί. Αυτές οι τρεις συνιστώσες της ανάπτυξης μιας έννοιας θα ονομαστούν *εσωτερίκευση* (interiorization), *συμπύκνωση* (condensation), *εκπραγμάτωση* (reification), αντίστοιχα.

Συμπύκνωση σημαίνει μια μάλλον τεχνική αλλαγή της προσέγγισης που εκδηλώνεται σε μια δυνατότητα να αντιμετωπισθεί η δεδομένη διαδικασία με όρους input/output δίχως αναγκαστική διάκριση σε βήματα.

Εκπραγμάτωση είναι το επόμενο βήμα στο νου εκείνου που μαθαίνει, μετατρέπει τις ήδη συμπυκνωμένες διαδικασίες σε ένα αντικείμενο – οντότητα... Το γεγονός ότι η διαδικασία έχει εσωτερικευτεί και συμπυκνωθεί σε συμπαγή και αυταπόδεικτη οντότητα δεν σημαίνει κατά ανάγκη ότι ένα πρόσωπο έχει αποκτήσει την ικανότητα να την σκεφτεί

¹³ Cottrill, Jim, Dubinsky, Ed Nichols, Devilyna, Schwingendoff, Keith, Thomas, Karen & Vidakovic, Draga, (1996), Understanding the limit concept, Beginning with a co-ordinated process schema, Journal of Mathematical Behavior, 15, 167 – 192.

¹⁴Edelman & Tononi, Consciousness, How Master Becomes Imagination, 2000, σελ. 57

κατά δομικό τρόπο. Δίχως την εκπραγμάτωση η προσέγγιση θα μείνει καθαρά ενεργητική¹⁵”.

Στην ιδέα της Sfard βλέπουμε και πάλι την επίδραση της τεχνητής νοημοσύνης με τους όρους input/output. Οι Tall & all¹⁶ με ένα στόχο πιο περιορισμένο, όπως ομολογούν, προχώρησαν σε μια άλλη πρόταση χρησιμοποιώντας τον ιδιαίτερο όρο του procept. Με τον όρο αυτό προσπάθησαν να εκφράσουν τον δυϊκό ρόλο που εμπεριέχει μια μαθηματική έννοια (εκείνο της διαδικασίας και του συμβόλου), την *ευελιξία* και την *αμφιβολία*.

“Ένα στοιχειώδες procept είναι το αμάγαλμα τριών συνιστωσών: Μια *διαδικασία* που παράγει ένα μαθηματικό *αντικείμενο* και ένα *σύμβολο* που χρησιμοποιείται για να παραστήσει είτε την διαδικασία είτε το αντικείμενο. Ένα procept συνίσταται από μια συλλογή στοιχειωδών procept που εμπεριέχουν το ίδιο αντικείμενο.”¹⁷

Το Σχήμα 1 (στο τέλος) εμφανίζει μια διάταξη της ανάπτυξης μιας έννοιας όπως την προσφέρουν οι Gray & Tall¹⁸. Για μια συγκεκριμένη έννοια, π.χ ο αριθμός 5 υπάρχουν πολλοί τρόποι να τον παράγουμε μετρώντας ενδεχομένως τα δάκτυλά μας. Ένας τρόπος είναι να πάρουμε 4 και 1. Ένας άλλος 2 και 3. Ο κάθε τρόπος αποτελεί μια διαδικασία προσέγγισης (procedure). Αν τις θεωρήσω όλες μαζί ως μια διαδικασία έχω την διαδικασία παραγωγής (process) του 5. Το σύμβολο που αποδίδω τελικά στην έννοια αποτελεί τον άξονα που συγκρατεί και συνδέει στο νου δυο διαφορετικές έννοιες, της διαδικασίας παραγωγής της έννοιας και την έννοια καθαυτό. Και οι σχετικές έρευνες στρέφονται στην αξιολόγηση του κατά πόσο στο νου των μαθητών υπάρχει μια μαθηματική έννοια ως διαδικασία και πόσο ως σύμβολο.

Οι έρευνες αυτές έχουν κάποια πλεονεκτήματα όταν προσπαθούν να κατατάξουν τους μαθητές σε εκείνους που στην κατανόηση μιας έννοιας προσλαμβάνουν το λειτουργικό της σκέλος έναντι άλλων που βλέπουν το συμβολικό. Υπογραμμίζουν τον δυσπόστατο ρόλο που έχουν τα μαθηματικά σύμβολα στην γραφή τους και προπάντων κατά την πρόσληψή τους από αυτόν που μαθαίνει. Από εκεί και πέρα οι παραπάνω διακρίσεις έχουν πολλά εμπόδια για την χρήση τους και χρειάζονται

¹⁵ Sfard A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reifications – the case of function. In Guershon Harel & Ed Dubinsky (Eds), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 59-84) Washington, DC: MAA (MAA) Notes 25, σελ. 64-65.

¹⁶ Tall D. & Thomas M. & Davis G. & Gray E. & Simpson A. (2000), What is the Object of the Encapsulation of a process? *Journal of Mathematical Behavior* 18 (2), 223-241.

¹⁷ Gray & Tall (1994).

¹⁸ Gray, E. M. & Tall, D. O. (2001), Relationships between embodied objects and symbolic precepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics. *PME25*.

περαιτέρω εμπλουτισμό και συζήτηση. Εκείνο που πρέπει άμεσα να δούμε είναι κατά πόσο η συγκεκριμένη ανάλυση έχει προχωρήσει σε σχέση με τον Piaget, τι το καινούργιο προσφέρουν αυτές οι σχηματοποιήσεις, τι χάνεται από τις αναλύσεις του μεγάλου ερευνητή. “Τα αποτελέσματα των πράξεων που αφορούν στην εμπειρική αφαίρεση δεν είναι ορατά αντικείμενα αλλά ιδεατά¹⁹.”

Τα αντικείμενα στον Piaget υπάρχουν κατά ένα ειδικό τρόπο θεματοποιημένα (thematized objects) (Tall & all 2000) κάτι που ενδεχομένως η Sfard προσπαθεί να αποδώσει με την απαίτηση να είναι “οικεία” κι ο Tall χειρίζεται ως “βασικά αντικείμενα” (basic objects).

Διαβάζοντας το έργο του Piaget είναι εύκολο να οδηγηθεί κανείς στο λανθασμένο συμπέρασμα ότι είναι απαραίτητη η δίχως αναστοχασμό εμπειρία. Είναι εκπληκτική η κριτική που κάνει στον εαυτό του γι αυτό το λάθος ο Ginsburg²⁰, γνωστός μελετητής του Piaget.

“Είναι δυνατό να γίνει και ζημιά από την εφαρμογή των ιδεών του Piaget. Αν κάποιος μπλέξει λανθασμένες ερμηνείες της ιδέας του Piaget για ενεργητική μάθηση. Για παράδειγμα, κάποιοι συγγραφείς τονίζουν υπερβολικά το ρόλο των συγκεκριμένων δραστηριοτήτων. Οι Ginsburg & Oppen (1969) επιμένουν ότι “ Τα παιδιά, ειδικά τα μικρά ... μαθαίνουν καλύτερα από συγκεκριμένες δραστηριότητες”. Παραπέρα, “Οι δάσκαλοι δεν πρέπει να διδάσκουν, αλλά να ενθαρρύνουν το παιδί να μάθει με την διαχείριση αντικειμένων”. Οι συγγραφείς, αναμφίβολα καλοπροαίρετοι, υπερβάλλουν. Το σημαντικό της ιδέας του Piaget για δράση δεν είναι αναγκαστικά η φυσική και συγκεκριμένη δραστηριότητα. “Το σημαντικό για την μάθηση είναι η ενεργή συμμετοχή και η δέσμευση κι όχι αναγκαστικά η δραστηριότητα με αντικείμενα”²¹.

Τι είναι η μαθηματική σκέψη ή η μαθηματική αφαίρεση; Μπορεί να προσομοιωθεί με ρουτίνες; Μπορούμε να δώσουμε ένα μοντέλο παραγωγικής σκέψης που προϋποθέτει η μαθηματική σκέψη; Για παράδειγμα, στην περίπτωση της αρίθμησης έχουμε εμπλοκή όλων των κατηγοριών που αναφέραμε παραπάνω ως προ-πράξεις. Ακόμη, προηγείται ένα γενικό ενέργημα του νου που απαιτεί “εξίσωση των διαφορών” μεταξύ των στοιχείων κάποιου συνόλου με άλλα λόγια η άμεση ή έμμεση εισαγωγή της μονάδας. Τα στοιχεία απλά γίνονται ομοιογενής μονάδες (units) το καθένα ισοδύναμο με τα υπόλοιπα Piaget²². Το συγκεκριμένο γίνεται αντιληπτό με την μεσολάβηση του αφηρημένου²³. Έχουμε λοιπόν

¹⁹ Beth E. W. – Piaget J. (1966): *Mathematical Epistemology and Psychology*, D Reidel P.C., Holland. σελ. 188).

²⁰ Ginsburg H. P. (1988), *Piaget and Education: The Contributions and Limits of Genetic Epistemology*, in *Cognitive Development to Adolescence*, ed. by K. Richardson – S. Sheldon, Open University, σελ 248.

²¹ Στο ίδιο.

²² Piaget J. (1969) *The Child’s Conception of Number*, *Routledge & Kegan Paul*, σελ. 84.

²³ Κόζικ, σελ 35.

μια εκδοχή που δεν μπορεί να μας την προσφέρει ο εμπειρισμός που θέλει ν' αγνοεί τις κατηγορίες του νου οι τις κατασκευάζει με ονόματα που δίνει σε σύνολα αντικειμένων.

Ο εμπειρισμός αντλεί τις ρίζες του από τον νομιναλισμό. Ο νομιναλισμός διακρίνει στις έννοιες μόνο πλάτος κι αδυνατεί να δει το βάθος τους²⁴ και για αυτόν υπάρχουν μόνο τα πράγματα και τα ονόματα που τους δίνουμε. “Ο κλασικός νομιναλισμός αρχίζει με τον Ockham και είχε στόχο να διατηρηθεί μόνο μια κατηγορία του Συγκεκριμένου (Particular) ή Ατομικού (Individual), ό,τι ο Αριστοτέλης ονόμαζε “Πρώτη Ουσία” (Primary Substance). Όλα τα άλλα γίνονται απλά τρόποι του να μιλάμε και να σκεφτόμαστε για τα συγκεκριμένα²⁵”. Ο J. S. Mill²⁶ (1806–1883) χαρακτηριστικός εκφραστής του εμπειρικού πνεύματος, ιδρυτής της φιλοσοφίας του ωφελιμισμού, θα αναπτύξει μια εμπειρική θεωρία για τους αριθμούς γύρω στα 1870.

“Όλοι οι αριθμοί πρέπει να είναι αριθμοί για κάτι: δεν υπάρχουν πράγματα ως αφηρημένοι αριθμοί. Αλλά ενώ οι αριθμοί πρέπει να είναι αριθμοί κάποιων πραγμάτων είναι δυνατόν να είναι αριθμοί οτιδήποτε πραγμάτων. Οι προτάσεις, ως εκ τούτου, που αφορούν στους αριθμούς, έχουν την αξιοσημείωτη ιδιαιτερότητα να είναι προτάσεις που αφορούν όλα τα πράγματα οπουδήποτε: “όλα τα αντικείμενα και υπάρξεις κάθε είδους που είναι γνωστές από την εμπειρία μας²⁷”.

Ο Tall & all (2000) αναφέρεται σε μια παρόμοια έκπληξη του Dorfler που δεν μπορεί να καταλάβει τον αριθμό έξω από συγκεκριμένες εποπτείες πραγμάτων. Και το ζήτημα μοιάζει λίγο λογικό αν μιλάμε για μικρούς αριθμούς αλλά μπορώ εύλογα να αναρωτηθώ κατά αντιστοιχία ότι όταν σκέφτομαι το 3.334.589 πρέπει να σκέφτομαι τόσα μήλα, κουνουπίδια ή ν-γωνα; Η αρίθμηση δεν είναι μια τυχαία πνευματική λειτουργία αλλά καθοδηγείται από λογική αναγκαιότητα. Ο βοσκός που μετρά τα πρόβατα του και τα βρίσκει 47 γνωρίζει ότι αυτό είναι ανεξάρτητο από το αν είναι Τρίτη η Κυριακή, από το αν είναι μεθυσμένος ή κάνει κρύο. Αν βγάλει άλλο αριθμό γνωρίζει ότι οφείλεται σε κακή δική του αρίθμηση ή κάποιο πρόβατο λείπει και πρέπει να ανησυχεί. Η καθολική ισχύς του αριθμού ή η αντιμεταθετικότητα της πράξης της πρόσθεσης είναι εκείνη που θα του προσδιορίσει τη ακρίβεια των αντικειμένων κι όχι το αντίστροφο η βεβαιότητα των αντικειμένων την αλήθεια της αρίθμησης του. Αντίθετα ένας μουσικός που θα εκτελέσει ένα μουσικό κομμάτι στο πιάνο συνδέει ενέργειες με σύμβολα αλλά η ατυχία

²⁴ Cassirer E. (1953), *Substance and Function*, Dover, σελ. 12.

²⁵ Smith D. W. (1999), *Intentionality Naturalized*, p 83-110, in Edited by J. Peticot, F. J. Varela, B. Pachould, J. M. Roy, *Naturalizing Phenomenology*, Writing Science, σελ. 86.

²⁶ Mill J.S., *A System of Logic*, London, Longmans.

²⁷ Απόσπασμα του J. S. Mill από τον Cassirer, (1953 σελ. 34).

στην εκτέλεση μπορεί να ερμηνευτεί ως εξαρτώμενη από την ψυχολογική του κατάσταση ή ακόμη ως πρόθεση του για διασκευή.

Σύμφωνα με τον Mill οι ορισμοί της αριθμητικής είναι “επαγωγικές αλήθειες γνωστές σε εμάς από πρόιμη και σταθερή εμπειρία”. Οι ορισμοί της αριθμητικής είναι αληθινές προτάσεις γνωστές *a posteriori* στη βάση τελικά ενός είδους αριθμητικής επαγωγής²⁸.

Οι απόψεις του Mill πυροδότησαν μια πολύ γόνιμη συζήτηση χρόνια στην οποία έλαβαν μέρος οι Cantor, Frege, Husserl και θα αναφερθούμε σε αυτή αργότερα. Οι Gray & Tall δεν την λαμβάνουν υπόψη καθόλου και την αγνοούν (συζήτηση μαζί τους). Τα ζητήματα αυτά έχουν από παλιά απαντηθεί σε επίπεδο φιλοσοφίας τουλάχιστον. Στην θεωρία τους προκύπτει ένα αδιέξοδο στην προσπάθεια των να εφαρμόσουν την ιδέα του concept στους μεγάλους αριθμούς. Οι ιδέα για ρουτίνες κατανόησης είχε μια αποτελεσματικότητα για μικρούς αριθμούς αλλά και πάλι παρέκαμπε και δεν εξηγούσε την λειτουργία της γνώσης κατά αναγκαιότητα που είναι δεδομένη. Όταν αθροίζω 2 και 2 γνωρίζω ότι κάνει 4 και δεν μπορεί να κάνει κάτι άλλο και ακόμη το αποτέλεσμα αυτό έχει κύρος αντικειμενικό και υπάρχει ανεξάρτητα από την δική μου διαπίστωση.

Ο νεοκαντιανός φιλόσοφος Cassirer το διατυπώνει ως εξής:

“Η ψυχολογική ανάλυση των ενεργειών εκείνου που εκτελεί κάποιες πράξεις δεν αποκαλύπτει πώς το ένα συνδέεται με το δυο, ή το δυο με το τρία, και πώς ολόκληρο το λογικό πλέγμα των προτάσεων που περιέχονται στην καθαρή αριθμητική προκύπτει σύμφωνα με αυτή την σύνδεση²⁹”.

Ο Piaget στο έργο του δίνει μεγάλη σημασία στην κατά αναγκαιότητα παραγωγή των μαθηματικών κρίσεων.

“Αν και οι λογικό- μαθηματικές έννοιες, που ως κρίσεις επιβάλλονται κατά αναγκαιότητα, προκύπτουν από ενέργειες που το υποκείμενο ασκεί σε συλλογές αντικειμένων, ωστόσο η λογικό - μαθηματική εμπειρία είναι ψυχολογικά αναγκαία για την πλήρωση της παραγωγικής σκέψης. Αυτό δεν σημαίνει ότι οι στοιχειώδεις πράξεις σε σύνολα σχέσεων ή αριθμών παράγονται από τα φυσικά αντικείμενα, ούτε από το ατομικό ψυχολογικό υποκείμενο, αφού η λογικό - μαθηματική εμπειρία αποσυνδέει τις πλέον γενικές συντεταγμένες πράξεων και νόμων που είναι ανεξάρτητοι από τις επιμέρους ατομικές πράξεις³⁰”.

Οπωσδήποτε, σήμερα δεν μπορούμε πια να κάνουμε δηλώσεις του είδους “ο Piaget είπε”, αλλά οι θεωρίες του δεν παύουν να μας είναι

²⁸ Bell D. (1991), Husserl, London and New York, σελ. 47.

²⁹ Cassirer, σελ 35.

³⁰ Beth – Piaget, σελ 135.

χρήσιμες για γενικές παρατηρήσεις ισχυρίζεται η Meadows³¹. Οι επικριτές του στέκονται κυρίως στις διακρίσεις του Piaget για τα στάδια. Επιπλέον, έχει σημασία ότι ο Piaget κάνοντας όλες τις έρευνές του στο ψυχολογικό εργαστήριο, δεν έλαβε υπόψη το πλήθος κοινωνικών παράγοντων και για αυτό επικρίθηκε πολύ νωρίς και ορθά από τον Vygotsky³² και άλλους. Ακόμη δεν μας είπε τίποτα για την κατανόηση των μαθητών μέσα στην τάξη. Ο Piaget διακρίνει δυο είδη αφαίρεσης την *εμπειρική αφαίρεση* (empirical) και την *στοχαστική* (reflective) τοιαύτη³³. Η πρώτη παράγει την γνώση της από ιδιότητες των αντικειμένων του πραγματικού κόσμου ενώ η στοχαστική ξανακατασκευάζει τις γνώσεις της από δομές που κατασκευάστηκαν σε προηγούμενα στάδια και αποτελεί μια ολοκλήρωση ανωτέρου επιπέδου³⁴. Ωστόσο ας σταθούμε στην πρώτη παρατήρηση που τον αντιδιαστέλλει με τις μετέπειτα θεωρήσεις που επικαλούνται την θεωρία του.

Όπως παρατηρεί ο Ginsburg³⁵ ο Piaget, αναζητούσε με το έργο του καντιανές κατηγορίες. Ο Kant προσπάθησε να ξεπεράσει τα αδιέξοδα του εμπειρισμού, που οδηγούσε σε ένα ψυχολογισμό. Το σύστημα του αποτελούσε την τρίτη γωνία ενός τριγώνου με τον ορθολογισμό και τον εμπειρισμό στις άλλες δυο. Το ιστορικό βήμα στη σκέψη που επιχείρησε ο Kant, ενδεχομένως, υποβαθμίζεται όπως μπορούμε να συνάγουμε από την ρητή παρατήρηση του μεγάλου άγγλου φιλόσοφου B. Russell:

“Ο Kant είναι γενικά παραδεκτός ως ο μεγαλύτερος φιλόσοφος όλων των νεοτέρων φιλοσόφων. Προσωπικά, δεν μπορώ να συμμεριστώ αυτή την εκτίμηση αλλά θα ήταν ανόητο να μην αναγνωρίσω την μεγάλη του σπουδαιότητα”³⁶.

Οι θεμελιωτές της σύγχρονης ψυχολογίας Wundt, Helmholtz, Brentano είχαν αφετηρία τους τον Kant και ο Piaget είναι κληρονόμος αυτής της ηπειρωτικής παράδοσης της ψυχολογίας. Οι πρώτες μελέτες διάδοσης του έργου του Piaget στην Μεγάλη Βρετανία αρχίζουν με τον Lovell³⁷, αντίθετα στις ΗΠΑ επικρατούσε τότε ο μιχεβιορισμός όπως παρατηρεί ο Orton³⁸. Ωστόσο, το έργο του φαίνεται στρυφνό και δύσκολο

³¹ Meadows S/ (1988), Piaget's Contribution to Understanding Cognitive Development: An Assessment for the Late 1980s, 19 – 31, in Cognitive Development to Adolescence, ed. by K. Richardson – S. Sheldon, Open University, σελ. 30.

³² Vygotsky (1988). The genesis of highest mental functions, pp 61 – 80. In Cognitive Development to Adolescence, ed. by K. Richardson – S. Sheldon, Open University.

³³ Beth – Piaget, σελ. 188.

³⁴ στο ίδιο, σελ. 203.

³⁵ Ginsburg, 258.

³⁶ Russell B (1967). ,History of Western Philosophy, unwin university books, σελ. 677.

³⁷ Lovell K. (1961), The Growth of Basic Mathematical and Scientific Concepts in Children, University of London Press.

³⁸ Orton A. (1992), Learning Mathematics Cassell, London.

Peticot J, Varela F. J, Pachould B. , Roy J. M, (Ed) (1999), Naturalizing Phenomenology, *Writing Science*, σελ. 72.

για τον Hughes³⁹ και ίσως εδώ πρέπει να σταθούμε στην μεγάλη παράδοση εμπειρισμού που επικρατεί στην Μεγάλη Βρετανία κάτι για το οποίο ο Piaget έχει γνώση και γνωρίζει τι το χωρίζει με αυτόν τον τρόπο σκέψης⁴⁰.

“Η γενετική εξήγηση δεν οδηγεί αναγκαστικά στον εμπειρισμό ούτε επίσης σε ένα ιδεαλιστικό απριρισμό⁴¹”.

Οι θεωρήσεις αυτές αποδεσμεύουν τα συμπεράσματα από τον ψυχολογισμό, την “αναγωγή του γεγονότος σε κανονιστική αρχή”⁴² του απόλυτου εμπειρισμού που επιχειρεί να παράγει την σκέψη μόνο με επαγωγικό τρόπο που αντλούνται από την εμπειρία. Ο Ginsburg αναφέρει τον Piaget ως Καντιανό μια προσεκτικότερη μελέτη όμως του κλασσικού ερευνητή μας δείχνει ότι διατηρεί μια απόσταση από τον απόλυτο απριρισμό του Kant χωρίς όμως να παραιτείται της απαίτησης του ξεπεράσματος του εμπειρισμού στην παραδοχή ενός επιστημικού υποκειμένου, δηλαδή ενός λογικού υποκειμένου με παραγωγική σκέψη, κοινού σε όλα τα άτομα⁴³. Αυτό μπορεί να το δει στις συχνές του παρεμβάσεις⁴⁴ αλλά και στην σαφή επόμενη διευκρίνιση:

“Η εικόνα που παράγεται από την γενετική ανάλυση κινείται μακριά του εμπειρισμού και έρχεται πλησιέστερα στον απριρισμό, αλλά παραμένει στο μισό του δρόμου ανάμεσα σε αυτά τα δυο άκρα χωρίς να επιτυγχάνει τούτο τον δεύτερη προοπτική. Ο λόγος είναι ότι αν η δραστηριότητα του υποκειμένου είναι πράγματι *a priori* κατά μια έννοια σε σχέση με την εμπειρία, δείχνει μια αόριστη ικανότητα για κατασκευή ή δόμηση της εμπειρίας, η οποία παραμένει ξένη προς τα δυο θεμελιώδη χαρακτηριστικά του απριρισμού: Πλήρης δομές οι οποίες συγκρατούν ή προσδιορίζουν εκ των προτέρων τις κατασκευές κι επιβάλλουν εξαρχής αναγκαιότητα⁴⁵”.

Ο Piaget ανάγει την παραγωγική σκέψη στην οργάνωση της εμπειρίας και το εκφράζει με τα παρακάτω: “Οι λογικό – μαθηματικές σχέσεις δεν είναι έμφυτες στο υποκείμενο, απ’ την άλλη ανακαλύπτονται κατά την ψυχολογική εμπειρία κατά τον ίδιο τρόπο που αργότερα είμαστε σε θέση να μελετήσουμε τα διάφορα στάδια της ατομικής συνείδησης με την έννοια του αναστοχασμού (λύπη, επιθυμία κλπ.): έχουν κατασκευαστεί από το υποκείμενο αρχίζοντας από την σχηματοποίηση των εν γένει συντεταγμένων ενεργειών, οι οποίες από μόνες τους δεν είναι ούτε

³⁹ Hughes M. (1996), Τα παιδιά και η έννοια του αριθμού, Gutenberg, σελ. 32.

⁴⁰ Piaget J. (1987), Σοφία και ψευδαισθήσεις της Φιλοσοφίας,, (μετάφραση), εκδόσεις Γνώση, σελ. 78.

⁴¹ Beth – Piaget, σελ. 158.

⁴² Piaget J. (1987), Σοφία και ψευδαισθήσεις της Φιλοσοφίας, σελ. 84.

⁴³ Piaget 1987, σελ. 72.

⁴⁴ Στο ίδιο, σελ. 131.

⁴⁵ Beth – Piaget, σελ. 282.

αντιληπτές ούτε αντικείμενο της άμεσης εμπειρίας. ... Η σχηματοποίηση αυτή είναι κοινή σε όλα τα υποκείμενα' ..”⁴⁶

Ας γυρίσουμε όμως σε εκείνη την παλιά φιλοσοφική συζήτηση που πυροδοτήθηκε από τον Mill για τους αριθμούς. Ο Frege⁴⁷ πολύ νωρίς (1880) απάντησε στον Mill από το άλλο άκρο ενός Πλατωνικού ορθολογισμού με “Τα Θεμέλια της Αριθμητικής” αναζητώντας μια εγκυρότητα των αριθμών μέσα στην λογική τους θεμελίωση και το νόημά τους μέσα στις λογικές προτάσεις ενώ παρέκαμτε εντελώς το ζήτημα της ψυχολογικής κατασκευής τους. Ο Husserl, είχε υπ’ όψη τις αντιρρήσεις του Frege για τον Mill και προσπάθησε να αποφύγει την προβληματική κατάσταση. Για τον Husserl, εκείνης της εποχής, η έννοια του αριθμού δεν μπορεί να αποσαφηνισθεί παρά μόνο γενετικά και πρόδρομος αυτής της αντίληψης ήταν ο Mill. Στο εγχείρημά του θα προχωρήσει κάνοντας διαχωρισμό: Υπάρχει σαφής διάκριση μεταξύ των αριθμών που μας δίνονται ως τέτοιοι (και τον οποίων έχουμε αυθεντική έννοια, δηλ. οι πρώτοι μικροί ακέραιοι 1, 2, 3, ..., 6, ή 7) με τρόπο γνήσιο και οι οποίοι (συμβολικά) γεννώνται με μια επαναληπτική διαδικασία από τους πρώτους. Έχουμε λοιπόν κατά τον Husserl την εποπτεία μιας ορισμένης συνάθροισης⁴⁸. Δεν ανήκει στα πράγματα ο σχηματισμός των συναθροίσεων, δεν είναι σε οποιαδήποτε από τις σχέσεις που ισχύουν μεταξύ των πραγμάτων χάριν των διαφόρων ιδιοτήτων που έχουν, τότε που θα πρέπει να αναζητήσουμε τις συγκεκριμένες (concrete) εποπτείες που υπό-κείνται της έννοιας της συνάθροισης; Παίρνοντας την σκυτάλη από τον Kant “ο συνδυασμός μιας πολλαπλότητας δεν μπορεί να μας έρθει μέσω των αισθήσεων ... Απ’ όλες τις παραστάσεις ο συνδυασμός είναι ο μοναδικός ο οποίος δεν μπορεί να δοθεί μέσω αντικειμένων. Όντας μια δραστηριότητα της αυτενέργειας του υποκειμένου δεν μπορεί να εκτελεσθεί παρά μόνο από το ίδιο το υποκείμενο”⁴⁹, ο Husserl δίνει την απάντηση ότι οι συναθροιστικές ολότητες σε τελευταία ανάλυση ούτε δίνονται ούτε ανακαλύπτονται: **δημιουργούνται.**

Στο σημείο αυτό να σταθούμε σε κάποιες αναφορές που αφορούν στο πρόγραμμα της φαινομενολογίας του Husserl. Ο Piaget μέμφεται τον εαυτό του⁵⁰ γιατί διάβασε το έργο του Husserl πολύ αργά και στέκεται αρκετά ενθουσιώδης στις βασικές φιλοσοφικές διακρίσεις του και ιδιαίτερα εκείνες που αφορούν στην ψυχολογία. Στην επικοινωνία που επακολούθησε με τον Frege, ο δεύτερος τον επέκρινε για ψυχολογισμό.

⁴⁶ Στο ίδιο.

⁴⁷ Frege G, (1990), Τα θεμέλια της Αριθμητικής, μετάφραση Γ. Ρουσόπουλου, εκδόσεις Νεφέλη.

⁴⁸ Bell 1991, σελ. 46.

⁴⁹ Kant (B130).

⁵⁰ 1987, σελ 136.

Στις μετέπειτα μελέτες του αποποιήθηκε τον ψυχολογισμό αλλά όπως γράφει για αυτόν ο Derrida:

“Ποτέ δεν εγκατέλειψε την αρχική φιλοσοφική του θέση για την καταγωγή στην υποκειμενική εμπειρία της αντίληψης, των ιδεατών εννοιών και των επιστημονικών αντικειμένων - εδώ τα αριθμητικά αντικείμενα, οι αριθμοί που εξαιτίας της αντικειμενικής και καθολικής αξίας τους, φαίνονται δικαιωματικά ανεξάρτητα στην προέλευσή τους, από κάθε ψυχολογική εμπειρία, από την πολλαπλότητα των ψυχικών γεγονότων, από τα ενεργήματα των οποίων είναι ο πόλος. Έως τότε, στην ιστορία της μεταφυσικής η εναλλαγή ήταν η ακόλουθη: **άλλοτε** παρέβλεπαν την αντικειμενικότητα και την καθολικότητα τους- παρ’ όλο που παρέπεμπαν στην αισθητηριακή εμπειρία, στην ψυχολογική τους καταγωγή: ήταν η χειρονομία του εμπειρισμού, ιδίως όσον αφορά στους Άγγλους φιλόσοφους . **Άλλοτε** πάλι για να υπολογισθεί η καθολικότητά τους, η νοητή αναγκαιότητά τους, απέδιδαν στα ιδεατά αντικείμενα και στις μαθηματικές αλήθειες ... τόπο αιώνιο ... θεϊκό ... a priori δομή του πεπερασμένου πνεύματος...”⁵¹

Βλέπουμε και πάλι τον γνωστό μας προβληματισμό παράλληλο με τον προβληματισμό του Piaget, όπως μπορεί κανείς να δει στο. Το πρόγραμμα της φαινομενολογίας φαίνεται παράλληλο⁵² με εκείνο του κοστρουκτιβισμού, αφού ο Husserl ήθελε κυρίως να λύσει το πρόβλημα του ποια είναι η “σχέση ανάμεσα στην υποκειμενικότητα της γνώσης και στην αντικειμενικότητα του περιεχομένου της γνώσης”⁵³ . Έπρεπε να απαντηθεί το ερώτημα πώς συγκροτείται μέσα στο υποκείμενο ο αντικειμενικός- διϋποκειμενικός κόσμος, πώς παράγονται οι “πώς παράγονται οι καθολικές αλήθειες, επομένως άπειρα μεταβιβάσιμες μέσω τις γλώσσας και της γραφής”⁵⁴. Έχουμε μπροστά μας το κεντρικό πρόβλημα της επιστημολογίας “τη διαλεκτική Υποκειμένου - Αντικειμένου”⁵⁵ ή ακόμη παραπέρα εκείνο που προσφέρει η φαινομενολογία του Husserl “*μια αλληλεπίδραση που είναι αζεδιάλυτη και αφορά το υποκείμενο και το αντικείμενο, ως δημιουργό του ‘φαινομένου’*.”⁵⁶ και αυτό το επιτυγχάνει κατά τον Piaget ο Husserl με την χρήση του ιδιαίτερου όρου της “*αποβλεπτικότητας που δημιουργεί σημασίες*”⁵⁷ Η θεωρία του Husserl για τους αριθμούς είναι σε γενικές γραμμές η παρακάτω: Επινοούμε ένα σύστημα σημείων ή αλλιώς *αριθμητικών*

⁵¹ Derrida J. (1966), E. Husserl, Η Φαινομενολογία και το πέρας της Μεταφυσικής, *ΕΠΟΧΕΣ*, τευ. 34, σελ. 182.

⁵² Piaget, (1987), σελ. 139.

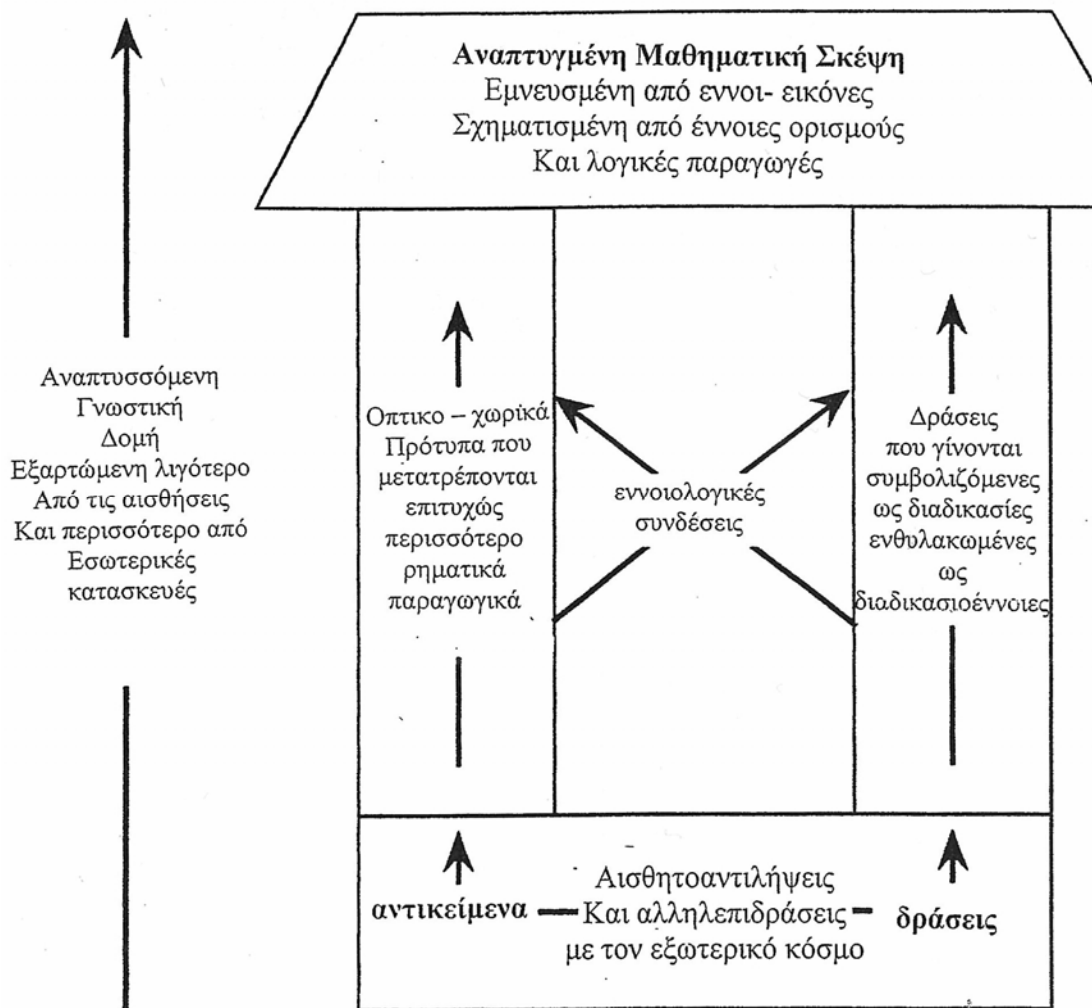
⁵³ Derrida, σελ.183.

⁵⁴ στο ίδιο, σελ. 188.

⁵⁵ Gabel J. (1978), Ψευδής Συνείδηση, μετάφραση, εκδόσεις Άκμων, σελ, 24.

⁵⁶ Piaget (1987), σελ. 144

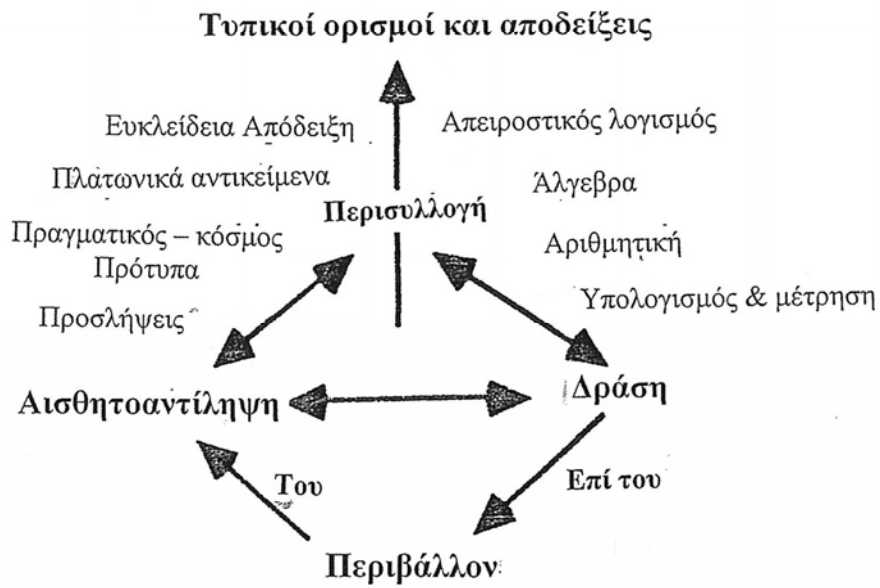
⁵⁷ στο ίδιο σελ 163



Σχήμα 2. Περιγραφή της γνωστικής μαθηματικής ανάπτυξης από το παιδί ως τη Μαθηματική Έρευνα (Tall)



Σχήμα 3: Διάφοροι τύποι των μαθηματικών (Tall)



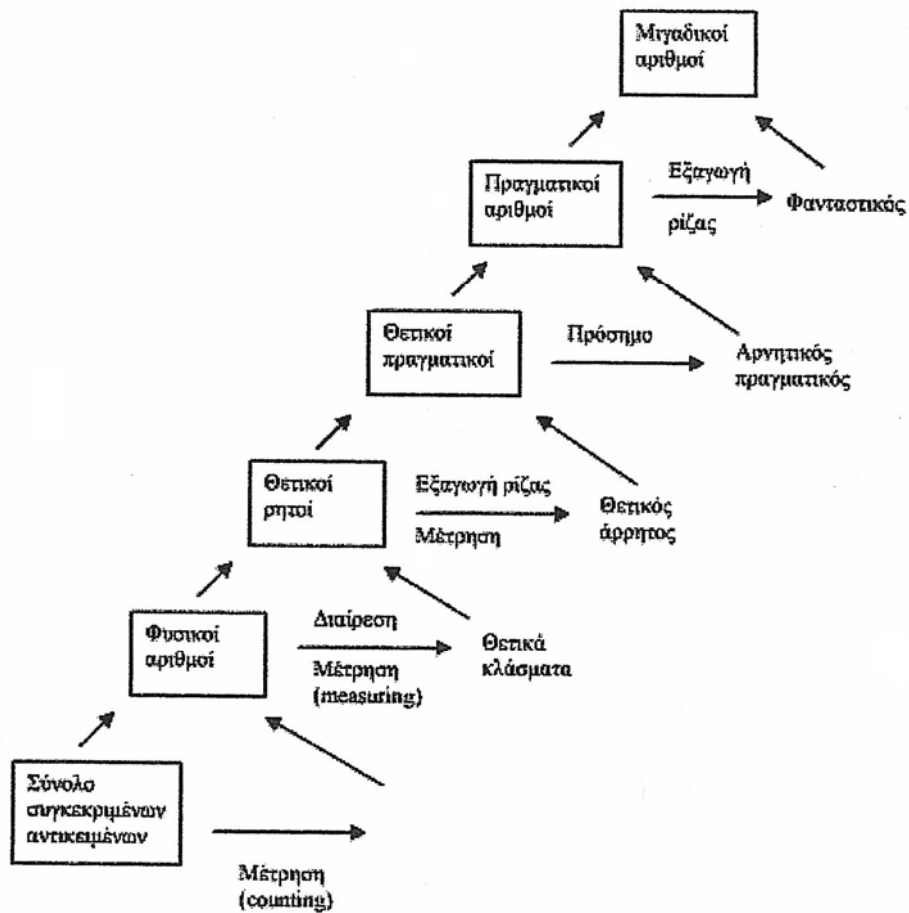
Σχήμα 3. Διάφοροι τύποι των Μαθηματικών (Tall)

TALL ET AL.

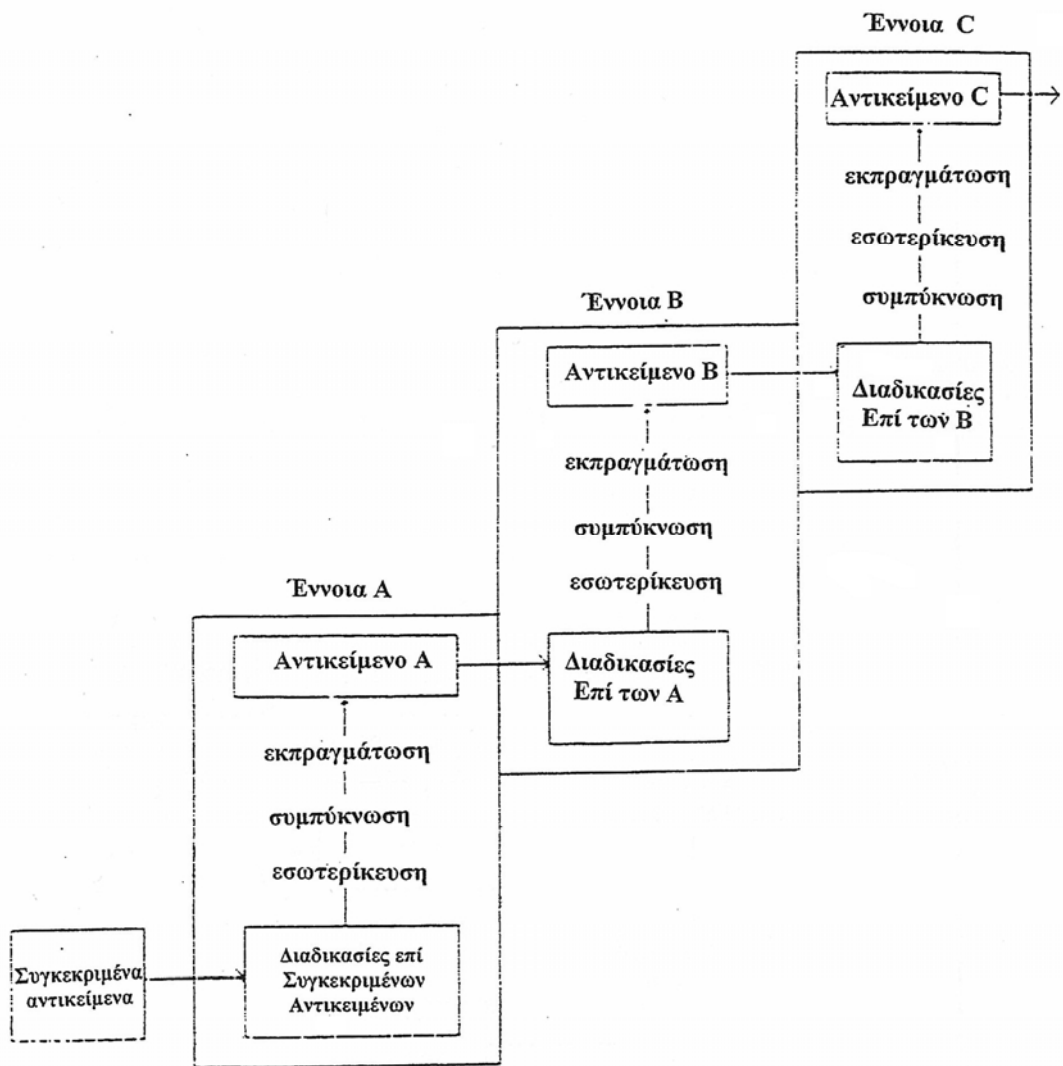
Πίνακας: Η Μετάβαση από την Διαδικασία στο Αντικείμενο

	Διαδικασία	...	Αντικείμενο
Piaget (1950s)	Δράση(εις), πράξη(εις)...	...	Θεματοποιημένο αντικείμενο της σκέψης
Dienes (1960s)	Κατηγορήμα...	...	Θέμα (Subject)
Davis (1980s)	Οπτικά τροποποιημένη ακολουθία...κάθε βήμα παρακινεί το επόμενο	ολοκληρωμένη ακολουθία... ειδομένο ως όλο, και ενδεχόμενο να σπάσει σε υπακολουθίες	πράγμα, οντότητα, ουσιαστικό
Greeno (1980s)	προσέγγιση ...	είσοδος σε μια νέα προσέγγιση...	εννοιολογική οντότητα
Dubinsky (1980s)	δράση... κάθε βήμα ενεργοποιεί το επόμενο	Εσωτερικευμένη διαδικασία... Με συνειδητό έλεγχο	Ενθουλακωμένο αντικείμενο
Sfard (1980s)	Εσωτερικευμένη διαδικασία... Διαδικασία εκτελεσμένη	Συμπυκνωμένη διαδικασία... Αυταπόδεκτη	Εκπρασματοποιημένο αντικείμενο
Gray and Tall (1990s)	Προσέγγιση... επί μέρους αλγόριθμός	διαδικασία... αντιληπτό ως όλον, ανεξαρτήτως αλγόριθμων	διαδικασιοέννοια, σύμβολο ανακαλόν διαδικασία ή έννοια

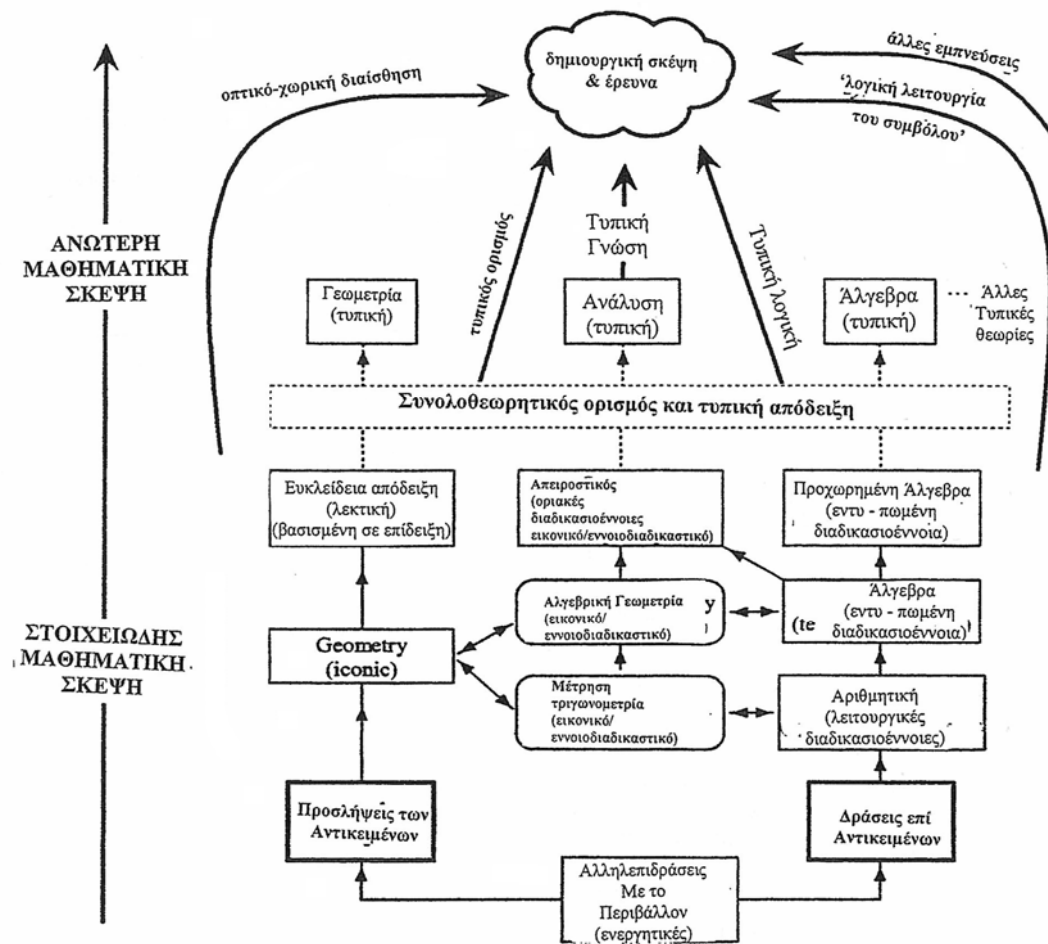
Σχήμα 4. Εννοιολογική εξέλιξη των διαφόρων μαθηματικών δραστηριοτήτων των Μαθηματικών (Tall)



Σχήμα 5. Ιεράρχηση των αριθμών ως παράδειγμα επιπέδων εκπραγμάτωσης (Sfard).



Σχήμα 6. Γενικό Μοντέλο του εννοιολογικού σχηματισμού (Sfard).



Σχήμα 7. Η Ανάπτυξη της ανώτερης Μαθηματικής Σκέψης (Tall).

6. 5 ΕΝΣΩΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Είχαμε την πείρα
μας έλειπε το νόημα
Τ. Έλιοτ

Τα τελευταία χρόνια στο χώρο της έρευνας για την Διδασκαλία και Κατανόηση των Μαθηματικών κερδίζει έδαφος η συζήτηση για τα embodied mathematics που μπορούμε να το μεταφράσουμε *ενσώματα*. Η ιδέα στην πλήρη ανάδειξή της εμφανίζεται με τις πρόσφατες εργασίες του Lakoff και των συνεργατών του με το περιώνυμο βιβλίο: Lakoff G. & Núñez E. R. (2000), *Where Mathematics comes from, basic books*, New York και το οποίο δέχτηκε και κριτικές¹. Έτσι για τον Lakoff, ο οποίος συζητά για τα embodied mathematics τουλάχιστον από το 1987:

“τα μαθηματικά βασίζονται σε δομές του εννοιολογικού συστήματος του ανθρώπου τις οποίες δομές χρησιμοποιεί για να αντιληφθεί κατανοήσει την πρωτογενή εμπειρία”²

Η Πρόταση των Lakoff & Núñez έρχεται να αντιμετωπίσει κλασσικά επιστημολογικά ερωτήματα για τα Μαθηματικά:

“Τα Μαθηματικά του ανθρώπου είναι ενσώματα, εδράζονται στην ανθρώπινη πείρα δεν είναι εντελώς υποκειμενικά ... δεν είναι θέμα απλών κοινωνικών συμβάσεων.

Χρησιμοποιούν άκρως οριοθετειμένες και περιορισμένες πηγές της βιολογίας του ανθρώπου και μορφοποιούνται από την φύση των εγκεφάλων μας, των σωμάτων μας, των εννοιολογικών μας συστημάτων και αφορούν στην ανθρώπινη κοινωνία και τον πολιτισμό”³.

Η θεωρία των ενσαρκωμένων μαθηματικών θέτει τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

1. Τα μαθηματικά είναι προϊόν των ανθρώπων. Χρησιμοποιούν τα πολύ περιορισμένα μέσα της ανθρώπινης βιολογίας και σχηματίζονται από τη φύση των εγκεφάλων μας, των σωμάτων μας, των εννοιολογικών μας συστημάτων, και των ενδιαφερόντων των ανθρώπινων κοινωνιών και πολιτισμών.

¹ Presmeg G. N. (2002), Mathematical idea analysis: a science of embodied mathematics, *Journal for research in Mathematics education*, Vol. 33, no 1, 2002, pp. 59-63.

² Lakoff G. (1987), *Women, Fire and Dangerous Things*, *The University Chicago Press*, Chicago, p. 364).

³ Lakoff & Núñez (pp. 351 -365)

2. Τα τμήματα της ανθρώπινης γνωστικής λειτουργίας που παράγουν τα ανώτερα μαθηματικά είναι φυσιολογικές γνωστικές ικανότητες των ενηλίκων – λόγου χάρη, η ικανότητα για την **εννοιολογική μεταφορά**. Τέτοιες γνωστικές ικανότητες είναι κοινές σε όλους τους ανθρώπους. Ως τέτοια, η ικανότητα για μαθηματικά, ακόμη και για τα ανώτερα, είναι καθολική σε ανθρώπινο επίπεδο.
3. Η απλή απαρίθμηση είναι έμφυτη στον ανθρώπινο εγκέφαλο. Όπως πολλά άλλα θηλαστικά, οι άνθρωποι μπορούν να αναγνωρίσουν άμεσα και με ακρίβεια το πλήθος κάποιων οντοτήτων ενός πολύ μικρού συνόλου. Τούτη είναι σαφώς μια ενσώματη ικανότητα.
4. Οι θεματικές περιοχές των μαθηματικών – αριθμητική, γεωμετρία, πιθανότητες, απειροστικός λογισμός, θεωρία συνόλων, συνδυαστική, θεωρία παιγνίων, τοπολογία, κλπ – προκύπτουν από ανθρώπινα ενδιαφέροντα και δραστηριότητες:
 λόγου χάρη, την απαρίθμηση και τη μέτρηση, την αρχιτεκτονική, το χαρτοπαίγνιο, την κίνηση και άλλες μεταβολές, τη συγκέντρωση, το χειρισμό γραπτών συμβόλων, τα παιχνίδια, την επιμήκυνση και το λύγισμα αντικειμένων.
 Με άλλα λόγια, τα μαθηματικά είναι θεμελιωδώς ένα ανθρώπινο εγχείρημα που προκύπτει από βασικές ανθρώπινες δραστηριότητες.
5. Η μαθηματική πτυχή αυτών των ενδιαφερόντων είναι η ακρίβεια – ακριβή αθροίσματα, μετρήσεις, γωνίες, εκτιμήσεις, ρυθμοί μεταβολής, κατηγοριοποιήσεις, πράξεις, κοκ.
 Η ακρίβεια καθίσταται εφικτή επειδή οι άνθρωποι μπορούν να πραγματοποιούν πολύ σαφείς και ακριβείς διακρίσεις μεταξύ αντικειμένων και κατηγοριών υπό συγκεκριμένες συνθήκες και μπορούν να σταθεροποιήσουν στο νου τους και να θυμηθούν με συνέπεια αφηρημένες οντότητες όπως οι αριθμοί και τα σχήματα.
6. Η ακρίβεια ενισχύεται σημαντικά από την ανθρώπινη ικανότητα του συμβολισμού.
 Μπορούν να επινοηθούν σύμβολα για την παράσταση μαθηματικών ιδεών, οντοτήτων, πράξεων και σχέσεων. Τα σύμβολα επιτρέπουν επίσης ακριβείς και με δυνατότητα επανάληψης υπολογισμούς.
7. Η **εννοιολογική μεταφορά** είναι ένας νευρικά ενσώματος θεμελιώδης γνωστικός μηχανισμός που μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε τη συμπερασματολογική δομή μιας περιοχής ώστε να εκτελέσουμε συλλογισμούς για μια άλλη. Επιτρέπει στους μαθηματικούς να μεταφέρουν σε μια περιοχή των μαθηματικών τις ιδέες και τις μεθόδους ακριβούς υπολογισμού μιας άλλης περιοχής.

8. Μόλις εδραιωθούν μέσα σε μια κοινότητα μαθηματικών, τα μαθηματικά συμπεράσματα και οι υπολογισμοί για μια δεδομένη θεματική περιοχή τείνουν να μη μεταβάλλονται ούτε χρονικά ούτε χωρικά ούτε πολιτισμικά.

Η σταθερότητα των ενσώματων μαθηματικών είναι μια συνέπεια του γεγονότος ότι όλοι οι φυσιολογικοί άνθρωποι έχουν τις ίδιες σχετικές πτυχές εγκεφαλικής και σωματικής δομής και τις ίδιες σχετικές σχέσεις με το περιβάλλον που εισέρχονται στα μαθηματικά.

9. Τα μαθηματικά δεν είναι μονολιθικά στη γενική θεματική περιοχή τους. Δεν υπάρχει η γεωμετρία, η θεωρία συνόλων ή η τυπική λογική.

Αντίθετα, υπάρχουν αμοιβαία ασυνεπείς εκδοχές γεωμετρίας, θεωρίας συνόλων, λογικής κ.ο.κ. Κάθε εκδοχή σχηματίζει μια διακεκριμένη και εσωτερικά συνεπή θεματική περιοχή.

10. Τα μαθηματικά είναι αποτελεσματικά στο χαρακτηρισμό και την πραγματοποίηση προβλέψεων για ορισμένες πτυχές του πραγματικού κόσμου όπως τον βιώνουμε.

Έχουμε εξελιχθεί έτσι ώστε η καθημερινή γνωστική μας λειτουργία να μπορεί, γενικά, να εναρμονιστεί με τον κόσμο όπως τον βιώνουμε.

Τα μαθηματικά είναι μια συστηματική επέκταση των μηχανισμών της καθημερινής γνωστικής λειτουργίας. Οποιαδήποτε εναρμόνιση των μαθηματικών με τον κόσμο διαμεσολαβείται και καθίσταται εφικτή από τις ανθρώπινες γνωστικές ικανότητες. Κάθε τέτοια «εναρμόνιση» εμφανίζεται στον ανθρώπινο νου, όπου γνωρίζουμε και τον κόσμο και τα μαθηματικά.

Η θεωρία των ενσώματων μαθηματικών σκοπεύει να αντιμετωπίσει το κύριο πρόβλημα της επιστημολογίας των μαθηματικών που αφορά το ζήτημα των πηγών της έγκυρης και καθολικής γνώσης, ένα πρόβλημα που ξεκινά από τον πλατωνισμό και ο Lakoff⁴ προτείνει την απομυθοποίησή του. Το ίδιο πρόβλημα υπάρχει και για τον Piaget⁵ ο οποίος αναφέρει:

Η επιστημολογία των μαθηματικών έχει τρεις αρχικά και κλασσικά προβλήματα:

1) Γιατί τα μαθηματικά είναι τόσο αποδοτικά παρόλο που στηρίζονται σε ελάχιστες και σχετικά φτωχές έννοιες ή αξιώματα;

2) Γιατί έχουν αναγκαίο (και καθολικό) χαρακτήρα, και παραμένουν σταθερά αυστηρά σε αντίθεση με τον κατασκευαστικό τους χαρακτήρα που μπορεί να αποτελέσει και πηγή παραδόξων;

⁴ 1987, σελ. 364.

⁵ Piaget J. (1972), *The principles of Genetic Epistemology*, Routledge, London, σελ. 69.

3) και γιατί συμφωνούν τόσο πολύ με πείρα μας ή την φυσική πραγματικότητα σε αντίθεση με τον απόλυτο παραγωγικό τους χαρακτήρα;

Ποια είναι η προέλευση των Μαθηματικών;

Οι Lakoff και Núñez αναφέρουν: Τα ανθρώπινα μαθηματικά δεν είναι το είδωλο κάποιων μαθηματικών που υπάρχουν εξωτερικά προς τους ανθρώπους. Οι μαθηματικές οντότητες δεν μπορούν να υπάρξουν υλικά, υλοποιηθούν 'materialized', αφού κάποιος δεν μπορεί να αγγίξει, ας πούμε μια άπειρη σειρά ή ένα σύνολο αρτίων...⁶

Δεν είναι ούτε υπερβατικά ούτε μέρος του φυσικού σύμπαντος. Αλλά υπάρχουν εξαιρετικοί λόγοι για τους οποίους τόσοι άνθρωποι, συμπεριλαμβανομένων και επαγγελματιών μαθηματικών, θεωρούν ότι τα μαθηματικά δεν έχουν ανεξάρτητη, αντικειμενική, εξωτερική ύπαρξη.

Οι ιδιότητες των μαθηματικών είναι, κατά πολλούς τρόπους, ιδιότητες που κάποιος θα ανέμενε από τις απλοϊκά για τα εξωτερικά αντικείμενα.

Ο λόγος είναι ότι βασίζονται μεταφορικά στην εμπειρία που έχουμε από τα εξωτερικά αντικείμενα και στις εμπειρίες:

δοχείων,

(οι μορφές του συλλογισμού από αυτό βγαίνει εκείνο)

συνεχών τροχιών κίνησης,

(μορφή συλλογισμού, από εδώ πάω εκεί)

κατασκευή οικοδομής

(μορφή συλλογισμού, αυτό στηρίζεται σε αυτό)

στρατηγικής μάχης (στρατηγικές συλλογισμού)

διακριτών αντικειμένων κλπ.

υπεράσπισης σε δικαστήριο (τεχνική υπεράσπισης, μαιευτική)

Σαφής είναι η αντίκρουση της αντίληψης ότι τα μαθηματικά υπάρχουν εξωτερικά ως μέρος του φυσικού σύμπαντος, όπως αυτή εμφανίζεται από την άποψη ότι η διατύπωση των φυσικών νόμων μέσω των μαθηματικών υποδεικνύει ότι τα χρησιμοποιούμενα μαθηματικά

⁶ Lakoff & Núñez (Σελ 218)

προϋπάρχουν στο φυσικό σύμπαν. Το αντεπιχείρημα των Lakoff και Núñez είναι ότι κανείς δεν παρατηρεί τους νόμους του σύμπαντος ως τέτοιους, αλλά εκείνο που παρατηρείται είναι οι *κανονικότητες* του σύμπαντος, οι οποίες υπάρχουν ανεξάρτητα από εμάς. Οι νόμοι είναι μαθηματικές προτάσεις κατασκευασμένες από ανθρώπους στην προσπάθεια χαρακτηρισμού των εν λόγω κανονικοτήτων που βιώνονται στο φυσικό σύμπαν. Κεντρική θέση της θεωρίας των ενσώματων μαθηματικών είναι ότι η μόνη πρόσβαση που έχουμε στα μαθηματικά είναι μέσω εννοιών του νου μας οι οποίες μορφοποιούνται από τα σώματά μας και γίνονται φυσικά αντιληπτές από το νευρικό μας σύστημα. Τα μόνα μαθηματικά που μπορούμε να γνωρίζουμε είναι τα μαθηματικά που το σώμα μας και ο εγκέφαλός μας επιτρέπουν να γνωρίζουμε.

Κατά τον Lakoff η σκέψη είναι ενσωματωμένη, δηλαδή, οι δομές που χρησιμοποιούνται για τη συναρμολόγηση των εννοιολογικών μας συστημάτων αναφύονται από τη σωματική μας εμπειρία και αποκτούν νόημα μέσω αυτής. Επιπλέον, ο πυρήνας των εννοιολογικών μας συστημάτων είναι άμεσα θεμελιωμένος στην αντίληψη, τη σωματική κίνηση και την εμπειρία φυσικού και κοινωνικού χαρακτήρα. Σύμφωνα επίσης με τους Lakoff και Núñez μερικές βασικές ιδιότητες εξωτερικών αντικειμένων όπως τα βιώνουμε στην καθημερινή μας ζωή και οι οποίες εφαρμόζονται και στα μαθηματικά είναι οι εξής:

- **Καθολικότητα:** ακριβώς όπως τα εξωτερικά αντικείμενα τείνουν να είναι ίδια για όλους, έτσι και τα βασικά μαθηματικά είναι, εν γένει, τα ίδια διαμέσου των πολιτισμών. Δύο συν δύο κάνει πάντα τέσσερα, ανεξάρτητα από τον πολιτισμό.
- **Ακρίβεια:** στον κόσμο των φυσικών άμεσα αναγνωρίσιμου πλήθους (subitizable) αντικειμένων, δύο αντικείμενα είναι δύο αντικείμενα, ούτε τρία ούτε ένα. Ως επέκταση αυτού, αν δοθεί ένα σακί με χρυσά νομίσματα υπάρχει ακριβής απάντηση στο ερώτημα του πόσα νομίσματα περιέχονται σ' αυτό.
- **Συνέπεια για κάθε δοθείσα θεματική περιοχή:** ο φυσικός κόσμος όπως τον βιώνουμε κανονικά είναι συνεπής. Ένα δεδομένο βιβλίο δε βρίσκεται ταυτόχρονα πάνω στο γραφείο και όχι πάνω στο γραφείο.
- **Σταθερότητα:** τα βασικά φυσικά γεγονότα, δηλαδή συγκεκριμένες εμφανίσεις σε δεδομένο χρόνο και τόπο – δε μεταβάλλονται. Είναι χρονικά σταθερά. Αν υπήρχε ένα βιβλίο πάνω στο τραπέζι στις 10:00 σήμερα το πρωί, ιστορικά θα ισχύει πάντα το ίδιο, ότι δηλαδή υπήρχε ένα βιβλίο πάνω στο γραφείο στις 10:00 το πρωί.

- **Γενικευσιμότητα:** υπάρχουν βασικές ιδιότητες των δέντρων που γενικεύονται σε νέα δέντρα τα οποία δεν έχουμε συναντήσει, ιδιότητες πουλιών που γενικεύονται σε πουλιά που δεν έχουν γεννηθεί ακόμη, κοκ.
- **Ανακαλυψιμότητα:** γεγονότα που αφορούν αντικείμενα του κόσμου μπορούν να ανακαλυφθούν. Αν υπάρχει ένα μήλο στη μηλιά της αυλής, μπορούμε να ανακαλύψουμε ότι το μήλο βρίσκεται εκεί.

Οι Lakoff και Núñez, εκφράζοντας την παράδοση του ευρύτερου αναγωγισμού και της φαινομενολογικής παράδοσης (Merlau-Ponty 1955, DiSessa, 1983, Maturana-Varela⁷, κ.ά.), έχουν ως θέση τους ότι η λεπτομερής φύση των σωμάτων μας, των εγκεφάλων και της καθημερινής μας λειτουργίας στον κόσμο δομεί τις ανθρώπινες έννοιες και την ανθρώπινη συλλογιστική.

Κατά μείζονα λόγο, οι άνθρωποι αντιλαμβάνονται τις αφηρημένες έννοιες με απτό τρόπο, χρησιμοποιώντας ιδέες και τρόπους συλλογισμού θεμελιωμένους στο αισθησιο-κινητικό (sensory-motor) σύστημα.

Ο μηχανισμός με τον οποίο κατανοείται το αφηρημένο μέσω του απτού ονομάζεται εννοιολογική μεταφορά (conceptual metaphor).

Ο όρος ‘ενσωμάτωση’ (embodiment) χρησιμοποιείται με πλήθος διαφορετικών τρόπων στη σύγχρονη γνωστική επιστήμη, κι αυτές οι ποικίλες χρήσεις αντανακλούν κατά περιόδους θεμελιώδεις θεωρητικές διαφορές⁸.

⁷ Varelas F. & Thompson E. & Rosh E. (1999), *The Embodied Mind*, MIT, Cambridge, Massachusetts.

⁸ Seitz A. J. (2000), *The bodily Basis of Thought*, *New Ideas in Psychology*, 18 (1), 23-40. Lakoff G. & Johnson M. (1980), *Metaphors We live by*, The University of Chicago Press, Chicago. Rosh, E. (1978). *Principles of categorization*, In E. Rosh & B. Loyd (Eds). *Cognition and categorization* (pp. 27-48). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Inc. Gray, E. M. & Tall, D. O. (2001), Relationships between embodied objects and symbolic precepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics. *PME25*. Núñez E. & Edwards L. & Matos J. (1999), Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education, *Educational Studies of Mathematics*, 39, pp. 45 – 65. Watson & Spyrou & Tall (2003), The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: The concept of vector, (in print) in *Mediterranean Journal in Mathematics Education 2*. Cyprus.

Εφαρμογή της έννοιας του Επιστημολογικού Εμποδίου στη Διδακτική των Μαθηματικών

Πως είναι δυνατό το παραπάνω εξηγητικό μοντέλο της εξέλιξης των μαθηματικών, το οποίο στηρίχθηκε στην έννοια της διαδοχής των ερευνητικών προγραμμάτων, του ξεπεράσματος και της αντικατάστασης ενός θεωρητικού πλαισίου-εμποδίου από ένα άλλο, να συντελέσει στη διαμόρφωση μιας διδακτικής πρότασης για τα μαθηματικά; Στο δεύτερο αυτό μέρος της εργασίας εκτίθενται οι απόψεις των ειδικών που προσπάθησαν να απαντήσουν σ' αυτό το ερώτημα.

1. GUY BROUSSEAU: ΤΑ ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΚΑ ΕΜΠΟΔΙΑ ΚΑΙ Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ο Guy Brousseau (καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Bordeaux I) παρουσιάζει τις απόψεις του στο άρθρο “Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques” το οποίο περιέχεται σε μια συλλογή δοκιμίων με τίτλο “Construction des Savoirs” (Colloque international obstacle épistémologique et conflit socio-cognitif, έκδοση Agence d'Arc, Ottawa, 1989). Αρχικά θέτει το ερώτημα: **Γιατί η διδακτική των μαθηματικών ενδιαφέρεται για τα επιστημολογικά εμπόδια;** Παρ' ότι ο ίδιος ο Bachelard πίστευε ότι το επιστημολογικό εμπόδιο δεν ήταν δυνατόν να συνδεθεί με τη μαθηματική επιστήμη, στη δεκαετία του '70 η ανάπτυξη της θεωρίας των “διδασκικών καταστάσεων” και της έννοιας του “πληροφοριακού άλματος” (“saut informationnel”) από τον ίδιο τον Brousseau (1974), μάλλον επιβάλλει την εισαγωγή της έννοιας.

1. Μια γνώση είναι το αποτέλεσμα της προσαρμογής του μαθητή απέναντι σε μια κατάσταση, η οποία προσαρμογή “δικαιώνει” αυτή τη γνώση, αν η τελευταία είναι πιο αποτελεσματική στην επίλυση προβλημάτων που ανακύπτουν. Για να υιοθετήσει τη γνώση αυτή ο μαθητής οφείλει ο διδάσκων να επιλέξει τις κατάλληλες τιμές των “διδασκικών μεταβλητών”, οι οποίες την καθιστούν επωφελέστερη σε σχέση με κάποιες άλλες: π.χ. για να πειστούν να προτιμήσουν οι μαθητές, που

γνωρίζουν τη μέθοδο της αντικατάστασης, την επίλυση γραμμικού συστήματος με διαδοχικές απαλοιφές, θα πρέπει ο καθηγητής να παρουσιάζει λύσεις συστημάτων 4ου βαθμού αντί 2ου ή 3ου. Έχουμε λοιπόν εδώ μια εξέλιξη με άλματα παρά μ'έναν ομαλό, κανονικό τρόπο.

2. Η εκπαίδευση δια της προσαρμογής σε δεδομένο περιβάλλον συνεπάγεται απαραίτητως γνωστικά ρήγματα: προσαρμογές, μεταβολές των υπο-κειμένων μοντέλων, γλωσσικών εργαλείων, συστημάτων.

3. Αν η ιστορική πορεία ενός μαθητή-ή και μιας ευρύτερης πολιτιστικής ομάδας- τον ωθεί πολύ αργά σε μια επιλογή γνώσης βέλτιστης απόδοσης, η αρχή της προσαρμογής ενδέχεται να παρεμποδίζει την αναγκαία απόρριψη της ανεπαρκούς γνώσης. Αυτό μας οδηγεί στην αντίληψη της αντίστασης και επιμονής των “μεταβατικών” γνώσεων.

4. Από το 1936 ο F. Gouseth^{*} επεσήμανε ότι τα ρήγματα αυτά μπορούν να γίνουν αμέσως αντιληπτά με την μελέτη των διδακτικών καταστάσεων (αποτελέσματα της μεταβολής των “διδακτικών μεταβλητών”) και των γνωστικών αντικειμένων, και όχι μόνον έμμεσα δια της παρατήρησης της συμπεριφοράς των παιδιών.

Απαιτείται, υπό το πρίσμα της παραπάνω οπτικής, μια επανεξέταση της ερμηνείας των σφαλμάτων των μαθητών και των τρόπων (modalités) της γένεσής τους. Ως τώρα τα απέδιδαν είτε σε έλλειψη γνώσης είτε σε ελαττωματικές δυσλειτουργίες και τα ενέτασσαν σ'ένα απόλυτα αρνητικό πλαίσιο· θα πρέπει να δούμε τα επαναλαμβανόμενα λάθη ως αποτελέσματα, παράγωγα και τις πιο πολλές διαπλεκόμενα με αντιλήψεις, οι οποίες ενώ είναι εσφαλμένες καθ'αυτές δεν έχουν το χαρακτήρα μειονεκτήματος αλλά συχνά συνιστούν εφόδιο.

Ο G. Brousseau δίνει τις εξής γενικές κατευθύνσεις για την έρευνα:

α) *Να βρούμε τα επαναλαμβανόμενα λάθη των μαθητών και να δείξουμε ότι κατηγοριοποιούνται σε σχέση με κάποιες αντιλήψεις.*

β) *Να βρούμε τα εμπόδια μέσα στην ιστορική πορεία των μαθηματικών.*

γ) *Να αντιπαραβάλλουμε τα ιστορικά εμπόδια με τα εμπόδια στο χώρο της εκπαίδευσης και να θεμελιώσουμε τον επιστημολογικό τους χαρακτήρα.*

^{*} “Les mathématiques et la réalité: essai sur la méthode axiomatique” Paris, A. Blanchard

Έτσι στη συνέχεια αντιμετωπίζουμε το εξής ερώτημα: “Υπάρχουν επιστημολογικά εμπόδια στα μαθηματικά”; Όσον αφορά την προσπάθεια συλλογής των συχνότερα παρατηρούμενων σφαλμάτων υπάρχουν ήδη κάποια αποτελέσματα ($(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $0 \cdot \alpha = \alpha$, $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$, $(0,2)^2 = 0,4$ κ.ά.), αλλά η σύνδεσή τους με κάποιες συγκεκριμένες αντιλήψεις στηρίχθηκε περισσότερο σε στατιστικές μεθόδους. Η θεωρία των διδακτικών καταστάσεων έδωσε ώθηση στην έρευνα προς αυτήν την κατεύθυνση (Brousseau: “Problèmes d’enseignement des décimaux” (1981), Brousseau: “Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire” (1987), Ratsimba-Rajohn: “Étude de deux méthodes de mesures rationnelles: la commensuration et le fractionnement de l’unité en vue de l’élaboration de situations didactiques” (1981)).

Όσον αφορά τα εμπόδια στην ιστορική πορεία των μαθηματικών ο Brousseau αναφέρει τη μελέτη του G. Glaeser: “Épistémologie des nombres relatifs” (1981) (στο Recherches en didactique des mathématiques, 213, 303-346). Παραθέτει επίσης την πρόταση του Duroux (1982) για την κατάλληλη προσαρμογή της αρχικής έννοιας του Bachelard στην περιοχή των μαθηματικών, ένα σύνολο προϋποθέσεων που χαρακτηρίζουν το “επιστημολογικό εμπόδιο”:

1. Ένα εμπόδιο είναι μια γνώση ή μια αντίληψη και όχι μια δυσκολία ή αστοχία γνώσης.
2. Η γνώση αυτή δίνει απαντήσεις κατάλληλες για ένα δεδομένο πλαίσιο, βάσει του οποίου προσπαθούμε να βρούμε απαντήσεις σε κάποια προβλήματα.
3. Δίνει όμως εσφαλμένες απαντήσεις έξω από το πλαίσιο αυτό. Μια ορθή και γενικότερη απάντηση απαιτεί μια εμφανέστατα διαφορετική οπτική.
4. Επιπλέον η γνώση αυτή ανθίσταται σε οποιεσδήποτε αντιφάσεις αντιμετωπίζει καθώς και στην εγκαθίδρυση μιας αρτιότερης γνώσης. Δεν αρκεί η κατοχή μιας καλύτερης γνώσης για τον παραγκωνισμό της προγέστηρης (και αυτό είναι που διαφοροποιεί τον υπερκερασμό των εμποδίων από το “συμβιβασμό” του Piaget). Είναι λοιπόν αναγκαία η συνειδητοποίηση της απόρριψης και η ενσωμάτωσή της μέσα στη νέα γνώση.
5. Παρά τη συνειδητοποίηση της ανεπάρκειάς της, η γνώση αυτή συνεχίζει να κάνει αισθητή την παρουσία της με τρόπο άκαιρο και επίμονο.

Σχετικά με την αντιπαράθεση ιστορικών και εκπαιδευτικών εμποδίων έχουμε πιο χειροπιαστά αποτελέσματα (Berthelot & Berthelot: “Quelques apports de la

théorie des situations à l'étude de l'introduction de la notion de limite en classe lère A" (1983), Scierpinska [βλ. παρακάτω], El Bouazzaoui: "Conceptions des élèves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction (1988)). Συμπέρασμα όλων των ερευνητών: τα εμπόδια υφίστανται περὶ ἀπὸ κάθε ἀμφιβολία παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ διάκριση, ἡ ἀναγνώριση, ἡ ταξινόμηση καὶ ἡ διερεύνηση τῶν σχέσεων καὶ τῶν αἰτίων τοὺς ἀπαιτοῦν ἀκόμα ἐρευνες καὶ συζητήσεις.

Ὁ Brousseau διακρίνει δύο προσεγγίσεις στὸ θέμα τῆς ἐρευνας τοῦ ἐπιστημολογικοῦ ἐμποδίου: τὴν ἱστορικὴ προσέγγιση καὶ τὴν ἐκπαιδευτικὴ (σχολικὴ) προσέγγιση. ΓΙΑ τὴν πρώτη (τὴν ἱστορικοῦ χαρακτήρα) προσέγγιση διατυπώνει σὲ πρώτη φάση τὸ μεθοδολογικὸ πλαίσιο στὰ ὅρια τοῦ ὁποῖου προτίθεται νὰ κινηθεῖ:

1. Περιγραφή τῆς γνώσης, κατανόηση τῆς χρήσης τῆς.
2. Εξήγηση τῶν πλεονεκτημάτων τῆς σὲ σχέση με προγενέστερες γνώσεις, ἀνάλυση τῶν κοινωνικῶν πρακτικῶν με τὶς ὁποῖες συνδέεται καθὼς καὶ τῶν τεχνικῶν καὶ μαθηματικῶν ἀντιλήψεων.
3. Σύγκριση τῶν ἀντιλήψεων αὐτῶν με ἄλλες καὶ ἰδιαίτερα αὐτὲς τὶς ὁποῖες διαδέχθηκαν, κατανόηση τῶν ορίων καὶ τῶν δυνατοτήτων τοὺς, τῶν αἰτίων τῆς ἀποτυχίας τοὺς ἀλλὰ καὶ τῆς ἐπιμακρόν μεταξύ τοὺς ἐξισορρόπησης.
4. Ἐντοπισμὸς τῆς χρονικῆς στιγμῆς καὶ τῶν αἰτίων τῆς διατάραξης αὐτῆς τῆς ἰσορροπίας καὶ διερεύνηση τῆς ἀντίστασης καὶ τῆς διατήρησης στοιχείων ποὺ ἐπιμένουν στὴ μετέπειτα πορεία.
5. Ἐρευνα ἐνδεχόμενων πσογυρισμάτων, ἐπιστροφῆς σὲ προγενέστερες θέσεις ἔστω καὶ ὑπὸ διαφορετικὴ μορφή.

ΓΙΑ τὴν ἐφαρμογὴ τῶν παραπάνω ἐπιλέγει τὸ ἐξῆς παράδειγμα: τὴ μελέτη τῆς ἀποκλειστικῆς χρήσης τῶν κλασμάτων με παρονομαστὴ πολ/σιο τοῦ 5 ἀπὸ τοὺς Ἀρχαίους Αἰγυπτίους. Ἀφού περιγράψει τὸν τρόπο ἐκτέλεσης τῶν πράξεων με τὰ κλάσματα αὐτὰ ἀπὸ τὴν πλευρὰ τῶν Αἰγυπτίων γραμματέων καὶ τὴ χρησιμότητά τοὺς γΙΑ τὶς μετρήσεις καὶ τὸ μοῖρασμα τῆς συγκομιδῆς, διερευνά τὰ ὅποια πλεονεκτήματά τοὺς σὲ σχέση με ἄλλα συστήματα κλασμάτων ποὺ εἶχαν στὴ διάθεσή τοὺς καὶ ἀποδίδει τὴν προτίμησή τοὺς στὸ γεγονὸς ὅτι στὰ πλαίσια τοῦ συστήματος αὐτοῦ ἔχουμε μΙΑ λογικὴ αἰτιολογήσεων παρόμοια μ'αὐτὴν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Οἱ ἀριθμητικὲς αὐτὲς διαδικασίες δὲν εγκαταλείφθηκαν ἀπὸ τοὺς Ἕλληνες ἀστρονόμους παρὰ μόνον τὸ 2ο αἰῶνα π.χ., ἐνὸς στοιχεῖα τοὺς ξαναβρίσκουμε στὸν ἀραβικὸ πολιτισμὸ μέχρι καὶ τὸ 12ο αἰῶνα (σὲ ἐμπόρους, γραμματεῖς, τεχνίτες κλπ.). Τὸ

παράδειγμα αυτό μας δείχνει ότι ένα εμπόδιο δεν συνιστά κατ'ανάγκη κάποια μορφή ανικανότητας ή "εσφαλμένο" επεξηγηματικό πλαίσιο. Είναι μια νόμιμη προσαρμογή σε συγκεκριμένες συνθήκες και αφήνει ίχνη της μέσα στην εξέλιξη του πολιτισμού. Δεν γνωρίζουμε προς το παρόν ακόμα κάποια ειδική μετα-γλώσσα για να χαρακτηρίσουμε τα εμπόδια, όπως έκανε ο Bachelard.

Για την έρευνα με αφετηρία την εκπαιδευτική διαδικασία ο G. Brousseau ξεκινά με την επισήμανση ότι το συχνότατο σφάλμα π.χ. $0 \cdot 3 = 3$ (σε αντίθεση με το $3 \cdot 0 = 0$, που γράφεται συνήθως σωστά) οφείλεται πιθανότητα σε μια αντίληψη περί πολ/σμού: $3 \cdot 0$ σημαίνει ότι παίρνουμε 3 φορές το 0, δηλαδή $0 + 0 + 0 = 0$, ενώ το $0 \cdot 3$ 0 φορές το 3, οπότε παραμένει 3. Διάφορες προτάσεις για να πεισθεί ο μαθητής (• "0 φορές το 3" είναι πολύ μικρότερο του "1 φορά το 3" ή $1 \cdot 3 = 3$, $1/2 \cdot 3 = 1,5$, $1/10 \cdot 3 = 0,3$, $1/1000 \cdot 3 = 0,003, \dots$ • $0 \cdot 3 = (4 - 4) \cdot 3 = 4 \cdot 3 - 4 \cdot 3 = 12 - 12 = 0$ • $0 \cdot 3 = 3 \cdot 0 = 0$ κλπ.) αποτυγχάνουν όλες, καμία δεν αποτρέπει την επίμονη επανεμφάνιση του σφάλματος. Έχουμε λοιπόν εδώ ένα υποψήφιο επιστημολογικό εμπόδιο. Το μεγάλο πρόβλημα είναι να διακρίνουμε σε ποιά ακριβώς αντίληψη αντιστοιχεί. Και μάλιστα να ομαδοποιήσουμε αν μπορούμε με τέτοιο τρόπο τα εμπόδια ώστε να αντιστοιχούν σε όσο το δυνατό γενικότερες αντιλήψεις. Ο Brousseau προτείνει την εξής μέθοδο:

- Εγκαθιδρύουμε μια "θεμελιώδη" διδακτική κατάσταση που αντιστοιχεί στην εν λόγω γνώση.
- Διερευνούμε τις "διδακτικές μεταβλητές" (variables didactiques) και τις διαφορετικές αντιλήψεις που γεννούν αυτές.
- Εντοπίζουμε τις ομάδες των μαθητών που διαμορφώνονται μ'έναν "διαχωρισμό" βάσει αυτών των αντιλήψεων, με τη βοήθεια ανάλυσης των παραγόντων ή κλασσικών στατιστικών μεθόδων. Αν δεν υπάρχει σαφής διάκριση δεν υφίσταται ανάγκη να θεωρήσουμε τις αντιλήψεις αυτές ως διαφορετικές.

Ως προς το συγκεκριμένο ζήτημα μπορούμε να διατυπώσουμε την άποψη ότι οι παρατηρούμενες δυσκολίες οφείλονται ενδεχομένως στην αδυναμία του μαθητή να συνειδητοποιήσει ότι οι ιδιότητες των αριθμών στο \mathbb{N} δεν μένουν εν γένει οι ίδιες όταν πάμε στο \mathbb{Q} ή το \mathbb{R} . Είναι λοιπόν η γνώση των φυσικών ένα είδος επιστημολογικού εμποδίου; Και γενικότερα μπορούμε να αναρωτηθούμε: συνιστούν όλες οι αντιλήψεις μας εμπόδιο για τις μετέπειτα γνώσεις; Αυτό ισχύει από μία

άποψη. Πολύ λίγες όμως από τις αντιλήψεις αυτές εμφανίζουν τέτοιες σημαντικές δυσκολίες ώστε να αντιμετωπιστούν με τέτοιο τρόπο. Συνοψίζοντας: Τα παρατηρούμενα σφάλματα μεταξύ των μαθητών, όπως αντίστοιχα και σε κάποιες ιστορικές πρακτικές, μπορούν να ομαδοποιηθούν γύρω από αντιλήψεις πολύ συγκεκριμένες ή αντίθετα πολύ γενικές. Ο εντοπισμός των αντιλήψεων αυτών συνιστά δυσκολία σημαντική για όλους τους τομείς της διδακτικής.

Τα εμπόδια οφείλουν επίσης να εξετάζονται συνολικά όσον αφορά τις σχέσεις τους. Περισσότερα του ενός εδέχεται να συνυπάρχουν, να συγκρίνονται και να παραγκωνίζονται διαδοχικά, π.χ. οι αντιλήψεις περί κλασμάτων με εκείνες περί δεκαδικών, η καλύτερα περί της μορφής του “μέτρου” σε αντιπαράθεση με εκείνη περί “λόγου” ή “εφαρμογής”. Απόρριψη ή παραγκωνισμός της μιας οδηγεί στην άλλη, μέχρι την τελική οριστική διαμόρφωση.

Η έρευνα για τα επιστημολογικά εμπόδια επηρεάζει τη διδακτική πρακτική των μαθηματικών αλλά και γενικότερα τη θεμελιώδη διδακτική μας αντίληψη. Η επίδρασή της στη διδακτική πρακτική των μαθηματικών εντοπίζεται σε σχέση με τη διαμόρφωση των παρακάτω ερωτημάτων:

1. Πως αντιμετωπίζεται στο επίπεδο του μαθήματος ένα εμπόδιο;

Ο Brousseau προτείνει τη χρήση κάθε τύπου α-διδακτικών καταστάσεων για τον καθορισμό, τη συνειδητοποίηση και την σαφή διάκριση του εμποδίου (καταστάσεις κοινωνικο-γνωσιακές (socio-cognitifs), επικύρωσης (validation), σχηματισμού (formulation) ή δράσης (d'action)). Θεωρεί επίσης αναγκαίες και τις διδακτικές καταστάσεις: την παρέμβαση της μαθηματικής κουλτούρας (μέσω του καθηγητή) σε διάφορα σημεία της διαδικασίας. Επισημαίνει τέλος ένα θεμελιώδες χαρακτηριστικό της διαπραγμάτευσης των επιστημολογικών εμποδίων: τη διαλεκτική του διπλού εργαλείο-αντικείμενο (μεταβολή του πλαισίου και επίδραση στη γνώση), χωρίς όμως να επεκτείνεται επαρκώς πάνω σ' αυτό το ζήτημα.

2. Πως εμπλέκεται το πρόβλημα των εμποδίων στο στρατηγικό ζήτημα της διαμόρφωσης της ύλης;

Αν αγνοήσουμε τα εμπόδια διατρέχουμε τους κινδύνους: είτε να διδάξουμε στα παιδιά τις τελικά διαμορφωμένες γνώσεις με τρόπο φορμαλιστικό, χωρίς ιδιαίτερο νόημα για τα ίδια τα παιδιά, σαν μια τυπική (formal) γλώσσα αναντίστοιχη με το βαθμό ανάπτυξής τους, είτε να παρεμβάλλουμε κάποιες βοηθητικές γνώσεις, που τις

κατανοούν μεν τα παιδιά και τις θεμελιώνουν πάνω σε προηγούμενες, αλλά ο περιορισμένος και ατελής χαρακτήρας τους συντελεί στη δημιουργία μεγάλων δυσκολιών για την περαιτέρω πορεία. Είναι ανάγκη να διαμορφωθεί η διδακτέα ύλη στις διάφορες εκπαιδευτικές βαθίδες ύστερα από μελέτη του ρόλου των διαφόρων επιστημολογικών εμποδίων.

Όσον αφορά το ζήτημα της σχέσης των επιστημολογικών εμποδίων με τη γενική διδακτική μας αντίληψη ο Brousseau διατυπώνει τις παραπάνω σκέψεις:

1. Το κλασσικό μοντέλο της παραδοσιακής διδασκαλίας-θα πρέπει σίγουρα να επανεξεταστεί.

2. Ο σκοπός κάθε μαθήματος δεν είναι πλέον η μεταβίβαση μιας καινούργιας γνώσης, η οποία τοποθετείται με τρόπο αρμονικό πλάϊ σε κάποια προϋπάρχουσα γνώση, αλλά σε πολλές περιπτώσεις η σαφής και συνειδητή απόρριψη της τελευταίας όταν δεν μπορεί να γίνει συμβατή με την καινούργια.

3. Το διδακτικό συμβόλαιο τροποποιείται ριζικά: ο επαναπροσδιορισμός του ρόλου και της ευθύνης δασκάλων και μαθητών τίθεται σε διαφορετική βάση.

α) *Πώς ο δάσκαλος μπορεί να αποδεχθεί το γεγονός ότι κάποιες από τις γνώσεις που παρέχει είναι όχι μόνον ατελείς, αλλά ορισμένες φορές εσφαλμένες και αργότερα θα απορριφθούν;*

β) *Η σπουδαιότητα των αναμνήσεων των στιγμιотύπων της εκπαιδευτικής διαδικασίας (του πλέγματος των προσωπικών παραστάσεων βάσει των οποίων ο κάθε μαθητής συγκροτεί σε ατομικό επίπεδο την κατανόηση του υλικού) δεν μπορεί να παραγνωρισθεί. Ο καθηγητής οφείλει να γνωρίζει το ιστορικό του κάθε μαθητή, την ιστορικότητα των γνώσεων και της πνευματικής ανάπτυξής του.*

4. Ανακύπτουν προβλήματα στις σχέσεις μεταξύ των διαφορετικών βαθμίδων της εκπαίδευσης.

5. Απαιτείται μια διαφοροποίηση στις επιστημολογικές αντιλήψεις των καθηγητών και ενδεχόμενα ολόκληρης της κοινωνίας: η ιδέα ότι κάποιες “εσφαλμένες” γνώσεις μπορούν να παίξουν εποικοδομητικό ρόλο στη θεμελίωση μιας τελικής γνώσης, είναι δύσκολο να γίνει αποδεκτή και να γίνει αφετηρία νέων αναζητήσεων.

2. ANNA SIERPINSKA: ΓΙΑ ΕΝΑ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΧΕΤΙΚΟ ΜΕ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΕΠΙΣΤ/ΚΟΥ ΕΜΠΟΔΙΟΥ

Η A. Sierpiska έχει ιδιαίτερη συμβολή στην έρευνα για τα επιστημολογικά εμπόδια και τη διδακτική. Στη σύλλογή “Construction de Savoirs” συμμετέχει μ’ένα πραγματικά ώριμο και σαφές θεωρητικό κείμενο (Sur un programme de recherche lié à la notion d’obstacle épistémologique). Αρχικά έχουμε το κρίσιμο ερώτημα: “Ποιά είναι στ’αλήθεια η επίδραση της έννοιας των επιστημολογικών εμποδίων στη διδακτική των μαθηματικών; Τί έχει προσφέρει πραγματικά σε κάποιες έρευνες”; Η Sierpiska διαπιστώνει ότι πρωτ’απ’όλα υπάρχουν αλληλοσυγκρουόμενες απόψεις σχετικά με την ίδια τη φύση του επιστημολογικού εμποδίου, ότι μας διαφεύγει ένας επαρκής και ξεκάθαρος ορισμός: *“Εφ’όσον κάθε γνώση μπορεί να αποτελέσει εμπόδιο, ορισμένες φορές καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η έννοια του εμποδίου στερείται λογικής (αν θεωρήσουμε ότι κάθε τι που ήδη γνωρίζουμε στέκεται εμπόδιο σ’αυτό που δεν ξέρουμε ακόμα)”* (σελ. 130).

Λέμε: “η γνώση των φυσικών μπορεί να γίνει εμπόδιο για την κατανόηση των δεκαδικών” (αφού π.χ. ο μαθητής παρασύρεται να θεωρεί το 1,19 μεγαλύτερο του 1,2). Από την άλλη όμως δεν γίνεται ο μαθητής να κατανοήσει τους δεκαδικούς χωρίς να γνωρίζει τους φυσικούς, παρ’ότι την ίδια στιγμή καλείται να ξεπεράσει το εμπόδιο! *Γιατί να λέμε “εμπόδιο” κάτι που είναι παρόλ’αυτά μια γνώση, μια θετική γνώση, πάνω στην οποία μπορούμε να χτίσουμε κι άλλες γνώσεις; Όλες οι γνώσεις μας συγκροτούνται με βάση κάποιες άλλες γνώσεις, οι οποίες έχουν λοιπόν τον χαρακτήρα του υπο-στηρίγματος και όχι του εμποδίου.*

“Έχει εκφραστεί η άποψη πως τα επιστημολογικά εμπόδια υπάγονται στο πεδίο των ψυχολογικών συνθηκών της πράξης της γνώσης, είτε στον κλάδο των μαθηματικών είτε σε οποιονδήποτε άλλο επιστημονικό κλάδο. Οι καθηγητές οφείλουν να έχουν συνείδηση των συνθηκών αυτών για να κατανοούν καλύτερα τα λάθη των μαθητών τους. Έτσι η χρησιμότητα της έννοιας του εμποδίου για τη διδακτική των μαθηματικών θα περιοριζόταν εκεί. Η λειτουργία των επιστημολογικών εμποδίων στη δόμηση της επιστημονικής γνώσης θα μπορούσε να ενδιαφέρει πιθανότατα πιο ειδικά τους γνωσιακούς ψυχολόγους, όχι όμως και τους ασχολούμενους με τη διδακτική των μαθηματικών” (σελ. 131). Και η A. Sierpiska αναρωτιέται:

“Έχει νόημα η έρευνα των επιστημολογικών εμποδίων σε σχέση με τις μαθηματικές έννοιες;” Η απάντηση: “Ένδεχομένως όχι, ανάλογα με την οπτική που παρουσιάζουμε το ζήτημα”. Αλλά: “Υπάρχουν άλλες οπτικές που θα έδιναν νόημα σε τέτοιου είδους έρευνα;” Εδώ ακριβώς στοχεύει το άρθρο της, να σχολιάσει αυτό το ερώτημα.

Ενότητα 1^η: Επεξήγηση της έννοιας τους επιστημολογικού εμποδίου μέσα στο πλαίσιο μιας γενικότερης θεωρίας για την πολιτισμική εξέλιξη. *Επανανάγνωση του Bachelard σε μια προσπάθεια να μεταφερθεί η έννοια στο πεδίο των μαθηματικών.*

α) Πιστεύω, πεποιθήσεις, προκαταλήψεις

Κατά τον Bachelard η εμπειρική γνώση του πραγματικού μπορεί να σταθεί εμπόδιο στην επιστημολογική γνώση. Το πραγματικό δεν είναι ποτέ αυτό που ενδεχομένως πιστεύουμε, αυτή η πρώτη εμπειρική γνώση έχει τη δύναμη της προκατάληψης. Έτσι μια γνώση λειτουργεί ως εμπόδιο όταν γίνεται πίστη, προκατάληψη, δεν μπορεί να δεχθεί μια κριτική, δεν έχει ανάγκη για από διορθώσεις, δεν απαιτεί απόδειξη, επαλήθευση. Μέσα στη δόμηση της μαθηματικής γνώσης τι είναι αυτό που μπορεί να παίζει το ρόλο των πεποιθήσεων ή των προκαταλήψεων; Η εμμονή στην αποκλειστική σύνδεση αριθμού και φυσικού δεν είναι μήπως μια βαθειά πίστη στη διακριτή δομή του κόσμου;

β) Γνώμη (“Δόξα”, δοξασία)

Για τον Bachelard η γνώμη είναι εξ’ορισμού εμπόδιο στην επιστημονική γνώση. Με τον όρο αυτόν εννοεί μια κρίση της οποίας η αλήθεια θεμελιώνεται αποκλειστικά στην αυθεντία του προσώπου που τη διατυπώνει.

γ) Ένταξη των δύο προηγούμενων παραδειγμάτων σε ένα γενικότερο πλαίσιο μιας θεωρίας περί πολιτισμού και μιας αντίληψης περί μαθηματικών ως πολιτισμικού συστήματος. Ερευνητές όπως ο Wilder (“Mathematics as a cultural system”, Pergamon Press, Toronto, 1981) προσπαθούν να συλλάβουν τα μαθηματικά ως εξελισσόμενο πολιτισμικό σύστημα και να διατυπώσουν τους νόμους της εξέλιξής του. Το “πολιτισμικό σύστημα”, σύστημα για την ανθρώπινη επικοινωνία και έκφραση, αποτελείται:

I. Από μια δομή πεποιθήσεων, στάσεων, αξιών, κανόνων, τελετουργιών.

II. Από κανόνες και ασυνείδητα σχήματα (“schémas”) σκέψης και συμπεριφοράς, τρόπους επικοινωνίας με άλλους.

III. Από γνώσεις ξεκάθαρες, θεμελιωμένες με λογικό τρόπο, απαραίτητες για την άσκηση διαφόρων επαγγελματικών ειδικοτήτων, τις οποίες κατέχει μια ομάδα ανθρώπων μ’έναν κοινό στόχο.

Ο E.T. Hall (“The silent language” Greenwich, Conn., The Fawcett Premier Books (1959)) ονομάζει τα διαφορετικά επίπεδα του πολιτισμικού συστήματος: τυπικό (I), άτυπο (II) και επίπεδο τεχνικής (III). Με το (I) συσχετίζονται έντονα συναισθήματα, προσκόλληση με πάθος στις πεποιθήσεις, σ’αυτό που καθαγιάζει η παράδοση. Τα στοιχεία του μεταβιβάζονται μέσω προπαγάνδας και κηρύγματος και όχι μέσω επεξήγησης και αιτιολόγησης. Τα στοιχεία του (II) είναι ασυνείδητα εν γένει, μεταβιβάζονται μέσω μίμησης και πρακτικής. Το (III) περιέχει τις επαγγελματικές και επιστημονικές γνώσεις, στοιχεία που μεταφέρονται με συνειδητή και αιτιολογημένη εκπαίδευση.

Το μαθηματικό υπο-σύστημα περιέχει επίσης αυτά τα 3 επίπεδα: Το (III), της τεχνικής, είναι το επίπεδο των μαθηματικών θεωριών, των ρητών και έγκυρων γνώσεων. Το (II) είναι το επίπεδο της υπόρρητης, διαισθητικοεποπτικής ικανότητας που επιτρέπει στους μαθηματικούς να θέτουν και να επλύουν προβλήματα. Η ικανότητα αυτή (ή τεχνική ιδιαίτερου τύπου) έχει η ίδια τα δικά της σχήματα, τους νόμους και τους κανόνες της. Το (I) επίπεδο περιέχει μια γενική άποψη για τον κόσμο, πεποιθήσεις, προκαταλήψεις, τελετουργίες και νόρμες που συνδέονται με τα μαθηματικά. Για παράδειγμα: η φιλοσοφική αντίληψη ότι τα αξιώματα και τα θεωρήματα των μαθηματικών εκφράζουν απόλυτες αλήθειες ή η άλλη που τα θέλει απλώς ως παιγνίδι τυπικών συμβόλων, χωρίς περιεχόμενο. Επίσης οι απόψεις και ιδέες για το τι συνιστά έγκυρη και αυστηρή μέθοδο τι σημαίνει “απόδειξη” ή “επαρκής αιτιολόγηση”, ποιά είναι τα αποδεκτά και άξια λόγου προβλήματα προς επίλυση, με ποιον τρόπο εξελίσσεται η ίδια η μαθηματική επιστήμη [απρβλ. με το “μετα-επίπεδο” (meta-level) της C. Dunmore στο Α’ μέρος]. Θα πρέπει να τονιστεί εδώ η σημασία αυτού που θα ονομάζαμε “μαθηματικό folklore” (αυτό που σε πολλές περιπτώσεις θεωρείται προφανές και δεν χρειάζεται απόδειξη), ένα είδος “μαθηματικής εποπτείας” που συνιστά το τι είναι αυτονόητο για τους εκάστοτε μαθηματικούς. Παραδείγματα που προτείνει ο Wilder:

1. Η πίστη των Πυθαγορείων στο σύμμετρο όλων των γεωμετρικών ποσοτήτων.
2. Η πεποίθηση (πριν τους Grassman-Hamilton) ότι όλες οι αλγεβρικές-αριθμητικές πράξεις πρέπει να είναι αντιμεταθετικές.
3. Η εποπτική εικόνα (πριν τους Bolzano-Weierstrass) για τις συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις και τα γωνιακά τους σημεία.
4. Η βεβαιότητα ότι μια σφαίρα δεν μπορεί να αποσυντεθεί σε πεπερασμένο αριθμό τμημάτων τα οποία να συναπαρτίζουν δύο σφαίρες (μέχρι τους Banach και Tarski, 1924, βάσει του αξιώματος επιλογής).

Ο τρόπος παρουσίασης αυτών των παραδειγμάτων δεν προδίδει έναν υπόρρητο “πλατωνισμό” ,όσον αφορά τη μαθηματική οντολογία; Μια βαθιά, διεισδυτική σκέψη μπορεί να διαλύσει την αρχική εσφαλμένη “εποπτεία” και να μας οδηγήσει στην ορθή μαθηματική “πραγματικότητα”. Μήπως οι πεποιθήσεις αυτές όσον αφορά τις μαθηματικές έννοιες δεν είναι παρά απόρροια μιας πλατωνικής αντίληψης περί μαθηματικών και, ειδικότερα κάποιες φορές, αντιλήψεων περί του απείρου, του χώρου, του αριθμού, εννοιών που δεν είναι παρά οι θεμελιώδεις κατηγορίες της ανθρώπινης σκέψης και όχι μόνον της μαθηματικής επιστήμης;

δ) Μια επιστημονική γνώση εκφυλισμένη σε νοητική συνήθεια.

Για τον Bachelard ένα συντηρητικό πνεύμα, που προτιμάει τις εύκολες απαντήσεις από την ανασφάλεια των κρίσιμων ερωτημάτων, μπορεί να μετασηματίσει τις κεκτημένες γνώσεις σε εμπόδια που μπλοκάρουν τη σκέψη. *Παράδειγμα μιας τέτοιας διεργασίας μεταβίβασης στοιχείων του επιπέδου της τεχνικής (III) στο άτυπο (II) (Hall*)*, στα μαθηματικά: Η πρόταση V3 του Ευκλείδη “λόγος είναι μια ποιοτική σχέση ανάμεσα σε δύο *ομογενείς* ποσότητες”. Η εντολή αυτή τηρήθηκε *απαρέγκλιτα* μέχρι τον Euler, αλλά κι’ αυτός για τη χρήση από την πλευρά του λόγων του τύπου ds/dt αισθάνεται την ανάγκη να παραθέσει μακροσκελέστατες, απολογητικές εξηγήσεις.

Για την *A. Sierpinski* το επίπεδο της τεχνικής (III) δεν συνδέεται με τα επιστημολογικά εμπόδια. Αυτά τα τελευταία σχετίζονται με επιχειρήματα συναισθηματικής τάξης, με αναφορές σε απόλυτες αξίες και όχι με λογική και

* “The silent language”, The Fawcett Premier, 1959.

αναλυτική επιχειρηματολογία”. “Μια [θεμελιωμένη στέρεα] επιστημονική γνώση εξ’ορισμού δεν μπορεί να θεωρείται ως πηγή επιστημολογικού εμποδίου” (σελ. 136). Πηγές εμποδίων είναι μόνον τα πιο αρχέγονα στοιχεία της μαθηματικής κουλτούρας.

Η επιμονή των Αρχαίων Ελλήνων στην ανάπτυξη μιας μακροσκελέστατης και περίπλοκης θεωρίας λόγων, μοιάζει να αντιπαρατίθενται αφ’ενός στην αποδοχή των προσεγγιστικών τεχνικών αφ’ετέρου στην επέκταση της έννοιας του αριθμού και την αριθμητικοποίηση της Γεωμετρίας, οπότε και στη διατήρηση της θεωρίας μέτρησης εμβαδών και όγκων με όρους πολ/σίων της μονάδας. Η πρώτη λύση θα τους έδινε προσεγγιστικές μετρήσεις που συνδεόταν εκείνη την εποχή με την πρακτική, την τεχνική, πράγμα που ερχόταν σε σύγκρουση με την φιλοσοφική, επιστημολογική τους αντίληψη περί της απόλυτης και ιδεατής φύσης της επιστήμης της Γεωμετρίας. Η δεύτερη θα οδηγούσε σε διαίρεση της μονάδας πράγμα αδιανόητο για την αντίληψη των αρχαίων φιλοσόφων που θεωρούσαν τη μονάδα αδιαίρετη και τον αριθμό ως άθροισμα μονάδων. Τέλος στην ανάπτυξη της θεωρίας λόγων συντελεί και το εξής σχήμα (schema) σκέψης: τα γεωμετρικά αντικείμενα είναι οντότητες που εμπεριέχουν αφ’εαυτών και το μήκος και το εμβαδόν. Τα τελευταία δεν είναι αριθμοί που συνδέονται με σχήματα-σημειοσύνολα, αλλά ποσοτικές ιδιότητες αυτών των ίδιων των σχημάτων (Για τον Ευκλείδη “κύκλος” σημαίνει και το γνωστό γεωμετρικό σχήμα αλλά και το εμβαδόν του). Το στοιχείο αυτό συσχετίζεται με το άτυπο επίπεδο (II), ως υπόρρητο σχήμα μαθηματικής σκέψης, και για την A. Sierpínska λειτούργησε σαν εμπόδιο (μέχρι την αριθμητικοποίηση της Ανάλυσης κατά τον 19ο αιώνα).

ε) Συγκεκριμενοποίηση αφηρημένων εννοιών

Κάνοντας χρήση αυθαίρετων αναλογιών και μεταφορών σχετικά με αφηρημένες έννοιες (στις φυσικές επιστήμες) οδηγούμαστε προοδευτικά σε μια απώλεια του “διανύσματος αφάιρεσης” [της πορείας της αφαιρετικής διαδικασίας βλ. προηγούμενα στο Α’ μέρος το παράδειγμα του “σπόγγου” στον Bachelard]. Αν και στα μαθηματικά οι έννοιες είναι εκ κατασκευής, ας το πούμε έτσι, αφηρημένες, κάποιες συγκεκριμενοποιήσεις τους, στην προσπάθεια καλύτερης επικοινωνίας ή εξήγησης, οδηγούν σε παρεξηγήσεις: ο Glaeser* (1981) έδειξε πως το γνωστό παράδειγμα περί απώλειας-κέρδους για την εξήγηση των ακεραίων μπορεί να

* Glaeser, G. (1981): “Epistémologie des nombres relatifs”, Recherches en Didactique des Mathématiques, 1(2), 303-346.

λειτουργήσει ως εμπόδιο. Επίσης όροι των μαθηματικών που έχουν χρήση στην ομιλούμενη γλώσσα (αριθμός, άπειρο, χώρος κλπ) συνεχίζουν να διατηρούν για αρκετούς μαθητές κάποιες από αυτές τις σημασίες και συνιστούν πηγή εμποδίων.

Επεξήγηση της έννοιας του επιστημολογικού εμποδίου στα μαθηματικά: Για την A. Sierpínska ορισμένα στοιχεία του άτυπου (II) και του τυπικού (I) επιπέδου του μαθημ. πολιτισμικού συστήματος, ασυνείδητα και επενδεδυμένα με συναισθηματικές σημασίες, με χαρακτήρα προλήψεων ή μεταφυσικών πεποιθήσεων μπορεί να λειτουργούν ως εμπόδια. Στο επίπεδο (I) είναι τα πλέον θεμελιώδη στοιχεία: φιλοσοφικές πεποιθήσεις, κατηγορίες σκέψης (χρόνος, χώρος, άπειρο, αιτιότητα κ.ά.), “πολιτισμικές εποποιείες”. Στο άτυπο επίπεδο (II) ορισμένα σχήματα (schemata) σκέψης, κάποτε χρήσιμα για την επίλυση κάποιων προβλημάτων, όταν προσπαθούν να λειτουργήσουν σ’ένα εντελώς διαφορετικό πλαίσιο. Βέβαια ένας κανόνας, ένα σχήμα σκέψης, δεν είναι εμπόδιο με την απόλυτη έννοια αλλά κάθε τέτοιος μπορεί σε κάποια δεδομένη στιγμή της εξέλιξης των μαθηματικών να λειτουργήσει ως εμπόδιο, όταν δεν έχουμε συνείδηση του περιορισμένου χαρακτήρα του, των δεδομένων ορίων του και όλων των συνεπειών που συνεπάγεται η επιλογή του.

Το 1988 σ’ένα συνέδριο στη Bratislava ο Yves Chevallard παρατήρησε ότι η τόσο επίμονη προσπάθειά μας να ξεχωρίσουμε και να ορίσουμε τα επιστημολογικά εμπόδια έχει αφ’εαυτής μια χροιά εμποδίου: “Τα επιστημολογικά εμπόδια δεν είναι κάποια πράγματα που μπορούμε να απαριθμήσουμε ή να καθορίσουμε με κάποιον τρόπο άπαξ δια παντός. Κάποιες συγκεκριμένες ιδέες, συγκεκριμένα σχήματα (schemata) μπορούν ενίοτε να λειτουργήσουν ως εμπόδια, μπορούν να αποτελέσουν πηγή εμποδίων για την ανάπτυξη της επιστημολογικής σκέψης, αλλά δεν είναι εμπόδια με μια απόλυτη έννοια” (σελ. 139).

Ενότητα 2η: Τί σημαίνει η έκφραση “υπερπήδηση ενός επιστημολογικού εμποδίου”;

Ας θεωρήσουμε μια φιλοσοφική αντίληψη για τα μαθηματικά ενισχυμένη από μια ένθερμη πίστη για την *αλήθεια* αυτής της αντίληψης. Υπερπήδηση αυτού του εμποδίου δεν σημαίνει να στραφούμε σε μια άλλη φιλοσοφία απέναντι της οποίας θα επιδείξουμε την ίδια πίστη. Σημαίνει περισσότερο να δείξουμε μια “στάση φιλοσόφου”, να αποκτήσουμε μια συνείδηση ιστορική, να κρίνουμε ορθολογικά την κάθε αντίληψη συγκρίνοντάς την με τις υπόλοιπες.

Παράδειγμα: ένας σπουδαστής πιστεύει ακράδαντα στον εμπειρικό χαρακτήρα των μαθηματικών (δηλ. ότι αποτελούν πιστό μοντέλο της πραγματικότητας) και δεν αποδέχεται την ύπαρξη του πραγματικού απείρου. Παραδέχεται σίγουρα την ύπαρξη συνόλων με τεράστιο πληθικό αριθμό, αν και πεπερασμένο π.χ. μια αριθμητική ακολουθία στην οποία δεν μπορούμε να βρούμε τον τελευταίο όρο. Ποιό είναι τότε το όριο της ακολουθίας; Μήπως ο τελευταίος όρος της; Τότε πως μπορεί να προσδιοριστεί; Στο σημείο αυτό ο σπουδαστής ενδέχεται να απορρίψει την έννοια του ορίου ως στερούμενη σημασίας ή να θεωρήσει, υπό τύπο σύμβασης, το όριο ως επαρκή προσέγγιση αυτού του ακαθόριστου τελευταίου όρου. Δεν πρόκειται να την αποδεχθεί χωρίς να πειστεί για τη χρησιμότητά της στην εξήγηση των φυσικών φαινομένων και χωρίς να παραδεχθεί ότι χωρίς αυτήν η φιλοσοφία του περί μαθηματικών είναι πράγματι πολύ περιορισμένη. Εδώ ο ρόλος του διδάσκοντα είναι σημαντικός, δύσκολος και πολύ λεπτός. Πρέπει να διαπραγματευθεί την έννοια αυτή του ορίου, να βρει επιχειρήματα υπέρ της χρησιμότητάς του, χωρίς να αποτιμά κάθε φορά τις αντιλήψεις του σπουδαστή ως “ορθές” ή “εσφαλμένες”. Οι φιλοσοφίες δεν είναι ούτε σωστές ούτε λάθος· απλώς μπορούν μονάχα να γίνουν λιγότερο ή περισσότερο γόνιμες. Θα ήταν μέγιστο σφάλμα να θέσει προς συζήτηση με τον σπουδαστή το ζήτημα της ύπαρξης του απείρου στην πραγματικότητα. Η συζήτηση αυτή θα περιοριζόταν εξ’ολοκλήρου στο τυπικό επίπεδο του πολιτιστικού συστήματος και δε θα προχωρούσε με τη βοήθεια ορθολογικών επιχειρημάτων. Τα προερχόμενα από το επίπεδο αυτό εμπόδια παύουν να λειτουργούν ως τέτοια τη στιγμή που χρησιμοποιούνται με τρόπο συνειδητό σ’ένα κατάλληλο πλαίσιο.

Ενότητα 3η: Μια αισιόδοξη άποψη για την πολιτιστική εξέλιξη-περιγραφή των εμποδίων ως “μηχανισμών προόδου”.

Ως τώρα είδαμε τα εμπόδια από μια πεσιμιστική σκοπιά, ως παράγοντες που *φρενάρουν* την πρόοδο. Οι φιλόσοφοι, οι ιστορικοί της επιστήμης και οι δάσκαλοι ενδιαφέρονται πιο πολύ για τους παράγοντες που *ευνοού* την πρόοδο. Ο Wilder π.χ. εξετάζει παράγοντες προόδου διαφόρων προελεύσεων:

— εξωτερικούς παράγοντες όπως η οικονομική πίεση ή η κοινωνικοπολιτική επίδραση του περιβάλλοντος.

— εσωτερικούς παράγοντες, σύμφυτους με τις μαθηματικές έννοιες, όπως η χρησιμότητά τους για τη λύση προβλημάτων, το άνοιγμα νέων πεδίων έρευνας ή η αισθητική τους αξία.

— παράγοντες σχετιζόμενους με τη διαδικασία της γνώσης ή τη συγκρότηση των μαθηματικών (επιστημολογικοί παράγοντες), όπως οι ατομικές ή συλλογικές μαθημ. εποπτείες, οι εννοιακές συγκρούσεις και το ξεπέραςμα κάποιων αντιλήψεων.

Σε κάποιες περιπτώσεις βέβαια οι παράγοντες αυτοί που λειτουργούν ως κινητήριιοι μοχλοί, ως “μηχανισμοί προόδου”, είναι δυνατόν να παίζουν το ρόλο του εμποδίου. Για τον Wilder όμως μια έννοια χρήσιμη, που ανοίγει καινούργια πεδία έρευνας ή έχει αισθητική αξία, θα εξελιχθεί αναπόφευκτα, παρ’ότι μπορεί για μεγάλο χρονικό να θεωρείται “μεταφυσική” ή “εξωπραγματική” (όπως π.χ. οι αρνητικοί αριθμοί ή τα απειροστά). Οι μαθηματικές εποπτείες έχουν επίσης αυτόν το διπλό χαρακτήρα. Χωρίς αυτές οι έρευνες θα ήταν ανέφικτες, αλλά μακροπρόθεσμα διακρίνονται οι μαθηματικοί που κινούνται αντίθετα προς αυτές.

Ενότητα 4η: Επαναδιατύπωση του προγράμματος έρευνας συνδεδεμένη με την έννοια του επιστημολογικού εμποδίου. Συμπληρωματικότητα στην εξέλιξη της μαθηματικής κουλτούρας.

1. Αναδιάρθρωση των στόχων του προγράμματος.

Η Α. Sierpiska το 1985 προσπάθησε να διαμορφώσει τις υποθέσεις και τους βασικούς στόχους ενός προγράμματος έρευνας με την έννοια του I. Lakatos [βλ. Α’ μέρος]. *Εδώ αναθεωρεί σε κάποια σημεία το πρόγραμμα αυτό πάνω στη βάση της αντίληψης ότι οι όψεις “εμπόδιο” και “παράγοντας προόδου” για την εξέλιξη των μαθηματικών θα πρέπει να αντιμετωπιστούν ως συμπληρωματικές: δεν μπορούμε να μιλάμε για τη μία χωρίς την άλλη.* Το πρόγραμμα θα πρέπει να στραφεί σε μια *ισορροπία* μεταξύ των δύο όψεων. *Η έννοια του επιστημολογικού εμποδίου χάνει προοδευτικά τον κεντρικό της ρόλο.* Παραμένει εν τούτοις σημαντικό εργαλείο ανάλυσης για την επιστημολογική διερεύνηση των μαθηματικών εννοιών.

Η επιστημολογική ανάλυση στοχεύει πρωτ’απ’όλα στην *κατανόηση* των μαθημ. εννοιών των οποίων μας ενδιαφέρει η διδασκαλία, δηλ. η γνώση του λογικού περιβάλλοντος αυτών των εννοιών μέσα στο επίπεδο τεχνικής, τις σχέσεις τους με αντιλήψεις και πεποιθήσεις στο τυπικό επίπεδο καθώς και τη λειτουργία τους μέσα

στο πλαίσιο των διαφόρων σχημάτων (schemata) της σκέψης αλλά και το *πότε* και *γιατί* έγιναν σημαντικές ή θεμελιώδεις στο χώρο των μαθηματικών. Η ανάλυση αυτή θα χρησιμεύει ως σημαντικός στόχος του προγράμματος: *να επεξεργαστεί τις διδακτικές καταστάσεις που ευνοούν την υπερπήδηση των εμποδίων.*

Είναι σημαντικό να αποτιμήσουμε με τρόπο ουσιαστικό τους παράγοντες που μπορούν να συντελέσουν στην πραγματοποίηση ενός εννοιολογικού άλματος από την πλευρά των μαθητών. Εξωτερικοί παράγοντες: κοινωνικό πλαίσιο, μαθηματικό πλαίσιο, είδος παιδαγωγικής παρέμβασης. Επιστημολογικοί παράγοντες: φιλοσοφική στάση απέναντι στα μαθηματικά, εποπτείες, γνωσιακές συγκρούσεις. Στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε τους παράγοντες αυτούς στη δημιουργία κατάλληλων διδακτικών καταστάσεων.

Στην ανάλυση της εξέλιξης των αντιλήψεων των μαθηματικών δεν θα πρέπει να περιοριστούμε μόνον στην “υπερπήδηση” του επιστημολογικού εμποδίου. Εξ’άλλου τα επιστημολογικά εμπόδια σπάνια γίνονται αντικείμενο άμεσης διαπραγμάτευσης με τους μαθητές. Η ρητή και σαφής παιδαγωγική τους επεξεργασία θα γίνει τη στιγμή της ενασχόλησης με τις αρχέγονες, θεμελιώδεις έννοιες (αριθμός, άπειρο, κλπ.). Παράδειγμα: διερευνώντας με τους μαθητές τις πρώτες, αυθόρμητες σκέψεις τους πάνω στο όριο απείρων σειρών στο επίκεντρο της συζήτησης θα βρεθούν οι αντιλήψεις τους για το άπειρο, τους αριθμούς ή γενικότερα για τα μαθηματικά. Στη φάση αυτή θα τεθούν ως προβλήματα, θα αναδυθούν και θα συζητηθούν τα στοιχεία του άτυπου και του τυπικού επιπέδου της μαθηματικής κουλτούρας.

Εδώ σχεδόν πάντα παρατηρείται συναισθηματική φόρτιση. Ένας από τους στόχους της φάσης αυτής είναι να αποφορτίσει ψυχολογικά τους μαθητές και να αναγάγει τις συζητήσεις στο επίπεδο της τεχνικής (III) της πολιτιστικής δομής. Η αναγωγή αυτή θα πρέπει να διεξαχθεί σε κλίμα ορθολογικής προσέγγισης και συναινετικής ανταλλαγής απόψεων με τους μαθητές.

2. Αλλαγές στις υποθέσεις του προγράμματος.

α) Ο κεντρικός ρόλος της “υπερπήδησης” των εμποδίων αντικαθίσταται από την ορθολογική και ισόρροπη χρήση των διαφόρων “παραγόντων προόδου” της παιδαγωγικής παρέμβασης.

β) Ο ρόλος της γνωσιακής σύγκρουσης ως “παραγόντα προόδου” παραμένει σημαντικός. Εκτός από τη διερεύνηση μεθόδων με σκοπό την πρόκληση της σε

επίπεδο διδακτικής, απαιτείται και μια θεωρητική επεξεργασία για την κατανόηση της φύσης της και την πηγή της δημιουργίας της μέσα στη σκέψη. Μπορούμε να διακρίνουμε συγκρούσεις 4 ειδών: τυπικού-τυπικού, τυπικού-τεχνικού, άτυπου-τυπικού και άτυπου-άτυπου. Σύγκρουση του είδους: τυπικού-τυπικού, π.χ., λαμβάνει χώρα όταν ο μαθητής υιοθετεί δύο διαφορετικές φιλοσοφικές στάσεις, οι οποίες, σε μια δεδομένη διδακτική κατάσταση οδηγούν σε αντίθετα μαθηματικά συμπεράσματα. Σύγκρουση τυπικού-τεχνικού συμβαίνει όταν μια πρόταση την οποία ο μαθητής θεωρεί σωστή αλλά είναι εσφαλμένη σύμφωνα με τη θεωρία που διδάχθηκε, συνδέεται με μια γενικότερη αντίληψή του περί μαθηματικών, με μια εποπτεία. Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι αντιφάσεις που περιορίζονται αποκλειστικά στο επίπεδο της τεχνικής δεν δημιουργούν ψυχολογική φόρτιση: αναζητούμε το σφάλμα και απορρίπτουμε την ψευδή πρόταση.

γ) Μια από τις υποθέσεις του προγράμματος έρευνας σε σχέση με τα επιστημολογικά εμπόδια ήταν ότι υπάρχει ένας σαφής παραλληλισμός ανάμεσα στην φυλογένεση και την οντογένεση των μαθημ. εννοιών. Μάλλον μπορούμε να αλλάξουμε τη συγκεκριμένη μορφή αυτής της υπόθεσης.

“Ένα εμπόδιο είναι “επιστημολογικό”, αν συνδέεται με την πράξη της συγκρότησης επιστημονικών γνώσεων. Τα επιστημολογικά εμπόδια στα μαθηματικά υπάγονται φυσικά στην ιστορία των μαθηματικών. Συναντάμε όμως στους μαθητές συγκεκριμένες στάσεις, πεποιθήσεις, δομές αντιλήψεων ή σχήματα (schémas) σκέψης ανάλογα με αυτά που λειτούργησαν ως εμπόδια μέσα στην ιστορική πορεία των μαθηματικών.

Επιθυμούμε να κρατήσουμε το χαρακτηριστικό γνώρισμα των επιστημολογικών εμποδίων όπως εμφανίζονται μέσα στην ιστορία όπως επίσης και στην εκπαιδευτική διαδικασία. Αλλά η υπόθεση του παραλληλισμού δεν είναι απαραίτητη για να εξηγηθεί αυτό. Μέσα στα πλαίσια της ίδιας κουλτούρας, διάφορες πεποιθήσεις, φιλοσοφίες και σχήματα (schémas) σκέψης μπορούν να συννοήσουν. Αυτό που στους μαθητές λειτούργησε ως εμπόδιο δεν ξεπερνιέται ή ξεχνιέται αμέσως. Συνδέεται με στάσεις και πεποιθήσεις κοινές για συγκεκριμένες κοινωνικές ομάδες” (σελ. 145).

Η μελέτη της ιστορίας μας ενισχύει σημαντικότερα τη γνώση μας για την εξέλιξη μιας έννοιας και τις δυνατότητες παιδαγωγικής παρέμβασης. Αυτό δεν σημαίνει ότι θα σπρώξουμε τα παιδιά στους περίπλοκους μεάνδρους της ιστορικής διαμόρφωσης αυτής της έννοιας.

Ενότητα 5η: Τελικές παρατηρήσεις-συμπεράσματα.

Η έννοια του επιστημολογικού εμποδίου είναι χρήσιμη στην προσπάθειά μας να κατανοήσουμε την εξέλιξη των μαθημ. εννοιών σε ιστορικό και ατομικό επίπεδο. Η “απαισιόδοξη” άποψη για τα εμπόδια οφείλει να συμπληρωθεί από μια “αισιόδοξη”: αυτό που λειτουργεί ως εμπόδιο κάποτε υπήρξε παράγοντας προόδου, προωθητικός κινητήρας εξέλιξης. Η προσπάθεια πολλών ερευνητών να “φωτογραφήσουν” με ευκρίνεια το επιστημολογικό εμπόδιο είναι πιθανόν η αιτία της διαμάχης. Στο ερευνητικό πρόγραμμα σε σχέση με τα επιστημολογικά εμπόδια ο στόχος της “υπερπήδησης” του εμποδίου αντικαθίσταται από την παρέμβαση με βάση την αντίληψη περί ισόρροπης σχέσης εμποδίου και παράγοντα προόδου. Το πρόγραμμα αυτό συναντά το τεράστιο ρεύμα της σύγχρονης έρευνας για τις αντιλήψεις και τον τρόπο σκέψης των μαθητών. Αυτό που το διακρίνει από τα υπόλοιπα είναι το βάρος που δίνει στην ιστορική και επιστημολογική διερεύνηση της συγκρότησης των μαθημ. εννοιών και της επίδρασης της διερεύνησης αυτής στη διδακτική των μαθηματικών.

Ερχόμαστε τώρα σε πιο ειδικά άρθρα που συνδέονται με τα επιστημολογικά εμπόδια.

3. G. VERGNAUD : ΜΑΘΗΣΙΑΚΕΣ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΚΑ ΕΜΠΟΔΙΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ο Gérard Vergnaud (από το Laboratoire de Psychologie du Développement et de l'Éducation de l'enfant-Centre National de la Recherche Scientifique, Paris) συμμετέχει στο “Construction de Savoirs” με δύο άρθρα. Στο πρώτο (Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques) διατυπώνει ορισμένες επισημάνσεις για το πρόβλημα του εντοπισμού των πραγματικών επιστημολογικών εμποδίων. Οι δυσκολίες που παρατηρούμε αρκετά συχνά μεταξύ των μαθητών σε σχέση με τον πολλαπλασιασμό:

— Η διαδοχική εφαρμογή των προσθέσεων (η επιμονή στην αντιμετώπιση του γινομένου ως επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης: $12 \cdot 4 = \underbrace{4 + 4 + \dots + 4}_{12}$).

— Η αδυναμία συνειδητοποίησης της ύπαρξης ενός σταθερού συντελεστή που καθορίζει τη γραμμική σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων ($y = a \cdot x$).

— Η δυσκολία κατανόησης του γεγονότος ότι ο πληθικός αριθμός του καρτεσιανού γινομένου δύο συνόλων είναι συνάρτηση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών.

— Η αδυναμία προσθετικής αποσύνθεσης των παραγόντων (δυσκολία να παρατηρηθεί ότι: $101 \cdot 217 = (100 + 1)217 = 100 \cdot 217 + 1 \cdot 217 = 1217$).

— Η αδυναμία ελέγχου της εκτέλεσης της πράξης (όταν παραλείπονται τμήματα που γίνονται από μνήμης), είναι μεν σοβαρές και για το ξεπέρασμά τους απαιτούν κάποιας μορφής νοητικό άλμα από την πλευρά του μαθητή, αλλά δεν συνιστούν παραγματικά επιστημολογικά εμπόδια εφ'όσον δεν αντιφάσκουν, δεν έρχονται σε σύγκρουση με προηγούμενες γνώσεις του.

Αντίθετα άλλοι τύποι δυσκολιών όπως:

— Το ενδεχόμενο διαίρεσης ενός αριθμού με έναν μεγαλύτερό του.

— Ο πολυσμός και η διαίρεση με δεκαδικό, συνδέονται με την πεποίθηση ότι ο πολυσμός αυξάνει έναν αριθμό ενώ η διαίρεση τον ελαττώνει ή ότι ο πολλαπλασιαστής πρέπει να είναι πάντα ακέραιος (για να επαναληφθεί τόσες φορές η πρόσθεση), συγκρούονται με προγενέστερες, στέρεα εδραιωμένες αντιλήψεις των μαθητών, οι οποίοι προσπαθούν να λειτουργήσουν σε διάφορα αριθμοσύνολα ακριβώς όπως στους φυσικούς.

Ο Vergnaud τονίζει ότι αυτό που ονομάζει άλμα στην πρώτη περίπτωση δεν είναι δόκιμο να συσχετιστεί και με το επιστημολογικό εμπόδιο· δεν “πηδάμε” πάνω από το εμπόδιο, το ξεπερνάμε αναλύοντάς το και η ανάλυση αυτή είναι απαραίτητη για την απόρριψη της προγενέστερης αντίληψης και την ουσιαστική αφομοίωση της καινούργιας. Η διάκριση αυτή είναι πολύ σημαντική, παρ'ότι φαντάζει σε πρώτη προσέγγιση υπερβολική επουσιώδης, γιατί ο διδάσκων ακολουθεί διαφορετική στρατηγική απέναντι στο επιστημολογικό εμπόδιο και διαφορετική απέναντι σε μια άλλη νοητική δυσκολία. Σε περίπτωση των πρώτων, των πραγματικών όμως επιστημολογικών, που χαρακτηρίζονται από βίαιη σύγκρουση με λειτουργικές προγενέστερες απόψεις, από έναν χαρακτήρα μονιμότητας και τη σταθερή ροπή να επανακάμψουν οπότε το ευνοήσουν οι συνθήκες, ο διδάσκων οφείλει να συντηρεί μια συνεχή επαγρύπνηση και να μη χάνει καμία ευκαιρία για συνειδητή διερεύνηση και ανάλυση.

Κατά τον G. Vergnaud τρεις μεγάλες εννοιακές δυσκολίες μπορούν να θεωρηθούν ως *πραγματικά επιστημολογικά εμπόδια*..:

- I. Η αντίληψη που θέλει τον αριθμό ως μέτρο ενός μεγέθους ή μιας ποσότητας.
- II. Το μοντέλο επεξήγησης του πολ/σμού ως πρόσθεσης που επαναλαμβάνεται όσες φορές καθορίζει ο πολ/στής.
- III. Η ιδέα ότι είναι πάντοτε επωφελές να μπορούμε να ελέγχουμε ανά πάσα στιγμή τη φυσική σημασία των χρησιμοποιούμενων μαθηματικών εκφράσεων.

4. G. VERGNAUD: ΤΟ ΕΜΠΟΔΙΟ ΤΩΝ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΚΑΙ Η ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ.

Το δεύτερο άρθρο του G. Vergnaud τιτλοφορείται: “L’obstacle des nombres négatifs et l’introduction à l’algèbre”. Η “εισαγωγή στην άλγεβρα” μπορεί να περιλαμβάνει πολλά διαφορετικά στοιχεία:

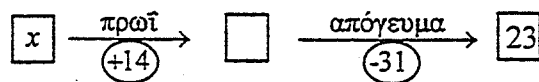
- διατύπωση αριθμητικού προβλήματος σε όρους εξίσωσης και αλγεβρικής επίλυσης
- στοιχειώδεις κανόνες χειρισμού και μετασχηματισμού εξισώσεων
- πρώρη επισήμανση των εννοιών της συνάρτησης και της μεταβλητής
- επισήμανση των θεμελιωδών, δομικών ιδιοτήτων των βασικών αριθμοσυνόλων και συγκεκριμένα των ακεραίων και των ρητών. Το παρόν άρθρο διαπραγματεύεται κυρίως το θέμα των αρνητικών αριθμών, οι οποίοι σύμφωνα με πολυάριθμες έρευνες συνεχίζουν να αποτελούν πηγή προβληματισμού για πολλούς μαθητές ακόμα και μετά τα δύο χρόνια της πρώτης εισαγωγής στην άλγεβρα.

Κατά τον Vergnaud δύο σημεία είναι προβληματικά ως προς τον τρόπο εισαγωγής της άλγεβρας στην σύγχρονη εκπαίδευση:

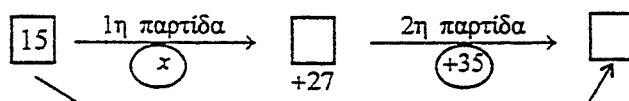
- Η εισαγωγή πραγματοποιείται σε μια αρκετά κατοπινή φάση και με πολύ βραδύ τρόπο.
- Οι αρνητικοί αριθμοί και οι υπολογισμοί ακεραίων διδάσκονται (κάποιες ιδιότητές τους) *πριν* τη χρήση και το χειρισμό εξισώσεων.

Προτείνει λοιπόν δύο βασικούς τύπους προβλημάτων για την εισαγωγή της άλγεβρας σε 12ετείς μαθητές που δεν έχουν, προγενέστερη εμπειρία:

A. Ο Πέτρος παίζει βόλους με τους φίλους του. Το πρωί κέρδισε 14 βόλους. Το απόγευμα έχασε 31. Το βράδυ τους μετράει και βρίσκει πως έχει 23. Πόσους είχε το πρωί πριν το παιχνίδι;



B. Ο Γιώργος έπαιξε δύο παρτίδες με τους βόλους του. Είχε αρχικά 15 βόλους. Στο τέλος είχε 27 βόλους περισσότερους απ'ότι αρχικά. Δεν θυμάται πόσους κέρδισε ή έχασε στην πρώτη παρτίδα. Στη δεύτερη κέρδισε 35. Τί έγινε στην πρώτη παρτίδα;



- Στο A το ερώτημα σχετίζεται με μια κατάσταση, στο B μ'έναν μετασχηματισμό.
- Στο B η λύση είναι αρνητικός αριθμός.
- Στο A οι αλγεβρικές λύσεις είναι εντελώς ανάλογες με τις αριθμητικές:

	Αλγεβρική	Αριθμητική
Δηλ. <u>1η Λύση</u>	$x + 14 - 31 = 23$ $x + 14 - 31 + 31 = 23 + 31$ $x + 14 = 54$ $x + 14 - 14 = 54 - 14$ $x = 40$	Στην τελική κατάσταση προσθέτουμε όσα έχασε ο Πέτρος. Αφαιρούμε όσα κέρδισε.
<u>2η Λύση</u>	$x + 14 - 31 = 23$ $x - 17 = 23$ $x - 17 + 17 = 23 + 17$ $x = 40$	Ο Πέτρος έχασε 17 συνολικά. Προσθέτουμε όσα έχασε ο Πέτρος.

- Στο B η εξίσωση μπορεί να διαμορφωθεί με δύο τρόπους: $15 + x + 35 = 15 + 27$ ή $x + 35 = 27$, που είναι ισοδύναμη με την πρώτη μορφή αλλά απαιτείται μια λογική επεξεργασία. Σύμφωνα με τον φορμαλισμό των ακεραίων θα έπρεπε να γράψουν: $15 + x + (+35) = 15 + (+27)$ ή $x + (+35) = (+27)$.

Οι μαθητές σχεδόν ποτέ δεν επιλέγουν τη δεύτερη εκδοχή και γράφουν:

$$15 + x + 35 = 15 + 27$$

$$x + 35 = 27$$

$$x + 35 - 35 = 27 - 35$$

$$x = 27 - 35 = -8$$

η δε λύση αυτή δεν φαίνεται να μπορεί να ερμηνευτεί εύκολα. Μπορεί να επεξηγηθεί πιο άνετα με τον ακόλουθο τρόπο:

1. Η τελική κατάσταση 42 αντιστοιχεί στο $15 + 27$.

2. Η ενδιάμεση κατάσταση $42 - 35$ δίνει 7.

3. Συγκρίνουμε το 15 με το 7 και συμπεραίνουμε ότι έχασε 8 βόλους, ή γράφουμε, με τη βοήθεια του δασκάλου: $x = 7 - 15 = -8$, που προκύπτει από την $x + 15 = 7$. Οι διαφορετικές αιτιολογήσεις επιτρέπουν:

1. Να δώσουμε το περιεχόμενο της έννοιας της *αρνητικής λύσης* (έννοιας *αντιποπτικής* για την πλειοψηφία των μαθητών που αντιμετωπίζουν τους αριθμούς ως ποσότητες ή μεγέθη, οπότε και θετικούς).

2. Να δείξουμε τις διάφορες συντομεύσεις ή συντομογραφίες που αντιπροσωπεύουν αλγεβρικές αιτιολογήσεις.

Ο συμβολισμός των μέτρων ποσοτήτων με αριθμούς χωρίς πρόσημο καθώς και οι μετασχηματισμοί και σχέσεις αριθμών με πρόσημο αντιτίθεται στη συνήθη χρήση όπου απλοποιούμε τη γραφή:

$$x + 35 = 27 \quad \text{αντί για} \quad x + (+35) = 27$$

$$\text{ή} \quad x - 7 \quad \text{αντί για} \quad x - (+7).$$

Ο υπερβολικός φορμαλισμός συντελεί στο να κάνει τα πράγματα περίπλοκα. Αλλά η έλλειψη φορμαλισμού οδηγεί σε παρεξηγήσεις. Το πρόβλημα είναι να βρεθεί το κατάλληλο μίγμα. Υπάρχουν πολλά ακόμα ερωτήματα αναφορικά με τα πραγματικά επιστημολογικά εμπόδια που σχετίζονται με τους αρνητικούς αριθμούς.

Για τον Vergnaud το βέβαιο επιστημολογικό εμπόδιο στην περίπτωση αυτή είναι η αναγωγή από την πλευρά των μαθητών της έννοιας του αριθμού σε μέτρο μεγεθών και ποσοτήτων, εμπόδιο που ενισχύεται από τα προγράμματα και τον τρόπο διδασκαλίας στη στοιχειώδη εκπαίδευση.

5. C. JANVIER, L. CHARBONNEAU & S. COTRET: ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΚΑ ΕΜΠΟΔΙΑ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ.

Οι Claude Janvier, Louis Charbonneau και Sophie René de Cotret (Από το Centre Interdisciplinaire de Recherche sur l'Apprentissage et le Développement en Education, Université du Québec à Montréal) στο άρθρο "Obstacles Épistémologiques

à la notion de variable: perspectives historiques” ασχολούνται με τη σημαντική έννοια της μεταβλητής.

Και για τους συγγραφείς αυτούς η έκφραση “υπερπήδηση ενός επιστημολογικού εμποδίου” μοιάζει πράγματι ακατάλληλη γιατί παραπέμπει σε μια εικόνα κίνησης στην οποία η πορεία εμποδίζεται από κάτι που βρίσκεται *μπροστά της*, πράγμα αντίθετο με την κατάσταση του επιστημολογικού εμποδίου που βρίσκεται *πίσω της*. Υπερνίκηση του εμποδίου θα έμοιαζε πιο ακριβής ενώ το *πέρασμα από κάτω* συνδυάζει ορθολογισμό και συναίσθημα.

Η έννοια της μεταβλητής παραπέμπει στη μεταβολή, στην αλλαγή και μοιραία καταλήγουμε στο περίπλοκο θέμα της αποσύνθεσης του συνεχούς σε διαδοχικές φάσεις ή στο ντελικάτο πέρασμα από το διακριτό στο συνεχές. Η αποσύνθεση της αλλαγής σε διαδοχικές φάσεις είναι πηγή *θεμελιώδους φιλοσοφικής δυσκολίας*.

Όπως υπογράμμισε ο Freudenthal*, η ποιοτική ή μαθηματική ανάλυση μιας μεταβολής απαιτεί να δηλώσουμε με ένα σύμβολο ή μία μοναδική λέξη την πραγματικότητα ή την οντότητα που μεταβάλλεται. Αυτή η *δήλωση ενός μεταβαλλόμενου χαρακτηριστικού με έναν όρο ή σύμβολο* δεν είναι παρά το πρώτο βήμα προς την κατεύθυνση της πλήρους κυριαρχίας μας πάνω στην έννοια της μεταβολής.

Η νοητική αυτή πρακτική είναι τελείως ξένη στους Αρχαίους Έλληνες: το δυναμικό σχήμα, η φόρμα, η φιγούρα εν εξελίξει δεν υφίσταται. Ακόμα και ο γεωμετρικός τόπος δεν είναι σημείο εν κινήσει αλλά απειρία σημείων.

Η βασική θέση των Janvier-Charbonneau-de Cotret για τη χρησιμότητα των παραστάσεων που εννοιοποιούν τη μεταβολή είναι: *η μεταβολή εμφανίζεται ως διαδοχή καταστάσεων που πρέπει να ενσωματωθούν σ’ένα όλο, να επανενωθούν*. Μια σημαντική λειτουργία της παράστασης που σχετίζεται με τη μεταβολή είναι η πρώτη αυτή αναγνώριση και εντοπισμός του αντικειμένου που αλλάζει. Η λέξη ή το σύμβολο που θα το παριστά είναι το πρώτο μέσο για να τεθεί σε κίνηση αυτή η γνωστική διαδικασία.

Η αναλογία ως επιστημολογικό εμπόδιο.

Από την εποχή των Αρχαίων Ελλήνων ως τον 15ο αιώνα ήταν “λογικά” αδύνατο να υπάρξει λόγος δύο διαφορετικής φύσης ποσοτήτων, ο λόγος ήταν κάτι

* Freudenthal: “Didactical Phenomenology of Mathematical Structure” (1983).

διαφορετικό από το πηλίκo δύο αριθμών. Η “παραδοσιακή” αναλογία ποτέ δεν συσχέτιζε άμεσα δύο μεταβαλλόμενες ποσότητες, οπότε και δεν επέτρεπε να εμφανιστεί μια έκφραση του τύπου π.χ. $E = \pi r^2$.

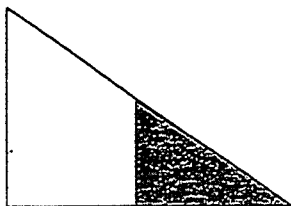
Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η αναλογία ως όργανο ανάλυσης τεσσάρων εισόδων γενικό και αρκούντως αποτελεσματικό, εμπόδιζε την πορεία προς την έννοια της μεταβλητής μη επιτρέποντας το να τεθεί σε άμεση συσχέτιση μια ποσότητα με μια άλλη από την οποία έχει εξάρτηση. Μ'άλλα λόγια η έκφραση $E = \pi r^2$ με δύο εισόδους (E και r) μοιάζει ως αναγκαία, αν και όχι ικανή, συνθήκη για την έλευση της μεταβλητής.

Σύμφωνα με πρόσφατες έρευνες έχει γίνει πια γνωστό ότι η λειτουργική πλευρά της αναλογίας είχε πλήρως μυθοποιηθεί λόγω του βαθμωτού της χαρακτήρα. Γι' αυτόν ακριβώς το λόγο οι συγγραφείς θεωρούν την αναλογία ως επιστημολογικό εμπόδιο για την ανάπτυξη της έννοιας της μεταβλητής.

Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι τα αποτελέσματα εργασιών πάνω στην “αναλογική” σκέψη οδηγούν στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές των 12-15 ετών μοιράζονται, ως το πούμε έτσι, με τους Αρχαίους αυτήν τους τη συνήθεια να αποφεύγουν να υπολογίζουν πηλίκα ανομοειδών ποσών.

Oresme: τα γραφήματα ως όργανο μελέτης της μεταβολής.

Ο Oresme (1323-1382) χρησιμοποιεί γραφ. παραστάσεις για να απεικονίσει μεταβολές ώστε να τις περιγράψει και να βρει τις σχέσεις τους. Το μέγεθος παίρνει διαδοχικές τιμές οι οποίες απεικονίζονται με ευθυγρ. τμήματα, το καθένα απειροελάχιστα κοντά στο άλλο, εφ' όσον το μέγεθος παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές (σχ. 1). Τα σχέδιά του υλοποιούν το πέρασμα στο συνεχές. Εν τούτοις το κείμενο



σχ. 1

παραμένει ασαφές· δεν μπορούμε να στοιχειοθετήσουμε το ότι αυτός ήταν πράγματι ο σκοπός του. Το σημαντικότερο στοιχείο στη μέθοδο του Oresme είναι το ότι υλοποιεί το πρώτο βήμα για τη μελέτη της κίνησης. Οι καμπύλες και οι τεθλασμένες του επιτρέπουν να ενώσει σ'ένα όλον μια διαδοχή από ενδιάμεσες καταστάσεις. Αυτό που δεν μπορούν να υλοποιήσουν οι αριθμοί (αφού δεν έχει στη διάθεσή του τους δεκαδικούς) ή οι λέξεις, το καταφέρνουν τα ευθύγραμμα τμήματα.

Το αλγεβρικό εμπόδιο και ο Γαλιλαίος.

Ο Galileo (1564-1642) στις μελέτες του για την κίνηση φαίνεται να προχωράει ένα βήμα πιο μπροστά τις εργασίες του Oresme. Αλλά στο κείμενο χρησιμοποιεί αποκλειστικά τη λογική των αναλογιών με τον παραδοσιακό τρόπο. *Η μαθηματική μεταβλητή παραμένει ακόμα απούσα.* Παρά το ότι θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει το συμβολισμό του Viète (1540-1603), πουθενά δεν συναντάμε στο κείμενο κάποιας μορφής παράσταση ή εξίσωση. Σύμφωνα με τους Janvier-Charbonneau-de Cotret δεν σκέφτηκε να αντιπροσωπεύει μ'ένα γράμμα-αλγεβρικό σύμβολο τη μεταβαλλόμενη ποσότητα. Όπως τόνισε ο Freudenthal, σε μια αλγεβρική έκφραση του τύπου $2t + 3 = 5$, το t υποτίθεται ότι απεικονίζει έναν αριθμό που αναζητάμε. Το γράμμα-σύμβολο θεωρείται ως *άγνωστος* (το αγγλικό place-holder).

Άρα η άλγεβρα ως κλάδος που ειδικεύεται στην επίλυση προβλημάτων για την “εύρεση αγνώστου”, έπαιξε ιστορικά το ρόλο του επιστημολογικού εμποδίου απέναντι στην έλευση της μεταβλητής, μιας και έβλεπε σε κάθε σύμβολο τη δυνατότητα να πάρει *μία ή μερικές μόνον τιμές*. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να πούμε ότι η *άλγεβρα ως τεχνική επίλυσης προβλημάτων εύρεσης αγνώστου ενδέχεται να αποτελέσει επιστημολογικά εμπόδιο για τους μαθητές στην προσπάθειά τους να φτάσουν στην έννοια της μεταβλητής, προσηλώνοντας τους στη στατική πλευρά του αλγεβρικού συμβόλου.*

Συμπέρασμα: Η μαθηματική μελέτη της μεταβολής απαιτεί πρωτ'απ' όλα τη δήλωση της μεταβαλλόμενης ποσότητας με ένα μοναδικό σύμβολο: λέξη, γράμμα, καμπύλη, ...κλπ. Στην ιστορική πορεία το *εμπόδιο της αναλογίας και της άλγεβρας* δημιούργησαν δυσκολίες στην προσέγγιση προς την έννοια της μεταβλητής. Είναι πιθανό παρόμοια εμπόδια να δυσκολεύουν και τους μαθητές της σύγχρονης εποχής.

6. Α. SIERPINSKA : ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΚΑ ΕΜΠΟΔΙΑ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ.

Το 1985 στο “Recherches en Didactique des Mathematiques” δημοσιεύει η A. Sierpinska ένα άρθρο της με τίτλο “Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite”, όπου παρουσιάζει τα αποτελέσματα της ιστορικής έρευνας και πειραματικής εργασίας που είχε διεξαγάγει με μια μικρή ομάδα σπουδαστών. Θα λέγαμε ότι εδώ

έχουμε μια πρώτη οργανωμένη παρουσίαση των βασικών επιστημολογικών εμποδίων που σχετίζονται με την έννοια του ορίου.

I) Το **“ΕΥΡΕΤΙΚΟΥ ΧΑΡΑΚΤΗΡΑ ΕΜΠΟΔΙΟ”**, το οποίο συνίσταται στην έλλειψη αυστηρότητας: η κίνηση προς το όριο *δεν είναι* κάποια μαθηματική πράξη-διαδικασία αλλά μια ευρετικού χαρακτήρα μέθοδος, η οποία οδηγεί σε αποτελέσματα με μια συμπερασματολογία βασισμένη σ’ένα είδος ατελούς επαγωγής και στην εποπτεία. Διακρίνουμε δύο κατηγορίες στο εμπόδιο αυτό ανάλογα με την εποπτεία που χρησιμοποιούμε στην ευρετική:

Iα) Το **“ΕΥΡΕΤΙΚΟ ΣΤΑΤΙΚΟ ΕΜΠΟΔΙΟ”**, όπου η εύρεση του ορίου στηρίζεται σε εποπτεία *ζένη προς την ιδέα της κίνησης*: “η εύρεση του ορίου είναι εύρεση κάποιου πράγματος του οποίου μόνον προσεγγίσεις είναι δυνατόν να γνωρίζουμε”.

Iβ) Το **“ΕΥΡΕΤΙΚΟ ΚΙΝΗΤΙΚΟ ΕΜΠΟΔΙΟ”**: εδώ η εποπτεία συνδέεται με την *ιδέα της κίνησης*: “η εύρεση του ορίου είναι εύρεση κάποιου πράγματος καθώς κινούμαστε συνεχώς, προσεγγίζουμε το άπειρο”.

Στην κατηγορία Iα έχουμε προσεγγίσεις *γεωμετρικές* οπότε μιλάμε για **“ΕΥΡΕΤΙΚΟ ΣΤΑΤΙΚΟ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΕΜΠΟΔΙΟ”** (Iα1), είτε *αριθμητικές*, οπότε μιλάμε για **“ΕΥΡΕΤΙΚΟ ΣΤΑΤΙΚΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΕΜΠΟΔΙΟ”** (Iα2). Παρόμοια στην κατηγορία Iβ μπορούμε να προσεγγίζουμε το άπειρο: *γεωμετρικά*, οπότε χαρακτηρίζουμε το εμπόδιο ως: **“ΕΥΡΕΤΙΚΟ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ”** (Iβ1), είτε *αριθμητικά*, οπότε χαρακτηρίζουμε το εμπόδιο ως: **“ΕΥΡΕΤΙΚΟ ΚΙΝΗΤΙΚΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ”** (Iβ2).

II) Το **“ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΟ ΜΕ ΤΗΝ ΑΥΣΤΗΡΟΤΗΤΑ ΕΜΠΟΔΙΟ”**, που χαρακτηρίζεται είτε υπερβολική αυστηρότητα είτε αυστηρότητα στραμμένη προς λάθος κατεύθυνση:

IIα) Το **“ΕΜΠΟΔΙΟ ΤΥΠΟΥ ΕΥΔΟΞΟΥ”**: εδώ η κίνηση προς το όριο *δεν είναι* μαθηματική διαδικασία αλλά αυστηρή μέθοδος απόδειξης συγκεκριμένων σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων.

IIβ) Το **“ΕΜΠΟΔΙΟ ΤΥΠΟΥ FERMAT”**: η κίνηση προς το όριο *είναι* μαθηματική διαδικασία, η οποία συνίσταται στη συσχέτιση αριθμών με τις

μεταβλητές και την παράλειψη των αριθμ. τιμών που είναι αμελητέες σε σχέση με κάποιες άλλες.

Τα παραπάνω επιστημολογικά εμπόδια διαπλέκονται με άλλα εμπόδια που σχετίζονται με τη γενικότερη άποψή μας για τη γνώση (Γ), το άπειρο (∞), τη συνάρτηση (f) και τους πραγματικούς αριθμούς (\mathbb{R}). Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται σχηματικά η παραπάνω συσχέτιση:

		Ευρετικό				Περί Αυστηρότητας	
		Στατικό		Κινητικό		Ευδόξου	Fermat
		Γεωμετικό	Αριθμητικό	Γεωμετρικό	Αριθμητικό		
Γ	Τα Μαθηματικά είναι εμπειρική επιστήμη	+	+	+	+		
	Τα Μαθηματικά είναι φορμαλιστικό παιχνίδι συμβόλων-κύριος σκοπός τους η απόδειξη θεωρημάτων					+	+
∞	Το άπειρο δεν υφίσταται	+	+				
	Το άπειρο υφίσταται μονάχα εν δυνάμει			+	+		
	Το άπειρο είναι πλήρως γνωστό και απαλλαγμένο από κάθε μεταφυσικό στοιχείο					+	+
f	Ο χρόνος είναι η γενικευμένη μεταβλητή			+	+		
	η συνάρτηση ανάγεται στο σύνολο των τιμών της	+	+				
	Η συνάρτηση ανάγεται στην αναλυτική της έκφραση η οποία υπάρχει πάντοτε						+
\mathbb{R}	Έλλειψη ομοιόμορφης αντίληψης περί πραγματικών	+		+			

Η προσπάθεια της A. Sierpinska επικεντρώθηκε στη διαμόρφωση των κατάλληλων διδακτικών καταστάσεων που θα συντελούσαν στην υπερπήδηση των παραπάνω εμποδίων από τους μαθητές. Ένα σημαντικό μέρος από αυτήν την ερευνητική της εργασία παρουσίασε στο άρθρο της: "Humanities students and epistemological obstacles related to Limits" που δημοσιεύτηκε στο "Educational

Studies in Mathematics”, τεύχος 18, 1987, σελ. 371-397. Στην εισαγωγή για άλλη μια φορά τονίζει ότι: “Αν η παρουσία ενός επιστημολογικού εμποδίου σ’έναν σπουδαστή συνδέεται με μια πεποίθηση κάποιου είδους, τότε η υπερπήδηση του εμποδίου δεν συνίσταται στην αντικατάσταση αυτής της πεποίθησης από την αντίθετή της. Αυτό θα σήμαινε ότι πέφτουμε στο άλλο αντίθετο εμπόδιο του διπόλου. Αντίθετα σημαίνει ότι ο σπουδαστής πρέπει να αρθεί σ’ένα ύψος που βρίσκεται πάνω από τις πεποιθήσεις του, να επιλύσει τα προβλήματα ώστε να μορφοποιήσει τις υποθέσεις που είχε υπόρρητα δεχθεί ως τώρα και να αποκτήσει συνείδηση των ενδεχόμενων διαφορετικών υποθέσεων” (σελ. 373-374).

Το μαθηματικό πεδίο που επέλεξε η A. Sierpiska για να διαμορφώσει τις διδακτικές καταστάσεις ήταν αυτό των άπειρων σειρών ώστε να συνδέσει στο μυαλό των μαθητών την ιδέα της σύγκλισης με τη δεκαδική ή άλλη ανάπτυξη ενός αριθμού, να δείξει ότι κάποιες ιδιότητες των πεπερασμένων διαδικασιών δεν μεταφέρονται άμεσα στις άπειρες καθώς και ότι σε κάποιες περιπτώσεις μπορούμε να μιλάμε για άθροισμα απείρων όρων ενώ σε κάποιες άλλες όχι. Δεν είναι τυχαίο το γεγονός ότι, όσον αφορά την ιστορική εξελικτική πορεία του, ο απειροστικός λογισμός συνδέθηκε αναπόσπαστα με τις άπειρες σειρές και με τη διαμάχη σχετικά με την παράδοξη συμπεριφορά των αποκλιουσών σειρών. Αυτή η τελευταία κατέδειξε την επιτακτική ανάγκη για πιο σαφή διατύπωση της διαφοράς μεταξύ αποκλιουσών και συγκλιουσών σειρών και τη διαμόρφωση μιας ειδικής ορολογίας.

Με αφορμή τη σειρά Grandi: $1-1+1-1+\dots$ και με εφαρμογή του τύπου $1+x+x^2+\dots=\frac{1}{1-x}$, κατέληγε στα εσφαλμένα: $1-1+1+\dots=\frac{1}{2}$ ή και $1+2+4+8+\dots=-1$, προκαλώντας συζήτηση και διαφωνίες μεταξύ των μαθητών. Κατόπιν, προσπαθώντας να συνδέσει τη δεκαδική ανάπτυξη με την έννοια της σειράς απείρων όρων και τον πραγματικό αριθμό με το όριο της σειράς αυτής, επικέντρωσε την προσοχή της στα παραδείγματα μετατροπής των περιοδικών δεκαδικών σε κλάσματα και ειδικότερα στο φαινομενικά αξιοπερίεργο $0,999\dots=1$. Αποτελέσματα των διεξοδικών και συχνά έντονων συζητήσεών της με τους μαθητές είναι το συμπέρασμα πως η στάση των παιδιών απέναντι στην ισότητα $0,999\dots=1$ καθορίζεται από τη γενικότερη αντίληψή τους σχετικά με τη μαθηματική γνώση και το άπειρο. Η A. Sierpiska διαμορφώνει μια σχηματική τυπολογία της στίσης των

μαθητών σύμφωνα με κάποια βασικά μοντέλα αντίληψης περί ορίου συνδεόμενα με το άπειρο και τη μαθηματική γνώση:

— **L1: “εποπτικό προσδιορισμο-ιστικό”** (intuitive definitist): όλες οι ακολουθίες είναι πεπερασμένες και το πλήθος των όρων τους πλήρως καθορισμένο· το “0,999...” δηλώνει τον αριθμό $0,999\dots 9$, ο οποίος είναι μια προσέγγιση του αριθμού 1, δηλ. $0,999\dots = 1 - \varepsilon$, όπου $\varepsilon > 0$.

— **L2: “εποπτικό απροσδιοριστο-ιστικό”** (intuitive indefinist): όλες οι ακολουθίες είναι πεπερασμένες αλλά ορισμένες φορές είναι αδύνατο να καθορίσουμε το πλήθος των όρων· το πραγματικό όριο της ακολουθίας είναι ο τελευταίος της όρος· αν δεν μπορούμε να καθορίσουμε τον τελευταίο όρο συμφωνούμε για μια προσέγγιση του πραγματικού ορίου.

— **L3: “συλλογιστικο-ορθολογικό προσδιορισμο-ιστικό”** (discursive definitist): όλες οι φραγμένες ακολουθίες είναι πεπερασμένες ... (η συνέχεια ακριβώς όπως στο L1).

— **L4: “συλλογιστικο-ορθολογικό απροσδιορισμο-ιστικό”** (discursive indefinist): όλες οι φραγμένες ακολουθίες είναι πεπερασμένες αλλά ... (η συνέχεια ακριβώς όπως στο L2).

Στα παραπάνω μοντέλα το γεγονός ότι η ακολουθία είναι συνάρτηση παραβλέπεται ολουσιδύλου· μια ακολουθία είναι ένα καλώς διατεταγμένο σύνολο. Το συνεχές των πραγματικών δεν γίνεται αποδεκτό: το \mathbb{R} είναι πεπερασμένο (στο L1) ή στην καλύτερη περίπτωση αριθμήσιμο (L2-L4). Η ιδέα ενός άπειρου αριθμού είτε στερείται νοήματος (L1-L2) είτε είναι εντελώς αφηρημένη (L3-L4). Η ισότητα $0,999\dots = 1$ δεν γίνεται δεκτή, αν το $0,999\dots$ είναι μια άπειρη διαδοχή ψηφίων, εφόσον οι δύο αυτοί αριθμοί ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις.

— **L5: “εν δυνάμει-ιστικό”** (potentialist): το όριο μιας ακολουθίας είναι αυτό στο οποίο η ακολουθία επ’άπειρο προσεγγίζει χωρίς ποτέ να το φτάσει· η αδυναμία να φτάσουμε στο όριο κάποτε είναι συνέπεια της αδυναμίας να περάσουμε μέσα από άπειρα βήματα σε πεπερασμένο χρόνο· ειδικότερα ο αριθμός $0,999\dots$ είναι μια άπειρη ακολουθία που δομείται μέσα στο χρόνο, είναι ένας αριθμός που τείνει στο 1, χωρίς ποτέ να το φτάσει. Το L5 αντιστοιχεί σε μια “εμπειρικο-εποπτική” στάση απέναντι στη μαθηματική γνώση και σε μια “εν δυνάμει” αντίληψη για το άπειρο.

— L6: “εν δυνάμει πραγματικο-ιστικό” (potential actualist): μπορεί να δεχθεί κάποιος ότι μετά από την παρέλευση άπειρου χρόνου η άπειρη σειρά ολοκληρώνεται και έχουμε στη διάθεσή μας όλους τους όρους· το όριο μιας ακολουθίας είναι ο έσχατος όρος της· ο αριθμός $0,999\dots$ θεωρείται ότι “αναδύεται” συν τω χρόνω: όταν όλοι οι όροι φανούν τότε γίνεται 1 (ή ο τελευταίος αριθμός πριν το ένα). Το L6 αντιστοιχεί σε μια “ορθολογικοσυλλογιστική” στάση απέναντι στη γνώση και μια “εν δυνάμει πραγματικό”, θέση για το άπειρο.

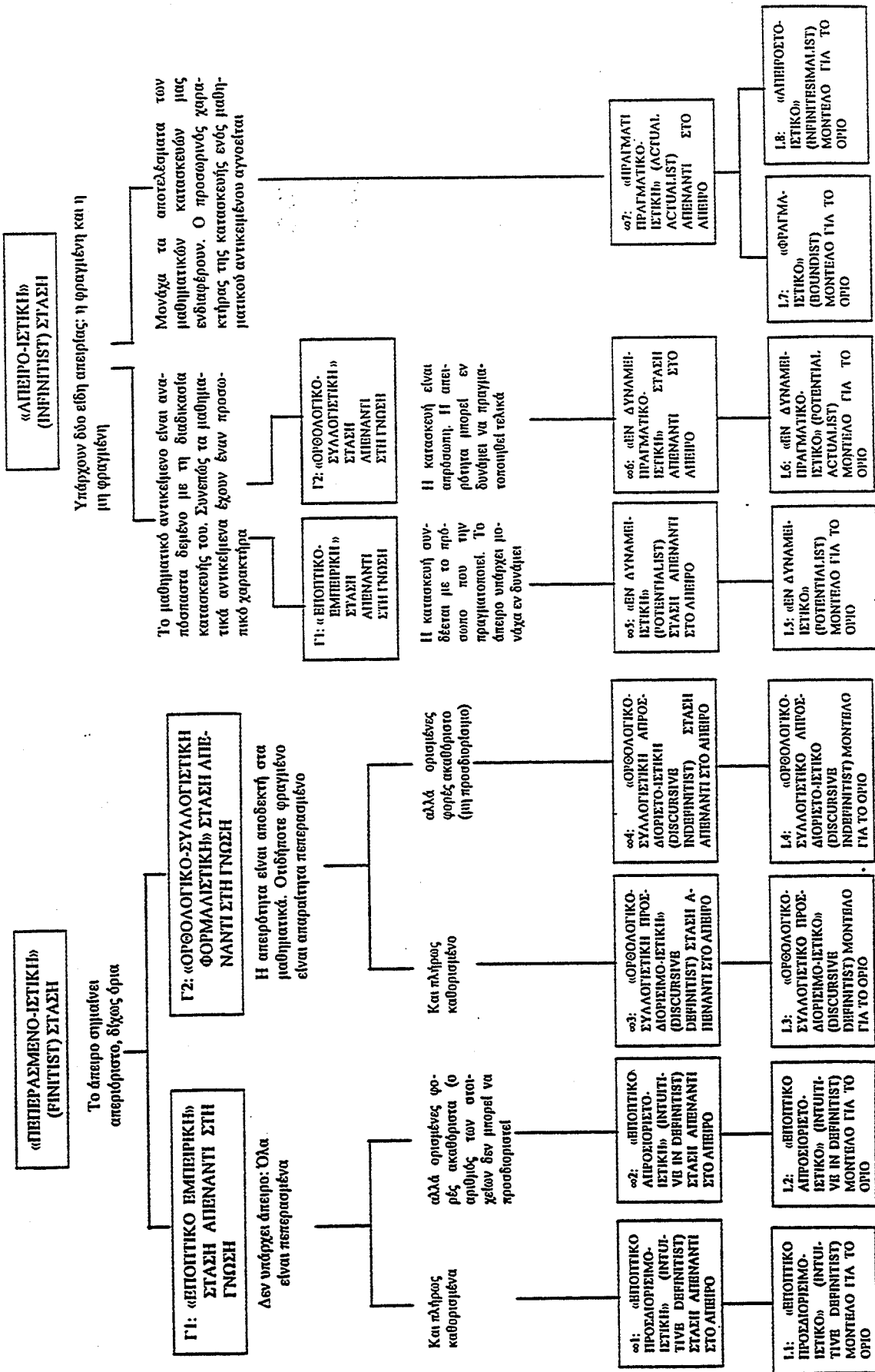
Στα δύο αυτά μοντέλα η ακολουθία είναι συνάρτηση του χρόνου. Το σύνολο των πραγματικών είναι πυκνό αλλά όχι απαραίτητα συνεχές.

— L7: “φραγμα-ιστικό” (boundist): μια ακολουθία είναι ένα σύνολο που μπορεί να είναι ή να μην είναι φραγμένο· μπορούμε να μιλάμε για τα φράγματα μιας ακολουθίας· κάποιες φορές ένα από τα φράγματα μπορεί να ξεχωρίσει, π.χ. υπάρχουν δύο φράγματα για την ακολουθία $1,0,1,0\dots$, αλλά το 2 μπορεί να είναι ένα ξεχωριστό φράγμα της $1.1 \cdot 9.1 \cdot 99, \dots$

— L8: “απειροστο-ιστικό” (infinitesimalist): το g είναι όριο της ακολουθίας A αν η διαφορά μεταξύ A και g είναι απειροστά μικρή (ή αλλιώς αν μπορούμε να πάρουμε το g από οποιονδήποτε όρο της A προσθέτοντας έναν άπειρο αριθμό απείρως μικρών ποσοτήτων)· η ισότητα $0,999\dots = 1$ είναι μια σύμβαση που προκύπτει μέσω μαθηματικής απόδειξης από προγενέστερες συμβάσεις.

Στα μοντέλα L7-L8 η έννοια της συνάντησης απουσιάζει. Στο “απειροστο-ιστικό” μοντέλο υποπτεύεται κανείς μια Leibniz-ιανή αντίληψη περί συνεχούς. Ο πραγματικός αριθμός ως μέτρο δεν εμφανίζεται στο L7-L8. Η διαφορά μεταξύ 1 και $0,999\dots$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που απομένει να διανύσουμε μάλλον, παρά ένας αριθμός. Η απόσταση δεν μεταφράζεται σε αριθμό και αυτό είναι το εμπόδιο για την έλλειψη μιας ομοιόμορφης αντίληψης περί της έννοιας του πραγματικού αριθμού. Εκ των πραγμάτων η απόσταση αντιστοιχεί αριθμητικά σε μια διαφορά και οι μαθητές προσθέτουν κυρίως παρά αφαιρούν: προσθέτοντας έτσι επ’άπειρο πλησιάζουμε ολόένα και περισσότερο στο 1.

Τα παραπάνω σχηματοποιούνται στο διάγραμμα που ακολουθεί, όπου συνδέονται με τις γενικότερες αντιλήψεις περί μαθηματικής γνώσης και απείρου:



Οι σχέσεις μεταξύ επιστημολογικών εμποδίων που συνδέονται με τα όρια και τα μοντέλων L1-L8 των μαθητών για την έννοια του ορίου, φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα

	L1 Εποπτικό προσδιορ.	L2 Εποπτικό Αποπροσδιορ.	L3 Ορθολογικό συλλογ. προσ.	L4 Ορθολ. συλλ. απροσδιορ.	L5 Εν δυνάμει ιστικό	L6 Εν δυνάμει πραγμ.	L7 Φραγμα- ιστικό	L8 Αστεροστο- ιστικό
Ευρετικό στατικό εμπόδιο	X	X	X	X			Y	
Ευρετικό κινητικό εμπόδιο					Z	Z		
Εμπόδιο τύπου Ευδόξου			U	U				
Εμπόδιο τύπου Fermat							W	W

Επεξήγηση:

— Για τα X: τα μοντέλα L1-L4 καθορίζονται από μια “φινιτιστική” (πεπερασμενο-ιστική) θέση, στατική απέναντι στην ακολουθία· η έννοια του ορίου ανάγεται στην έννοια της προσέγγισης: Έτσι οδηγούμαστε στο ευρετικό στατικό εμπόδιο.

— Για το Y: στο L7 η έννοια του ορίου υποκαθίσταται από αυτή του φράγματος. Και στην περίπτωση αυτή έχουμε να κάνουμε με το ευρετικό στατικό μοντέλο.

— Για τα Z: στο ευρετικό κινητικό εμπόδιο η ιδέα του χρόνου του απαραίτητου για μια κατασκευή είναι παρούσα κι’ αυτό μοντελοποιείται στα L5-L6 (ανάλογα με το αν η κατασκευή εκλαμβάνεται ως αναπόσπαστα συνδεδεμένη με το υποκείμενο που την διεκπεραιώνει).

— Για τα U: το “Ευδοξιανό” εμπόδιο συνδέεται πολύ στενά με τη φορμαλιστική άποψη για τη μαθηματική γνώση (Γ2) πράγμα που συνάγεται τα “ορθολογικο-συλλογιστικά πεπερασμενο-ιστικά (φινιτιστικά)” μοντέλα L3-L4 του ορίου.

— Για τα W: η “πραγματι-ακή” (pragmatic) διάσταση του εμποδίου τύπου Fermat και η αντίληψη περί της πράγματι πραγματοποιημένης απειρίας που βρίσκεται πίσω του, είναι επίσης παρούσα στην “ορθολογικο-συλλογιστική” (discursive) στάση απέναντι στη γνώση και τα L7-L8.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Η Σημειολογία του Charles Sanders Peirce¹

Η σημειωτική του Peirce είναι μια πολύπλοκη και πολυπρόσωπη θεωρία αναπαραστάσεων. Εκτός από τις ίδιες τις αναπαραστάσεις συμπεριλαμβάνει τη διαφορά μεταξύ αναπαράστασης και αναφοράς, καθώς και μεταξύ αναπαράστασης και ερμηνείας. Το κλειδί για την κατανόηση των διαφορών αυτών είναι ο ορισμός και η ταξινόμηση των σημείων. Για να είμαστε σε θέση να αναγνωρίζουμε, να αναζητούμε την γνώση σε ένα σύστημα προβλημάτων και υποθέσεων, πρέπει να αποκαλύπτουμε συνδέσεις μεταξύ πληροφοριών και αυτό είναι δυνατό μόνο με τα σημεία και τις αναπαραστάσεις. Ο Peirce στα πλαίσια του σχολαστικού ρεαλισμού θεωρούσε ότι χωρίς τα σημεία δεν μπορούμε να προσεγγίσουμε μια γενικότητα καθώς πίστευε ότι και η ίδια η σκέψη δεν είναι ούτε ποιότητα ούτε γεγονός. Είναι και η ίδια μια γενικότητα. Έτσι βασιζόμενη στην έννοια της αναπαράστασης προσπαθεί να επεξηγήσει την επικοινωνία με ικανοποιητικό τρόπο. Η αναπαράσταση βέβαια ως όρος και έννοια είναι ταυτισμένη με την μίμηση, το σημείο, την εικόνα. Παράδειγμα εφαρμογής στην σύγχρονη εποχή αποτελούν τα πληροφοριακά συστήματα, όπου η σημειωτική παρέχει το απαραίτητο θεωρητικό πλαίσιο, ασχολούμενη πρωταρχικά με τις αναπαραστάσεις και τον τρόπο που τα σημεία αναφέρονται στον κόσμο των αντικειμένων μεταφέροντας την σημασία και το νόημα στα συστήματα αυτά.

Ο Peirce (1839-1914) μέσα από τον πραγματισμό² του άσκησε κριτική στον ορθολογισμό του Descartes, ο οποίος έδωσε έμφαση στην ενόραση, το αλάνθαστο και τη βεβαιότητα της γνώσης, διατυπώνοντας τη θεωρία του διαψευσιμότητας³ (fallibilism) σύμφωνα με την οποία κάθε μας πίστη μπορεί να αποδειχθεί εσφαλμένη ή να διαψευστεί στο μέλλον. Σύμφωνα με τον ίδιο: "Υπάρχουν τρία πράγματα τα οποία δεν μπορούμε ποτέ να ελπίζουμε ότι θα επιτύχουμε με το συλλογισμό: η απόλυτη βεβαιότητα, η απόλυτη ακρίβεια και η απόλυτη καθολικότητα"

Ο πυρήνας της γνωσιοθεωρίας του Peirce βρίσκεται σε τέσσερις αντικαρτεσιανές θέσεις όπως αυτές διατυπώθηκαν στο 1ο άρθρο και αυτές είναι:

¹ Βλέπε Κ. Παπαγιώργη, Κείμενα Σημειολογίας, εκδ. Νεφέλη. Bronwen Martin & Felizitas Ringham - Dictionary of Semiotics - CASSELL London and New York. Paul Copley & Litza Jansz, Introducing Semiotics — Totem Books (1998). Floyd Merrell, Peirce, Signs and Meaning - - University of Toronto Press (1997). Daniel Chandler — Semiotics, The Basics 2nd edition - Routledge Editions (2007). James Jacob Liszka - A General Introduction to the Semeiotic of Charles Sanders Peirce - Indiana University Press (1996). John N. Deely - Basics of Semiotics Advances in Semiotics - Indiana University Press (1990). Winfried Nöth - Handbook of Semiotics —Indiana University Press (1990).

² Δ. Σφενδόνη-Μέντζου Πραγματισμός – Ορθολογισμός – Εμπειρισμός – εκδ. Ζήτη

³ «Ακόμη και στα μαθηματικά, κάθε πράξη θα πρέπει να θεωρηθεί ως υποκείμενη σε πλάνη», Peirce.

I. Δεν διαθέτουμε καμία ικανότητα ενδοσκόπησης (introspection) αλλά όλη η γνώση της ολότητας του εσωτερικού μας κόσμου προκύπτει μέσα από τη γνώση των εξωτερικών δεδομένων.

II. Δεν διαθέτουμε καμία ικανότητα ενόρασης (intuition) γιατί κάθε γνώση προσδιορίζεται λογικά από άλλες προϋπάρχουσες γνώσεις.

III. Δεν διαθέτουμε καμία ικανότητα να σκεπτόμαστε χωρίς σημεία.

IV. Δεν έχουμε καμία έννοια του απόλυτα μη-γνώσιμου (incognizable).

Ο Peirce έχει την πεποίθηση ότι υπάρχει η δυνατότητα να συλλάβουμε την αλήθεια όχι ως άτομα ξεχωριστά, αλλά μόνο ως επιστημονική κοινότητα. Στην αλήθεια φτάνουμε όχι μέσα από την ατομική, αλλά μέσα από τη συλλογική προσπάθεια της διαρκώς αναπτυσσόμενης ερευνητικής αλλά και ερμηνευτικής κοινότητας, η οποία κάποτε θα φτάσει στη διαμόρφωση της «τελικής γνώμης».

Ως επιστήμονας και ως λογικιστής ειδικότερα, ο Peirce ασχολήθηκε με τον τρόπο που η επιστήμη θα τον βοηθούσε να διδάξει φιλοσοφία. Έτσι έδωσε βάρος στην διαλεκτική πλευρά της ανθρώπινης εμπειρίας, εξετάζοντας τις συνήθειες (habits) και τους νόμους (laws). Οδηγήθηκε λοιπόν μέσα από τα πλαίσια της λογικής στην εισαγωγή της θεωρίας των σημείων ή σημειωτική: την θεωρία της πληροφόρησης, της αναπαράστασης, της επικοινωνίας αλλά και της ανάπτυξης της γνώσης. Αυτή η θεωρία θα αποτελούσε το μεθοδολογικό του εργαλείο καθώς ο Peirce θεωρούσε ότι η αλήθεια συνεπάγεται μια σχεδόν άπειρη διαδικασία επαναλήψεων, με ενδεχόμενο οποιαδήποτε στιγμή να διαψευστεί.

Σημειολογία / Σημειωτική

Σημειωτική είναι η μελέτη των σημείων και των συστημάτων αναπαράστασης μέσα από τα οποία συντίθεται ολόκληρη η κοινωνική ζωή.

Αντικείμενο της σημειωτικής είναι οι διαδικασίες μέσα από τις οποίες τα άτομα αποδίδουν, κωδικοποιούν και ανταλλάσσουν σημασίες και νοήματα. Ο όρος σημείο αναφέρεται σε οποιαδήποτε οντότητα η οποία φέρει ή στην οποία αποδίδεται ένα συγκεκριμένο νόημα. Ως παραδείγματα σημείων μπορούμε να θεωρήσουμε χειρονομίες, λέξεις, πινακίδες, ήχους ειδοποίησης, ακόμα και μια ιδέα ή μια σκέψη. Καθώς η γλώσσα είναι το πληρέστερο σημειωτικό σύστημα, η μελέτη της κατέχει κεντρική θέση στην σημειολογική μελέτη.

Ο μεγάλος αντίπαλος του όρου σημειωτική είναι η *σημειολογία*, μια εναλλακτική θεωρία της σημειωτικής του Peirce που προήλθε από έναν σύγχρονό του Ελβετό γλωσσολόγο, τον Ferdinand de Saussure (1857–1913). Ο Peirce πιθανότατα δεν είχε ακούσει τίποτα για τον Saussure, αφού η φήμη του και η επιρροή του εξαπλώθηκαν μετά τον θάνατό του, όταν εκδόθηκαν οι διαλέξεις του με τίτλο *Cours de linguistique generale* (1916).

Ο F. De Saussure ορίζει την σημειολογία του ως «μια επιστήμη που μελετά τη ζωή των σημείων μέσα στους κόλπους της κοινωνικής ζωής». Για τον

Pierce σημειωτική είναι η «διδασκαλία για την ουσιαστική φύση και τις βασικές παραλλαγές κάθε πιθανής σημείωσης». Όπως σημειώνει ο Guirad:

ο Saussure τονίζει την *κοινωνική λειτουργία του σημείου* ενώ ο Pierce τη *λογική του λειτουργία*.

Για αρκετό καιρό, οι δύο όροι χρησιμοποιούνται για να ξεχωρίσουν τις «δύο παραδόσεις» της σημειωτικής. Η γλωσσική παράδοση από τον Saussure ως τους Hjelmslev και Barthes συνήθως στην ευρωπαϊκή ήπειρο οριζόταν ως σημειολογία. Η γενική θεωρία των σημείων στην παράδοση των Peirce και Morris στον αγγλόφωνο κόσμο ονομαζόταν σημειωτική. Σήμερα ο όρος σημειωτική⁴ είναι γενικά αποδεκτός ως συνώνυμο του όρου σημειολογία.

Ανεξάρτητα από την ορολογία, η σημειωτική παρέχει επίσης και τα εργαλεία για την κριτική εξέταση των συμβόλων και την έρευνα της ερμηνείας στους περισσότερους τομείς. Ουσιαστικά το ενδιαφέρον της σημειωτικής εστιάζεται στη φύση του ίδιου του σημείου και όχι στον τρόπο που αυτό μεταδίδεται. Η έμφαση δίνεται στο κείμενο και στην αλληλεπίδρασή του με την κουλτούρα που το παράγει και το ενσωματώνει.

Σημειωτική του C.S.Peirce⁵

Ο Peirce θεμελίωσε τη σύγχρονη σημειωτική με τη θεωρία των σημείων η οποία έχει τις ρίζες της στην θεωρία γνώσης του Kant. Η σημειωτική του αποτελεί κλάδο της λογικής. Όπως λέει: «η λογική, με τη γενική της έννοια, είναι, ...μόνο ένα άλλο όνομα της σημειωτικής, της οιονεί-αναγκαίας, ή τυπικής, θεωρίας των σημείων». Δηλαδή ο Peirce περιγράφει τη σημειωτική ως μια τυπική (formal) επιστήμη των σημείων σε αντίθεση με τις ειδικές ή εμπειρικές (empirical) επιστήμες όπως π.χ. η Φυσική, οι οποίες έχουν στόχο να ανακαλύψουν τι ακριβώς συμβαίνει στον πραγματικό κόσμο. Αυτό είναι επακόλουθο καθώς η σημειωτική έχει ως στόχο να διακρίνει ποια πρέπει να είναι τα είδη των σημείων και τι θα έπρεπε να συμβαίνει σε κάθε περίπτωση.

Για τον Peirce το σημείο (sign) δεν αποτελεί απλώς έναν όρο ή μια λέξη καθώς κάθε τι μπορεί να είναι ένα σημείο εφόσον έχει νόημα (meaningful): «... Ένα σημείο είναι κάτι που τίθεται από κάποιον αντί για κάτι από κάποια άποψη ή δυνατότητα». Τα σύμβολα αποτελούν το μέσο έκφρασης και επικοινωνίας της ορθολογικότητας του σύμπαντος. Όπως αναφέρει ο ίδιος : «το υφάδι και στημόνι όλης της σκέψης και της έρευνας είναι τα σύμβολα και η ζωή και η σκέψη της επιστήμης είναι η ζωή που ενυπάρχει στα σύμβολα» καθώς και ότι «ο ύψιστος βαθμός της πραγματικότητας προσεγγίζεται μόνο με τα σημεία».

Ο Peirce αναπτύσσει μια σημειωτική θεωρία που είναι ταυτόχρονα *γενική, τριαδική και πραγματιστική*.

⁴ Duval R.: 1995, *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, New York, Paris

⁵ T. L. Short -Peirce's Theory of Signs - Cambridge University Press (2007).

Αναλυτικότερα μπορούμε να πούμε ότι αρχικά είναι γενική αφού λαμβάνει υπόψη συναισθηματική, πρακτική και πνευματική εμπειρία, περιλαμβάνει όλες τις συνιστώσες της σημειωτικής και διευρύνει την έννοια του σημείου. Είναι τριαδική αφού στηρίζεται σε τρεις φιλοσοφικές κατηγορίες *firstness*, *secondness* και *thirdness* και φέρνει τους τρεις όρους σε σχέση με το σημείο (ή *representamen*), το αντικείμενο και το ερμηνεύον (*interpretant*). Βέβαια κάθε υποδιαίρεση επιδέχεται και αυτή μιας τριχοτόμησης. Επίσης, είναι πραγματιστική αφού λαμβάνει υπόψη το πλαίσιο στο οποίο τα σημεία παράγονται και ερμηνεύονται, ενώ καθορίζει το σημείο από το αποτέλεσμα της συσχέτισης με τον ερμηνευτή.

□ *Firstness* είναι μια αντίληψη του «είναι» ανεξάρτητο από οτιδήποτε άλλο. Σχετίζεται με την ποιότητα της αίσθησης (*quality of feeling*), τη δυνατότητα (*possibility*) και αντιστοιχεί στη συναισθηματική εμπειρία.

□ *Secondness* είναι η λειτουργία του «είναι» δηλαδή ότι βρίσκεται σε σχέση με κάτι άλλο. Αφορά την αντίδραση, αντίσταση, το χαρακτήρα της σχέσης. Αναφέρεται στους συσχετισμούς (*correlations*) και αντιστοιχεί στην πρακτική εμπειρία.

□ *Thirdness* είναι ο διαμεσολαβητής μέσω του οποίου η πρώτη και η δεύτερη κατηγορία έρχονται σε σχέση. Αναφέρεται στην αναπαράσταση (*representation*) και το ερμηνευτή (*interpretant*). Έχει σχέση με τις συνήθειες (*habits*), τους νόμους (*laws*) και την αναγκαιότητα (*necessity*). Επιτυγχάνεται όταν μονάδες και δυνάδες συσχετίζονται, όπως ο κεραυνός με την λάμψη και την βροντή. Αλλά είναι και η κατηγορία της συνέχειας. Διαμέσου της *thirdness* θεωρεί ο Peirce ότι έχουμε την γνώση καθώς δεν βασίζεται στις έννοιες αποκλειστικά αλλά κυρίως στις έννοιες που προκύπτουν από τα αντικείμενα.

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι οι παραπάνω είναι ουσιαστικά φαινομενολογικές κατηγορίες και μπορούμε να τις δούμε μέσα από ένα παράδειγμα που δίνει ο Hausman⁶: «ένα νόμισμα που πέφτει από την τσέπη μας, χωρίς να το καταλάβουμε είναι μια μονάδα (*firstness*). Αν το νόμισμα που μας έπεσε το πάρει κάποιος άλλος είναι μια δυνάδα (*secondness*) και αν κάποιος δώσει αυτό το νόμισμα σε έναν άλλο είναι μια τριάδα (*thirdness*)».

Η σημειωτική είναι η επιστήμη που μελετά την ουσιαστική φύση και τις θεμελιώδεις ποικιλίες της δυνατής σημείωσης (*semiosis*) η οποία συνεπάγεται την συνεργασία τριών στοιχείων: του σημείου (*sign*), του αντικειμένου του (*object*) και του ερμηνεύοντος (*interpretant*). Στην θεωρία των σημείων το αναφερόμενο αντικείμενο έχει κρίσιμο ρόλο. Το σημείο θεωρείται ως κάτι που αντικαθιστά κάτι άλλο σε κάποιον με κάποιο τρόπο, όσο γενικό και αν θεωρηθεί αυτό. Απευθύνεται σε κάποιον δημιουργώντας στο μυαλό του ένα ισοδύναμο σημείο, αντικαθιστώντας το ίδιο το αντικείμενο. Δηλαδή, διαμεσολαβεί μεταξύ του ερμηνεύοντος και του αντικειμένου.

Έτσι δημιουργείται το τριαδικό μοντέλο του Peirce. Σε αυτό το μοντέλο ο ρόλος του σημείου είναι να δημιουργήσει μια συνήθεια (*habit*) ή ένα νόμο

⁶ C.R.Hausman, Charles Peirce's Categories and the Growth of Reason.

(law)⁷ που θα προσδιορίσει το νόημα σε κάθε μελλοντική χρήση μέσω νοητικών δραστηριοτήτων από την αντίληψη ή την εμπειρία του υποκειμένου. Ο Skagestad⁸ θεωρεί ότι αυτή η διαδικασία δημιουργεί κάθε φορά στο μυαλό του ερμηνεύοντος ένα νέο σημείο που ο ίδιος ο Peirce όριζε ως ερμηνεία του αυθεντικού σημείου.

Κλάδοι της σημειωτικής του C.S.Peirce

Η Γενική Σημειωτική του Peirce χωρίζεται σε τρεις κλάδους:

1. Η Θεωρητική Γραμματική (Pure ή Speculative Grammar) η οποία ασχολείται με τις τυπικές συνθήκες που κάνουν κάτι να λογίζεται ως σημείο.
2. Η Κριτική Λογική (Critical Logic ή Logic Proper) η οποία ασχολείται με τις τυπικές συνθήκες που κάνουν ένα σημείο να υπολογίζεται ως αληθινό.
3. Η Θεωρητική Ρητορική ή Μεθοδευτική (Methodetic, Universal Rhetoric, Speculative Rhetoric ή Theory of Inquiry) η οποία ασχολείται με τις τυπικές συνθήκες επίτευξης της αλήθειας από το σημείο, δηλαδή μεταξύ του σημείου και του ερμηνευτή του.

Οι τρεις γενικοί κλάδοι της σημειωτικής του Peirce αντιστοιχούν στις εξής τρεις κατηγορίες της σύγχρονης σημειωτικής:

- της *συντακτικής* (sentactics), που εξετάζει σχέσεις μεταξύ συμβόλων μεταξύ τους
- της *σημαντικής* (semantics), που εξετάζει σχέσεις μεταξύ συμβόλων και πραγμάτων που δεν είναι σύμβολα, δηλαδή σχέσεις αναφοράς και νοήματος
- και της *πραγματιστικής* (pragmatics), που εξετάζει σχέσεις συμβόλων με πράγματα που δεν είναι σύμβολα και περιλαμβάνουν ενέργειες του ομιλητή.

Θεωρητική Γραμματική (Pure ή Speculative Grammar)

Η Θεωρητική Γραμματική ενδιαφέρεται για τον καθορισμό των τυπικών συνθηκών των σημείων δηλαδή «μελετάει τους τρόπους με τους οποίους κάτι μπορεί να γίνει σημείο». Μέσω της Θεωρητικής Γραμματικής ο Peirce ανέλυσε τα είδη των σημείων που υπάρχουν και τους τρόπους που μπορούν να συνδυαστούν. Σύμφωνα με τον Peirce, για να μπορεί ένα σημείο ή representamen να θεωρείται και να λειτουργεί ως σημείο πρέπει να χαρακτηρίζεται από τέσσερις συνθήκες:

1. Πρέπει να συσχετίζεται ή να αντιπροσωπεύει ένα αντικείμενο. Αυτό εξασφαλίζει ότι όλα τα σημεία έχουν μια αμεσότητα προς τα αντικείμενα και ονομάζεται representative συνθήκη του σημείου.

⁷ P. Nicolacopoulos, Norms, Conventions and Rationality. (1992), Historical Types of Rationality. Proceedings of the First Greek-Soviet Symposium on Science and Society, Athens, October 23-26, 1990.

⁸ P.Skagestad, Peirce, Virtuality and Semiotic.

2. Πρέπει να συσχετίζεται ή να αντιπροσωπεύει ένα αντικείμενο με κάποια ικανότητα, κάποιο νόημα ή σημασία και ονομάζεται *presentative* συνθήκη του σημείου.

3. Πρέπει να καθορίζει έναν ερμηνευτή (*interpretant*) ως σημείο που μεταφράζει και αναπτύσσει το αρχικό σημείο και ονομάζεται *interpretative* συνθήκη του σημείου.

4. Η σχέση ανάμεσα στο σημείο, αντικείμενο και ερμηνευτή πρέπει να είναι τριαδική (*triadic*), εννοώντας ότι κάθε μέρος παίρνει το νόημά του μέσω του άλλου.

Η Τυπολογία (Typology) των Σημείων

Η Τυπολογία των Σημείων έχει σκοπό να χρησιμεύσει στη Σημειωτική Γραμματική περιγράφοντας τα διάφορα είδη και τύπους σημείων. Υπό αυτό το πρίσμα, έχει την αρμοδιότητα του διαχωρισμού και της ταξινόμησης των σημείων. Έτσι, ο Peirce αναπτύσσει τέσσερις διαφορετικές τυπολογίες που ονομάζονται: η αρχική (*original*), η ενδιάμεση (*interim*), η επεκταμένη (*expanded*), και η τελική (*final*).

Σύμφωνα με αυτή υπάρχουν τρία είδη σημείων, οι *εικόνες*, οι *δείκτες* και τα *σύμβολα*. Τα σύμβολα χωρίζονται στη συνέχεια σε *όρους* (*terms*), *προτάσεις* (*propositions*) και *επιχειρήματα* (*arguments*). Τα επιχειρήματα χωρίζονται ακόμη σε παραγωγή (*deduction*), υπόθεση (*hypothesis*) και συμπεράσμα (*induction*).

□ Η ενδιάμεση τυπολογία εκφράζει πιο καθαρά την προσδοκούμενη τριχοτόμηση των σημείων. Αντί για μια τριχοτόμηση η οποία υποδιαιρείται όπως συμβαίνει στην αρχική τυπολογία, η ενδιάμεση ταξινομεί τους όρους (*terms*), προτάσεις (*propositions*) και επιχειρήματα (*arguments*) που τώρα ονομάζονται *rhemes*, *dicents*, and *arguments* ως μια ξεχωριστή τριχοτόμηση συμβόλων. Τα επιχειρήματα συνεχίζουν να υποδιαιρούνται όπως και πριν, μόνο που ο Peirce συνεχίζει και προσθέτει μια νέα τριχοτόμηση του σημείου σε σχέση με το ίδιο το σημείο.

Σύμφωνα με αυτήν κάθε σημείο μπορεί να αναλυθεί σε τρεις όψεις ή διαστάσεις που αντιστοιχούν στις τρεις πρώτες τυπικές συνθήκες του σημείου:

1. Το σημείο καθαυτό (*presentative character*)
2. Το σημείο σε σχέση με το αντικείμενό του (*representative character*)
3. Το σημείο σε σχέση με το ερμηνευόμενο (*interpretative character*).

Αναλύοντας πιο συγκεκριμένα κάθε συνθήκη έχουμε ότι ο *presentative* χαρακτήρας του σημείου είναι ένα συγκεκριμένο χαρακτηριστικό που έχει το σημείο ως πράγμα, που αφορά τη βάση της ικανότητάς του να αντιπροσωπεύει το αντικείμενό του, δηλαδή χρησιμεύει ως υπόβαθρο του σημείου. Για παράδειγμα, ένα αστέρι (πολικός αστέρας) μπορεί να χρησιμεύει ως σημείο λόγω των πολλών ιδιοτήτων του: της λαμπρότητάς του, το γεγονός ότι φαίνεται μόνο τη νύχτα, επειδή φαίνεται να δείχνει προς μια ορισμένη κατεύθυνση ή

λόγω των συσσωρευμένων ιστορικών και παραδοσιακών εννοιών που του αποδόθηκαν.

Κατηγοριοποιώντας επιμέρους έχουμε ότι σε μια πρώτη θεώρηση ο *representative* χαρακτήρας του σημείου περιλαμβάνει τα ποιοτικά του χαρακτηριστικά. Για παράδειγμα αν κάτι είναι κόκκινο και γι αυτό μετατρέπεται σε σημείο. Αυτή η ιδιότητα ονομάζεται *qualisign* (ή *tone* ή *tuone* ή *potisign*). Στην περίπτωση που αφορά τις υπαρξιακές ιδιότητες του σημείου τότε ονομάζεται *sinsign* (ή *token* ή *actisign*). Τότε το σημείο δρα ως σημείο λόγω της μοναδικότητάς του, της προσωρινότητάς του ή της τοποθεσίας που βρίσκεται. Για παράδειγμα ένας κόκκινος βομβητής που αναβοσβήνει και φωνάζει "τόρα".

Τέλος ένα τρίτο χαρακτηριστικό είναι κάθε συνηθισμένη, παραδοσιακή, χρηστική ή κάθε άλλη νόμιμη ιδιότητά που έχει αποκτήσει. Για παράδειγμα το γεγονός ότι το κόκκινο χρώμα έχει παραδοσιακά αποκτήσει το χαρακτήρα του κινδύνου και της προειδοποίησης, δίνει σε ένα αντικείμενο με κόκκινο φως μια ορισμένη ικανότητα να τα αντιπροσωπεύσει αυτές τι έννοιες. Αυτή η ιδιότητα ονομάζεται *legisign* (ή *type* ή *famisign*). Κάθε σημείο μπορεί να έχει και τις τρεις παραπάνω ιδιότητες, αν και συνήθως μια από τις τρεις είναι κυρίαρχη.

Όπως αναφέρθηκε ο *representative* χαρακτήρας του σημείου αφορά τη συσχέτιση μεταξύ του σημείου και του αντικειμένου. Σχετίζεται δηλαδή με τον τρόπο που ένα σημείο συνδέεται με το αντικείμενό του και έτσι καθορίζεται ως κάτι που το αναπαριστά. Αυτό γίνεται με τρεις διαφορετικούς τρόπους:

- Όταν τα ποιοτικά χαρακτηριστικά του σημείου είναι παρόμοια με τα χαρακτηριστικά του αντικειμένου που αναπαριστά, τότε ονομάζεται εικόνα (*icon*). Μία φωτογραφία ή ένα πορτραίτο ενός ανθρώπου είναι εικόνα αφού έχει ίδια χαρακτηριστικά με το αυθεντικό πρόσωπο. Μια εικόνα μπορεί να έχει ή να μοιράζεται ακριβώς τα ίδια χαρακτηριστικά με το αντικείμενό του, όπως για παράδειγμα ένα τριαντάφυλλο είναι κόκκινο και η φωτογραφία του τριαντάφυλλου είναι κόκκινη και τότε ονομάζεται *image*.

Μια εικόνα μπορεί να έχει σχέση ισομορφισμού με το αντικείμενό του, όπως για παράδειγμα ένας χάρτης με την περιοχή που αναπαριστά. Τότε ονομάζεται διάγραμμα (*diagram*). Ένα σημείο είναι επίσης εικόνα όταν ο *representative* χαρακτήρας του αναπαρίσταται με παραλληλισμό από τον *representative* χαρακτήρα ενός άλλου σημείου. Για παράδειγμα από ένα λογοτεχνικό απόσπασμα: «Πριν ακόμα ακούσει τον πυροβολισμό, έπεσε καταγής, το σώμα του ένα μπουκάλι κρασιού που χύθηκε...». Σε αυτή την περίπτωση ονομάζεται *metaphor*.

- Ένα σημείο μπορεί να έχει συνάφεια με το αντικείμενό του. Τότε ονομάζεται δείκτης (*index*). Είναι η χωρική ή χρονική θέση που έχει την συγκεκριμένη στιγμή και όχι τα ποιοτικά του χαρακτηριστικά που το καθιστούν *index*. Η συνάφεια μπορεί να είναι τριών ειδών. Μπορεί να είναι *deictic* (ή *referential*, ή *designatives*), με την έννοια ότι υπάρχει η αντίληψη μιας άμεσης συνέχειας μεταξύ του σημείου και

του αντικειμένου. Για παράδειγμα όπως ένα δάκτυλο που δείχνει, σχεδιάζει μια φανταστική γραμμή πάνω στο αντικείμενο που αναφέρεται.

Επίσης μπορεί να είναι causal (ή existential ή reagents), δηλαδή τέτοια ώστε το index να προκαλείται από το αντικείμενο που αντιπροσωπεύει. Ένα παράδειγμα είναι ο τρόπος με τον οποίο ο άνεμος στρέφει ένα ανεμούριο σε μια συγκεκριμένη θέση.

Τέλος μπορεί να είναι αποτέλεσμα μια αρχικής επισήμανσης, όπως για παράδειγμα ένα κατάλληλο όνομα συνδέεται με κάποιον ή όπως στην περίπτωση που βάζουμε ένα γράμμα κάτω από ένα διάγραμμα (labeling).

- Ένα σημείο μπορεί να αναπαριστά το αντικείμενό του μέσω ορισμένων συμβάσεων, συνηθειών, ή νομιμοφανών σχέσεων. Τότε ονομάζεται σύμβολο (symbol) και συνδέεται με το αντικείμενό του «λόγω της ιδέας του συμβόλου που χρησιμοποιεί η σκέψη, χωρίς να υπάρχει τέτοια σχέση». Ένα παράδειγμα αυτού που θα αποκαλούσαμε natural symbol είναι η κίνηση του σκύλου να κουνάει την ουρά του ως ένδειξη φιλικότητας, όπου δεν φαίνεται να υπάρχει καμία ομοιότητα μεταξύ της κίνησης, της κατεύθυνσης ή της ταχύτητας της ουράς και της κατάστασης της φιλικότητας, παρ' όλα αυτά η συγκεκριμένη χειρονομία είναι συνήθης για τις περισσότερες ράτσες σκύλων. Επίσης η λέξη γη αντιπροσωπεύει αυτό που αντιπροσωπεύει από το γεγονός ότι είναι μια αλληλουχία δύο ήχων "γ" και "η". Γενικά ένα σύμβολο είναι σημείο επειδή ερμηνεύεται ή χρησιμοποιείται ως τέτοιο. Η λέξη γη δεν έχει καμία σχέση με τον πραγματικό πλανήτη αν δεν υπάρχει ο ερμηνευτής ώστε να κατανοήσει τη σχέση.

Αν το αντικείμενο στο οποίο αναφέρεται είναι γενικού είδους τότε το ονομάζουμε (γνήσιο) genuine symbol. π.χ. η ακολουθία γραμμάτων W.C. που δηλώνει όλα τα είδη αποχωρητηρίων. Αν το αντικείμενο είναι μοναδικό στο είδος του ονομάζεται singular symbol, όπως η λέξη 'σελήνη', αφού δεν υπάρχει άλλο τέτοιο ουράνιο σώμα που είναι ο δορυφόρος της γης μας. Αν το αντικείμενο είναι κάποιου χαρακτήρα ή κάποιας ποιότητας, απλά, τότε ονομάζεται abstract symbol.

Ο interpretative χαρακτήρας του σημείου είναι η ισχύς του σημείου να κατευθύνει και να καθορίζει τους ερμηνευτές του σε ένα συγκεκριμένο σημείο προσοχής της ερμηνείας του αντικειμένου.

Αν το σημείο είναι theme (ή seme) θα έχει την τάση να καθοδηγεί τον ερμηνευτή να εστιάσει στα ποιοτικά χαρακτηριστικά του αντικειμένου, παρά στις υπαρξιακές ιδιότητες τις οποίες έχει. Κλασικό παράδειγμα ενός theme είναι ένας όρος όπως « η ανθρώπινη ύπαρξη», όπου η ερμηνεία του οδηγείται από το σημείο περισσότερο προς την έννοια, τη χροιά ή το βάθος, από ό,τι προς την αναφορά του, τη σημασία ή το εύρος του. Τα themes μπορούν να υποδιαιρεθούν σε:

- medadic rhema, που είναι όροι ολοκληρωμένοι και απλοί

- monadic rhema, όπως " ____ είναι καλός"
- dyadic rhema, όπως " ____ αγαπάει τον/την ____"
- triadic rhema, όπως "Ο Θεός δίνει ____ στον ____".

Ένα dicent (ή rheme) συνδέει την έννοια με την αναφορά, δηλαδή καθοδηγεί τον ερμηνευτή προς την πληροφορία που έχει το σημείο. Το παράδειγμα του Peirce για ένα dicent είναι μια πρόταση π.χ. «ο Γιάννης είναι μια ανθρώπινη ύπαρξη» όπου η ερμηνεία της καθορίζει πλήρως την έκταση των αντικειμένων της όσον αφορά τα χαρακτηριστικά τους.

Ένα argument (ή delome) είναι ένα σημείο του οποίου η ερμηνεία στρέφεται προς τη συστηματική ή συμπερασματική σύνδεση με άλλα σημεία. Όπως λέει ο Peirce «ένα σημείο το οποίο για τον ερμηνευτή του είναι ένα σημάδι του νόμου», δίνοντας ως παράδειγμα το επιχείρημα π.χ. «Όλοι οι άνθρωποι είναι θηλαστικά. Όλα τα θηλαστικά είναι σπονδυλωτά. Άρα όλοι οι άνθρωποι είναι σπονδυλωτά».

Για τον Peirce υπάρχουν τρία είδη επιχειρημάτων:

1. deduction που κάνει σαφές αυτό που υπονοείται ανάμεσα σε συστηματικές συνδέσεις των σημείων. Γενικά έχουν τη μορφή: "S είναι M. M είναι P. Οπότε, S είναι P."
2. abduction αφορά την ανακάλυψη νέων υποθέσεων και εικασιών και
3. induction που παράγει συμπεράσματα από την παρατήρηση των αποτελεσμάτων ορισμένων περιπτώσεων.

Η Ταξινόμηση (Classification) των σημείων

Η ταξινόμηση (Classification) των σημείων είναι μια προσπάθεια οργάνωσης των τύπων των σημείων που κάνει φανερή τη συγγενειά τους και είναι ουσιαστικά διαφορετική από την τυπολογία (Typology) η οποία μόνο περιγράφει τα είδη. Ο Peirce ασχολείται με δύο είδη ταξινόμησης: την hierarchical και την typological. Βέβαια οι κατηγορίες είναι αναλυτικά εργαλεία περισσότερο από μόνο ονόματα πραγμάτων.

Η hierarchical ταξινόμηση οπτικοποιείται ως δενδροειδής διάταξη με στόχο να δειχθεί μια σχέση συγγενείας, εξάρτησης ή μη-εξάρτησης ανάμεσα στις τάξεις των διαφόρων επιπέδων. Για παράδειγμα η λογική φαίνεται να εξαρτάται από τη Φαινομενολογία η οποία με τη σειρά της εξαρτάται από τα Μαθηματικά κλπ.

Η typological ταξινόμηση είναι δομημένη πιο τυπικά. Βασίζεται στους τύπους των φαινομένων δηλαδή «από τη σύνδεση των πραγμάτων και του συστήματος των τυπικών ιδεών». Το παράδειγμα εδώ είναι η μαθηματική ταξινόμηση π.χ. σε κάποιες χώρες της κεντρικής Ευρώπης για να ονομασθεί ένα σχήμα κανονικό κυρτό πολύγωνο πρέπει να έχει κάποιες τυπικές συνθήκες: να έχει n -πλευρές με $n > 4$, να έχει τόσες κυρτές γωνίες όσες και πλευρές, το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών του να ισούται με 360° και το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών να ισούται με $(2n-4) \cdot 90^\circ$. Η εκπλήρωση αυτών των

συνθηκών παράγει έναν αριθμό κλάσεων: πενταγώνων, εξαγώνων, κλπ. Αντίθετα με την hierarchical ταξινόμηση, οι κλάσεις αυτές δεν εξαρτώνται η μια από την άλλη.

Ο Peirce προτείνει η ταξινόμηση των σημείων στη σημειωτική να ακολουθεί αυτό το μοντέλο. Κάθε κλάση σημείων πρέπει να ακολουθεί τουλάχιστον τρεις τυπικές συνθήκες:

- να αναπαριστάνει ένα αντικείμενο,
- να εκπροσωπεί αυτό το αντικείμενο από ορισμένη άποψη και
- να δημιουργεί έναν ερμηνευτή ο οποίος το καθιερώνει ως αναπαράσταση αυτού του αντικειμένου.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η ταξινόμηση των σημείων καθορίζεται από βασικές αρχές που προκύπτουν από τη φαινομενολογία και τη μελέτη των κατηγοριών που αναφέραμε. Σύμφωνα με αυτές, η firstness δεν περιλαμβάνει τίποτε εκτός από την ίδια, ενώ η secondness περιλαμβάνει και τη firstness, τέλος η thirdness περιλαμβάνει τόσο τη secondness όσο και τη firstness.

Είναι φανερό λοιπόν ότι στη σημειωτική υπάρχει η αρχή της ιεραρχίας μεταξύ των κατηγοριών και από αυτή την αρχή ένα σημείο (representamen - firstness) δεν μπορεί να αναφέρεται σε ένα αντικείμενο (object - secondness) από την υψηλότερη κατηγορία. Ως προς το ερμηνεύον (interpretant - thirdness), αυτό δεν μπορεί να ανήκει σε μια κατηγορία ανώτερη από του αντικειμένου του. Για παράδειγμα, ένα sinsign (η κατηγορία 2 representamen) δεν μπορεί να είναι ένα symbol (η κατηγορία 3 αντικειμένου), αλλά μπορεί να θεωρηθεί ως ένα icon (κατηγορία 1 το αντικείμενο) ή ένα index (κατηγορία 2 το αντικείμενο). Με την τήρηση της ιεραρχίας των κατηγοριών, μπορούμε να κατασκευάσουμε τις παρακάτω δέκα τάξεις σημείων:

1. rhematic-iconic-qualisigns (π.χ. μια αίσθηση «κόκκινου»)
2. rhematic-iconic-sinsigns (π.χ. ένα μεμονωμένο διάγραμμα)
3. rhematic-indexical-sinsigns (π.χ. μια αυθόρμητη κραυγή)
4. dicentric-indexical-sinsigns (π.χ. μια φωτογραφία)
5. rhematic-iconic-legisigns (π.χ. ένας τοπογραφικός χάρτης)
6. rhematic-indexical-legisigns (π.χ. μια δεικτική αντωνυμία)
7. dicentric-indexical-legisigns (π.χ. μια κραυγή στο δρόμο: «πάρτε νόστιμα πορτοκάλια»)
8. rhematic-symbolic-legisigns (π.χ. ένα κοινό ουσιαστικό)
9. dicentric-symbolic-legisigns (π.χ. μια πρόταση)
10. argumentive-symbolic-legisigns (π.χ. ένας συλλογισμός)

Η Κριτική Λογική (Critical Logic or Logic Proper)

Η Κριτική Λογική ασχολείται με εκείνα τα σύμβολα που είναι ικανά να εκφράσουν και συμπεράνουν πληροφορίες, όπως τα legisigns, symbols, dicents, και arguments. Ο στόχος της είναι να διακρίνει τη σωστή μέθοδο αιτιολόγησης, το σωστό σκεπτικό και τα έγκυρα συμπεράσματα ή όπως λέει ο ίδιος ο Peirce:

« ταξινομεί τις αιτιολογήσεις και καθορίζει την αξία τους».

Ασχολείται δηλαδή με την αλήθεια των προτάσεων, οπότε η τυπική λογική ως κλάδος των μαθηματικών παρέχει το υπόβαθρο που απαιτείται για την επικύρωση των έγκυρων επιχειρημάτων.

Κάθε επιχείρημα μπορεί να αναλυθεί σε πέντε μέρη:

1. τη κατευθυντήρια αρχή (leading principle)
2. τις υποθέσεις (premises)
3. το σύνδεσμο (colligation)
4. την ανάμιξη (involvement)
5. το συμπέρασμα (conclusion)

Οι βασικές μέθοδοι εξαγωγής συμπεράσματος είναι τρεις: deduction, induction, και abduction.

Deduction

Η μέθοδος αυτή καταδεικνύει μια αναγκαία σύνδεση ανάμεσα στις υποθέσεις και το συμπέρασμα, ώστε αν οι υποθέσεις είναι αληθείς τότε και το συμπέρασμα είναι αληθές. Ο Peirce προτείνει για αυτή τη μέθοδο τη χρήση διαγραμμάτων με τον εξής τρόπο:

- 1) Διατύπωση της πρότασης με γενικούς όρους
- 2) Κατασκευή διαγράμματος το οποίο είναι εικόνα (icon) της υπόθεσης
- 3) Παρατήρηση του διαγράμματος
- 4) Ο προσδιορισμός της παρατηρούμενης σχέσης που βρίσκεται σε κάθε εικονική αναπαράσταση της υπόθεσης
- 5) Διατύπωση των αποτελεσμάτων με γενικούς όρους.

Επίσης έχουμε τη theorematic συλλογιστική από την άλλη μεριά, η οποία απαιτεί μια ευφυή παρατήρηση του διαγράμματος προκειμένου να εξάγουμε την αλήθεια του συμπεράσματος. Τέτοιο παράδειγμα βρίσκουμε στις περισσότερες ασκήσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Induction

Στη μέθοδο αυτή εξάγουμε έναν κανόνα ύστερα από την παρατήρηση των αποτελεσμάτων σε άλλες περιπτώσεις. Όπως αναφέρει ο Peirce «με την induction συμπεραίνουμε ότι γεγονότα, παρόμοια με τα παρατηρούμενα γεγονότα, θα είναι αληθινά και στις περιπτώσεις που δεν έχουμε εξετάσει».

Έχουμε τρεις τύπους induction συλλογιστικής σύμφωνα με τον Peirce:

1. Την crude induction, η οποία συνίσταται στην άρνηση της θέσης ότι κάποιο γεγονός θα συμβεί αν δεν έχει ξανασυμβεί ποτέ ή αν συμβαίνει σπάνια. Έτσι είναι ανόητο να φοβόμαστε ότι ένας κεραυνός θα πέσει στο σπίτι μας όσο εμείς βρισκόμαστε ταξίδι σε μια άλλη πόλη.

2. Η quantitative induction χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να δούμε αν ένα μέλος P ενός συνόλου έχει ένα χαρακτηριστικό Q. Αυτό επιτυγχάνεται αν

πάρουμε ένα δείγμα από κάποια μέλη P, εκτιμήσουμε την αναλογία των P που έχουν το χαρακτηριστικό Q και συμπεράνουμε ότι όλο το σύνολο των P έχει την ίδια αναλογία του χαρακτηριστικού Q. Για να υπάρχει επιτυχία στη μέθοδο αυτή πρέπει να εκπληρώνονται δύο συνθήκες: το δείγμα των P πρέπει να είναι πραγματικά τυχαίο και το χαρακτηριστικό Q πρέπει να έχει προκαθοριστεί πριν από την εξέταση του δείγματος.

3. Η qualitative induction εμπλέκεται όταν έχουμε να αντιμετωπίσουμε την επαλήθευση μιας υπόθεσης ή πρόβλεψης. Όπως εξηγεί ο Peirce, είναι το τελευταίο μέρος της διαδικασίας επαλήθευσης μιας επιστημονικής υπόθεσης.

Abduction

Η μέθοδος αυτή έχει ως στόχο τη διαμόρφωση μιας υπόθεσης. Ξεκινά από μια ορισμένη ανωμαλία που δημιουργείται όταν κάποιες παρατηρήσεις φαινομένων δεν ταιριάζουν στην μέχρι τότε υπόθεση, οι παρατηρήσεις όμως αυτές είναι λογικές αν αλλάξουμε την αρχική υπόθεση με μια άλλη, οπότε έχουμε μια δικαιολόγηση να πιστεύουμε ότι η νεότερη υπόθεση είναι πιθανότερη.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα της abduction μεθόδου είναι η επικράτηση του ηλιοκεντρικού μοντέλου του Ηλιακού μας συστήματος που διατυπώθηκε από τον Κοπέρνικο και υποστηρίχθηκε από το Γαλιλαίο. Ο Κέπλερ, χρησιμοποιώντας τις παρατηρήσεις του Μπράχε, έπειτα από πολλά λανθασμένα βήματα εφάρμοσε τη νέα υπόθεση δηλαδή το ηλιοκεντρικό μοντέλο και κατάφερε να εξηγήσει τις τροχιές των πλανητών. Η μέθοδος αυτή δεν επιδιώκει να αποδείξει την αλήθεια μιας υπόθεσης αλλά την αληθοφάνειά της.

Εκτός από τις τρεις παραπάνω βασικές μεθόδους αιτιολόγησης υπάρχουν και άλλες, για τις οποίες ο Peirce αναφέρει ότι είναι συνδυασμός των τριών αυτών. Έχουμε λοιπόν την analogy, σύμφωνα με την οποία τα χαρακτηριστικά μιας μικρής συλλογής αντικειμένων θα υπάρχουν και σε όλα τα μέλη του ίδιου συνόλου. Για παράδειγμα επειδή γνωρίζουμε ότι η Γη, ο Άρης, ο Δίας και ο Κρόνος περιστρέφονται γύρω από τον εαυτό τους συμπεραίνουμε ότι το ίδιο θα συμβαίνει και με τους άλλους πλανήτες.

Η Metaphoric συλλογιστική υποστηρίζει ότι δύο διαφορετικά πράγματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν να ήταν ένα αν έχουν κάποια κοινά χαρακτηριστικά. Για παράδειγμα ο πόλεμος μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μεταφορά για τη διαφωνία, ή το κρασί για το αίμα.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι στο πνεύμα της εξέλιξης των ιδεών στο πέρασμα του χρόνου ο Peirce αναφέρει επίσης και άλλα είδη συλλογιστικής που περιλαμβάνουν τις restriction, determination, descent, depletion, extension, precision, abstraction, και ascent.

Η Θεωρητική Ρητορική ή Μεθοδευτική (Methodetic, Universal Rhetoric, Speculative Rhetoric or Theory of Inquiry)

Μέσω της θεωρητικής ρητορικής ο Peirce ερεύνησε τις αρχές της αποτελεσματικής χρήσης των σημείων για την παραγωγή σημαντικών κατευθύνσεων έρευνας, καθώς μελετά τις μεθόδους τις οποίες οι ερευνητές πρέπει να χρησιμοποιήσουν στην έρευνα εκθέτοντας την αλήθεια και βάζοντάς την σε εφαρμογή.

Στη γενική της έννοια η θεωρητική ρητορική είναι η μελέτη των τυπικών συνθηκών της πρακτικής της έρευνας μέσα σε μια κοινότητα ή σύμφωνα με τον Peirce «η θεωρία των γενικών καταστάσεων της αναφοράς των συμβόλων και των άλλων σημείων στους ερμηνευτές που καθορίζουν». Ακόμη είναι «η ταξινόμηση και τακτοποίηση των ερευνών» και «η θεωρία για το πώς η αλήθεια μπορεί να διερευνηθεί κατάλληλα ή αν είναι δυνατόν να εξακριβωθεί».

Μελετώντας το έργο του Peirce η θεωρητική ρητορική είναι ο λιγότερο αναπτυγμένος από τον ίδιο κλάδος της σημειωτικής και όπως αναμέναμε υπάρχουν τρεις υποδιαιρέσεις οι οποίες ακολουθώντας την ορολογία της Victoria Lady Welby είναι: *sense*, *meaning*, και *significance*.

1. *Sense* είναι το αποτέλεσμα της σχέσης του σημείου με τον άμεσο ερμηνευτή του. Είναι η εντύπωση που αφήνει στο νου του ερμηνευτή χωρίς να μεσολαβήσει καμία άλλη σκέψη. Για παράδειγμα αν ένα δάχτυλο δείχνει ένα άστρο, ο ερμηνευτής βλέπει αμέσως το ακριβές άστρο.

2. *Meaning* που καθιερώνεται από τη σχέση του σημείου με τον εν δυνάμει ερμηνευτή του. Είναι η παροχή πληροφοριών στους συντελεστές σημείο-ερμηνευτής.

Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα ο ερμηνευτής βλέπει γενικά τα άστρα στον ουρανό. Έτσι η έννοια της σημασίας (*meaning*) στα μαθηματικά έχει δυϊκό χαρακτήρα γιατί αποτελείται από την μια πλευρά από το αντικείμενο που αναφέρεται το σημείο αλλά και από τις ερμηνείες του από την άλλη πλευρά. Άρα η σημασία (*meaning*) είναι μια γενική ιδέα ή μια γενίκευση όπως ένας φυσικός νόμος και συνεπώς δεν μπορεί να ελεγχθεί με κανένα αριθμό εφαρμογών. Απλώς η σημασία αποτελείται από τις συνήθειες (*habits*) στις οποίες αναφέρεται.

Αυτό θεωρεί εξάλλου ο Peirce ότι είναι και το εξαιρετικό χαρακτηριστικό ενός σημείου: μη αποδοτικές σχέσεις να τις καθιστά αποδοτικές όχι απλώς για να υπάρχουν αλλά τελικά για να εδραιώσουν κάποιες συνήθειες (*habits*) ή γενικούς κανόνες που θα χρησιμοποιηθούν ανάλογα με τις περιστάσεις. Ο όρος συνήθεια (*habit*) είναι ανθρωπομορφικός και αναφέρεται σε φυσικές δράσεις. Οι συνήθειες είναι γενικές, επαναλαμβανόμενα μοτίβα δράσης και είναι παρουσίες στον πραγματικό κόσμο.

3. *Significance* είναι το αποτέλεσμα της σχέσης του σημείου με τον τελικό και απόλυτο ερμηνευτή του. Αφορά τις σημαντικές επιδράσεις που έχει στους συντελεστές της σχέσης σημείο-ερμηνευτής. Συνεχίζοντας το προηγούμενο παράδειγμα ο ερμηνευτής βλέπει το άστρο και επεξεργαζόμενος αυτό που δείχνει το δάχτυλο αντιλαμβάνεται ότι το συγκεκριμένο άστρο είναι το α του Κενταύρου.

Απόψεις για τη σημειολογία του Peirce

Ο Peirce βαθύτατα επηρεασμένος από τις απόψεις του Kant πίστευε ότι όλη η σκέψη μας βασίζεται στα σημεία, αλλά κατά τον Otte⁹ τα σημεία είναι συναποφασισμένα από το αντικείμενο στο οποίο αναφέρονται και δεν είναι αυθαίρετες κατασκευές του νου μας. Ακολουθως θεωρείται ότι κάθε σύμβολο έχει νόημα, αλλά δεν υπάρχει ως συμπαγής ύπαρξη γιατί είναι μια γενικότητα, ένας τύπος και όχι ένα τεκμήριο, συνεπώς ένα σημείο είναι ένα σημείο που αναφέρει κάτι σε κάποιον εφόσον διαμεσολαβεί μεταξύ του υποκειμένου και του αντικειμένου.

Σε θέματα διαδικασίας παρατηρούμε ότι κατά τον Peirce η θεωρητική αφαίρεση χρησιμοποιείται για να εφαρμόζεται σε διαγράμματα και μέσω της παρατήρησης και της τροποποίησης να καταλήγει στην αλήθεια του συμπεράσματος. Δηλώνει δε ότι όλα τα διαγράμματα είναι ουσιαστικά εικόνες έτσι ώστε να μας επιτρέπουν την πρόσβαση στο πιθανό και το γενικό και όχι στο υπαρκτό.

Ως συνέπεια όλη η μαθηματική δικαιολόγηση είναι μέσω διαγραμμάτων ανεξάρτητα αν είναι απλή ή όχι και γίνεται μόνο μεταξύ διαγραμμάτων. Τα διαγράμματα αυτά επιτυγχάνουν την σύνδεσή τους μέσω κάποιου νόμου, όχι απαραίτητα νόμου της καθαρής λογικής. Εξάλλου με την τοποθέτηση ότι όλες οι κρίσεις είναι προσωπικές και υπόκεινται σε διάψευση, ως τέτοιες πρέπει να περνούν από διαδικασίες διόρθωσης και ανατροφοδότησης. Άρα η αντικειμενικότητα των μαθηματικών πρέπει να ελέγχεται ως αντικειμενικότητα των νόμων της (Semiosis) και όχι μόνο σε επίπεδο ισχύος των νόμων της λογικής, καθώς αναφέρονται σε σημεία και μοντέλα και όχι σε αντικείμενα της εμπειρίας μας.

Ο Peirce θεωρεί ότι η διαδικασία της ερμηνείας πρέπει να γίνεται με την δημιουργία στο μυαλό του ερμηνευτή ενός νέου σημείου, το οποίο θεωρείται ως ερμηνεία του αυθεντικού σημείου. Βέβαια ο Skagestad¹⁰ πιστεύει ότι ο Peirce καταλαβαίνει ότι ουσιαστικά κάθε αποκωδικοποίηση οδηγεί σε νέα κωδικοποίηση με την βοήθεια της σημειωτικής, καθιστώντας την ως κεντρική ιδέα στη θεωρία γνώσης του. Στα πλαίσια αυτής της γενικότερης θεωρίας της γνώσης χρειάζονται νοητικά εργαλεία, όπως η γλώσσα και η συμβολική σκέψη με τη βοήθεια σχημάτων και διαγραμμάτων. Ο Peirce δίνει έμφαση στην εξάρτηση των σκέψεων από τα σημεία και περισσότερο στα εξωτερικά σημεία-οχήματα είτε «σκληρά» όπως θεωρούνται τα βιβλία, το χαρτί και το μελάνι, είτε ως «μαλακά» όπως το αλφάβητο, οι μαθηματικές και οι λογικές επινοήσεις καθώς και τα ίδια τα εργαλεία παραγωγής σημείων.

Κάθε σκέψη είναι σημείο. Όμως η δικαιολόγηση με την ευρεία έννοια δεν μπορεί να παραχθεί από κάποιο αλγόριθμο, αλλά απαιτεί παρατήρηση και πειραματισμό. Για αυτό ο Peirce έκανε δυναμική κριτική στην τεχνητή

⁹ M.Otte Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view.

¹⁰ P.Skagestad, Peirce, Virtuality and Semiotic.

νοημοσύνη, καθώς κατ' αυτόν η δικαιολόγηση είναι χειρισμός εσωτερικών και εξωτερικών σημείων, κατά τον Skagestad¹¹. Αλλά υποστηρίζει ότι και οι δείκτες αποτελούν ένα αναπόσπαστο κομμάτι των μαθηματικών γενικότερα όπως και οι εικόνες. Οι εικόνες (icons) είναι σημαντικές για το περιεχόμενο ή την σημασία τους. Οι δείκτες είναι επίσης σημαντικοί λόγω των αντικειμένων. Αλλά και οι δύο επικοινωνούν μεταξύ τους έτσι ώστε να παραχθούν γενικότερες σημασίες που προσδίδουμε σε προτάσεις. Κάθε πρόταση εξάλλου όταν αναλυθεί στα στοιχειώδη συστατικά της μπορεί να δειχθεί ότι περιέχει τουλάχιστον ένα δείκτη και μια εικόνα.

Κατά τον Otte¹², ο Peirce θεωρεί ότι αν ένα σημείο είναι ένα διαλεκτικό σύμβολο, η σημασία του πρέπει να αναζητηθεί με όρους νόμου ή συνήθειας (habit). Μια συνήθεια αντιπροσωπεύει ταυτόχρονα εμπειρία γνώσης και εφαρμογή της, εμπειρία του περιεχομένου και των συνθηκών επιβεβαίωσης. Ένα σύμβολο συσχετίζει μια εικόνα με ένα δείκτη, κίνηση η οποία προϋποθέτει διαίσθηση και αντικειμενική εμπειρία. Η επίγνωση (consciousness) μιας συνήθειας αναφέρει ο Peirce, είναι στιγμιαία συναίσθηση του υποκατάστατου της συνήθειας, της ειδικής περίπτωσης της εφαρμογής, αλλά και της ένωσης των δύο. Εκεί στηρίζεται ένα μεγάλο μέρος της σύγχρονης γνωστικής επιστήμης που θεωρεί ότι όλη η σκέψη είναι χειρισμός συμβόλων ακολουθώντας συγκεκριμένους συντακτικούς κανόνες.

Ο Peirce στα γραπτά του έδειξε σαφέστατα ότι γνώριζε τον ρόλο του ατόμου με τις σκέψεις και τα συναισθήματά του, αλλά και το κοινωνικό και πολιτιστικό του περιβάλλον για την κατασκευή και την επικοινωνία της γνώσης. Κατά τη Presmeg¹³ θεωρεί ότι η μαθηματική γνώση κατασκευάζεται και επικοινωνείται μέσα στην κοινότητα. Εκεί πρωταρχικό ρόλο κατέχει η συνέχεια παρελθόντος, παρόντος και μέλλοντος, έννοια η οποία ορίζει και τον συνεχισμό (synechism) του Peirce. Η ατομική ερμηνεία εξάλλου στη χρησιμοποίηση σημείων ήταν βασική, αναφέρει η Presmeg, ώστε να επικοινωνούμε ιδέες (semiosis) μέσα στην κοινότητα που επηρεάζει τις σκέψεις μας. Τα σημεία λοιπόν ήταν τα οχήματα για να διαδοθούν οι ιδέες μας συνεχώς και να επηρεάζουν όσους είχαν μια περίεργη διάθεση να δεχθούν τον οποιοδήποτε νοητικό επηρεασμό, αυτό που αποκαλούσε ο Peirce «law of mind».

Χαρακτηριστικό παράδειγμα θεωρεί η Presmeg την γεωμετρία, όπου άλλες ιδέες είχαν την επιδοκιμασία από την κοινότητα που δημιουργεί το πλαίσιο και τους περιορισμούς αποδοχής ή απόρριψης μιας μαθηματικής ιδέας και άλλες όχι. Σαν παράδειγμα αναφέρει τη σχολή της Αλεξάνδρειας όπου για εκατοντάδες χρόνια σύμφωνα με τους περιορισμούς της γεωμετρικής κατασκευής με κανόνα και διαβήτη διατήρησε και διέδωσε την Ευκλείδεια γεωμετρία κατά την ιδέα του συνεχισμού. Προβλήματα όπως η μέθοδος της

¹¹ Όπως παραπάνω.

¹² M.Otte Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view.

¹³ N.Presmeg, (2003) Ancient Areas: A retrospective analysis of early history of geometry in light of Peirce's "commens". PME.

εξάντλησης των Αρχιμήδη- Εύδοξου δεν έτυχαν της ίδιας αντιμετώπισης έτσι ώστε να παραμείνουν στο συνεχές της μαθηματικής κοινότητας. Αντίθετα, αποσύρθηκε και εμφανίστηκε μετά από πολλούς αιώνες στο προσκήνιο από τον Newton και τον Leibniz. Το ίδιο και η παρουσίαση των μη ευκλείδειων γεωμετριών καθυστέρησε να γίνει από τον Gauss, όπως λέγεται λόγω κοινωνικών συνθηκών και του Kant, με αποτέλεσμα να γίνει αργότερα από τους Bolyai και Lobachevsky. Τότε έγιναν αποδεκτές οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες και τροποποιημένες συνέχισαν να απασχολούν την μαθηματική κοινότητα.

Κατά τον Hausman¹⁴, ο Peirce αναφέρεται στη σημασία όπως ενσωματώνεται στη συνήθεια και η συνήθεια ως επαναλαμβανόμενη συμπεριφορά οδηγεί στους γενικούς νόμους. Έτσι, δέχεται ότι όλες οι μεταφυσικές και οντολογικές αναζητήσεις πρέπει να μην λαμβάνονται υπ' όψιν καθώς θεωρεί ότι ο κόσμος είναι κατανοητός μέσα από την συνέχεια. Βέβαια το τυχαίο, το αυθόρμητο μπορεί να διασπάσει αυτή την συνέχεια ώστε να οδηγήσει στην εξέλιξη των μαθηματικών σκέψεων. Όμως ο συνεχισμός είναι η καρδιά της μεταφυσικής του Peirce που σηματοδοτεί την γενικότερη φιλοσοφία της συνέχειας του κόσμου με βάση την πολυπλοκότητα των νόμων. Ο Otte¹⁵ αναφέρεται και στον ορισμό του συνεχούς που έδωσε ο Peirce: ως κάτι όπου κάθε μέρος του να που μπορεί να διαιρεθεί σε τεράστιο επιμέρους πλήθος όσο επιλέγουμε ή όπως συμπληρώνει ως κάτι του οποίου οι πιθανότητες να καθοριστεί δεν εξαντλούνται από το τεράστιο πλήθος ατόμων.

Ο Otte¹⁶ αναφέρει ότι τα καθαρά μαθηματικά για τον Peirce, όπως και για τον Kant, δεν είναι γνώση κάποιου συγκεκριμένου πράγματος αλλά ασχολούνται γενικά με ολόκληρη την γνώση. Έτσι αποτελούν την βάση της Φαινομενολογίας, μιας επιστήμης που αλλά αναφέρεται στα φαινόμενα όπως εμφανίζονται και απλώς περιγράφει τα γεγονότα όπως είναι. Αυτό γίνεται καθώς η διαίσθηση παράγει υποθέσεις και η λογική βγάζει συμπεράσματα, διαδικασία που μόνο τα καθαρά μαθηματικά μπορούν να υποστηρίξουν. Η Φαινομενολογία εξακριβώνει και μελετά τα είδη των στοιχείων που υπάρχουν στον κόσμο οποιαδήποτε στιγμή και με κάθε τρόπο στο νου.

Σημεία και αναπαραστάσεις¹⁷

Τι είναι σημείο; Οποιοδήποτε σημάδι ή λέξη που κατευθύνει την προσοχή μας σε κάτι διαφορετικό. Όμως το σημείο έχει σημασία, ενώ τα πράγματα όχι.

¹⁴ C.R.Hausman, Charles Peirce's Categories and the Growth of Reason. P. Nicolacopoulos, Norms, Conventions and Rationality. (1992), Historical Types of Rationality. Proceedings of the First Greek-Soviet Symposium on Science and Society, Athens, October 23-26, 1990.

¹⁵ M.Otte, Meaning and mathematics.

¹⁶ όπως παραπάνω

¹⁷ Η Θεωρία των Αναπαραστάσεων στη Διδακτική των Μαθηματικών είναι μια από τις εφαρμογές της Σημειωτικής και όχι μόνο. Duval R. A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics, ESM(2006) 61: 103-131

Αναπαράσταση είναι η ικανότητά μας να σκεπτόμαστε ή να κάνουμε υποθέσεις για τον κόσμο. Ένα μαθηματικό αντικείμενο αναφέρει ο Otte¹⁸, όπως ο «αριθμός» και η «συνάρτηση» δεν υπάρχει ανεξάρτητα από την ολότητα των πιθανών αναπαραστάσεών του. Τα σημεία και οι αναπαραστάσεις εδραιώνουν την διαλεκτική της ταυτοποίησης από την μία, αλλά και της μεταφοράς από την άλλη που είναι απαραίτητες για την μάθηση και την γνώση γενικότερα. Τα σημεία για να αποκτούν βέβαια σημασία πρέπει να είναι σε συσχέτιση με τα αντικείμενα, που αναφέρονται έτσι ώστε να λειτουργήσουν σαν σημεία. Αλλά και τα αντικείμενα και οι σημασίες μπορούν επίσης να είναι σημεία.

Η Thirdness είναι κατά τον Peirce ένα συνώνυμο των αναπαραστάσεων, αναφέρει ο Otte¹⁹. Συνεπώς κάθε γενική αρχή που εφαρμόζεται στον πραγματικό κόσμο είναι ουσιαστικά μια αναπαράσταση ή ένα σύμβολο της σημειωτικής του Peirce στην προσπάθειά του να εξηγήσει την γνωστική διαδικασία παραγωγής της επιστημονικής γνώσης σαν μια επαναλαμβανόμενη διαδικασία επικοινωνούμενης δραστηριότητας. Οι γλωσσικές και νοητικές αναπαραστάσεις με την χρήση εικόνων είναι αναμφίβολα μέσα στην καθημερινότητά μας. Ο μεγάλος αριθμός ορισμών και ταξινομήσεων όμως του Peirce θεωρείται ότι δημιουργεί προβλήματα. Ο Goodman στα μέσα του προηγούμενου αιώνα έκανε μια συντακτική και σημαντική πρόταση για λιγότερες κατηγορίες σημείων. Μετέφερε έτσι το βάρος στα συστήματα αναπαραστάσεων με τις αντίστοιχες γλωσσικές και νοητικές μορφές αναπαράστασης.

Τα μαθηματικά δεν πρέπει να θεωρηθούν απλώς εννοιολογική σκέψη και γλώσσα, αλλά να αντιμετωπίζονται, κατά τον Dewey, ως δραστηριότητα, άρα οι δείκτες και τα εικόνες είναι θεμελιωδώς απαραίτητα. Ο Sebeok αναφέρει ότι κανένας πριν τον Peirce δεν ανέφερε αλλά ούτε και ανέδειξε ότι η κατάδειξη είναι ένα είδος σήμανσης, σημαντική και ανεξάρτητη. Οι δείκτες στα καθαρά μαθηματικά αναφέρονται σε αντικείμενα που ανήκουν σε κάποιο μοντέλο, παρά στον πραγματικό κόσμο.

Κατά την Presmeg, ο Peirce τονίζει την σημασία του σημείου σαν μέσο επικοινωνίας, καθώς είναι βασικός παράγοντας στην επικοινωνία μαθητών και καθηγητών, όπως και μαθητών μεταξύ τους στην καθημερινή πρακτική της τάξης. Η τάξη είναι η καρδιά αυτών των θεωρητικών μετασχηματισμών στα πλαίσια της θεωρίας της σημείωσης όπου η λειτουργία των σημείων στην αναπαράσταση και επικοινωνία των αλγεβρικών και γεωμετρικών ιδεών είναι απαραίτητη.

Σήμερα τα σημεία και οι αναπαραστάσεις²⁰ παίζουν τον πλέον σημαντικό ρόλο στα Μαθηματικά. Αρκετοί επιστήμονες υποστηρίζουν ότι η ουσία των

¹⁸ M.Otte, Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view.

¹⁹ όπως παραπάνω.

²⁰ Duval R. A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics, ESM(2006) 61: 103-131

Μαθηματικών βρίσκεται στην εργασία με αναπαραστάσεις. Ο Hoffmann αναφέρει τις εξής κατηγορίες:

□ Μαθηματικοποίηση είναι η αναπαράσταση προβλημάτων ή γεγονότων με σύμβολα, δείκτες και σχεσιακές αναπαραστάσεις που συνήθως λαμβάνουμε από την ιστορία των Μαθηματικών.

□ Υπολογισμός θεωρείται η μετατροπή αναπαραστάσεων μέσα από κανόνες ενός συστήματος αναπαραστάσεων.

□ Απόδειξη σημαίνει να αναπαραστήσουμε ένα θεώρημα όπως υποδεικνύουν άλλα θεώρημα μέσα σε ένα συνεπές σύστημα αναπαραστάσεων.

□ Γενίκευση είναι η ανακατασκευή τέτοιων συστημάτων αναπαραστάσεων έτσι ώστε να περιέχουν συμβολικά μαθηματικά αντικείμενα και σχέσεις.

Ολόκληρη η γνώση στηρίζεται στην χειραγώγηση των σημείων κατά τον Skagestad. Για να μπορούμε όμως να προσπελάσουμε τις έννοιες και να αποκτήσουμε απευθείας την εμπειρία των ίδιων των αντικείμενων, αλλά και ουσιαστικά την ίδια την αντικειμενικότητα των μαθηματικών, χρειαζόμαστε και τα σημεία εκτός από τις αναπαραστάσεις.

Με τη σημειωτική θεωρία, όπως ήδη τονίσαμε, ο Peirce επιδιώκει να διερευνήσει τη λειτουργία της λογικής σκέψης. Η σκέψη όμως συνδέεται άμεσα με τον τρόπο που ο άνθρωπος προσδιορίζει το νόημα των εννοιών που χρησιμοποιεί στον προφορικό και στο γραπτό του λόγο. Ο σκοπός της φιλοσοφίας κατά τον Peirce είναι ο ακριβής προσδιορισμός του νοήματος των εννοιών. Έτσι όταν συγκεντρώσουμε όλες τις δυνατές και πιθανές πρακτικές συνέπειες που μπορεί να έχει ένα αντικείμενο είτε απέναντι σε άλλα αντικείμενα είτε απέναντι στον άνθρωπο, τότε έχουμε διαμορφώσει το πλήρες νόημα για την έννοια που αναφέρεται στο αντικείμενο αυτό.

Κανένας δεν μπορεί να εξηγήσει την τεράστια ανάπτυξη του συμβολισμού αν δεν λάβει υπ' όψιν του την εν γένει λειτουργία των σημείων, των εικόνων και των δεικτών. Έτσι ο Otte²¹ πιστεύει ότι πρέπει να συμπεριφερόμαστε στα προβλήματα που παρουσιάζουν σημασία κάνοντας αναφορά με πραγματικούς όρους, θεωρώντας την ανθρώπινη δραστηριότητα ως βασικό μας ενδιαφέρον. Δεν πρέπει να προσπαθούμε να εγκαθιδρύσουμε μια απ' ευθείας και χωρίς περιεχόμενο σχέση μεταξύ σημείων και αντικειμένων.

Ακολουθώντας τη θέση αυτή και με τη διάκριση ανάμεσα σε δυναμικό και άμεσο αντικείμενο ο Peirce θέλει να μας πει ότι η πραγματικότητα δεν προσεγγίζεται επίσης άμεσα, αλλά έμμεσα. Δεν έχουμε τις δυνατότητες που θα μας επιτρέψουν να διεισδύσουμε κατευθείαν στην ουσία των πραγμάτων. Πάντοτε τα πράγματα θα είναι για μας αντικείμενα που μας προτρέπουν να τα ερμηνεύσουμε, θέση ξεκάθαρη στο χώρο των φυσικών επιστημών. Εκεί δεν υπάρχει τίποτε το βέβαιο και αμετάβλητο.

²¹ M.Otte, Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view.

ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

1. Πλαίσιο Αιτιολόγησης

2. Γενετικές και ιστορικο-κριτικές προσεγγίσεις στην επιστημολογία των έργων του Piaget

3. Πλαίσιο Ανακάλυψης :
Poincaré και η Γαλλική Παράδοση

Κοινωνιολογικές Προσεγγίσεις

Επιστημολογίες του Νοήματος



Νατουραλισμός
Lakatos και άλλες κοινωνιολογικές
θεωρήσεις των μαθηματικών

Wittgenstein

ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Κονστрукτιβισμός

Κοινωνικο-πολιτισμικές
απόψεις

Αλληλεπιδραστικές
απόψεις

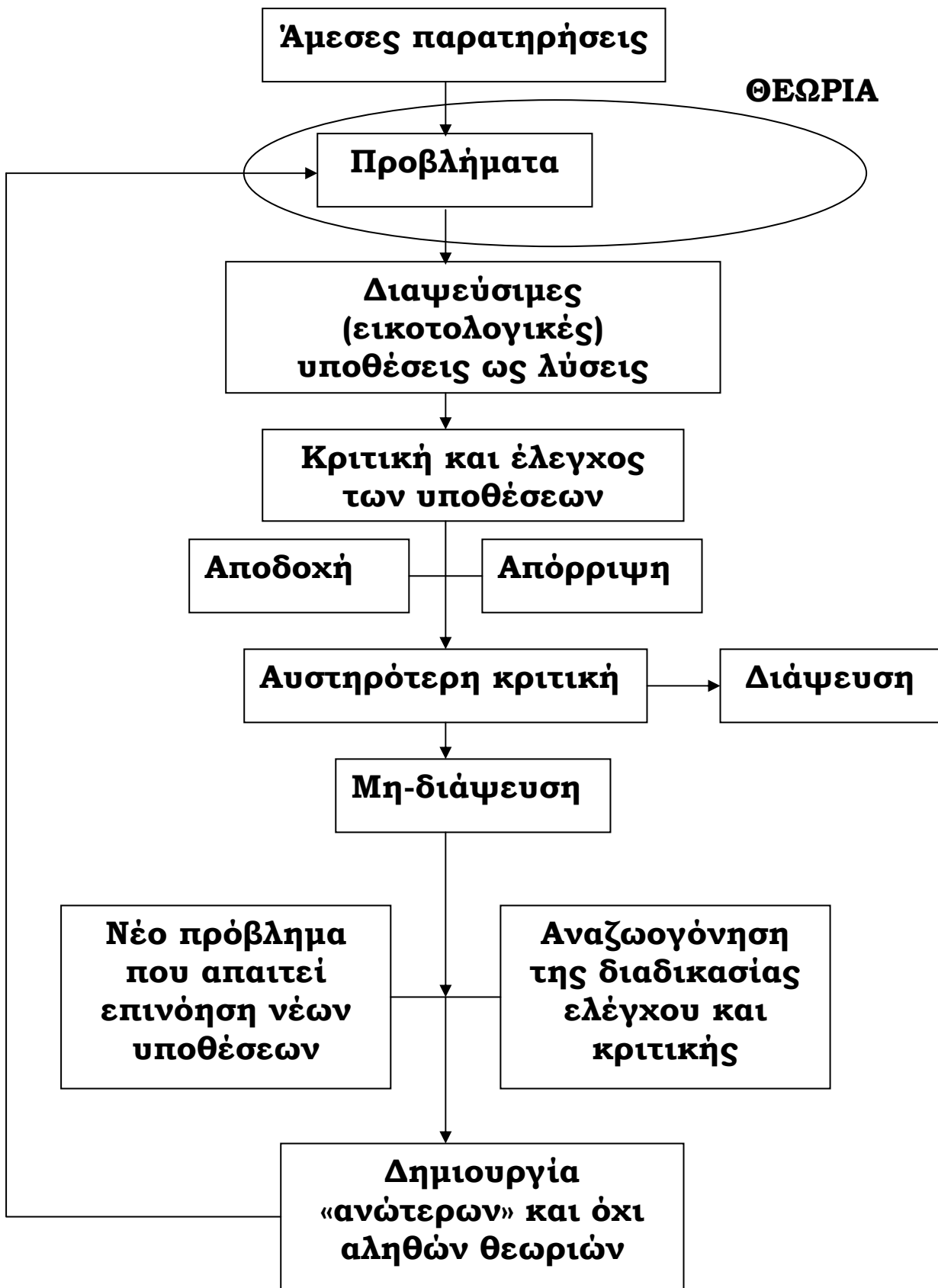
Ανθρωπολογική
Προσέγγιση στη
επιστημολογία της
Γαλλικής Διδακτικής

Προσεγγίσεις βασισμένες
στη επιστημολογία του
Νοήματος

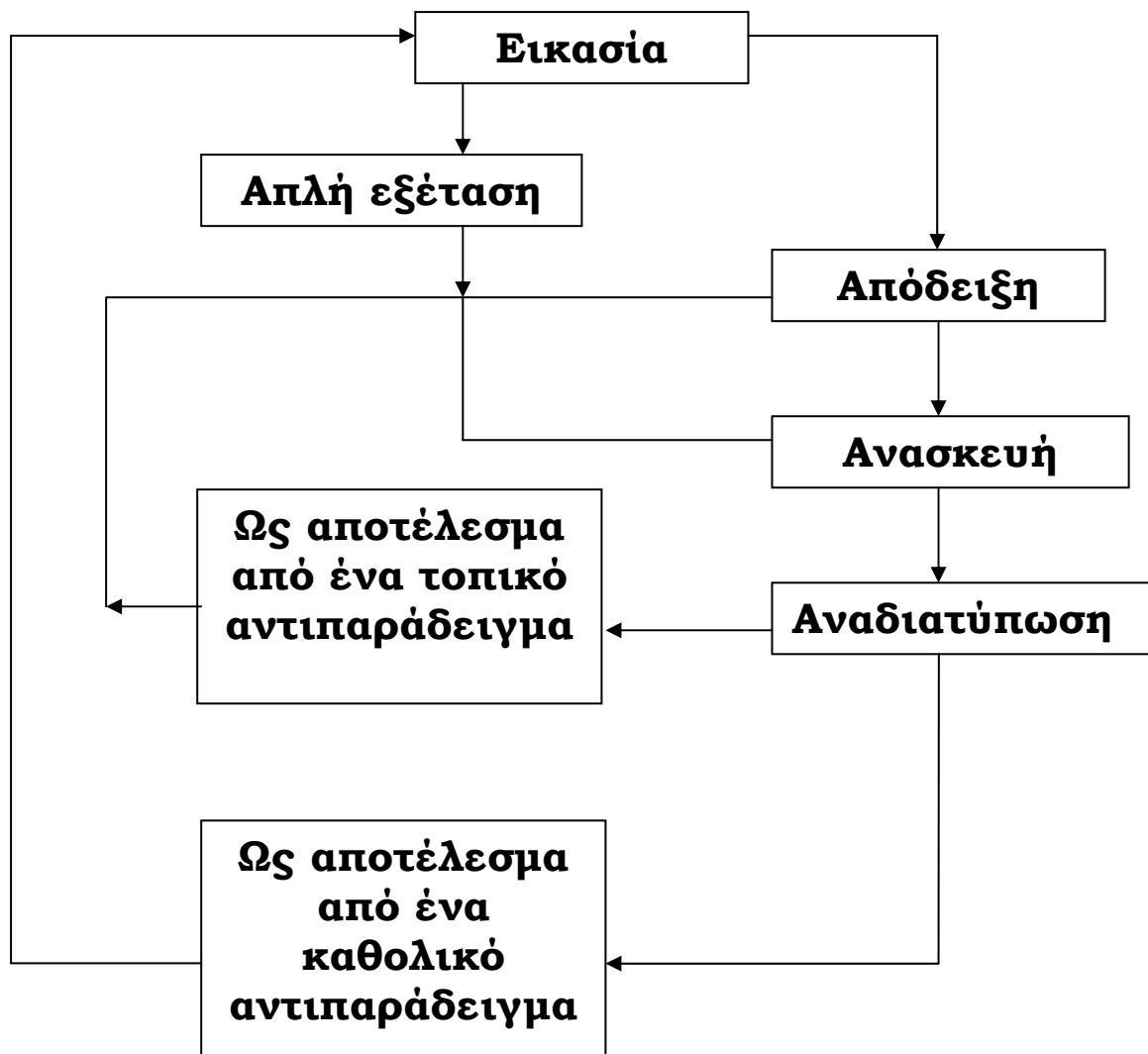
Chevallard
«Διδακτική Μετατόπιση»

Η θεωρία των καταστάσεων
του Brousseau

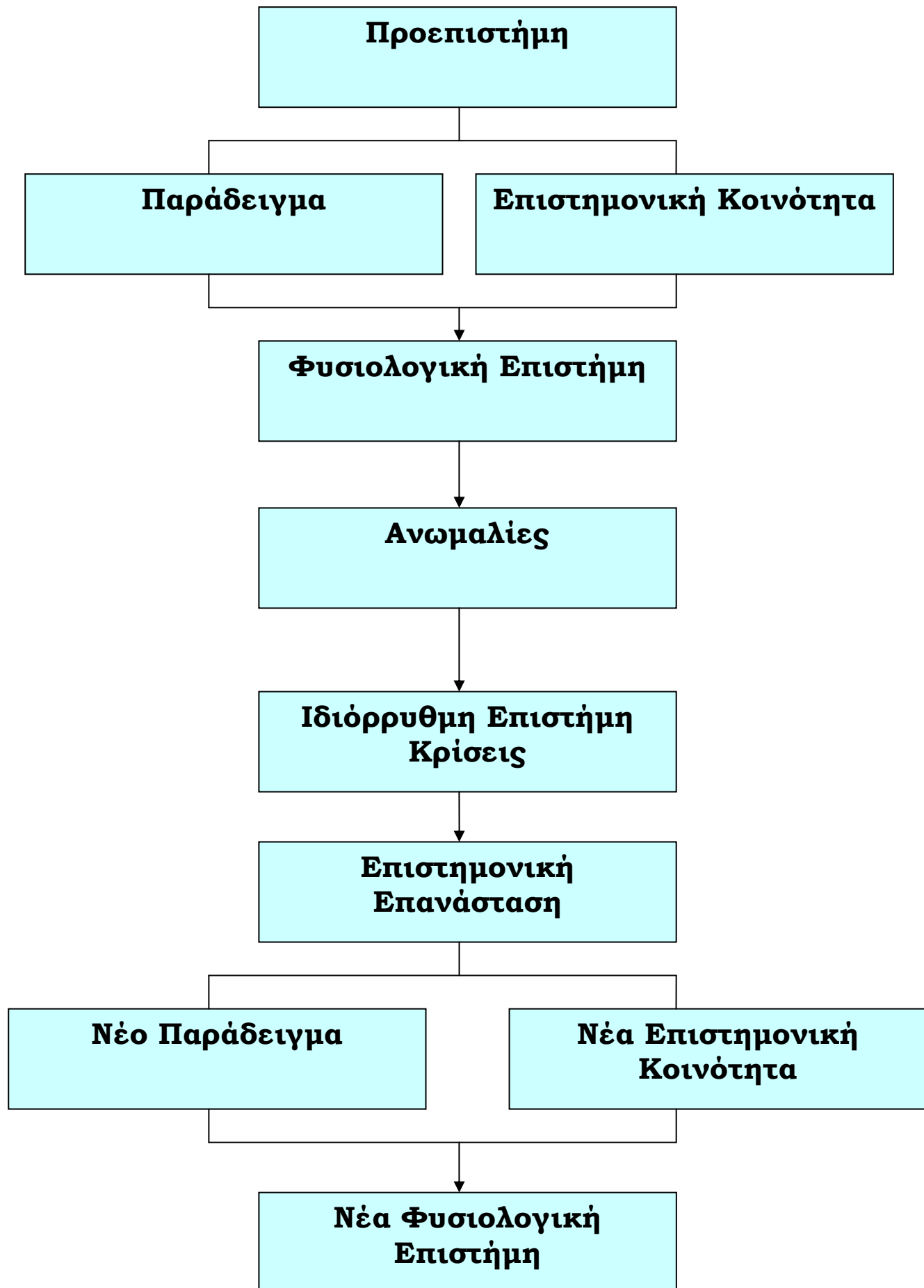
Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΩΝ ΔΙΑΨΕΥΣΙΜΩΝ ΘΕΩΡΙΩΝ (ΚΑΤΑ POPPER)



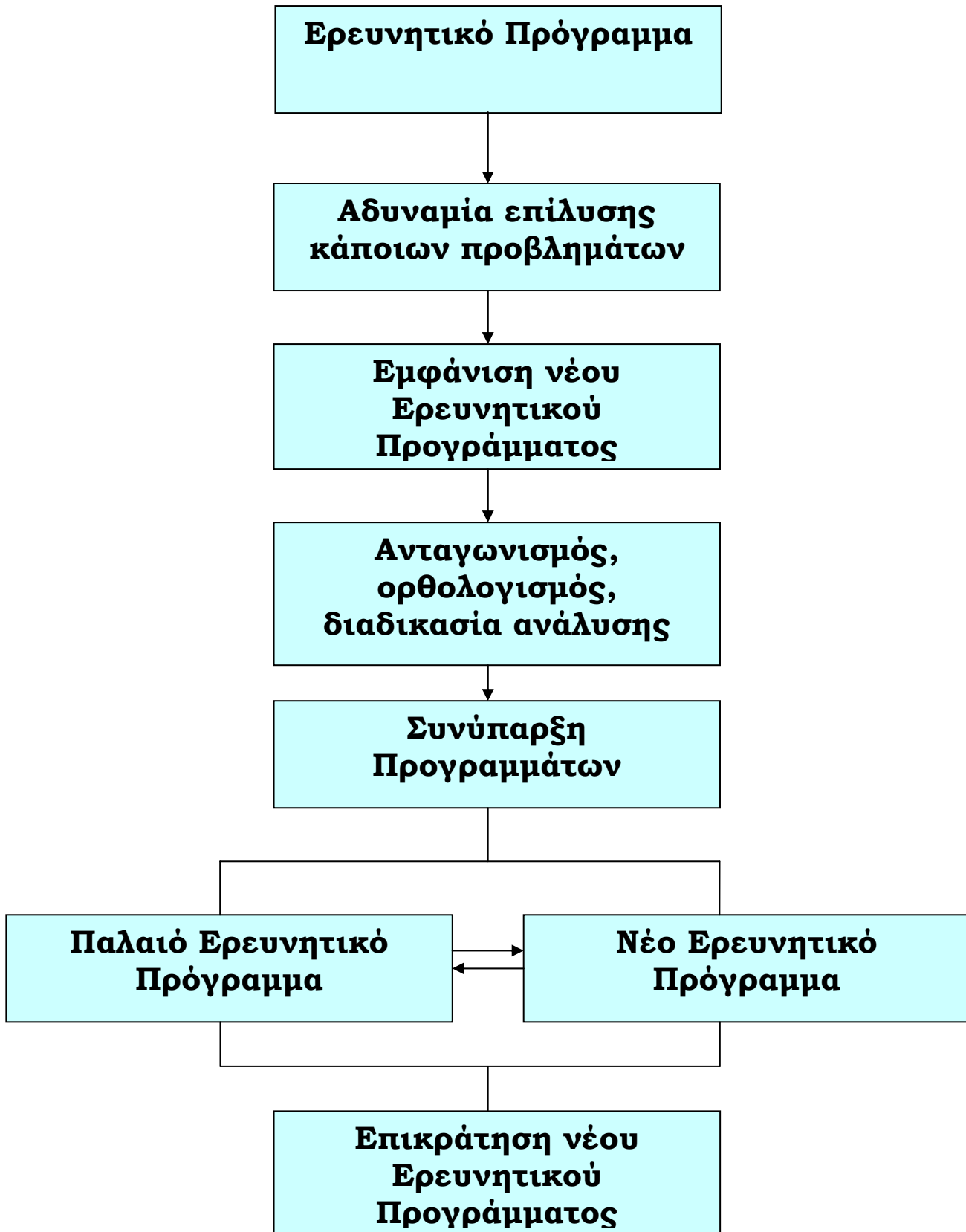
ΕΥΡΕΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΚΑΛΥΨΗΣ



ΚΥΗΝ
Η ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ ΤΗΣ ΦΥΣΙΟΛΟΓΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ



ΛΑΚΑΤΟΣ
Η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΩΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ



ΠΙΝΑΚΑΣ Ι - Επιστημολογία και διδακτικές ερωτήσεις της Michèle ARTIGUE

<i>Τα χαρακτηριστικά μιας σύγχρονης επιστημολογίας των επιστημών</i>	<i>Τα αντίστοιχα διδακτικά ερωτήματα</i>
Η γενική μεθοδολογία της έρευνας δανεισμένη από τον G. Bernard για τις επιστήμες της φύσης δεν είναι του τύπου ΠΥΠΑΕΣ, μια εκδοχή απλουστευτική η οποία δεν υπολογίζει τον πλούσιο και απρόβλεπτο χαρακτήρα της ανακάλυψης.	Ποιοι τύποι διαδοχικών προσεγγίσεων στην εκμάθηση επιτρέπουν μία εκπαίδευση απαλλαγμένη από δογματικούς προκαθορισμούς;
Τα γεγονότα στις επιστήμες παίρνουν τα νοήματά τους σύμφωνα μ' ένα σύστημα προϋπάρχουσας σκέψης.	Πώς να παρουσιάσουμε κάποια γεγονότα δείχνοντας ότι προσέφεραν υπόσταση σε διάφορες ερμηνείες κατά την διάρκεια της ιστορίας, σε συνδυασμό με το επίπεδο της σκέψης της εποχής εκείνης;
Η δόμηση των εννοιών στην ιστορική τους πορεία πραγματοποιείται μέσα από διαδοχικές αναπροσαρμογές με κάθε στάδιο να περιλαμβάνει διάφορα επιστημολογικά εμπόδια τα οποία ενίοτε αίρονται αργότερα.	Μπορούμε, για μια δοθείσα έννοια, και για τα διάφορα στάδια της συγκρότησής της να φωτίσουμε τα διάφορα εμπόδια, που ξεπεράστηκαν κατά τη ροή της ιστορίας;
Η επιστήμη δεν περιορίζεται στα τρέχοντα συμπεράσματα και επιπλέον αυτά δεν είναι οριστικά.	Πώς μπορούμε να δείξουμε τι διακυβεύεται ακόμα και σήμερα σε σχέση με τις διδασκόμενες έννοιες και σε ποιες κατευθύνσεις οδηγείται η έρευνα;
Η συγκρότηση της επιστήμης δεν αντιστοιχεί σε μια οποιαδήποτε αναζήτηση μιας ιδανικής αλήθειας άσχετα με τη λειτουργία των ανθρωπίνων κοινωνιών.	Ποια παραδείγματα παρόντα και παρελθόντα μπορούν να δείξουν τι διακυβεύεται στις επιστημονικές έρευνες;
Οι επιστημονικές έννοιες είναι κατ' αρχήν απαντήσεις σε προβλήματα.	Πώς μπορούμε να σκεφτούμε μια επιστημονική εκπαίδευση μέσα από λύση προβλημάτων;
Μια επιστημονική έννοια έχει μια ισχύ ερμηνευτική και προβλεπτική γιατί πριν από όλα είναι μια σχέση αποκομμένη από τις συγκεκριμένες καταστάσεις που της έδωσαν νόημα.	Πώς μπορούμε να επιτρέψουμε στις κατασκευασμένες στην τάξη έννοιες να έχουν μια λειτουργία ερμηνευτική και προβλεπτική;
Μια έννοια δεν είναι επεξηγηματική παρά μόνο μέσα στο πλαίσιο εγκυρότητας που είναι περιορισμένη.	Σκεφτόμαστε να περιορίσουμε τις έννοιες κατά τη διάρκεια της μάθησης;
Μια επιστημονική έννοια μπορεί να διατυπωθεί κατά τρόπο ιεραρχημένο, όσον αναφορά τα διάφορα επίπεδα αφάιρεσης.	Ποιες είναι οι διαβαθμίσεις διατύπωσης για μια δοθείσα έννοια;
Οι έννοιες δεν δίδονται σε γραμμική σειρά αλλά κάθε επιστημονική έννοια βρίσκεται στο κέντρο ενός δεσμού μέσα σ' ένα εννοιολογικό πλέγμα.	Εμφανίζοντας μια δεδομένη έννοια σε μια διδακτική κατάσταση πρέπει να εμφανίσουμε μαζί και το εννοιολογικό πλέγμα αυτής της έννοιας;
Οι επιστημονικοί νόμοι συχνά δεν θεωρούν, παρά μόνο μια αιτία, τη σπουδαιότερη, για να εξηγήσουν μια δοθείσα κατάσταση.	Πώς μπορούμε να δίδουμε εξηγήσεις και συγχρόνως να εισάγουμε επιφυλάξεις γι' αυτές;
Οι θεωρίες γενικά μοντελοποιούνται και τα μοντέλα δεν αντιστοιχούν παρά σε μια κατασκευή εικονική και αφηρημένη του πραγματικού. Δεν είναι σε καμία περίπτωση το πραγματικό.	Το μοντέλο και το πραγματικό: τα όρια του μοντέλου, αυτό που το μοντέλο επιτρέπει να εξηγήσουμε και αυτό που δεν εξηγείται. Αυτό το ερώτημα ενυπάρχει σε κάθε επίπεδο κατά την διαδικασία της μάθησης;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΙΣΤΟΡΙΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - Η ΚΑΜΠΥΛΗ

§. 6.1 Η γεωμετρία των καμπύλων ως τον 17ο αιώνα

Ο I. Lakatos στο *Αποδείξεις και Ανασχευές*, μέσω της παρουσίασης της ιστορίας του τύπου του Euler για τα πολύεδρα¹, έδειξε αυτό που συμβαίνει συχνά για μαθηματικές ιδέες και αποδείξεις, ότι δηλαδή η παραγωγή τους δεν προκύπτει άμεσα. Η σειρά με την οποία τα βασικά εγχειρίδια παρουσιάζουν τις θεωρίες, δεν είναι η πορεία που το ανθρώπινο πνεύμα ακολούθησε στην συγκρότηση των θεωριών αυτών. Τα εγχειρίδια θυμίζουν, κατά την φράση του T. Kuhn, τουριστικούς οδηγούς που συχνά συσκοτίζουν την πραγματική ιστορία. Το επίπονο της διαδικασίας ανακάλυψης, που αναδεικνύει ο Lakatos, με αφορμή την απόδειξη του τύπου του Euler, είναι μια ακολουθία επιτυχιών και αποτυχιών, μια σειρά θεωρητικών δοκιμών που συχνά μέσω της διαδικασίας αποσαφηνίζουν το αντικείμενό τους και συγκροτούν την θεωρία τους. Εδώ, είναι χρήσιμο να αναφέρουμε το εξής χαρακτηριστικό απόσπασμα του G. Bachelard : *το επιστημονικό πνεύμα δεν είναι παρά συνεχής επανόρθωση της γνώσης, διεύρυνση των ορίων της, κρίνει το ιστορικό παρελθόν καταδικάζοντάς το, ενώ δομή του είναι η συνείδηση των ιστορικών πλανών... Οι αποκαλύψεις του πραγματικού είναι πάντα αναδρομικές. Το πραγματικό δεν είναι ποτέ "αυτό που ήταν δυνατό να πιστεύουμε αλλά πάντα εκείνο που σφείλαμε να σκεφτούμε". Η εμπειρική σκέψη γίνεται καθαρή αναδρομικά... Έτσι επιστρέφοντας σ'ένα παρελθόν γεμάτο πλάνες, βρίσκουμε την αλήθεια*

¹Ο τύπος αυτός συσχετίζει στα (χυρτά) πολύεδρα τους αριθμούς κορυφών (K), ακμών (A) και εδρών (E), έχουμε δηλαδή ότι $K - A - E = 2$, βλέπε στο .

σαν πραγματική μεταμέλεια².

Στην διαδικασία ανακάλυψης, του τύπου του Euler, συνέβαλαν πολλοί ερευνητές σε διαφορετικές εποχές, ωστόσο η πορεία ανακάλυψης μιας ιδέας από έναν μεμονωμένο ερευνητή συχνά δεν είναι διαφορετική. Έτσι, ο Lakatos ονομάζει τα Μαθηματικά ψευδοεμπειρική³ επιστήμη και αυτό είναι που θέλει να αναδείξει και ο B. Tutte στο άρθρο του με τίτλο *Τί είναι Μαθηματικά;*. Ο Lakatos επίσης προσπαθεί να δείξει την σημασία της κοινωνικής λειτουργίας της λογικής τους υπερασπίζοντας ένα κοινωνικό κονστрукτιβισμό.

Σε αυτή την παράγραφο, θα παρουσιάσουμε, εν συντομία, την ιστορία μιας άλλης θεμελιιακής έννοιας παλιάς όσο και τα Μαθηματικά και τις μεταπτώσεις της μέσα από τα διαφορετικά νομιμοποιητικά συστήματα που επικράτησαν για τα Μαθηματικά. Η παρουσίαση αυτή έχει σκοπό να αξιοποιήσει ιδέες από τις επιστημολογίες των Bachelard, Kuhn και Lakatos στην κατανόηση των γεγονότων ως ιδέες. Η έννοια για την οποία θα μιλήσουμε είναι η έννοια της καμπύλης.

Η έννοια της καμπύλης είναι θεμελιώδης για τα Μαθηματικά, βρίσκεται πολύ κοντά στη διαίσθηση και έχει μεγάλη αξία για τις εφαρμογές. Η έννοια αυτή πέρασε από πολλούς μετασχηματισμούς μέχρις ότου φτάσει στη σημερινή της μορφή. Μέσα από αυτή την εξέλιξη μπορεί κανείς να δει με ανάγλυφο τρόπο την αναθεωρητική δύναμη που διαθέτει η επιστήμη, ώστε να κατασκευάζει κάθε φορά τα εργαλεία της και να ξεπερνά τα εμπόδια, με την βοήθεια γενικεύσεων και αναθεμελιώσεων

²G. Bachelard, *Formation de l'Esprit Scientifique*, Librairie Philosophique, J. Vrin, Paris, 1996. μετάφραση αποσπασμάτων από το έργο του G. Bachelard από τον Αγ. Ελεφάντη, G. Bachelard, Για την επιστημολογία, σελ 53 - 64, Ο Πολίτης, 12, 1977.

³P. J. Davis - R. Hersh, *Η Μαθηματική Εμπειρία*, σ. 325.

του εννοιολογικού της συστήματος. Σε κάθε περίπτωση η ιστορική κατανόηση μιας έννοιας συνδέεται με το νομιμοποιητικό σύστημα της κάθε εποχής ενώ η μελέτη της αναδεικνύει γενικότερα επιστημολογικά αιτήματα και μεθόδους προσέγγισης. Στα επόμενα επιχειρείται μια επιλεκτική χρονολογική παρουσίαση και ένας βιβλιογραφικός εντοπισμός κάποιων πρόσφατων αναφορών στο αντικείμενο, με έμφαση σε αυτό το οποίο κάθε εποχή εξασφαλίζει το κύρος της γνώσης.

§6. 2. Η Καμπύλη στους αρχαίους⁴.

Ο Ευκλείδης (300 π.Χ.) ορίζει την (καμπύλη) γραμμή να έχει μήκος και όχι πλάτος ή ως πέρασ μιας επιφάνειας⁵. Αυτός ο ορισμός, αν και αντικατοπτρίζει σε κάποιο βαθμό ιδιότητες μιας καμπύλης, δεν μπορεί να οδηγήσει σε μια μαθηματική μελέτη της έννοιας. Στο στάδιο ανάπτυξης της επιστήμης της εποχής εκείνης με τα αιτήματα που έθετε τόσο η θεωρία όσο και η πρακτική, ο Ευκλείδης δεν μπορούσε να δώσει τον ορισμό της καμπύλης σε γενική μορφή και περιορίστηκε στις παραπάνω γενικές διαπιστώσεις ενώ κατηύθυνε την προσοχή στις δυο απλούστερες και συχνά χρησιμοποιούμενες καμπύλες: την ευθεία και τον κύκλο⁶,

⁴ Αυτή και η επόμενη παράγραφος έγιναν με την βοήθεια του Δ. Λάππα. Επίσης τόσο αυτές οι δυο παράγραφοι όσο και η προηγούμενη στάθηκαν δυνατές μετά την υπόδειξη υλικού που μας συνέστησε ο ιστορικός των Μαθηματικών Λέκτορα του Παν/μίου Αθηνών (Τμήμα ΜΙΘΕ), Γιάννης Χριστιανίδης.

⁵ Ορισμός 1 : Σημείον είναι παν ό,τι δεν έχει μέρος, Ο2. Γραμμή δε είναι μήκος άνευ πλάτους, Ο3. Γραμμής δε πέρατα σημεία. Ο4. Ευθεία γραμμή είναι εκείνη, η οποία κείται εξ ίσου προς τα εαυτής σημεία, Ο5. Επιφάνεια δε είναι ό,τι έχει μόνον μήκος και πλάτος. Ο6. Της δε επιφάνειας τα πέρατα είναι ευθείαι γραμμαί, Σταμάτη, Ευκλείδου Γεωμετρία, Τόμος Ι, ΟΕΔΒ, 1975, σελ. 39.

⁶ Ορισμός 15. Κύκλος είναι επίπεδον σχήμα περιεχόμενον υπό μιας γραμμής (η οποία καλείται περιφέρεια), προς την οποίαν εξ ενός σημείου εκ των κειμένων εντός

όπου οπωσδήποτε αρκούσαν στην συγκρότηση του όλου οικοδομήματος των Στοιχείων. Στην αρχαιότητα ήταν βεβαίως γνωστές κι άλλες καμπύλες, αλλά αυτές αποτελούσαν περισσότερο εργαλεία για την λύση προβλημάτων, παρά μαθηματικές οντότητες.

Στην ελληνική γεωμετρία οι καμπύλες εμφανίζονται, όπως αναλυτικά διαπραγματεύεται ο Boss⁷, με τρεις διαφορετικούς τρόπους:

1. Ως τομές επιφανειών (όπως στην περίπτωση των κωνικών τομών).
2. Ως γραμμές, που χαρασσόταν με συγκεκριμένες κινήσεις ή συνδυασμό κινήσεων (όπως στην περίπτωση της σπειροειδούς, της τετραγωνίζουσας και των καμπύλων η σχεδίαση των οποίων απαιτούσε τη χρήση οργάνων).
3. Ως γεωμετρικοί τόποι σημείων που έχουν μια κοινή ιδιότητα (όπως στην περίπτωση της κισσοειδούς).

Επίσης κατά τον Molland⁸, στα αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά κείμενα, (όσο και στον Descartes), συναντούμε κυρίως δυο τρόπους περιγραφής των καμπύλων:

1. Την περιγραφή μέσω ιδιότητας, την οποία έχουν όλα τα σημεία της καμπύλης και μόνο αυτά. Αυτή λέγεται *σύμπτωμα*, π.χ. κάποια βασική αναλογία (στον Descartes αυτή η ιδιότητα έχει την μορφή της εξίσωσης).

του σχήματος όλα οι προσπίπτουσαι ευθείαι (προς την περιφέρεια του κύκλου) είναι μεταξύ των ίσαι.

⁷H. Bos, On the Representantation of Curves in Descartes' Geometrie, Archive for History of Exact Science 24, 1981, σσ. 305.

⁸A. G.Molland: Shifting the foundations Descartes transformation of Ancient Geometry, Historia Mathematica, 3 (1976), 21 - 49.

2. Την περιγραφή δια της γενέσεως, δηλαδή δια του τρόπου παραγωγής της καμπύλης.

Ο τρόπος παραγωγής παραλλάσει στις διαφορετικές, εποχές ανάλογα με τους όρους νομιμότητας μιας κατασκευής. Οι κατασκευές μπορούσαν να ήταν γεωμετρικές ή οργανικές (στην περίπτωση που κατασκευαζόταν με όργανα διαφορετικά από τον κανόνα και τον διαβήτη). Η οργανική πλευρά της κατασκευής δεν υπάγεται στην γεωμετρία. Αντίθετα, στην γεωμετρία ανήκει το κανονιστικό πλαίσιο και τα κριτήρια που κάθε φορά καθιστούν αποδεκτή μια καμπύλη.

Για να γίνει κατανοητή αυτή η διαφορετική ταξινόμιση πρέπει ν'αναφέρουμε κάποια στοιχεία που διαφωτίζουν τον αλλαγή του εννοιολογικού πλαισίου που διαφαίνεται όταν συγκρίνουμε την αρχαία αντίληψη για τα Μαθηματικά με εκείνη των νεότερων χρόνων.

Πρέπει να επισημάνουμε κατ'αρχήν το γεγονός ότι στην ελληνική γεωμετρία η θέση της κίνησης είναι προβληματική. Οντολογικώς τα γεωμετρικά αντικείμενα δεν υπόκεινται στο γίγνεσθαι. Στην Πολιτεία του Πλάτωνος⁹, ο Σωκράτης λέει για τους γεωμέτρους ότι μάλα γελοίως χρησιμοποιούν τέτοιες εκφράσεις όπως *τεταγωνίζειν, παρατείνειν, προστιθέναι...* οι οποίες συνδέονται κύρια με το γίγνεσθαι, με την κίνηση, παρά με το είναι.

Σε αναφορά προς το ίδιο ζήτημα της οντολογίας των μαθηματικών αντικειμένων ο Σπεύσιππος αναφέρει ότι τα αντικείμενα πάντα ταυτά έστι, τις δε γενέσεις τους πρέπει να αντιλαμβανόμαστε ου ποιητικώς αλλά γνωστικώς ενώ ο Πρόκλος, σχολιάζοντας τον Ευκλείδη, αναφέρει

⁹Πολιτεία - VII, 9, 526c 527b.

ότι οι τομές, οι θέσεις, οι παραβολές, οι προσθέσεις και οι αφαιρέσεις, με μια λέξη, βρίσκονται στην φαντασία μας⁶.

Η έμφαση στην ακίνητη, αναλλοίωτη φύση των γεωμετρικών αντικειμένων είχε την επίδρασή της. Στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη, οι ορισμοί μέσω ιδιότητας φαίνεται να έχουν προτεραιότητα έναντι των ορισμών δια γενέσεως. Τέτοιοι ορισμοί μέσω ιδιότητας είναι της ευθείας και του κύκλου. Σε επόμενα όμως βιβλία των Στοιχείων συναντούμε ορισμούς δια της γενέσεως όπως οι επόμενοι¹⁰.

14. Σφαίρα είναι το περιληφθέν σχήμα, όταν ημικύκλιον σταφέν περί την διάμετρον αυτού μένουσαν ακίνητον επανέλθει εις την θέσιν, εξ ής ήρχισεν κινούμενον.

18. Κώνος είναι το περιληφθέν σχήμα, όταν ορθογώνιο τρίγωνο περιστραφεί περί μίαν των καθέτων πλευρών του μένουσαν ακίνητον και επανέλθει εις την θέσιν εξ' ής άρχισε κινούμενον.

Στις Κλασικές μαθηματικές εργασίες όπως είναι τα έργα των Ευκλείδη, Αρχιμήδη και Απολλώνιου υπήρχαν δυο είδη γεωμετρικών προτάσεων: θεωρήματα που έπρεπε ν' αποδειχθούν και προβλήματα που έπρεπε να κατασκευασθούν. Επειδή, στην πρώτη περίοδο των ελληνικών μαθηματικών, οι λύσεις έπρεπε να δίνονται με την χρήση του κανόνα και του διαβήτη, ορισμένα προβλήματα έμεναν άλυτα, κάτι που έκανε τους αρχαίους έλληνες μαθηματικούς να ψάχνουν διαρκώς για λύσεις και μεθόδους. Τα κύρια άλυτα πρόβλήματα της αρχαιότητας ήταν: η τριχοτόμηση της γωνίας, ο διπλασιασμός του κύβου και ο τεταγωνισμός του κύκλου. Για την προέλευση αυτών των προβλημάτων έχουμε μόνο μύθους

⁶Τα εν τη διανοία πάντα έστηχεν άνευ γενέσεως και πάσης μεταβολής.

¹⁰Ε. Σταμάτη, Ευκλείδου Γεωμετρία, Στοιχεία, Στερεομετρία, βιβλίο XI, ΟΕΔΒ.

αλλά το πιθανότερο είναι ότι έχρυσαν κάποια κατασκευαστικά εργαλεία.¹¹ Η παραπάνω προτίμηση του κανόνα και του διαβήτη, αποδίδεται στον Πρόκλο, στο ότι η ευθεία και ο κύκλος είναι πρωταρχικές αρχές για τα σχήματα: η κίνηση με την οποία ευθείες και κύκλοι περιγράφονται μπορεί να κατανοηθεί από τη σκέψη μας ξεκάθαρα και εύκολα, σε αντίθεση με την περίπτωση π.χ. που οι κινήσεις εμπεριέχουν τη χάραξη μιας ελικοειδούς (σπειροειδούς) γραμμής, όπου οι αρχές του ευθύγραμμου και του κυκλικού είναι μπλεγμένες. Εκτός αυτής καμία άλλη σαφής δήλωση, ισχυρίζεται ο Boss¹², δεν φαίνεται να έχει εντοπισθεί μέχρι τώρα (σε ελληνική μαθηματική γραφή) για το ότι η γεωμετρία θα πρέπει να περιορισθεί στις κατασκευές, που να στηρίζονται στην ευθεία και τον κύκλο. Ωστόσο, κατά την εξέλιξη των ελληνικών μαθηματικών άρχισαν να γίνονται απόπειρες για να λυθούν τα προβλήματα παρακάμπτοντας αυτή την αρχή. Αν ένα πρόβλημα δεν μπορούσε να κατασκευασθεί με κύκλους και ευθείες, τότε άλλοι τρόποι έγιναν υποόρητα αποδεκτοί. Αυτό γίνεται σαφές από την ταξινόμηση των προβλημάτων που επιχειρεί ο Πάππος (4ος μ.Χ. αιώνας) στην *Συλλογή*:

1. Επίπεδα προβλήματα, που μπορούσαν να κατασκευασθούν με ευθείες και κύκλους.
2. Στερεά προβλήματα, που μπορούσαν να λυθούν με τη χρήση κωνικών τομών.
3. Γραμμικά προβλήματα, που μπορούσαν να κατασκευασθούν με

¹¹M. Μπρίκα, Τα άλυτα προβλήματα της Αρχαιότητας.

¹²H. Bos, Arguments on Motivation in Rise and Decline of a Mathematical Theory; *Construction of Equation, 1637 - 1750*, AHES, vol 30, 1984, p. 331 -380.

την χρήση άλλων καμπύλων (σπείρες, τετραγωνίζουσες, κογχοειδείς, κισσοειδείς).

Προκειμένου εξ'άλλου να αιτιολογήσει την ταξινόμηση αυτή ο Πάππος τόνιζε, ότι αν ένα πρόβλημα μπορεί να κατασκευασθεί με ευθείες και κύκλους είναι λάθος να κατασκευασθεί με άλλο τρόπο¹³. Έτσι, το ζήτημα του κανόνα και του διαβήτη κατά την ώριμη περίοδο των ελληνικών μαθηματικών που επικρατεί μετά τον Ευκλείδη, λειτουργούσε ως ένα πρώτο κριτήριο ιεράρχησης της απλότητας και της αισθητικής που θα έπρεπε να καθοδηγεί το πνεύμα¹⁴.

Εδώ πρέπει να αναφέρουμε ένα άλλο στοιχείο που φωτίζει μια άλλη όψη του τρόπου που έβλεπαν τα μαθηματικά αντικείμενα στην αρχαιότητα. Το χαρακτηριστικό των μαθηματικών αντικείμενων, με την ελληνική σημασία του όρου, είναι ακριβώς ότι μπορούν να γίνουν αντιληπτά από τις αισθήσεις μόνο σε εικόνες, ενώ τα ίδια, στην αναλλοίωτη σύστασή τους, είναι προσιτά μόνο στην καθαρή νόηση όπου δίδεται το *όντως ον*. Υπάρχουν δε απείρως πολλά τέτοια αντικείμενα. Οι έννοιες αφορούν πάντοτε τα συγκεκριμένα αντικείμενα καθαυτά. - είναι *intentiones primae*, πρώτες αναφορές, διάκριση που γίνεται μετά τον Μεσαίωνα - δηλαδή έννοιες που αναφέρονται άμεσα σε συγκεκριμένα αντικείμενα. Αυτό βρίσκεται σε αρμονία με τα μέσα παράστασης που

¹³H. Bos, Arguments on Motivation in Rise and Decline of a Mathematical Theory; *Construction of Equation*, 1637 - 1750, AHES, vol 30, 1984, σελ 333 και A. G.Molland: Shifting the foundations Descartes transformation of Ancient Geometry, *Historia Mathematica*, 3 (1976), 21 - 49.

¹⁴Για να αναφέρουμε κάτι ανάλογο από την εποχή μας θυμίζουμε το πρόβλημα των *τσασάρων χρωμάτων* το οποίο έμενε άλυτο για 120 χρόνια και λύθηκε το 1976 από τους K. Appel και W. Haken, με την βοήθεια Η/Υ που εργαζόταν 1200 ώρες¹⁵ βλέπε Π. Σπύρου, *Θεωρία Γραφημάτων*.

χρησιμοποιεί η ελληνική επιστήμη.

Ας δούμε πώς σχολιάζει αυτό το θέμα ο J. Klein¹⁶.

Οι γραμμές που φέρονται στο σχήμα παρουσιάζουν το αντικείμενο, το απεικονίζουν. Συνεπώς ο τρόπος παράστασης των αντικειμένων στα ελληνικά μαθηματικά δεν είναι ποτέ μόνο αντιπροσωπευτικός, ποτέ συμβολικός αλλά πάντα είναι η παράσταση μιας εικόνας, και κατ'αυτό τον τρόπο πρώτης αναφοράς.

Για να μελετηθούν πολλές τέτοιες σχέσεις μαζί και να μπορούν να διατηρηθούν στη μνήμη πρέπει να παρασταθούν ταυτόχρονα με κατάλληλα σύμβολα, δηλαδή με γράμματα. Η απεικόνιση μέσω γραμμών και η παράσταση με γράμματα φαίνεται αρχικά να είναι μόνο δυο απόψεις αυτού του ίδιου συμβολικού τρόπου παρουσίασης. Η ενοποίηση αυτή επήλθε μέσω μιας συμβολικής ερμηνείας και εμφάνισης των γεωμετρικών ιδεών απ'τη μια, και των αριθμητικών λόγων απ'την άλλη. Και τα δυο είδη "ποσοτήτων" θεωρούνται μαζί ως προς το κοινό τους "γενικό" ποσοτικό χαρακτηριστικό και εμφανίζονται σ'αυτή τη γενικότητα. Το σχήμα, στην καθαρή εποπτεία του, μπορεί ευθέως να μετασχηματισθεί σε μια εικόνα, αν τα ευθύγραμμα τμήματα και οι λόγοι των ευθυγράμμων τμημάτων, από τα οποία αποτελείται, θεωρηθούν μήκη και τιμές αριθμητικώς καθορισμένα. Η δυνατότητα ταύτισης *primo* και *secunda intentio* βασίζεται επομένως σε αυτό, στο ότι δηλαδή το σχήμα κατανοείται ως σχήμα που έχει ήδη μετασχηματιστεί σε εικόνα. Η σχηματική απεικονιστικότητα είναι κατά συνέπεια το στοιχείο που μας επιτρέπει να φωτίσουμε τη γενίκευση της Αριθμητικής σε Άλγεβρα ή, μ'άλλα λόγια, να "ενοποιήσουμε" γεωμετρία και άλγεβρα. Έτσι, η διαφορά στο εννοιολογικό πλαίσιο μεταξύ πρώτων αναφορών και δευτέρων αναφορών είναι αυτό που διαφοροποιεί τις μαθηματικές έννοιες των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών

¹⁶J. Klein, Ο Κόσμος της Φυσικής και ο Φυσικός Κόσμος, Νεύση 7, 1998.

από εκείνες των νεότερων χρόνων.

§6.3. Η Καμπύλη στους νεότερους χρόνους

Οι καμπύλες που ήταν γνωστές μέχρι το 1600 ήταν περίπου δώδεκα με δεκαπέντε. Ακόμη και η απλή στην σύλληψή της καμπύλη, η κυκλοειδής π.χ. φαίνεται ότι είχε διαφύγει της προσοχής των αρχαίων. Για πρώτη φορά αναφέρεται από τον Nicolaus Cusanus (1401 - 1464). Τον απασχολεί η τροχιά ενός σημείου μιας ρόδας που κινείται. Την εποχή εκείνη το φυσικό φαινόμενο της κίνησης αρχίζει να αποκτά ενδιαφέρον, ενώ μέχρι τότε οι μελέτες των καμπύλων ήταν κατά κανόνα χωρίς αναφορά σε φυσικά φαινόμενα. Αυτό το πρόβλημα λύθηκε δυο αιώνες αργότερα μέσα από την μελέτη προβλημάτων της φυσικής επιστήμης¹⁷.

Ο Viète, για να αντιμετωπίσει τα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας επρότεινε την εισαγωγή ενός αξιώματος τύπου νεύσεως, ως εξής:

Δεδομένων δύο ευθειών και ενός σημείου, μπορούμε να χαράξουμε μία ευθεία που να διέρχεται από το σημείο και να συναντά τις δύο ευθείες έτσι, ώστε το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται μεταξύ των δύο ευθειών να είναι ίσο προς οποιοδήποτε προκαθορισμένο ευθύγραμμο τμήμα.

Στο βιβλίο του *Supplementum Geometriae* (1593) (το οποίο προηγείται κατά πολύ του *Geometrie* (1637) του Descartes), έδειξε ότι με τη χρήση αυτού του αξιώματος η τριχοτόμηση της γωνίας καθώς και η εύρεση δυο μέσων αναλογίας (που σχετίζεται με τον διπλασιασμό του κύβου), γίνονταν προβλήματα επιλύσιμα (κάτι που είχε εντοπισθεί και από τους αρχαίους έλληνες μαθηματικούς). Επίσης έδειξε ότι κάθε γεωμετρικό πρόβλημα κατασκευής το οποίο, όταν μετατρέπεται σε αλγεβρικές σχέσεις, οδηγούσε σε μια εξίσωση τρίτου ή τετάρτου βαθμού ήταν

¹⁷C. B. Boyer, Historical Stages in the definition of Curves, Mathematics Magazine, t, 19, 1944 -45, pp 294 - 310.

κατασκευάσιμο. Το νέο αξίωμα ώθησε την γεωμετρία να καταπιαστεί με εξισώσεις βαθμού μικρότερου από πέντε.

Η νέα ιδέα της νομιμοποίησης στηρίχθηκε στην τυποποίηση, ωσάν αυτό να αποτελούσε ένα νέο αξίωμα της γεωμετρίας ή δε νεύση έγινε αποδεκτή ακόμη και από τον Newton. Ο Descartes (1596 - 1650) ασχολήθηκε με την έννοια της κατασκευασιμότητας με πολύ πιο λεπτό τρόπο από εκείνον των Viète και του Kepler (ο οποίος συνέβαλε με τις μελέτες του που ήταν ως επί το πλείστον πλατωνικού χαρακτήρα και χρησιμοποιούσαν στις κατασκευές του κύκλους και ευθείες)¹⁸.

Η μέθοδος των συντεταγμένων, που λέγεται¹⁹ ότι εισήχθη από τον Descartes, επέτρεψε για πρώτη φορά να οριστεί η έννοια της καμπύλης με τρόπο γενικό. Εγινε δυνατό για κάθε καμπύλη να κατασκευαστεί μια εξίσωση, δηλαδή μια σχέση ανάμεσα στις συντεταγμένες των σημείων της, τέτοια ώστε να την ικανοποιούν τα σημεία της καμπύλης και μόνο αυτά. Έτσι για παράδειγμα ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα r έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = r^2$ κ.λ.π. Αυτό έδωσε μία γενική

¹⁸H. Bos, Arguments on Motivation in Rise and Decline of a Mathematical Theory; *Construction of Equation*, 1637 - 1750, AHES, vol 30, 1984, σελ 336.

¹⁹Η ιδέα αυτή υπονοείται στον Απολλώνιο. Επίσης στην αστρονομία υπήρχε το πλάτος και το μήκος της μέτρησης της θέσης των άστρων, βλέπε Eric G. Forbes, Descartes and the birth of Analytic Geometry, *Historia Mathematica* 4 (1977), 141-151. Ακόμη, στους σχολαστικούς συναντάμε την συζήτηση των διαστάσεων (ένταση και ύφεση) των μορφών, που σκοπό είχαν να αναλύσουν σε δυο κατευθύνσεις τις ποιότητες, βλ. C. B. Boyer, Historical Stages in the definition of Curves. Κατά την γένεση της αναλυτικής γεωμετρίας επιδρούν πολύ ευρύτερες και μακροχρόνιες διεργασίες όπου εμπλέκονται κι άλλοι μαθηματικοί, όπως οι F. Viète, I. Newton, P. Fermat, κ. ά. Εξέλλου ή αναλυτική ως εγχειρίδιο, με την αποκρυσταλλωμένη μορφή, που την γνωρίζουμε σήμερα, εμφανίστηκε με τον L. Euler (1748), βλέπε G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, τόμος δεύτερος, E.M.E, μετ. Μ. Κωβαίου.

και με πολύ καλές προοπτικές μέθοδο για την μελέτη των ήδη γνωστών καμπύλων. Ο Descartes ενδιαφέρθηκε, όπως αναφέραμε, να λύσει γεωμετρικά προβλήματα και να αποδώσει μέσω εξισώσεων καμπύλες του επιπέδου.

Το πρώτο μέρος της μεθόδου του Descartes για την επίλυση προβλημάτων, συνίσταται στη μετάφραση του γεωμετρικού προβλήματος με αλγεβρικούς όρους, τα δεδομένα και οι απαιτούμενες σχέσεις εκφράζονται ως εξισώσεις. Πρέπει να βρεθούν τόσες εξισώσεις όσες και οι άγνωστοι. Έπειτα γίνεται απαλειφή των αγνώστων και καταλήγει σε μια εξίσωση που περιέχει ένα μόνο άγνωστο. Το πρόβλημα περιορίζεται στην λύση αυτής της εξίσωσης, αλλά η αλγεβρική λύση δεν είναι επαρκής. Ο Descartes δεν είχε ποτέ διατυπώσει ρητά την άποψη ότι όλες οι καμπύλες που περιγράφονται ως αλγεβρικές εξισώσεις είναι νόμιμες, γιατί αυτό δεν θα ήταν γεωμετρικό κριτήριο²⁰. Η άλγεβρα δεν είχε αυτονομηθεί ακόμη. Η εξίσωση αναλύεται με παραγοντοποίηση σε πολυώνυμα μικροτέρου βαθμού των οποίων η γεωμετρική ερμηνεία είναι γνωστή και η λύση προκύπτει ως τομή τέτοιων καμπύλων. Εξ'άλλου, κατά την διαδικασία λύσης τέτοιων εξισώσεων δεν καθοδηγείται κανείς από την αλγεβρική μορφή που έχει η εξίσωση ώστε να μπορεί να χειρίζεται τα σύμβολα με πράξεις που σήμερα είναι κατωχειρωμένες στην άλγεβρα. Η όποια πορεία πρέπει να εξασφαλίζεται με την γεωμετρική κατασκευή των μεγεθών και των αναλογιών που προκύπτουν. Αυτό είναι το πρόγραμμα της γεωμετρικής κατασκευής των εξισώσεων, που κυριάρχησε ως μέθοδος μια εποχή (έως το 1750), και στο τέλος εγκαταλείφθηκε με την αυτονόμηση των αλγεβρικών και αναλυτικών μεθόδων

²⁰H. Bos, On the Representation of Curves in Descartes' Geometrie, Archive for History of Exact Science 24, σελ. 305).

από την γεωμετρία²¹.

Για τον Descartes λοιπόν, η γεωμετρία είναι πρωτίστως η τέχνη της επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων όπως, π.χ., ιδιάζοντα προβλήματα κατασκευών και γεωμετρικών τόπων²². Τις καμπύλες τις δέχεται ως μέσα κατασκευής, αν αυτές μπορούν να χαραχτούν με ειδικές κινήσεις. Οι κινήσεις αυτές πρέπει να ικανοποιούν ορισμένα κριτήρια, που αφορούν, π.χ., τον λόγο των ταχυτήτων τους. Διατυπώνει έτσι, τον 17ο αιώνα, το δικό του κριτήριο για το ποιες καμπύλες είναι αποδεκτές στην γεωμετρία και ποιες μηχανικές (όπως ονομάζει όλες οι καμπύλες που προκύπτουν από ιδεατά αρθρωτά όργανα, οι κινήσεις των ξεχωριστών τμημάτων των οποίων καθορίζονται από την κίνηση ενός εξ'αυτών). Αντίθετα, δεν είναι αποδεκτές από τον Descartes καμπύλες που προκύπτουν από δυο ανεξάρτητες κινήσεις, όπως η σπείρα και η τεταγωνίζουσα. Η κατάταξη που κάνει ο Descartes βασίζεται στην περιγραφή μέσω ιδιότητας και οι καμπύλες ταξινομούνται με βάση τον βαθμό των αντίστοιχων εξισώσεων.

Η συμβολή του Descartes για την κατασκευασιμότητα είχε μεγάλη επίδραση στην εποχή του. Προχώρησε σε μια ταξινόμηση που, θα λέγαμε ότι αποτελεί γενίκευση εκείνης του Πάππου:

1. Οι καμπύλες που είναι γεωμετρικές (με την έννοια που προαναφέρθηκε) έχουν αλγεβρικές εξισώσεις με γραμμικές συντεταγμένες.
2. Οποτεδήποτε μια καμπύλη έχει μια αλγεβρική εξίσωση, μπορεί

²¹H. Bos, Arguments on Motivation in Rise and Decline of a Mathematical Theory; *Construction of Equation*, 1637 - 1750, AHES, vol 30, 1984, σελ 336.

²²Ελεγε: θα δανειζόμουν ό,τι το καλύτερο είχαν η γεωμετρική ανάλυση και η άλγεβρα και θα διόρθωνα με τη μια όλα τα ελαττώματα της άλλης, R. Descartes, Ο Λόγος περί της Μεθόδου, εκδ. Παπαζήση, σελ 21.

να χαραχθεί με ένα συνδυασμό κινήσεων, που είναι γεωμετρικά αποδεκτός.

3. Στις κατασκευές, πέρα από τη χρήση ευθειών και κύκλων, θα πρέπει πάντα να χρησιμοποιούνται οι απλούστερες δυνατές καμπύλες. Οι καμπύλες είναι απλούστερες, όσο μικρότεροι είναι οι βαθμοί των εξισώσεων, που τις εκφράζουν.

Την ίδια εποχή με τον Descartes, ο Fermat (1639) βλέπει στην εξίσωση την εξειδικευμένη ιδιότητα μιας καμπύλης. Ψαχνει την γραφική μορφή εξισώσεων τύπου: $y = kx^n$ όπου n τυχαίο. Μέχρι τότε μελετούσαν τις καμπύλες σε σχέση με τα γεωμετρικά προβλήματα ενώ αρχής γενομένης από τον Fermat (1601- 1665) η διαδικασία αντιστρέφεται, οι εξισώσεις έχουν πια γεωμετρική ανάλογο, [19].

Πρέπει να παρατηρήσουμε σχετικά με το γενικό ορισμό της έννοιας της καμπύλης δεν αποκομίζουμε τίποτα το καινούργιο, προτού εξετάσουμε το θέμα "αντίστροφα", κατά τον ακόλουθο τρόπο²³. Εστω ότι μας έχει δοθεί μια εξίσωση με δυο αγνώστους. Αν μεταφέρουμε όλους τους όρους της στην αριστερή πλευρά, παίρνει την μορφή $F(x, y) = 0$, [όπου με $F(x, y)$ συμβολίζουμε την έκφραση στην αριστερή πλευρά]. Στην συνέχεια παρατηρούμε ότι υπάρχει ένα άπειρο σύνολο από ζεύγη πραγματικών αριθμών (x, y) που ικανοποιούν την σχέση αυτή. Δεχόμαστε τους αριθμούς αυτούς ως συντεταγμένες x και y ενός σημείου στο επίπεδο, ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων και τελικά ονομάζουμε *καμπύλη* το σύνολο των σημείων του επιπέδου που οι συντεταγμένες τους ικανοποιούν την εξίσωση $F(x, y) = 0$. Η πρώτιστη σημασία αυτής της προβληματικής συνίσταται στο ότι μπορούμε πλέον να δώσουμε ένα

²³A. S. Parchomenko, Was ist eine kurve, V.D.V.W Berlin 1957.

γενικό ορισμό της καμπύλης που να περιλαμβάνει όλα τα μέχρι τώρα γνωστά επί μέρους παραδείγματα καμπύλων και επιπλέον μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε τόσα παραδείγματα, όσες διαφορετικές εξισώσεις υπάρχουν. Ο ορισμός αυτός της καμπύλης είναι πολύ γενικός και περιλαμβάνει όλες τις λεγόμενες αλγεβρικές καμπύλες, δηλαδή εκείνες που οι εξισώσεις τους είναι της μορφής $F(x, y) = 0$, όπου $F(x, y)$ αλγεβρικό πολυώνυμο με μεταβλητές x και y .

Αυτή η τόσο σημαντική ανακάλυψη δεν απέδωσε σύντομα αλλά δυο γεννιές αργότερα όταν ο Newton (1642 - 1727) μελέτησε καμπύλες ανωτέρου βαθμού. Πολλοί δε μέχρι τότε εξακολουθούσαν να ορίζουν τις καμπύλες με μη αναλυτικές μεθόδους²⁴.

Να θυμίσουμε ότι ο Nappier (1550 -1617) ανακαλύπτει τους δεκαδικούς λογαρίθμους 1614, ενώ την δεκαετία 1634 -1644 κάνουν την εμφανισή τους η απλή λογαριθμική καμπύλη (Torricelli 1608 - 1647) και η ημιτονοειδής. Η ημιτονοειδής και η συνημιτονοειδής δεν είχαν δοθεί αρχικά ως συναρτήσεις αλλά ως αριθμοί σε υπολογισμούς, γι αυτό άλλωστε την εποχή για την οποία συζητάμε δεν εμφανίζεται το γράφημά τους. Οι Fermat και Roberval (1602 - 1675) φτάνουν σε τριγωνομετρικές και γωνιομετρικές συναρτήσεις από τις κυκλοειδείς. Οι De Langny (1705) και Cotes (1722) αναδεικνύουν την περιοδική φύση της εφαπτομένης. Ο Euler (1748) καταδεικνύει την περιοδική φύση όλων

²⁴Αναλυτική μέθοδος είναι αρχικά εκείνη που δέχεται ως λυμένο κάτι και προχωρεί στην λύση του, όπως αναφέρει ο Πάππος. Πρόκειται δηλαδή για "ανάποδη λύση" *ανάπαλιν λύσιν*, βλέπε R. Descartes, Κανόνες για την Καθοδήγηση του Πνεύματος, Εγνατία, 1974. σελ 167. Οι Desacrtes, Viete, Fermat, καταστρώνουν ένα πρόβλημα ως λυμένο και αποδίδουν σύμβολα για να προχωρήσουν στην υπολογιστική λύση του. Βαθμιαία αναλυτική μέθοδος σημαίνει αυτήν την αλγεβροποίηση, συμβολοποίηση του προβλήματος.

των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Κατά την διάρκεια του 17ου και ιδιαίτερα του 18ου αιώνα η μελέτη φυσικών φαινομένων της κίνησης σωμάτων στο χώρο και τα προβλήματα των εφαπτομένων εμπνέουν τον Απειροστικό Λογισμό. Έτσι το 1700 υπάρχει ένα πλήθος από καμπύλες και αρχίζει η μελέτη των καμπύλων ως γεωμετρικών αντικειμένων με αναζήτηση αναλλοιώτων, που τελικά θα οδηγήσουν σε μια ταξινόμηση στα πλαίσια της Διαφορικής Γεωμετρίας. Ο Euler (1707 -1783) εδραιώνει την αναλυτική έκφραση εξισώσεων δυο μεταβλητών, και αναφέρεται σε καμπύλες στο έργο του *Introductio* του 1748. Την ίδια εποχή ένας άλλος ελβετός μαθηματικός, ο Cramer, γράφει το *Introduction a l'analyse des lignes courbe algebriques*, το οποίο έχει στον τίτλο του τον όρο καμπύλη. Ο J. Bernoulli (1654 -1705) επιχειρεί ένα πρώτο ορισμό της που αργότερα επανεπεξεργάζεται ο Euler και τον διατυπώνει ως *Συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας είναι η αναλυτική έκφραση και που συνθέτει με κάποιο τρόπο ο,τιδήποτε από αυτήν την μεταβλητή με σταθερές*. Όλες βέβαια οι αναφορές, μέχρι τότε, έχουν στο να κάνουν, όπως διαπιστώνει ο Boyer²⁵, με συγκεκριμένες καμπύλες του επιπέδου. Διακρίνεται μια μόνο αναφορά του Euler, κατά την οποία όπως φαίνεται έχει στο νού του περισσότερο την εξίσωση παρά την καμπύλη και αναποδογυρίζει την κατάσταση οπότε λέει *συνάρτηση* την σχέση μεταξύ των x και y που προκύπτει από κάποια τυχαία καμπύλη που γράφεται με το χέρι στο επίπεδο xy .

Το 1807 ο Fourier ορίζει αναπαραστάσεις τριγωνομετρικών και υπερβολικών συναρτήσεων, ενώ την ίδια εποχή περίπου ο Dirichlet γενικεύει τον ορισμό της *συνάρτησης ως ενός νόμου αντιστοίχισης μεταξύ τυχαίων x*

²⁵C. B. Boyer, Historical Stages in the definition of Curves.

και y , οπότε μπορούμε να έχουμε και μη συνεχείς συναρτήσεις. Αργότερα (1834) ο Bolzano μελετά μια συνεχή καμπύλη που δεν έχει σε κανένα σημείο εφαπτομένη. Στο δεύτερο μισό του 19ου αιώνα ο Weierstrass (1815 - 1897) μελετά πλέον γενικά καμπύλες δίχως εφαπτομένες και με αριθμήσιμο πλήθος ταλαντεύσεων. Την εποχή εκείνη (1800) έχει προχωρήσει πολύ η μελέτη του Απειροστικού Λογισμού. Τα προβλήματα που δημιουργεί η παραδοχή και η ευρύτατη χρήση της έννοιας του απείρου, έχουν προκαλέσει πολλές συζητήσεις για την αυστηρότητα και την βεβαιότητα που έχουν τα συμπεράσματα των Μαθηματικών. Οι παλιές βεβαιότητες για τα Μαθηματικά δεν υπάρχουν πια. Στις αρχές του 19ου αιώνα έχει ξεκινήσει ένα ευρύ θεμελιωτικό κίνημα στα μαθηματικά και είναι τότε που δίδεται ο ορισμός του ορίου από τον Cauchy (1789 - 1857).

Σημειώνουμε ότι στην Γεωμετρία των αρχαίων Ελλήνων η ευθεία κατανοείται ως ένας (συνεχής) φορέας πάνω στον οποίο θεωρούμε τα σημεία ως δυνατότητα, όπως στην τομή ευθειών. Η έννοια του φορέα είναι κάτι το αόριστο και διαισθητικό. Όπως είναι γνωστό, από την εποχή του Πυθαγόρα ήδη παρατηρήθηκε ότι τα γεωμετρικά μεγέθη, όπως αυτά προέκυπταν από την αποδοχή του συνεχούς φορέα της ευθείας γραμμής, δεν μπορούσαν να έχουν κοινό μέτρο, αφού η διαγώνιος του τετραγώνου που έχει πλευρά 1 προκύπτει ως οντότητα που δεν έχει κοινό μέτρο με την πλευρά, δηλαδή αναγκαζόμαστε να παραδεχθούμε την οντότητα που ονομάζουμε ρίζα του δυο και συμβολίζουμε $\sqrt{2}$. Αργότερα θα γίνει κατανοητό ότι υπήρχαν και άλλοι ασύμμετροι αριθμοί, όπως πλευρές κανονικών πολυγώνων, ή ο π και ότι η ρητοί αριθμοί δεν φτάνουν για να αποδώσουν το νόημα της συνέχειας που είχε ανάγκη η ερμηνεία της κίνησης και το επιστημονικό Παράδειγμα

του Απειροστικού Λογισμού²⁶.

Ο Απειροστικός Λογισμός, που μελέτησε το πρόβλημα των συνεχών κινήσεων, είχε στηριχθεί αρχικά σ'αυτήν την ασαφή έννοια της γραμμής ως συνεχούς φορέα, έννοια ακόμη με γεωμετρική και διαισθητική υφή. Αλλά τα Μαθηματικά έχουν αλλάξει κατά πολύ από την εποχή των αρχαίων Ελλήνων, τα επιστημολογικά τους αιτήματα είναι διαφορετικά. Μια νέα ενιαία θεμελίωση της αριθμητικής και της ανάλυσης ήδη αναζητείται.

Τελικά, τα νεότερα Μαθηματικά θεμελιώθηκαν πάνω στην θεωρία των συνόλων, έννοια που διέκρινε τα διαφορετικά σημεία ως πρωτογενές υλικό μέσα από το οποίο έπρεπε να προκύψει κι η ιδέα του συνεχούς, με την βοήθεια των αξιωμάτων. Οι Dedekind (1831 - 1916) και Cantor (1845 - 1918) προσπάθησαν να διερευνήσουν τις *a priori* παραδοχές μας για τα μαθηματικά αντικείμενα, τί κρύβεται πίσω από την καθάρη εποπτεία (όπως θα ήθελε ο Καντ) του συνεχούς φορέα της ευθείας των πραγματικών αριθμών, και επιπλέον προσπάθησαν να εξασφαλίσουν αυτή την ενοποίηση ώστε να στηρίξουν την ανάλυση στην αριθμητική. Η ποθούμενη θεμελίωση της πραγματικής ευθείας, που έγινε στο τέλος του περασμένου αιώνα, κυρίως από τον R. Dedekind²⁷, μας αποκατέστησε αυτή την σύνδεση του συνεχούς με το διακριτό, μέσω των αξιωμάτων της πλήρωσης.

§. 6.4 Το Συνεχές και οι Τομές Dedekind²⁸

Θεωρούμε γνωστούς τους φυσικούς αριθμούς και τους ρητούς που προέρχονται

²⁶Θ. Εξαρχάκος, Δημιουργία Ανάπτυξη και Θεμελίωση του Απειροστικού Λογισμού.

²⁷R. Dedekind, *Essay of the numbers*, Reprint Dover 1963.

²⁸βλέπε Π. Ζερβού, Απειροστικός Λογισμός.

από την πράξη της διαιρέσης πάνω στους φυσικούς. Είναι γνωστό από τα μαθήματα του Απειροστικού Λογισμού, ότι από την εποχή του Πυθαγόρα, οι άνθρωποι παρατήρησαν ότι τα γεωμετρικά μεγέθη, όπως αυτά προέκυπταν από την αποδοχή του συνεχούς φορέα της ευθείας γραμμής, δεν μπορούσαν να έχουν κοινό μέτρο, αφού η διαγώνιος του τετραγώνου που έχει πλευρά 1 προκύπτει ως οντότητα που δεν έχει κοινό μέτρο με την πλευρά, δηλαδή αναγκαζόμαστε να παραδεχθούμε την οντότητα που ονομάζουμε ρίζα του δυο και συμβολίζουμε $\sqrt{2}$. Αργότερα έγινε κατανοητό ότι υπήρχαν και άλλοι ασύμμετροι αριθμοί, όπως ο π και ότι οι ρητοί αριθμοί δεν φτάνουν, για να αποδώσουν το νόημα της συνέχειας που είχε ανάγκη η ερμηνεία της κίνησης και το επιστημονικό Παράδειγμα του Απειροστικού Λογισμού, που προέκυψε ήδη από τον 17ο αιώνα²⁹. Η θεμελίωση της ιδιότητας του συνεχούς της ευθείας γραμμής ήταν αναγκαία.

Θεωρούμε λοιπόν το σύνολο των ρητών \mathcal{Q} με την ολική διάταξη που αυτό έχει²⁹ και την πυκνότητα³⁰. Παίρνουμε ένα ρητό αριθμό, τον $1\frac{2}{3}$, και νοούμε όλους τους ρητούς χωρισμένους σε δυο τάξεις, A και B, έτσι ώστε

$$A = \{x \in \mathcal{Q} : x \leq 1\frac{2}{3}\}$$

$$B = \{x \in \mathcal{Q} : x > 1\frac{2}{3}\}$$

Ο αριθμός $1\frac{2}{3}$, ο οποίος και αποτελεί το σύνορο των δυο τάξεων, δύναται να νοηθεί ως σύμβολο αυτού του καταμερισμού. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο θα μπορούσαμε να νοήσουμε αυτόν τον χωρισμό ως

$$A = \{x \in \mathcal{Q} : x < 1\frac{2}{3}\}$$

$$B = \{x \in \mathcal{Q} : x \geq 1\frac{2}{3}\}$$

και να θεωρούμε πάλι το $1\frac{2}{3}$ ως σύμβολο του καταμερισμού. Και για τις δυο περιπτώσεις παρατηρούμε ότι έχουμε:

²⁹Θ. Εξαρχάκος, Δημιουργία Ανάπτυξη και Θεμελίωση του Απειροστικού Λογισμού.

²⁹για κάθε δυο ρητούς γνωρίζω ποιος είναι μεγαλύτερος.

³⁰(για κάθε δυο ρητούς υπάρχει ρητός ανάμεσά τους.

I) Κάθε αριθμός της τάξης A είναι μικρότερος κάθε αριθμού της τάξης B.

II) Για κάθε $\varepsilon > 0$ (οσοδήποτε μικρού θετικού αριθμού), μπορούμε να βρούμε αριθμό $x \in A$ και $y \in B$, με $x - y < \varepsilon$.

Παρατηρούμε ακόμη ότι στην πρώτη περίπτωση η τάξη A έχει ένα μέγιστο αριθμό, η τάξη B δεν έχει ελάχιστο, ενώ στην δεύτερη περίπτωση η A δεν έχει μέγιστο, ενώ η B έχει ελάχιστο. Για κάθε ρητό είναι δυνατό να νοήσουμε ένα τέτοιο καταμερισμό. Υπάρχουν όμως καταμερισμοί των ρητών τέτοιοι που ούτε η A να έχει μέγιστο ούτε η B ελάχιστο. Για παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε τους θετικούς ρητούς που επαληθεύουν την ανισότητα $x^2 - 3 < 0$ και μαζί με τους αρνητικούς και το μηδέν τους λαμβάνουμε ως τάξη A ενώ εκείνους τους θετικούς ρητούς που επαληθεύουν την $x^2 - 3 > 0$ ως τάξη B. Προφανώς έχουμε ότι $A \cap B = \emptyset$ με $Q = A \cup B$ και ισχύουν για τον καταμερισμό αυτό οι I και II. Επίσης γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $x^2 - 3 = 0$ δεν έχει λύση μέσα στους ρητούς. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ανάμεσα στις δυο τάξεις A και B στους ρητούς αριθμούς υπάρχει ένα χάσμα. Στην περίπτωση αυτή ονομάζουμε το σύμβολο του καταμερισμού *ασύμμετρο* αριθμό και νοούμε ότι στο χάσμα μεταξύ των τάξεων A και B υπάρχει ένα στοιχείο που επαληθεύει την εξίσωση $x^2 - 3 = 0$. Ακόμη θα λέμε ότι ο παραπάνω καταμερισμός ορίζει ασύμμετρον αριθμό, που τον συμβολίζουμε με $\sqrt{3}$.

Γενικότερα τώρα οι ρητοί αριθμοί μπορούν εν γένει να χωριστούν σε δυο τάξεις A και B, με $A \cap B = \emptyset$ και $Q = A \cup B$, όπου να διακρίνουμε τις εξής καταστάσεις:

1. Υπάρχει ένα στοιχείο $z \in A$ με $x \leq z$ για κάθε $x \in A$.
2. Υπάρχει ένα στοιχείο $z \in B$ με $x \geq z$ για κάθε $x \in B$.

Στις δυο αυτές περιπτώσεις θα λέμε ότι ο αριθμός z δύναται να νοηθεί ως σύμβολο του καταμερισμού και λέμε ότι ο z προσδιορίζει την *τομή* (A,B) και ότι η *τομή είναι ρητή*.

3. Δεν υπάρχει στοιχείο $z \in A$ με $x \leq z$, για κάθε $x \in A$, ούτε στοιχείο $z \in B$ με $x \geq z$, για κάθε $x \in B$.

Τότε θα λέμε ότι η *τομή είναι ασύμμετρος*.

Έχουμε λοιπόν ότι για κάθε δυνατό καταμερισμό των ρητών σε δυο τάξεις A και B, ώστε να ισχύουν οι I και II, να αντιστοιχεί ένας και μόνον αριθμός ρητός

ή ασύμμετρος, που χρησιμεύει για σύμβολο του καταμερισμού και λέγεται *τομή Dedekind*. Αν δε τον καταμερισμό των περιπτώσεων 1 και 2 τον θεωρήσουμε ως μια περίπτωση, τότε είναι και το αντίστροφο αληθές, δηλαδή για κάθε αριθμό ρητό ή όχι αντιστοιχεί μια τομή.

Ισότητες και ανισότητες των ασυμμέτρων:

Εστω δυο ασύμμετροι δ και δ' και έστω (A, B) η τομή που προσδιορίζεται από τον αριθμό δ και η τομή (A', B') που προσδιορίζεται από τον αριθμό δ' . Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

1. Οι τάξεις A και A' ταυτίζονται. Τότε ταυτίζονται και οι τάξεις B και B' , οι δε αριθμοί δ και δ' , προσδιορίζουν την αυτήν τομήν. Θα λέμε ότι οι ασύμμετροι δ και δ' είναι ίσοι και θα γράψουμε $\delta = \delta'$.
2. Υπάρχει αριθμός $\zeta \in A' - A$ με $\zeta \in B$ δηλαδή:
υπάρχει $\zeta \in \mathbb{Q}$ με $\zeta < \delta'$, ο οποίος $\zeta > \delta$. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι ο δ' είναι μεγαλύτερος του δ και θα γράψουμε ότι $\delta' > \delta$.
3. Υπάρχει αριθμός $\zeta \in A$ και $\zeta \notin A'$, επομένως $\zeta \in B'$, τότε θα λέγομεν ότι ο δ είναι μεγαλύτερος του δ' και θα γράψουμε $\delta > \delta'$.

Συνοψίζοντας θα λέγαμε ότι για δυο ασύμμετρους αριθμούς δ και δ' έχουμε ότι:

α) $\delta = \delta'$, αν κάθε ρητός μικρότερος του ενός των δυο ασυμμέτρων είναι μικρότερος και του άλλου.

β) Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να είναι $\delta < \delta'$ είναι να υπάρχει ρητός μικρότερος του δ' και μεγαλύτερος του δ .

Οι ρητοί μαζί με τους άρρητους λέγονται *πραγματικοί αριθμοί*.

Καταμερισμός των πραγματικών σε δυο τάξεις:

Αν χωρίσουμε τους πραγματικούς αριθμούς σε δυο τάξεις A και B , έτσι ώστε κάθε αριθμός της A να είναι μικρότερος κάθε αριθμού της B , θα υπάρχει πάντοτε πραγματικός αριθμός λ (ρητός ή ασύμμετρος), τέτοιος ώστε κάθε πραγματικός μικρότερος του λ να ανήκει στην A και κάθε πραγματικός μεγαλύτερος του λ να ανήκει στην B . Δηλαδή υπάρχει πάντα αριθμός λ που ορίζει την τομή (A, B) .

Εστω ότι A_ρ και A_α οι ρητοί και ασύμμετροι αντίστοιχα, που ανήκουν στην τάξη A , και B_ρ και B_α οι ρητοί και ασύμμετροι αντίστοιχα, που ανήκουν στην τάξη

B. Οι τάξεις των ρητών A_p και B_p ορίζουν μια τομή, ένα αριθμό ρητό ή ασύμμετρο, έστω λ . Ισχυρίζομαι ότι:

Κάθε αριθμός (ρητός ή ασύμμετρος) μικρότερος του λ , ανήκει στην τάξη A και κάθε αριθμός μεγαλύτερος του λ ανήκει στην τάξη B.

Πράγματι, κάθε μικρότερος του λ θα είναι ρητός ή ασύμμετρος και εάν είναι ρητός θα ανήκει στην τάξη A_p , εάν δε είναι ένας ασύμμετρος έστω δ , θα υπάρξει μεταξύ του δ και του λ ρητός αριθμός και επομένως απειρία ρητών. Εστω ένας τέτοιος ρητός τ . Ο τ ως ρητός μικρότερος του λ θα είναι αριθμός της A_p , επομένως θα είναι αριθμός της τάξης A και άρα θα είναι μικρότερος κάθε αριθμού της τάξης B. Άρα, αν ο δ ανήκε στην τάξη B θα είχαμε ότι $\tau < \delta$, ενώ έχουμε υποθέσει ότι $\tau > \delta$. Άρα ο $\delta \in A$. Ομοια δείχνουμε ότι κάθε αριθμός μεγαλύτερος του λ ανήκει στην τάξη B, άρα: *Ο λ που είναι τομή των τάξεων A_p και B_p είναι και η τομή των τάξεων A και B.*

Πράξεις επί των πραγματικών αριθμών εν γένει:

Πρόσθεση: Εστω x και x' δυο πραγματικοί αριθμοί και (A, B) , (A', B') οι αντίστοιχες τάξεις που ορίζουν τους εν λόγω πραγματικούς αριθμούς. Εστω τώρα τυχαίοι ρητοί αριθμοί a, b και a', b' οι οποίοι ανήκουν αντίστοιχα στις παραπάνω τέσσερις τάξεις και πληρούν τις σχέσεις:

$$a < x < b \quad \text{και} \quad a' < x' < b'$$

θα έχουμε

$$a + a' < b + b'$$

Ας νοήσουμε τώρα όλους τους πραγματικούς χωρισμένους σε δυο τάξεις Γ και Δ που τις ορίζουμε ως εξής: η Γ αποτελείται από εκείνους τους αριθμούς που είναι μικρότεροι από οποιονδήποτε αριθμό της μορφής $b + b'$ και επομένως όλοι οι αριθμοί της μορφής $a + a'$ και στην τάξη Δ οι υπόλοιποι αριθμοί, δηλαδή όλοι οι αριθμοί της μορφής $b + b'$. Ας καλέσω x' τον αριθμό, ο οποίος αποτελεί την τομή (Γ, Δ) . Προφανώς, ο x' είναι μικρότερος κάθε αριθμού της μορφής $b + b'$ (ίσως με κάποιο αριθμό της μορφής $b + b'$ δεν μπορεί να είναι, γιατί οι αριθμοί αυτοί δεν έχουν μικρότερο) και μεγαλύτερος κάθε αριθμού της μορφής $a + a'$ (ίσως με κανένα από αυτούς τους αριθμούς δεν μπορεί να είναι, αφού οι αριθμοί αυτοί δεν έχουν μέγιστο).

Άλλος αριθμός τέτοιος που να είναι μεγαλύτερος από κάθε ένα της μορφής $a + a'$ και μικρότερο από κάθε αριθμό της μορφής $b + b'$ δεν είναι δυνατό να βρεθεί. Αυτό φαίνεται ως εξής:

Εστω δ τέτοιος αριθμός, διάφορος του x'' , θα έχουμε μεταξύ των δ και x'' άπειρους ρητούς. Εστω ρ και τ δυο από αυτούς (έστω ότι $\rho < \tau$). Θα έχουμε:

$$a + a' < \rho < \tau < b + b'$$

Και επομένως:

$$\tau - \rho < (b + b') - (a + a')$$

Αλλά η διαφορά $\tau - \rho$, θα είναι ένας σταθερός αριθμός σ , ενώ η διαφορά $(b + b') - (a + a')$ γίνεται μικρότερη από κάθε αριθμό $\varepsilon > 0$, αρκεί να πάρουμε τις διαφορές $b - a$ και $b' - a'$ μικρότερες του $\varepsilon/2$.

Τον αριθμό x'' που ορίζουμε παραπάνω τον ονομάζουμε *άθροισμα* των αριθμών x και x' .

Αφαίρεση: Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι αν δοθούν δυο αριθμοί λ και λ' μπορούμε να βρούμε ένα και μοναδικό αριθμό ξ , ο οποίος αν προστεθεί στον λ' να δίνει τον λ , και γράφουμε τότε $\xi = \lambda - \lambda'$.

Πολλαπλασιασμός: Εστω δυο αυθαίρετοι θετικοί αριθμοί x και x' , ενώ A, B οι τάξεις των ρητών που ορίζουν τον x και A', B' οι τάξεις των ρητών που ορίζουν τον x' . Θεωρούμε και τέσσερις θετικούς ρητούς αριθμούς a, b, a', b' που ανήκουν σε αυτές τις τάξεις και οι οποίοι επαληθεύουν τις ανισότητες.

$$a < x < b, \quad a' < x' < b$$

θα έχουμε $aa' < bb'$.

Εργαζόμαστε όπως και στην πρόσθεση και αποδεικνύουμε ότι υπάρχει ένας μοναδικός θετικός αριθμός, που είναι μικρότερος κάθε γινομένου της μορφής bb' και μεγαλύτερος κάθε γινομένου aa' . Τον αριθμό αυτό καλούμε γινόμενο των x και x' και γράφουμε $x'' = xx'$.

Στην περίπτωση που έχουμε και αρνητικούς αριθμούς παίρνουμε υπ'όψη τον κανόνα των σημείων, δηλαδή

$$(-x)x' = -(xx'), \quad (-x)(-x') = xx', \quad x(-x') = -(xx')$$

Διαίρεση: Σε κάθε πραγματικό ρητό αριθμό ρ , διαφορετικό από το μηδέν αντιστοιχεί ένας ρητός πραγματικός ρ' τέτοιος ώστε: $\rho \cdot \rho' = 1$. Ονομάζουμε τον ρ' αντίστροφο του ρ και τον συμβολίζουμε: $\frac{1}{\rho}$.

Θεωρούμε τώρα ένα ασύμμετρο θετικό αριθμό λ . Ζητούμε, στην συνέχεια, αριθμό λ' που να είναι τέτοιος ώστε $\lambda \lambda' = 1$. Παίρνουμε τις τάξεις A και B ρητών:

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x > \lambda\}, \quad A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x < \lambda\}$$

Οι αντίστροφοι των ρητών της τάξης A θα αποτελέσουν μια άλλη τάξη έστω B' , ενώ οι αντίστροφοι των ρητών της τάξης B , μαζί με τους ρητούς αρνητικούς αριθμούς, συγκροτούν την τάξη των υπολοίπων ρητών, την A' .

Μπορούμε τώρα να νοήσουμε όλους τους ρητούς χωρισμένους σε δυο τάξεις A' και B' . Θα ορίζεται έτσι ένας θετικός ασύμμετρος αριθμός λ' . Προφανώς ο λ' θα είναι τέτοιος που θα έχουμε $\lambda \lambda' = 1$, τον συμβολίζουμε $\frac{1}{\lambda}$ και τον λέμε αντίστροφο του λ . Ομοια ορίζουμε αντίστροφο για τους αρνητικούς, δηλαδή αν λ θετικός ο αντίστροφος του $-\lambda$ είναι ο $-\frac{1}{\lambda}$. Για τον 0 δεν ορίζουμε αντίστροφο.

Αυτή περίπου ήταν η συγκρότηση της ευθείας των πραγματικών αριθμών σε όρους αριθμητικών, (δηλαδή λογικών, αφού ο αριθμός ήταν λίγο πολύ λογική έννοια και την συνέχιση του θεμελιωτικού προγράμματος αυτού ενοποίησης θα επιχειρήσει λίγο αργότερα ο Frege με την υπαγωγή της αριθμητικής στην Λογική). Ο Cantor προχωρεί παραπέρα από τον Dedekind και προτείνει με πολύ αποτελεσματικό τρόπο την Θεωρία των Συνόλων. Μια έννοια συνόλου προϋπάρχει στον όρο του Dedekind κλάση.

Ας επανέλθουμε τώρα στην ιστορία της καμπύλης. Ο Cantor θεωρεί ουσιαστικά την καμπύλη ως ένα κλειστό καλά διατεταγμένο σύνολο σημείων τέλειο στον εαυτό του (κάθε σημείο του είναι σημείο συσώρευσης). Με αυτές τις προσπάθειες που επεδίωκαν την Θεμελίωση των

Μαθηματικών με την συμπερίληψη και κατανόηση της έννοιας του απείρου, την αναζήτηση της σχέσης των Μαθηματικών με την Λογική τελειώνει ο περασμένος αιώνας με εξέχουσες φυσιογωμίες τους Riemann Dedekind, Cantor, Weierstrass, Frege, Peano. Είναι γνωστή η συμβολή του Peano σ' αυτό το θεμελιωτικό κίνημα, όταν το 1889 διατύπωσε τα αξιώματα της αριθμητικής και γι αυτό κυρίως αναφέρεται το όνομά του. Πέρα όμως από αυτό, έδωσε πρώτος παράδειγμα καμπύλης που γεμίζει το επίπεδο και έδειξε πόση λίγη εμπιστοσύνη μπορούμε να έχουμε στην αφελή εποπτεία και τη γεωμετρική αίσθηση στα Μαθηματικά²⁹.

§. 6.5 Ο ορισμός του Jordan και η Ανατροπή του Peano

Ας επανέλθουμε τώρα στο περιεχόμενο που αποκτά ο όρος "καμπύλη". Στο τέλος του περασμένου αιώνα καμπύλες με εξίσωση της μορφής $F(x, y) = 0$ είναι κυρίως εκείνες που προκύπτουν ως τροχιές κινουμένων σημείων και είναι φυσιολογικό να θεωρούμε τις συντεταγμένες του σημείου σε συνάρτηση με τον χρόνο. Αυτό οδηγεί στη λεγόμενη *παραμετρική αναπαράσταση* μιας καμπύλης. Εδώ, οι συντεταγμένες των σημείων της εκφράζονται ως συνεχείς συναρτήσεις κάποιας τρίτης μεταβλητής t (συνήθως του χρόνου), της λεγομένης παραμέτρου: $x = x_1(t), y = x_2(t)$. Αν για παράδειγμα ένα σημείο M κινείται ομαλά με ταχύτητα v πάνω σε μια ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα των x , οι συντεταγμένες του κινητού σημείου μπορούν να εκφραστούν, ως προς το χρόνο, ως εξής: $x = vt\sigma\upsilon\eta\varphi, y = vt\eta\mu\varphi$. Οι εξισώσεις αυτές παρέχουν μια παραμετρική παράσταση της ευθείας. Ομοια αν το σημείο M κινείται ομαλά πάνω

²⁹Γ. Ρουσόπουλος, *Επιστημολογία των Μαθηματικών*, εκδ. Gutenberg, 1991.

σε ένα κύκλο με ακτίνα r και κέντρο την αρχή των αξόνων O , οι συ-
ντεταγμένες του κινητού μπορούν να περιγραφούν ως προς το χρόνο με
τις συναρτήσεις: $x = r\cos\omega t, y = r\sin\omega t$, όπου ω η γωνιακή ταχύτητα
του περιστρεφόμενου εφαρμοστού διανύσματος ($\vec{r} = OM$). Αυτή είναι
μια παραμετρική αναπαράσταση του κύκλου. Η αναπαράσταση μιας κα-
μπύλης με παραμετρική μορφή ανταποκρινόταν λοιπόν άριστα στην ιδέα
της καμπύλης ως τροχιάς ενός κινητού σημείου και ικανοποιούσε τις
απαιτήσεις που είχαν οι μαθηματικοί τόσο για τις αλγεβρικές όσο και
για τις υπερβατικές καμπύλες³⁰. Έτσι, ξεκινώντας από ειδικά παραδείγ-
ματα, φτάσαμε στο δεύτερο ήμισυ του 19ου αιώνα, στον υποδειγματικό
ορισμό της καμπύλης από τον C. Jordan (1893), ως τον δρόμο που δια-
γράφει η συνεχής κίνηση ενός σημείου³¹. Ο ορισμός αυτός υπήρξε πολύ
γενικός και δεν έδιδε μόνο καμπύλες, όπως φάνηκε με το παράδειγμα
του Peano που θα δούμε αμέσως παρακάτω. Ωστόσο, εφόσον έχουμε
στο μυαλό μας καμπύλες όχι ιδιαίτερα παθολογικές και συνήθως διαφο-
ρίσιμες, ο ορισμός αυτός παραμένει ικανοποιητικός και ως εκ τούτου
τον συναντούμε σε βιβλία αναλυτικής γεωμετρίας ακόμη και σήμερα.
Σημειώνουμε επίσης ότι ο Cantor θεωρούσε ουσιαστικά την καμπύλη
ως ένα κλειστό καλά διατεταγμένο σύνολο σημείων τέλει στον εαυτό του
(κάθε σημείο του είναι σημείο συσώρευσης), μια πολύ προωθημένη άποψη
συνδεδεμένη με την τοπολογία, που ωστόσο δεν καλύπτει όλο το πλάτος
των αντικείμενων που θα λέγαμε καμπύλες.

Η Συνάρτηση του Peano:³²

³⁰A. S. Parchomenko, Was ist eine kurve.

³¹C. Jordan, Cours d'Analyse, 2nd ed. vol. I, Paris 1893, vol. III, Paris 1887.

³²R. Engelking-K. Sieklucki, Topology, A Geometric Approach, Helderman Ver-
lag Berlin 1992, σελ. 201.

Στα 1890 ο Peano³³ έδωσε το παράδειγμα της καμπύλης που γεμίζει το επίπεδο και δημιούργησε αναταραχή στους μαθηματικούς, που αναγκάστηκαν να αναθεωρήσουν τον ρόλο της εποπτείας και να επανέλθουν, μια ακόμη φορά, στα θεμέλια της έννοιας της καμπύλης.

Προχωρώντας για να παρουσιάσουμε αυτή την καμπύλη του Peano θα κατασκευάσουμε μια συνεχή συνάρτηση f του μοναδιαίου διαστήματος I επί του τετραγώνου I^2 . Η συνάρτηση αυτή θα προκύψει ως όριο μιας ακολουθίας συναρτήσεων $f_n : I \rightarrow I^2$, ως εξής:

Με P_1 θα συμβολίσουμε την διαίρεση του διαστήματος I σε 9 ίσα τμήματα μήκους $\frac{1}{9}$ και με Z_1 θα συμβολίζουμε την διαίρεση του τετραγώνου I^2 σε 9 ίσα τετράγωνα που το μήκος της κάθε πλευράς τους είναι $1/3$.

Ορίζουμε την συνάρτηση $g : I \rightarrow I^2$ από τους τύπους:

$$g(0) = (0, 0) , g(1/9) = (1/3, 1/3) , g(2/9) = (0, 2/3) , g(1/3) = (1/3, 1) , g(4/9) = (2/3, 2/3) , g(5/9) = (1/3, 1/3) , g(2/3) = (2/3, 0) , g(7/9) = (1, 1/3) , g(8/9) = (2/3, 2/3) , g(1) = (1, 1)$$

³³Ο αρχικός ορισμός της συνάρτησης του Peano στο G. Peano, Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane, Math. Ann. 36 (1890), 157-160. ήταν αριθμητικός. Η γεωμετρική του ερμηνεία βρέθηκε από τον E. H. Moore, στο On certain crinkly curves, Trans. Amer. Math. Soc. 1 (1900), 72-90. Επίσης, την ίδια εποχή και (ανεξάρτητα) από τον A. Schönflies, Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 8 (1900) no 2, 1-250, σ. 122. Γι άλλες συναρτήσεις που "πληρούν το τετράγωνο" πρβλ. στα H. Hahn, Über die Abbildung einer Strecke auf ein Quadrat, Annali di Mathematica 21 (1913), 33-35, D. Hilbert, Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück, Mathematische Annalen 38 (1891), 459-460, και J. Hocking - G.S. Young, Topology, Dover, 1988. Επίσης βλέπε το W. Sierpiński, Sur une nouvelle courbe continue qui remplit tout une air plane, Bulletin International de l'Academie des Sciences et des Lettres de Cracovie, Ser. A (1912), 462-478.

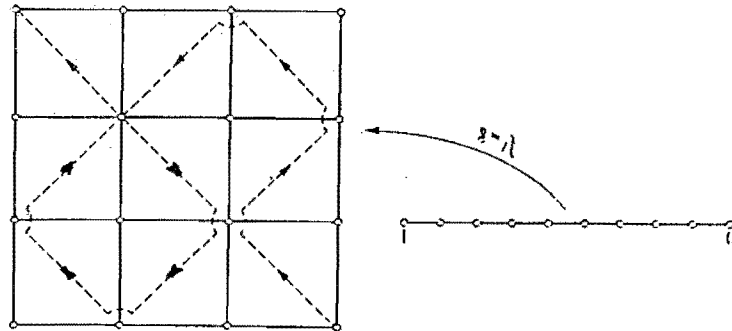


Figure 1: Το πρώτο βήμα στην κατασκευή του Peano.

Στην συνέχεια επεκτείνουμε γραμμικά κατά τμήματα σε όλο το μοναδιαίο διάστημα I και η συνάρτηση g αποκτά τα εξής χαρακτηριστικά:

1. Κάθε τμήμα της υποδιαίρεσης P_1 γίνεται διαγώνιος σε κάποια τετραγωνική υποδιαίρεση της Z_1 .
2. Κάθε τετραγωνική υποδιαίρεση της Z_1 έχει διαγώνιο που είναι εικόνα ενός τμήματος της υποδιαίρεσης P_1 .

Ορίζουμε $f_1 = g$. Δεχόμαστε ότι μας δίνονται η υποδιαίρεση P_n του μοναδιαίου διαστήματος I σε 9^n ίσα τμήματα με μήκος το καθένα 9^{-n} , η υποδιαίρεση Z_n του τετραγώνου I^2 σε 9^n ίσα τετράγωνα πλευράς 3^{-n} κι οι συνεχείς συναρτήσεις (μετασχηματισμοί) $f_n : I \rightarrow I^2$ που έχουν τις εξής ιδιότητες:

3. Κάθε τμήμα της υποδιαίρεσης P_n γίνεται διαγώνιος σε κάποια τετραγωνική υποδιαίρεση της Z_n .
4. Κάθε τετραγωνική υποδιαίρεση της Z_n έχει διαγώνιο που είναι εικόνα ενός τμήματος της υποδιαίρεσης P_n .

Θεωρούμε ένα τμήμα $[a, b]$ της υποδιαίρεσης P_n κι έστω ότι: $f_n(a) = (x_1, x_2)$, $f_n(b) = (y_1, y_2)$. Συμβολίζουμε με g_j την σύνθεση της συνάρτησης g με την στροφή του τετραγώνου I^2 γύρω από το κέντρο του κατά γωνία $\frac{1}{2}\pi j$, όπου το $j = 0, 1, 2, 3$. Για κάθε αριθμό r όπου $a \leq r \leq 1$, το επόμενο βήμα προκύπτει ως εξής:

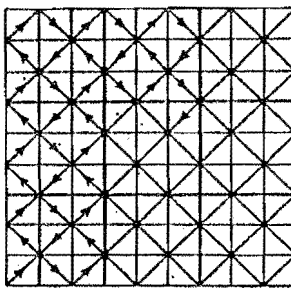


Figure 2: Το δεύτερο βήμα της κατασκευής του Peano.

$$f_{n+1}(r) = \begin{cases} (x^1, x^2) + 3^{-n}g_0(r), & \text{αν } x^1 < y^1, \quad x^2 < y^2, \\ (y^1, x^2) + 3^{-n}g_1(r), & \text{αν } y^1 < x^1, \quad x^2 < y^2, \\ (y^1, y^2) + 3^{-n}g_2(r), & \text{αν } y^1 < x^1, \quad y^2 < x^2, \\ (x^1, y^2) + 3^{-n}g_3(r), & \text{αν } x^1 < y^1, \quad y^2 < x^2, \end{cases}$$

Είναι τώρα εύκολο να αποδειχτεί ότι ο "μετασχηματισμός" $f_{n+1} : I \rightarrow I^2$, πληρεί τις συνθήκες 3. και 4. κι είναι συνεχής. Έχουμε ότι η ακολουθία των συναρτήσεων $\{f_n\}$ συγκλίνει στην f , δηλαδή για $r \in I, f(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(r)$ και η $f(r) : I \rightarrow I^2$ ονομάζεται *συνάρτηση ή μετασχηματισμός του Peano*. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής ενώ οι προσεγγίσεις της από τις $\{f_n\}$ για $n = 1, 2, \dots$ είναι όλο και πυκνότερες στο τετράγωνο I^2 .

Εξάλλου αφού ο χώρος I είναι συμπαγής και η συνάρτηση f είναι συνεχής, θα είναι συμπαγής και ο $f(I)$, άρα: $f(I) = I^2$.

Το μη αναμενόμενο αντι-παράδειγμα του Peano ήταν μια *ανωμαλία* από επιστημολογική άποψη³⁴. Εκλόνισε και την διαισθητική έννοια της διάστασης ενός χώρου ως του ελάχιστου αριθμού των παραμέτρων που χρειαζόμαστε για να τον περιγράψουμε και επέσπευσε την έρευνα για

³⁴Γ. Ρουσόπουλος, Επιστημολογία των Μαθηματικών.

ένα ακριβή ορισμό της διάστασης³⁵

Ο πρώτος ικανοποιητικός ορισμός της διάστασης δόθηκε από τον L. E. J. Brouwer το 1913³⁶. Στην παρουσίαση που ακολουθεί θα χρησιμοποιηθεί ο ορισμός που οφείλεται στον P. S. Urysohn, αλλά προκειμένου να ορισθεί η καμπύλη είναι απαραίτητο προηγουμένως να δοθεί η έννοια του συνεχούς.

§6.6 Η Συνεκτικότητα, το δισυνεκτικό, το συνεχές

Ενας τοπολογικός χώρος X είναι *συνεκτικός*³⁷ αν δεν μπορεί να εκφραστεί ως ένωση δυό ξένων, κλειστών και μη κενών συνόλων. Παρατηρούμε ότι το μοναδιαίο διάστημα είναι συνεκτικός χώρος, ενώ αν του αφαιρεθεί οποιοδήποτε σημείο του (που δεν είναι άκρο) παύει να έχει αυτή την ιδιότητα.

Το δισυνεκτικό σύνολο των *Knaster-Kuratowski*³⁸ προέκυψε ως αντιπαράδειγμα που έδειχνε ότι η συνεκτικότητα από μόνη της δεν μετέφερε της ιδότητες του συνεχούς φορέα, όπως διαισθητικά αντιλαμβανόμαστε

³⁵J.J. Charatonik, Outline of History of Continuum Theory, preprint, 1994.

³⁶Στο L.E.J. Brouwer Über den natürlichen Dimensionsbegriff, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 142 (1913), 146-152. ανέπτυξε μια ιδέα του H. Lebesgue, βλέπε H. Lebesgue, Sur la non applicabilité de deux domaines appartenant respectivement a des espaces de n et $n + p$ dimensions, Math. Ann. 70 (1911), 166-168. Ενας άλλος ορισμός της διάστασης διατυπώθηκε από τον P. Urysohn, στο Les multiplicités cantorienes, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris 175 (1922), 440-442. και (ανεξάρτητα) από τον K. Menger, Über die Dimensionalität von Punktmengen, Monatshefte für Mathematik und Physik 33 (1923), 148-160; 34, (1924), 137-161.

³⁷η έννοια οφείλεται στον C. Jordan (1883)

³⁸B. Knaster - K. Kuratowski, Sur les ensembles connexes, Fund. Math. 2 (1921), 206-255.

την ευθεία στην Ευκλείδεια γεωμετρία. Η κατασκευή του εν λόγω παραδείγματος γίνεται με την βοήθεια του συνόλου του Cantor³⁹.

Το σύνολο του Cantor έχει μεγάλο ενδιαφέρον λόγω των ιδιοτήτων του, μπορεί δε να κατασκευασθεί και ως εξής. Λαμβάνουμε το μοναδιαίο διάστημα $I = [0, 1]$ και το χωρίζουμε στα τρία διαστήματα, $[0, \frac{1}{3}]$, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $[\frac{2}{3}, 1]$. Το μεσαίο διάστημα είναι ανοικτό και το αφαιρούμε, απομένει ένα σύνολο που συμβολίζουμε C_1 . Τα άλλα δυο είναι κλειστά και ομοιομορφικά με το $[0, 1]$. Σε κάθε ένα από τα κλειστά αυτά διαστήματα επιτελούμε την ίδια διαδικασία χωρισμού σε τρία διαστήματα όπου τα δυο είναι κλειστά και το μεσαίο ανοικτό το οποίο και αφαιρούμε. Απομένει ένα σύνολο που καλούμε C_2 . Συνεχίζοντας την διαδικασία προκύπτει μια ακολουθία συνόλων C_n , όπου $n = 1, 2, \dots$ και το τελικό αποτέλεσμα που ονομάζουμε σύνολο Cantor είναι $C = \bigcap_1^\infty C_n$. Το σύνολο αυτό αποτελεί χαρακτηριστική περίπτωση αντίθεσης με την διαίσθηση, αφού από την κατασκευή του μοιάζει να περιέχει μόνο τα

³⁹Το σύνολο του Cantor ως ανάπτυγμα. Τα στοιχεία του συνόλου Cantor είναι πραγματικοί αριθμοί του διαστήματος $I = [0, 1]$. Αν χρησιμοποιήσουμε το 3-δικό σύστημα, αντί του 10-δικού, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε την συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί ο πραγματικός αριθμός $\alpha \in I$, για ν'ανήκει στο σύνολο Cantor C . Κάθε αριθμός $\alpha \in I$ έχει ένα ανάπτυγμα σε τριαδικό κλάσμα

$$\alpha = (0, a_1 a_2 \dots)_3$$

όπου $a_n = 0, 1$ ή 2 για $n = 1, 2, \dots$. Αυτό σημαίνει ότι:

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

Από την κατασκευή του συνόλου Cantor έχουμε ότι το α είναι στοιχείο του C αν και μόνο αν το α έχει ανάπτυγμα τέτοιο ώστε είτε $a_n = 0$ ή $a_n = 2$, για κάθε φυσικό αριθμό n .

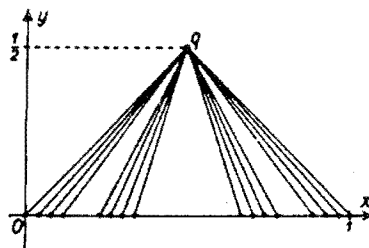


Figure 3: Η σκούπα του Cantor

σημεία που ήταν άκρα των διαστημάτων που αφαιρέθηκαν (αυτά είναι αριθμήσιμα το πλήθος). Ευκολα όμως αποδεικνύεται ότι περιέχει και ένα υπεραριθμήσιμο πλήθος σημείων.

Προχωρώντας στην κατασκευή του συνόλου των Knaster - Kuratowski παίρνουμε το σύνολο του Cantor να περιέχεται στο μοναδιαίο διάστημα του άξονα των x του επιπέδου. Ας ενώσουμε κάθε σημείο $c \in C$ με το σημείο: $q = (1/2, 1/2)$ με ένα ευθύγραμμο τμήμα L_c . Το τμήμα L_c έχει άκρα στα σημεία c και q . Η ένωση: $L = \cup_{c \in C} L_c$ όλων των τμημάτων L_c , καλείται *σκούπα του Cantor* (βλέπε στο Σχήμα 4) κι είναι συνεκτικό σύνολο, ως ένωση συνεκτικών συνόλων L_c , το καθένα από τα οποία περιέχει το σημείο q . Συμβολίζουμε με P το σύνολο που σχηματίζεται από τα άκρα όλων των διαστημάτων τα οποία αφαιρέθηκαν κατά την κατασκευή του συνόλου του Cantor. Παρατηρούμε ότι αφαιρέθηκε αριθμήσιμο πλήθος διαστημάτων, άρα το σύνολο P είναι αριθμήσιμο και πυκνό στο σύνολο του Cantor. Συμβολίζουμε $W = C - P$

Το δυσυνεκτικό σύνολο των Knaster-Kuratowski ορίζεται ως το υποσύνολο K της σκούπας του Cantor, που αποτελείται από τα σημεία (x, y) των τμημάτων L_c για τα οποία η τεταγμένη y είναι ρητός αριθμός όταν $c \in P$ κι άρρητος όταν $c \in W$. Δηλαδή, παίρνουμε τα τμήματα L_c που προκύπτουν από τα σημεία P με ρητή τεταγμένη και τα τμήματα L_c που βγαίνουν από το W τα σημεία με άρρητη τεταγμένη.

Είναι φανερό ότι το σύνολο K είναι πυκνό στην σκούπα του Cantor. Επιπλέον η τομή $K \cap L_c$ είναι πυκνό υποσύνολο του τμήματος L_c για κάθε $c \in C$. Το σημείο q ανήκει στο K . Ισχύουν τα παρακάτω:

Πρόταση: Το δισυνεκτικό σύνολο K των Knaster-Kuratowski είναι συνεκτικό⁴⁰.

Παρατήρηση. Το σύνολο K δεν είναι συνεκτικό αν του αφαιρεθεί το σημείο q . Επιπλέον, η διαφορά $K - \{q\}$ δεν έχει κανένα συνεκτικό υποσύνολο, εκτός από τα μονοσύνολα.

Όπως ήταν φυσικό ο ορισμός της καμπύλης όφειλε να μεταφέρει το νόημα του συνεχούς φορέα στην τυχαία καμπύλη, μέσω των συνεχών συναρτήσεων. Οι εργασίες ωστόσο του Peano και του Jordan, έδειξαν ότι αυτό που φαινόταν αυτονόητο αναζητούσε περαιτέρω επεξεργασία. Ποια ήταν εκείνη η ιδιότητα, η α priori παραδοχή μας που θα απομόνωνε το διαισθητικό νόημα του συνεχούς φορέα; Η συνεκτικότητα στάθηκε ανεπαρκής, αφού το δισυνεκτικό σύνολο των Knaster-Kuratowski έδειξε ότι σύνολα με δομή ασυνεχή, όπως σχεδόν εκείνης των ρητών αριθμών, μπορούσαν να συμπεριληφθούν μέσα στα συνεκτικά. Όσο για τις συνεχείς εικόνες του $[0, 1]$, αυτές μετέφεραν κάτι πολύ περισσότερο από αυτό που ζητούσαμε, όπως έδειχνε το παράδειγμα του Peano. Τελικά φάνηκε ότι η έννοια του συνεχούς φορέα είχε ανάγκη τόσο την συνεκτικότητα όσο και την συμπάγεια, (χωρίς να απαιτεί το να είναι φραγμένο το σύνολο, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση της πραγματικής ευθείας). Έτσι φθάνουμε στον ορισμό:

⁴⁰ Απόδειξη προαναφερθείσα εργασία των Knaster-Kuratowski ή στο A. Lelek, Εισαγωγή στα σύνολα και την τοπολογία, Εκδ. Τροχαλία 1995, μετ. Κ. Σκανδάλη, σ. 88, και L.A. Steen - J. A. Seebach Jr., Counterexamples in topology, Springer - Verlag 1978, σ. 147.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένας μετρικός χώρος που είναι συμπαγής και συνεκτικός ονομάζεται συνεχές.

Το μοναδιαίο διάστημα I είναι ένα συνεχές όπως επίσης ο κύβος I^n , η σφαίρα B^n ή η σφαιρική επιφάνεια S^{n-1} . Η σκούπα του Cantor είναι ένα συνεχές. Το δισυνεκτικό σύνολο των Knaster-Kuratowski όμως δεν είναι συνεχές, αφού δεν είναι συμπαγές.

§6.7 Η Τοπολογική Διάσταση και η Καμπύλη

Ένα σύνολο που δεν περιέχει άλλα συνεχή εκτός από τα μονοσύνολα λέγεται σημειογενές. Κάθε σημειογενές σύνολο λέγεται ότι είναι 0-διάστατο. Το σύνολο Cantor για παράδειγμα είναι 0-διάστατο.

Καμπύλη είναι ένα συνεχές X που κάθε σημείο του έχει για μια οποδήποτε μικρή περιοχή με σημειογενές σύνορο στο X . Με άλλα λόγια, για κάθε σημείο $p \in X$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό σύνολο V στο X τέτοιο ώστε: $p \in V$, $\text{diam}V < \varepsilon$ και το σύνολο $\text{bd}(V) = \text{cl}V - V$ είναι σημειογενές σύνολο.

Μία καμπύλη λέμε ότι είναι ένα 1-διάστατο συνεχές.

Για μια περισσότερο αυστηρή διατύπωση της έννοιας δίδουμε τον παρακάτω επαγωγικό ορισμό του P. Urysohn⁴¹. Για ένα διαχωρίσιμο μετρικό χώρο X ορίζουμε ως διάσταση του χώρου X και συμβολίζουμε με $\text{ind}X$, ένα ακέραιο αριθμό μεγαλύτερο από τον -1 , ή το σύμβολο ∞ , που ικανοποιεί τις απαιτήσεις που ακολουθούν:

1. $\text{ind}X = -1$ αν και μόνο αν $X = \emptyset$,
2. $\text{ind}X \leq n$, όπου $n = 0, 1, 2, \dots$, αν για κάθε $x \in X$ και κάθε ανοικτό σύνολο $V \subset X$ που περιέχει το x , υπάρχει ανοικτό σύνολο

⁴¹P. Urysohn, Les inmultiplicités cantoriennes, και R. Engelking-K. Sieklucki, Topology, A Geometric Approach.

$U \subset X$ τέτοιο ώστε $x \in U \subset V$ και $indbd(U) \leq n - 1$,

3. $indX = n$ αν $indX \leq n$ και δεν ισχύει η σχέση $indX \leq n - 1$,

4. $indX = \infty$, αν $indX \neq n$ για $n = -1, 0, 1, 2, \dots$

Ετσι λοιπόν τώρα μπορεί να δοθεί ένας αυστηρός ορισμός της καμπύλης, όπως δόθηκε κατά την πρώτη εικοσαετία αυτού του αιώνα από τον P. Urysohn.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ονομάζουμε καμπύλη ένα συνεχές διάστασης ένα.

Ενα βασικό αποτέλεσμα που χαρακτηρίζει τις καμπύλες που περιέχονται σε χώρο οποιασδήποτε διάστασης είναι ότι⁴²:

Κάθε καμπύλη είναι ομοιομορφική με ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^3 .

Η Θεωρία των Καμπύλων αποτέλεσε ένα κομψό κλάδο της τοπολογίας κι έδωσε ενδιαφέροντα αποτελέσματα και εντυπωσιακά παραδείγματα όπως εκείνα των τοπολογικών fractals⁴⁴. Η καμπύλη συνεχίζει σήμερα να αποτελεί εργαλείο και αντικείμενο μελέτης όπως στις διαφορικές εξισώσεις, την αλγεβρική και διαφορική γεωμετρία, τα δυναμικά συστήματα, στην έρευνα του DNA

⁴²J. Hocking - G.S. Young, Topology, Dover, 1988, Θεώρημα 3-62, σ. 148.

⁴⁴A. Lelek, Εισαγωγή στα σύνολα και την τοπολογία, K. Kuratowski, Topology II, Academic Press 1968, K. Menger, Kurventheorie, Teubner, Leibzig u. Berlin, 1932. G. Whyburg, Analytic Topology, Amer. Math. Soc. Colloq. Publications 28 (1942) και G. Whyburg, What is a curve? Studies in Mathematics 5, p 23 Math. Ass. of Am. 1968.

Η σύγκλιση κονστρουκτιβισμού και πλατωνισμού στον Husserl και η Διδακτική των Μαθηματικών

Εισαγωγή

Οι φιλοσοφικές και ιδεολογικές αντιλήψεις του καθηγητή δεν αποτελούν ένα απλά ρητορικό πλαίσιο στην δουλειά του. Είναι πολύ αποφασιστικό στοιχείο και αργά ή γρήγορα θα αποτυπωθεί στην διδασκαλία του, Sierpinska¹. Στο πεδίο της επιστημολογίας τις προηγούμενες δεκαετίες αναπτύχθηκε μια συζήτηση μέσα στη Διδακτική των Μαθηματικών με την τάση να προτείνει ρηξικέλευθες λύσεις στη φιλοσοφία των Μαθηματικών. Το ρεύμα του ριζοσπαστικού κονστρουκτιβισμού κάνει την εμφάνισή του με τον Ernst Von Glasersfeld² τη δεκαετία του 80. Κυρίαρχη σε αυτή την συζήτηση, ήταν η ιδέα του Piaget για την κατασκευή της γνώσης, σύμφωνα με την οποία το άτομο δρα για να προσαρμοστεί στο περιβάλλον και η γνώση εμφανίζεται ως ενθυλάκωση αυτής του της δράσης. Η αντίληψη αυτή, μεταφέρθηκε στο πλαίσιο της έρευνας της Διδακτικής των Μαθηματικών και αξιοποιήθηκε μέσα σε σχεδιασμούς διδασκαλίας που προέβλεπαν την ενεργή συμμετοχή του μαθητή στη διαδικασία της μάθησης· η εν λόγω όμως μεταφορά προκάλεσε και μια σειρά απλοποιήσεων και παρεξηγήσεων. Αυτές αφορούσαν σε απόψεις που ήθελαν τα μαθηματικά απλές συμβάσεις *ονοματολογικές* (κλασικός *νομιναλισμός*), είτε τα περιορίζουν στις κατασκευές εκείνες που μπορούν οι μαθητές να κάνουν στην τάξη· τέλος ότι τα μαθηματικά δεν έχουν να κάνουν με τις ‘προβληματικές’ πλατωνικές θεωρήσεις. Πολύ νωρίς, άρχισαν αντιδράσεις όπως αυτή του Kilpatric³ (1986) και αργότερα ακολούθησαν άλλοι. Στο σημείωμα αυτό, εκτός των άλλων, μεταφέρω τον απόηχο αυτής της συζήτησης για την οποία έχουν γραφεί πλήθος άρθρων τα τελευταία 30 χρόνια όπως μπορεί να δει κανείς στην σύνοψη των Steffe & Kieren⁴ (1994). Ισχυρίζομαι ότι κανονιστικές και κατασκευαστικές αντιλήψεις, όπως αναδείχθηκαν από τους μεγάλους διανοητές, αν κατανοηθούν στην φιλοσοφική τους διάσταση δεν έρχονται κατ’ανάγκη σε αντίθεση προς τις ρεαλιστικές θέσεις. Εξάλλου, έχει πραγματικά ενδιαφέρον η σύγκλιση μεταξύ κονστρουκτιβισμού και πλατωνισμού όπως την παρουσιάζει ο Husserl⁵ στην ‘Προέλευση της Γεωμετρίας’ προσπαθώντας να δείξει ένα

¹ Sierpinska, A.: ‘Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, sociocultural approaches, interactionism’, in Steibring, M. Bartolini, Bussi and Sieprinska (eds), *Language and Communication in the Mathematics Classroom, The National Council of Teachers of Mathematics*, Reston, Virginia, pp. 30-62.

² Von Graserfeld E., (1983) Learning as a constructive activity. In Bergerson & N. Herscovits (Eds), *Proceedings of the Fifth Annual Meeting of the North American Chapter of the PME* (Vol1, pp.42-69). Montreal University.

³ Kilpatric J. (1988) What Constructivism Might Be in Mathematics Education, *PME*.

⁴ Steffe L. P. & Kieren T. (1994) Radical Constructivism and Mathematics Education, *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 711-33.

⁵ Husserl E. (2003) Η προέλευση της Γεωμετρίας, μετάφραση Π. Κόντου, Εκδόσεις Εκκρεμές.

υπόδειγμα κατασκευής μιας μαθηματικής επιστήμης και μιας επιστήμης εν γένει.

Το ζήτημα μπορεί να μελετηθεί σε δυο πλαίσια ανεξάρτητα ή κατάλληλα συνδεδεμένα μεταξύ τους. Το ένα αφορά την καθαρά φιλοσοφική συνιστώσα του και το άλλο τον τρόπο με τον οποίο αναφέεται στις συζητήσεις αυτών που ασχολούνται με τη Διδακτική των Μαθηματικών και δημοσιεύουν στα σχετικά επιστημονικά περιοδικά.

Το πεδίο της Φιλοσοφίας

Κατά αρχήν, η φιλοσοφική συζήτηση που αφορά τον ρεαλισμό των μαθηματικών ιδεών δεν αποτελεί κάτι το παρωχημένο, όπως κάποιοι ισχυρίζονται. Η διαμάχη, πλατωνισμού και αντιπλατωνισμού, υποστηρίζει η Δήμητρα Χριστοπούλου⁶ είναι από τις πιο ενδιαφέρουσες σύγχρονες φιλοσοφικές διαμάχες και συνδέεται άμεσα με μεγάλα προβλήματα άλλων θεματικών. Ο πλατωνισμός, αναφέρει, εμφανίζεται με πολλές διαφορετικές μορφές και με διαφορετικά επιχειρήματα. Οι επικριτές του, συνήθως, τοποθετούνται σε κάποιο απομονωμένο από αυτά. Στην σημερινή εκδοχή, ο πλατωνισμός, ως μαθηματικός ρεαλισμός, διατηρεί τα βασικά αιτήματα της καθολικότητας και της αναγκαιότητας των μαθηματικών δηλώσεων δηλαδή του καντιανού απριορισμού και θεωρεί επιπλέον την μαθηματική αλήθεια ανεξάρτητη της ιστορίας της ανθρωπότητας.

Θα πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι πρώτος ο Πλάτων έθεσε το πρόβλημα της αντικειμενικότητας των μαθηματικών και το οποίο επαναδιατυπώνεται σε κάθε εποχή με διαφορετικό τρόπο, όπως θα έλεγε ο Rorty⁷. Κατά δεύτερο λόγο, προσέφερε μια λύση στο πρόβλημα της αντικειμενικότητας των μαθηματικών αντικειμένων με την επινόηση του κόσμου των Ιδεών. Με αυτή την αντίληψη, συνδέει την αλήθεια και την ύπαρξη των αντικειμένων των μαθηματικών όπως και την προφανή αυτονομία τους, ώστε να υπακούουν σε νόμους εσωτερικούς και στη λογική.

Το μειονέκτημα του πλατωνισμού (η θεωρία της ανάμνησης στον Μένωνα) καθώς δεν μας εξηγεί πώς ο άνθρωπος έρχεται σε επαφή με αυτό τον κόσμο των Ιδεών αναγνωρίστηκε πολύ νωρίς από τον Αριστοτέλη: ποιος είναι ο τρόπος που κοινωνούνται οι ιδέες αυτές στον ανθρώπινο νου; Ωστόσο, πρέπει να διευκρινίσουμε ότι για τον Πλάτωνα τα μαθηματικά δεν είναι αποκομμένα από τον κόσμο αλλά θεωρούνται διφυή: από τη μια μεριά βοηθούνται από τη αξιοποίηση

⁶ Χριστοπούλου Δ., (2009) περί μαθηματικού πλατωνισμού (αναφορά στο σχόλιο του E. Davies). *περιοδικό Cogito* μάρτιος 09, σελ. 84-87. Χριστοπούλου Δ., 'Κριτική προσέγγιση στο επιχείρημα του Προγράμματος του Νεολογισμού για τους φυσικούς αριθμούς ως πραγματικά αντικείμενα και για την προέλευση της αριθμητικής γνώσης', διδακτορική διατριβή ΜΙΘΕ, 2005.

⁷ Rorty R. (2001), Η Φιλοσοφία και ο καθρέφτης της Φύσης, Εκδόσεις κριτική, μετ. Μπορλάκης & Φουρτούνης.

των ορωμένων (του περιβάλλοντος κόσμου) ειδών, που αποτελούν το έρεισμα για τους συλλογισμούς του ανθρώπου ενώ από την άλλη, η διάνοια δεν αναφέρεται στα ορώμενα αλλά σε εκείνο των οποίων αυτά είναι εικόνες. Αυτή η διευκρίνιση είναι αναγκαία καθώς ενίοτε ο πλατωνισμός παρουσιάζεται ως μια θεωρία που αρνείται ολοκληρωτικά τον κόσμο. Ελεύθερα μιλώντας, θα έλεγα ότι ο Πλάτων καθόρισε πολύ νωρίς ένα πλαίσιο που αργότερα θα ονομάσουμε εποπτεία. Ενώ, ξεχώρισε την ‘εποπτεία’ των ορωμένων από τις απόλυτες ιδέες όπου τα μαθηματικά υπάρχουν ως αφηρημένες ιδεατότητες.

Στον Descartes⁸ (1972) συναντούμε μια άλλη εκδοχή της προέλευσης της αντικειμενικότητας:

“Όταν φαντάζομαι ένα τρίγωνο, μολονότι μια τέτοια μορφή δεν υπάρχει ίσως σε κανένα μέρος του κόσμου (και δεν υπήρξε ποτέ), παρά μονάχα στη σκέψη μου, δεν παύει ωστόσο να υφίσταται μια κάποια φύση ή μορφή ή ορισμένη ουσία αυτής της μορφής, η οποία είναι αμετάβλητη και αιώνια, χωρίς να την έχω επινοήσει εγώ και πού, με κανένα τρόπο, δεν εξαρτάται απ’το μυαλό μου. Όπως φαίνεται, απ’ το ότι μπορούμε να αποδείξουμε διάφορες ιδιότητες του τριγώνου αυτού, δηλαδή πώς οι τρεις γωνίες του έχουν άθροισμα ίσο με δυο ορθές, πώς η μεγαλύτερη γωνία αντικρίζει τη μεγαλύτερη πλευρά και άλλα παρόμοια, τις οποίες τώρα, είτε το θέλω είτε όχι, αναγνωρίζω πολύ καθαρά και με πολλή προφάνεια ότι του ανήκουν, μολονότι δεν το σκέφτηκα πριν καθόλου, όταν φανταζόμουν για πρώτη φορά ένα τρίγωνο”.

Σε αυτή την παρατήρηση στον Στοχασμό V, ο Descartes εκφράζει την απορία και τον θαυμασμό του μπροστά στην μαθηματική αλήθεια, η οποία προκύπτει ως αποκάλυψη μιας προϋπάρχουσας πραγματικότητας, ένας πλατωνισμός δηλαδή, που ωστόσο έχει μια απόκλιση από τον αντικειμενικό ιδεαλισμό των αρχαίων, αφού οι ιδέες εμφανίζονται ως έμφυτες, εγκαταστημένες μέσα στον ανθρώπινο νου από τον ίδιο το Θεό!

Ο μεγάλος φιλόσοφος του 20ου αιώνα Whitehead διατυπώνει μια πολύ ισχυρή δήλωση για τον πλατωνισμό καθώς θεωρεί ότι όλη η φιλοσοφική παράδοση της δυτικής φιλοσοφίας θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως σημειώσεις πάνω στον Πλάτωνα!⁹ . Το ότι μεγάλοι φιλόσοφοι των μαθηματικών όπως Frege, Russell, Cantor, Bernays, Hardy, Hilbert, Gödel, υπήρξαν ρεαλιστές (πλατωνικοί) στις αντιλήψεις τους για τα μαθηματικά ενισχύει την παραπάνω ισχυρή δήλωση του συνεργάτη του Russell.

Στην εποχή μας, αναζητώντας ιδέες για την γοητευτική άποψη του

⁸ Descartes R., (1972). Philosophical Writings, Nelson’s University Paperbacks, Meditation. Ελληνική μετάφραση ‘Μεταφυσικοί Στοχασμοί, Στοχασμός (V)’, Εκδόσεις Αναγνωστίδη.

⁹ Bhaskar R. (1994), Plato etc. Verso, London- New York.

πλατωνισμού βρίσκουμε στον Αναπολιτάνο¹⁰ επιχειρήματα και διατυπώσεις υποστήριξης της κλασική θέσης του ρεαλισμού:

“Ο ευφυής μαθηματικός δεν εφευρίσκει αλλά ανακαλύπτει αυτό που είναι ώριμο να ανακαλυφθεί. Το μαθηματικό γεγονός αναμένει με σιδηρά αναγκαιότητα τον ιστορικό χρόνο για να ανακαλυφθεί αυτό το ίδιο ή κάτι μαθηματικά ισοδύναμο του βαθειά χωμένο στην θεωρητική ύφανση του κόσμου... η εγκυμοσύνη αυτή δεν έχει ιστορική έναρξη. Το μαθηματικό γεγονός εκυοφορείτο ανέκαθεν”.

Είναι γνωστό, ότι οι περισσότεροι ενεργοί μαθηματικοί νιώθουν ως ‘ήπιοι’ πλατωνικοί. Ένας από αυτούς, ο Bill Tutte, από τους δημιουργούς της Θεωρίας Γραφημάτων στον 20ο αιώνα προβληματίζεται για το πλατωνικό ή μη των μαθηματικών και λει χαρακτηριστικά:

“Οι θεωρίες της φυσικής... Είναι πράγματι μαθηματικές θεωρίες μαζί με κάποια αυθαίρετη ταύτιση μαθηματικών και φυσικών εννοιών. Το γιατί τέτοιες θεωρίες πρέπει να είναι τόσο πετυχημένες όσο είναι, αποτελεί ένα φιλοσοφικό μυστήριο. Κάποιοι υποστηρίζουν ότι δεν υπάρχει κανένα μυστήριο. Οι μαθηματικοί έχουν διεισδύσει τόσο πολύ στο χώρο της Φυσικής που έχουν επιβάλλει τις δικές τους συνήθειες στον τρόπο σκέψης. Προσωπικά δεν πιστεύω, πως γι’ αυτό το λόγο είναι τόσο επιτυχημένες θεωρίες. Είμαι πεπεισμένος ότι πολλές από τις αποτυχίες μου στην μαθηματική έρευνα οφείλονταν στην προσπάθεια μου να επιβάλλω τα δικά μου πρότυπα στο δύστροπο αντικείμενο. Στις επιτυχίες μου, πάλι, είχα την εντύπωση, ότι το να βρίσκω το πρότυπο εκεί όπου προϋπήρχε, ήταν κάτι που μου προκαλούσε έκπληξη και συγχρόνως κάτι που ξεπερνούσε τις δυνατότητες της εφευρετικότητας μου”.

Επικριτής μιας τέτοιου τύπου αιτιολόγησης, ο Davies¹¹ δεν θεωρεί αξιόπιστα επιχειρήματα που στηρίζονται σε εσωτερικές παρορμήσεις, έστω και της πλειοψηφίας των μαθηματικών, καθώς δηλώνει ότι τέτοια προβλήματα δεν λύνονται με δημοσκοπήσεις!

Εξάλλου, ο επιφανής Dieudonné παρατηρούσε ότι “κάθε μαθηματικός έχει την αίσθηση ότι δουλεύει με κάτι το πραγματικό, αλλά ωστόσο η αίσθησή του είναι πιθανόν μια ψευδαίσθηση, αν και βέβαια πολύ πειστική ψευδαίσθηση!”¹²

Στον Wittgenstein, που υπήρξε ένας από τους πλέον ρηξικέλευθους

¹⁰ Αναπολιτάνος Δ., (2009), Η Φύση των Μαθηματικών και το Πληροφοριακό Περιεχόμενο των Μαθηματικών Αληθειών (preprint).

¹¹ Davies E., “ας αφήσουμε τον πλατωνισμό να πεθάνει”, μετάφραση Δ. Χριστοπούλου, *περιοδικό Cogito*, μάρτιος 09, σελ. 82-83. Αθήνα.

¹² Tragesser R. S. (1984), *Husserl and Realism in Logic and Mathematics*, Cambridge.

φιλόσοφος του 20ου αιώνα, συναντούμε μια ιδέα συμβασιοκρατίας¹³. Αλλά, όπως εύστοχα παρατηρεί ο Ernest¹⁴, η σχέση ανάμεσα σε συμφωνία, σύμβαση και αλήθεια στη βιτγκενσταϊνική φιλοσοφία καθίσταται πολύ πιο σύνθετη και εκλεπτυσμένη απ' ό,τι οι αφελείς συμβασιοκρατικές ερμηνείες της έχουν υπαινιχθεί. Ο Ernest υποστηρίζει ότι ο Wittgenstein δέχεται ότι η μαθηματική γνώση είναι a priori συνθετική ενώ δεν αρνείται την ιδέα της αντικειμενικότητας ή της βεβαιότητας της μαθηματικής γνώσης· αντιθέτως, επανερμηνεύει τις έννοιες αυτές με στόχο να επισημάνει ότι η μαθηματική γνώση εδράζεται στα γλωσσικά παιχνίδια και τις μορφές ζωής. Επιθυμεί να διαφυλάξει την αντικειμενικότητα των μαθηματικών απορρίπτοντας όμως τη μεταφυσική προέλευση μίας τέτοιας αντικειμενικότητας. Επομένως, όπως αναφέρει ο Gerrard¹⁵ “ο στόχος του Wittgenstein δεν είναι η κοινή μας αντίληψη για την αντικειμενικότητα των μαθηματικών, αλλά η παραπλανητική εικόνα μας για την πηγή της εν λόγω αντικειμενικότητας”. Αυτή η αντικειμενικότητα απορρέει από την πρακτική· αν κινούμαστε έξω από τα πλαίσια της πρακτικής δεν κινούμαστε στα πλαίσια του λάθους αλλά της ανοησίας. Ο Gerrard επιμένει, “ο Wittgenstein δεν αντιτίθεται στην ιδέα μιας μαθηματικής πραγματικότητας, όπως κάνουν οι αφελείς ενστάσεις στον πλατωνισμό”. Η μαθηματική αντικειμενικότητα και αναγκαιότητα, στην ύστερη φιλοσοφία του Wittgenstein, δεν προκύπτουν με την επίκληση άνευ νοήματος εξωτερικών κριτηρίων, αλλά οφείλονται στον ειδικό ρόλο του μαθηματικού γλωσσικού παιχνιδιού. Οι κοινωνικές πρακτικές ενέχουν μοτίβα γλωσσικής χρήσης: “Θα ονομάσω γλωσσικό παιχνίδι το σύνολο που αποτελείται από τη γλώσσα και τις δραστηριότητες με τις οποίες αυτή είναι συνυφασμένη. Τα γλωσσικά παιχνίδια, όπως είναι εμπεδωμένα στις κοινωνικές πρακτικές, έχουν μία προτεραιότητα έναντι του ατόμου· το άτομο μυείται σε αυτά”¹⁶.

Στον Wittgenstein δηλαδή συναντούμε μια άποψη που βρίσκεται μεταξύ απριωριστικών αρχών και κοινωνικών συμβάσεων, που θέλει τα μαθηματικά να αποτελούν γλωσσικούς και λογικούς κανόνες που έχουμε υιοθετήσει¹⁷, οι οποίοι με τη σειρά τους στηρίζονται σε αρχές, κατά σύμβαση αμετακίνητες, ως

¹³ McDawell J. (1995), Ο Wittgenstein περί του να ακολουθεί κανείς έναν κανόνα, *ΔΕΥΚΑΛΙΩΝ* 13/2-3, σελ. 175-214. Τσινόρεμα Β. (1995), Ο Wittgenstein και η συζήτηση γύρω από την γλωσσική κανονιστικότητα, *ΔΕΥΚΑΛΙΩΝ* 13/2-3, σελ. 137-173.

¹⁴ Ernest, P. (1998), «Wittgenstein's Philosophy of Mathematics», 64-96, στο *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*, State University of New York Press, New York.

¹⁵ Gerrard S., (1996), «A Philosophy of Mathematics between two Camps», Sluga & Stern: 171-97.

¹⁶ Κοτσαλίδης Φώτης, (2009), “Ζητήματα διδασκαλίας και τα μαθηματικά παραδείγματα στη φιλοσοφία του Wittgenstein”. Διπλωματική του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών. Master Thesis Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ.

¹⁷ Ayer A. J. (1994), *Γλώσσα, Αλήθεια και Λογική*, μετάφραση Λ. Τάταρη- Ντουριέ, Εκδόσεις Τροχαλία.

κανονιστικές (normative elements του Wartofsky¹⁸). Μιλώντας βέβαια για τα μαθηματικά, βλέπει κάτι πιο ισχυρό από τις απλές συμβάσεις, καθώς λέει· σε αντίθεση προς τις εμπειρικές προτάσεις οι μαθηματικές δεν μπορούν να ανατραπούν από κάποιο εμπειρικό δεδομένο. Κατέχουν έναν ιδιαίτερο ρόλο στη γλώσσα μας. “Αυτό που θέλω να πω είναι: Τα μαθηματικά είναι πάντοτε μέτρο και όχι κάτι μετρούμενο”. Ο Wittgenstein θεωρεί το μη αναθεωρήσιμο των μαθηματικών προτάσεων ως το πιο σημαντικό στοιχείο της φυσιογνωμίας τους. Όταν γίνεται λόγος για μη αναθεωρήσιμο χαρακτήρα, αυτό δε σημαίνει ότι οι μαθηματικές προτάσεις δεν αλλάζουν – η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να προσφέρει πληθώρα από παραδείγματα προτάσεων που προηγουμένως θεωρούνταν δίχως νόημα και που τώρα θεωρούνται αναγκαίες αλήθειες – για παράδειγμα η πρόταση $2 - 4 = -2$ πριν και μετά την αποδοχή των αρνητικών αριθμών. Ο Wittgenstein θεωρεί ότι οι μαθηματικές προτάσεις δεν περιγράφουν εμπειρικά γεγονότα, αλλά παρέχουν ένα πλαίσιο για την περιγραφή τους και, ως εκ τούτου, οι εμπειρικές προτάσεις δεν δύνανται να αναθεωρήσουν τα μαθηματικά.

Ο Wittgenstein στις ΠΘΜ σημειώνει: “Αυτά που λες φαίνεται να κατατείνουν στον ισχυρισμό ότι η λογική ανήκει στη φυσική ιστορία των ανθρώπων. Κι αυτό δε συμβιβάζεται με τη σκληρότητα του λογικού ‘πρέπει’” (ΠΘΜ, VI, 49). Οι προτάσεις της φυσικής ιστορίας είναι εμπειρικές και ενδεχομενικές, ενώ οι προτάσεις της λογικής και των μαθηματικών είναι μη εμπειρικές και αναγκαίες¹⁹.

Έτσι, αν θα θέλαμε να κατανοήσουμε την σημασία του συμβασιοκρατικού μέρους των μαθηματικών πρέπει να ανατρέξουμε στις μεταμαρξιστικές θέσεις των Vygotsky²⁰, Wartofsky²¹ και στις πραγματιστικές αναλύσεις των σημειολόγων όπως του Peirce και του Saussure. Για τον κλασσικό λογικό και σημειολόγο Peirce τα μαθηματικά είναι *συμπεριφορές του νου*, (habits)²². “Τα πράγματα έχουν μια τάση να αποκτούν συνήθειες και αυτές πήραν την μορφή νόμων”²³. Ο Peirce επικαλείται ένα συμβασιοκρατικό²⁴ πλαίσιο αλλά ακόμη και για αυτόν “τα

¹⁸ Radford L. (1998) On Culture and Mind, a post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought, in 23rd Annual Meeting of the Semiotic Society of America, Victoria College, University of Toronto, October 15-18.

¹⁹ Βλ. Κοτσαλίδη

²⁰ Όλες οι ανώτερες νοητικές λειτουργίες αποτελούν εσωτερικεύσεις κοινωνικών σχέσεων Vygotsky L. S. (1981) The Genesis of Higher Mental Functions in Wertsch J.V. (Ed), *The concept of activity in Soviet Union Psychology*, New York.

²¹ Radford, 1998

²² βλέπε Παράρτημα 1 και Radford L. (2006), The Anthropology of Meaning. *Educational Studies of Mathematics 61*: 39-65.

²³ Nicolacopoulos P. (1992), Norms, Conventions and Rationality, 231-237 in Historical Types of Rationality, *Proceedings of the First Greek-Soviet Union Symposium on Science and Society*, Athens, October 1990. National Technical University of Athens.

²⁴ Η Presmeg (2003) δίνοντας ένα παράδειγμα κανονιστικού περιορισμού αναφέρεται στον κανόνα και διαβήτη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

μαθηματικά είναι *αντικειμενικά, ακριβή και γενικά...* Αν κάτι πρέπει να θεωρηθεί υποκειμενικό στα μαθηματικά αυτό είναι η εξιδανίκευση στην οποία προβαίνει ο μαθηματικός προκειμένου να δημιουργήσει το μοντέλο μιας συγκεκριμένης κατάστασης πραγμάτων”²⁵,

Σε αυτή τη λογική που θα επιχειρούσε σχετικοποίηση των μαθηματικών αληθειών μέσω της ιστορικής εξέλιξης και των κοινωνικών συμβάσεων, ο Αναπολιτάνος απαντά ακόμη πιο κάθετα θεωρώντας ότι η απαραίτητη ιστορική ανάλυση “παρερμηνεύεται στην κατεύθυνση της οντολογίας”. Για αυτόν η μαθηματική δήλωση είναι “*αντικειμενική, ανιστορική και χωροχρονικά ανεξάρτητη*”. Έτσι, οι ιστορικές στιγμές, οι κοινωνικές πρακτικές και οι σημειολογίες δεν αποτελούν παρά υπαρκτικές αφορμές εν χώρω και χρόνω της αναγκαίας ανάδυσης των μαθηματικών γεγονότων στο πλαίσιο του έλλογου κόσμου. Επίσης, με παράδειγμα, την ανακάλυψη των μη ευκλείδειων γεωμετριών ‘πριν από την εμφάνιση μοντέλων αναπαράστασης και ψευδοεμπειρικής στήριξης τους αποτελούν παραδείγματα της οντολογικής και επιστημολογικής προτεραιότητας των μαθηματικών’²⁶.

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι την ακραία συμβασιοκρατική αντίληψη (νομιναλιστικού χαρακτήρα) την συναντούμε σπάνια, όπως στους Davis & Hersh (σελ. 386)²⁷ που διατυπώνουν μια απόλυτη θέση που θα ήθελε τα Μαθηματικά απλές συμβάσεις. “Τα μαθηματικά... είναι μάλλον ένα τμήμα των ανθρώπινων μελετών που μπορεί να πετύχει μια επιστημονικοφανή συναίνεση, ικανή να εδραιώσει *αναπαραγώγιμα* αποτελέσματα... το νόημα (τους) όμως πρέπει να βρεθεί στην κοινή κατανόηση των ανθρώπινων υπάρξεων, όχι σε μια εξωτερική μη ανθρώπινη πραγματικότητα... είναι παρόμοια με μια ιδεολογία, μια θρησκεία ή μια μορφή τέχνης.” Η νομιναλιστική θεώρηση είναι μια ακραία τοποθέτηση που δεν συμβαδίζει μήτε με τις αρχικές αιτιάσεις των κονστρουκτιβιστών που έκαναν αναφορά στον ‘καντιανό’ Piaget²⁸.

Την *κατασκευασιοκρατική* αντίληψη για τα μαθηματικά, μέσα στην *καθαρή εποπτεία*, συναντούμε για πρώτη φορά στον Kant²⁹. Αλλά ωστόσο, τα μαθηματικά και στον Kant παραμένουν *a priori*, ανεξάρτητα από την εμπειρία και *καθολικά* (:ισχύουν σε όλους τους δυνατούς κόσμους) και δεσμευμένα με λογική

²⁵ Radford, (2006).

²⁶ Αναπολιτάνος (2009).

²⁷ Davis P. J. & Hersh R. (1990), *The Mathematical Experience*, Birkhäuser, Boston, μετάφραση Αναστασιάδη, Εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα.

²⁸ Ginsburg H. P. (1981) Piaget and Education: The Contributions and Limits of Genetic Epistemology, in I. E. Sigel, D. M. Brodinsk, and R. M. Gollinkoff (Eds), *New directions in Piagetian theory and practice*. Hilldale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates Inc., pp. 315-330.

²⁹ Αναπολιτάνος Δ. (1985), *Εισαγωγή στην Φιλοσοφία των Μαθηματικών*, Νεφέλη. Ρουσόπουλος Γ., (1990), *Επιστημολογία των Μαθ/κών*, Εκδόσεις Gutenberg.

αναγκαιότητα. Ο Orton³⁰ πολύ σωστά θεωρεί την κατασκευασιοκρατική αντίληψη στο ενδιάμεσο της διαμάχης μεταξύ της ακραιφνούς συμβασιοκρατίας (νομιναλισμού) και του πλατωνισμού.

Στο πεδίο της Ψυχολογίας και της Διδακτικής των Μαθηματικών

Τον Piaget, ο οποίος θεωρήθηκε ο πρωτεργάτης της ιδέας του κονστρουκτιβισμού επικρίνει συχνά την νομιναλιστική αντίληψη σε πολλά σημεία μέσα στο έργο του. Στο περιεκτικό κείμενο για την επιστημολογία³¹ αναφέρει για τα μαθηματικά:

Η επιστημολογία των μαθηματικών έχει τρία αρχικά και κλασσικά προβλήματα:

1) Πώς συμβαίνει τα μαθηματικά να είναι τόσο αποδοτικά παρόλο που στηρίζονται σε ελάχιστες και σχετικά φτωχές έννοιες ή αξιώματα;

2) Πώς εξηγείται ο αναγκαίος (και καθολικός) χαρακτήρας τους, και παραμένουν σταθερά αυστηρά σε αντίθεση με τον κατασκευασιοκρατικό τους χαρακτήρα που μπορεί να αποτελέσει και πηγή ανωμαλιών;

3) Πώς συμβαίνει να βρίσκονται σε τόσο μεγάλη συμφωνία με την πείρα μας ή τη φυσική πραγματικότητα δεδομένου του λογικο-παραγωγικού τους χαρακτήρα;

Δηλαδή, ο Piaget θεωρεί κυρίαρχη τη λογική *αναγκαιότητα* και *καθολικότητα* των μαθηματικών αληθειών που είναι συμβατές με τον φυσικό κόσμο. Η κατά αναγκαιότητα παραγωγή των μαθηματικών κρίσεων υπάρχει ως δυνατότητα και σταθεροποιείται στην εμπειρία. Οι λογικό – μαθηματικές σχέσεις καθεαυτές δεν είναι έμφυτες στο υποκείμενο, απ' την άλλη ανακαλύπτονται κατά μέσα στην ψυχολογική εμπειρία. Οι σημασίες που κατασκευάζονται από το υποκείμενο εσωτερικά περιέχουν τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες για τελική επεξεργασία του συστήματος συλλογισμού, περιλαμβάνοντας και συγκεκριμένες λειτουργίες και τυπικούς χειρισμούς.

Ο Piaget ερεύνησε τους τρόπους και τις στιγμές μέσα στην εξέλιξη του παιδιού κατά τις οποίες γίνονται αντιληπτές αυτές οι ικανότητες για λογική σκέψη. Στις στιγμές αυτές προκύπτει και η συνειδητοποίηση της καθολικότητας και του αναγκαίου των μαθηματικών αποτελεσμάτων.

“Η δραστηριότητα του υποκειμένου είναι πράγματι *a priori* κατά μια έννοια σε σχέση με την εμπειρία, δείχνει μια αόριστη ικανότητα για κατασκευή ή δόμηση της εμπειρίας, η οποία παραμένει ξένη προς τα δυο θεμελιώδη χαρακτηριστικά του

³⁰ Orton, R. (1995). Ockham's razor and Plato's beard. *J. R. M.E.*, 26, 204-229.

³¹ Piaget J. (1972). *The principles of Genetic Epistemology*, Routledge & Kegan Paul, London.

(απόλυτου) απριορισμού: Πλήρεις δομές οι οποίες συγκρατούν ή προσδιορίζουν εκ των προτέρων τις κατασκευές κι επιβάλλουν εξαρχής αναγκαιότητα.”³².

Μέσα στις νεότερες, μετά τον Piaget, θεωρίες θα τοποθετούσα εκείνη των Lakoff & Núñez (σελ. 348) οι οποίοι αποδίδουν ένα ανθρωπολογικό χαρακτήρα στα Μαθηματικά:

“Τα ανθρώπινα μαθηματικά είναι σωματικά δεσμευμένα, θεμελιωμένα στην σωματική εμπειρία στον κόσμο... όχι καθαρά υποκειμενικά... μήτε αποτέλεσμα απλών κοινωνικών συμβάσεων ...”

Όπως αναφέραμε στη εισαγωγή, η πρώτη διακήρυξη του κονστρουκτιβισμού έγινε το 1983 από τον Von Glasersfeld. Πολύ γρήγορα το ρεύμα του ριζοσπαστικού κονστρουκτιβισμού καταδείχτηκε ως υπερβολικό και ο Kilpatrick (1986) επικρίνει τις βασικές του θέσεις όπως πρωτοδιατυπώθηκαν. Αναφέρουμε τους πιο σημαντικούς θεωρητικούς του κονστρουκτιβισμού όπως Ernst Von Glasersfeld, Steffe, Cobb, Davis & Mason, Davis & Hersh, Ernest, Watzlawick, Brousseau κ. ά. Οι παραπάνω συνέβαλλαν τα μέγιστα, ώστε η θεωρία να κατασταλάξει σε πλέον μετριοπαθείς θέσεις μακριά από μια ακραία συμβασιοκρατία νομιναλιστικού τύπου.

Ο Kilpatrick αναφέρει για τον κονστρουκτιβισμό ότι κατά αρχήν πρόκειται για μια θεωρία *απόκτησης* γνώσης (δηλαδή, η γνώση ως απόκτηση, και όχι ως έμφυτο δεδομένο) και μια θεωρία διδασκαλίας ή εκπαίδευσης (ποιες εκπαιδευτικές πρακτικές ευνοούν αυτή την απόκτηση). Παρόλα αυτά, οι κονστρουκτιβιστές επιδιώκοντας να αντλήσουν από τη θεωρία τους συνέπειες για πρακτική προϋποθέτουν μια κονστρουκτιβιστική θεώρηση της ίδιας της γνώσης (που συνιστά έναν φαύλο κύκλο). Έτσι, τους προσάπτει την κατηγορία ότι έχουν περιπέσει στην κλασική αντίφαση του σολιψισμού λέγοντας ότι:

“Ένα αρχαίο άλυτο επιστημολογικό πρόβλημα για τη δυτική φιλοσοφία αφορά στο πώς μια ανεξάρτητη αντικειμενική πραγματικότητα μπορεί κάποτε να γίνει γνωστή από ένα σκεπτόμενο άτομο. Το άτομο δε διαθέτει τρόπο να ελέγξει τη γνώση του· για παράδειγμα «*τίνας πράγματος*» γνώση είναι. Κάθε προσπάθεια να ελέγξει την αλήθεια αυτού που είναι γνωστό πρέπει από μόνη της να είναι μια πράξη γνώσης και επομένως υποκειμενική. Κάθε γνώση «αντικειμενικής αλήθειας», επομένως, είναι αδύνατη. Ο κονστρουκτιβισμός κόβει τον γόρδιο δεσμό χωρίζοντας την επιστημολογία από την οντολογία και υποστηρίζοντας ότι η θεωρία της γνώσης θα έπρεπε να διαπραγματεύεται τη *συναρμογή* της γνώσης στην εμπειρία και όχι το *σύζευξη* γνώσης – πραγματικότητας. Η μόνη πραγματικότητα που ξέρουμε είναι η

³²Beth E. W. – Piaget J. (1966): *Mathematical Epistemology and Psychology*, D Reidel P.C., Holland.

πραγματικότητα της εμπειρίας μας. Η κατασκευασιοκρατική άποψη περικλείει δύο αρχές:

- 1) Η γνώση οικοδομείται ενεργά από το σκεπτόμενο άτομο, δε λαμβάνεται παθητικά από το περιβάλλον
- 2) Η πρόσκτηση της γνώσης είναι μια διαδικασία προσαρμογής, η οποία οργανώνει τον κόσμο της εμπειρίας κάποιου. Το άτομο δεν ανακαλύπτει έναν ανεξάρτητο, προϋπάρχοντα κόσμο έξω από το μυαλό του. ”

Ο Von Glasersfeld, όπως αναφέρει ο Orton³³ (1995), σε εκείνη την συζήτηση στα τέλη τις δεκαετίας του 80, παραδέχτηκε ότι δεν κάνει και δεν χρειάζεται να κάνει οντολογικές δεσμεύσεις καθόσον η θεωρία του αφορά τον μικρόκοσμο της τάξης και τον σχεδιασμό που επινοεί για να διευκολύνει την κατανόηση των μαθητών, μέσω της συμμετοχής τους στη λύση κάποιου προβλήματος. Ο Orton, σε μια παρόμοια επίθεση στον κονστρουκτιβισμό το 1996, κάνει χιούμορ λέγοντας,

“ ...παρόλο που θα μπορούσε να είναι καλύτερο για τους δασκάλους να πιστεύουν σε ένα κατασκευασιοκρατικό μοντέλο για την νόηση, αυτή η πίστη είναι ασθενώς υποστηριζόμενη από επιστημολογικά ή οντολογικά επιχειρήματα καθώς αυτά τα τελευταία εξαρτώνται από προτιμήσεις, όχι την αλήθεια. Σε αυτό το τελευταίο κομμάτι σχηματοποιώ την διαφορά μου με τους Cobb κ.λ.π σαν ζήτημα προτίμησης, λαμβάνοντας υπ’ όψιν μου την ιδέα του Hume ότι η αλήθεια και όχι η προτίμηση είναι ζήτημα αμφισβήτησης. Παρομοίως, εγώ πιστεύω ότι είναι λίγο πολύ λογικό να στοιχηματίσω πως τα παιδιά κατασκευάζουν την δική τους γνώση παρά να στοιχηματίσω ενάντια σε αυτό. Αν χάσω, όταν στοιχηματίσω ότι τα παιδιά πράγματι κατασκευάζουν την γνώση τους, τότε το μόνο που έχω να χάσω είναι ίσως η αρκετή ώρα που αφιερώνω για την μαθηματική κατανόηση ενός παιδιού. Αυτό είναι μικρό τίμημα για έναν δάσκαλο των μαθηματικών. Από την άλλη μεριά αν χάσω όταν στοιχηματίζω ενάντια στην κονστρουκτιβιστική (κατασκευασιοκρατική) ιδέα ότι τα παιδιά κατασκευάζουν την δική τους γνώση είμαι ένοχος μιας ολοκληρωτικής εξουσιαστικής παραβίασης του δικαιώματος του παιδιού να μάθει. Αυτή είναι μια σοβαρή κατηγορία για έναν δάσκαλο των μαθηματικών. ”

Και ο Orton επιστρέφοντας στις φιλοσοφικές επισημάνσεις υπερασπίζεται μια φανερά πραγματιστική θέση την οποία και θεωρεί ουσιαστικό επιχείρημα για το επιστημολογικό ρήγμα που προκύπτει μέσα σε άλλες κονστρουκτιβιστικές θεωρήσεις:

³³ Με αφορμή μια νέα διαμάχη, που έχει ξεσπάσει με έναν από τους πρωτεργάτες του κονστρουκτιβισμού, τον Cobb και με αφορμή το άρθρο των (Cobb P., Yachel E., & Wood T., “A Constructivist Alternative to the Representational View of Mind in Mathematics” άρθρο του 1992.

“οι ριζοσπάστες κονστρουκτιβιστές θα ήταν καλύτερο αν μπορούσαν να βασιστούν στο πραγματολογικό επιχείρημα, και να διαχωρίσουν θεωρητικά από πρακτικά θέματα ούτως ώστε να μην εμπλακούν στην διαδικασία να φτιάξουν μια επιστημολογία που να είναι συνεπής με την πρακτική τους... Παρόλο που πολλές φορές είναι αληθές πως η σωστή πρακτική καθοδηγείται από καλή θεωρία, είναι υπερβολικά δύσκολο να δημιουργήσεις επιχειρήματα από το πρώτο προς το δεύτερο... Επιπλέον, ο κονστρουκτιβισμός δεν χρειάζεται να υποστηρίζεται από φιλοσοφικά επιχειρήματα. Υποστηρίζεται αρκετά καλά από πραγματολογική πίστη”.

Ο κονστρουκτιβισμός στο πλαίσιο της φαινομενολογίας του Husserl

Στην φαινομενολογία του Husserl συναντούμε μια κονστρουκτιβιστική στη ουσία θέση που βρίσκεται ακόμη πιο κοντά σε έναν πλατωνικού τύπου ρεαλισμό. Εδώ, υπάρχει μια “οπτική που περιλαμβάνει μια αλληλεπίδραση μεταξύ καντιανών και πλατωνικών ιδεών”³⁴. Δηλαδή, στον Husserl υπάρχει η καντιανή αντίληψη ότι “δομούμε την πραγματικότητα, ακόμα και ο χώρος και ο χρόνος είναι μέρη αυτής της δομής. Ο Husserl αποκάλυψε αυτή την διαδικασία ‘συγκρότηση’ ” Føllesdal. Επίσης, κατά τον Føllesdal υπάρχει και μια πλατωνική χροιά, καθώς “η πραγματικότητα (των μαθηματικών) είναι ανεξάρτητη από εμάς”. Αλλά, για τον Føllesdal, θα ήταν παραπλανητικό να της προσδώσουμε μέσα σε αυτή την ανεξαρτησία υπόσταση που να υπερβαίνει τα όρια αρχής και τέλους της ανθρωπότητας. Μια τέτοια προσέγγιση του μαθηματικού ιδεώδους γοήτευσε από ότι φαίνεται και τον Gödel, (στο ίδιο).

Ο Husserl έγραψε το “Η Προέλευση της Γεωμετρίας” ένα άρθρο 25 σελίδων το 1917. Ο Derrida³⁵ το 1962 έγραψε ένα βιβλίο σχολιάζοντας αυτό το άρθρο τονίζοντας την σημασία του για την φιλοσοφία και την ψυχολογία των μαθηματικών. Εκεί, επισημαίνεται ο ανθρωπολογικός χαρακτήρας των μαθηματικών ιδεατοτήτων (που πηγάζουν από τον *κόσμο της ζωής*) αλλά ως απόλυτα αντικειμενικών, μη εξαρτώμενων από τα υποκείμενα που τις πρωτοσυγκρότησαν άχρονες και *a priori* εκ κατασκευής τους. Το όλο κείμενο αφορά στην υπόσταση των ιδεατών αντικειμένων της επιστήμης (των οποίων η γεωμετρία είναι ένα από αυτά), η παραγωγή τους με ενεργήματα ταύτισης όπως ‘το αυτό’ και συγκροτήσεις εξακρίβωσης διαμέσου μιας ιδεατοποίησης και ένα

³⁴ Føllesdal D. (1999), Gödel and Husserl, in *Naturalizing Phenomenology*, ed. j. Petitot, F.j. Varela, B. Pachoud, J.-M. Roy, Stanford University Press, p. 385-400.

³⁵ Derrida, J. (1989). *Edmund Husserl’s Origin of Geometry: An Introduction* (J. P. Leavey, Trans.). *Lincoln: Bison/University of Nebraska Press*.

πέραςμα σε οριακή κατάσταση – μια διαδικασία που ξεκινά από τον αισθητηριακό κόσμο που μας περιβάλλει, τον περιορισμένο και προεπιστημονικά υλικό.

Το μαθηματικό αντικείμενο φαίνεται ότι είναι προνομιακό παράδειγμα και μόνιμο νήμα που καθοδηγεί την σκέψη του Husserl. Γιατί το μαθηματικό αντικείμενο είναι *ιδεατό* (ideal), δηλαδή απόλυτα αντικειμενικό, ολικά απαλλαγμένο από την εμπειρική υποκειμενικότητα. Τοιουτοτρόπως είναι πάντα ήδη *περιορισμένο* στο φαινομενικό του νόημα και η οντότητα του είναι, από το ξεκίνημά του, αντικείμενο της καθαρής συνείδησης’, Derrida (1962, pp. 25-27).

Επιπλέον, ο Derrida διαχωρίζει την ιδεατότητα όπως συναντάται στο έργο του Husserl σε αντίθεση των Πλατωνικών ιδεατοτήτων: “Τα ιδεατά αντικείμενα δεν προϋπάρχουν του όποιου υποκειμενικού ενεργήματος, όπως στον παραδοσιακό Πλατωνισμό. Αν έχουν ιστορία πρέπει να συνδέονται με την πρωτοϊδρυτικά ριζωμένη πράξη στην πρωτοϊδεατοποίηση βασισμένη στο υπόστρωμα ενός πραγματικά αντιληπτικού κόσμου. Η ιδεατότητα είναι απόλυτα κατασκευαστική και επινοημένη αν και αχωρόχρονη (nonspatiotemporal), Derrida (p. 40- 45).

Η αντικειμενικότητα στον Husserl είναι διττή, αυτή η οποία επιτυγχάνεται σε μια άμεση και διαμεσολαβημένη κοινότητα που πραγματοποιείται προφορικά “λόγος και απελευθερωμένο αντικείμενο από ατομική υποκειμενικότητα που ωστόσο αφήνεται σίγουρα στην έναρξη της κατά τον συγχρονισμό μιας ανταλλαγής μέσα σε μια ιδρυτική κοινότητα. Το ενδεχόμενο της γραφής θα εξασφαλίσει την απόλυτη μεταβιβασιμότητα του (νοητού) αντικείμενο, η απόλυτη ιδεατή Αντικειμενικότητα - δηλαδή η καθαρότητα της σχέσης της σε μια καθολική υπερβατική υποκειμενικότητα.” Και τότε “κάθε παρόν υποκείμενο είναι απών³⁶”.

Με αυτή τη λογική το υποκείμενο Πυθαγόρας και η κοινότητά τους, ή η αρχαία ελληνική γλώσσα δεν υπάρχουν στην διατύπωσή του θεωρήματος που είναι άπειρα μεταβιβάσιμο. Η εξαντικειμενίκευση του θεωρήματος εμπεριέχει ένα ανθρωπολογικό χαρακτήρα αλλά ανεξάρτητο του χρόνου πανχρονικό. (omnitemporality – pantemporality)³⁷ και ως επακόλουθο της ‘υπερβατολογικής υποκειμενικότητας’ αποδίδεται η ιστορική διάσταση των ιδεατοτήτων. Με αυτό το νόημα της κατασκευής των εννοιών μέσα από τις πρωτοϊδρυτικές πράξεις.

Στην ‘Προέλευση’ ο Husserl θέτει την κεντρική ερώτηση της επιστημολογίας του: Πώς οι γεωμετρικές ιδεατότητες... απορρέουν από μια εσωτερική προέλευση, που αποτελεί δομή μέσα στην συνείδηση για το χώρο στην ψυχή του πρώτου επινοητή, για την ιδεατή αντικειμενικότητα. Η ‘προέλευση..’ έργο ωριμότητας του Husserl και εμπεριέχει τον κύριο στόχο της επιστημολογίας του: Την σχέση ... μεταξύ της υποκειμενικότητας της διαδικασίας της γνώσης και

³⁶ Η λειτουργία της εξαντικειμενίκευσης είναι παρούσα μέσα στην προσπάθεια όλων των μαθηματικών όταν προσπαθούν να διατυπώσουν σε καθαρές και σαφείς δηλώσεις τις διαισθητικές προσεγγίσεις κάνοντας κατανοητό για ένα άλλο υποκείμενο που έχει εμπρός του το γραμμένο μόνο.

³⁷ Derrida, σελ. 73

της αντικειμενικότητας του περιεχομένου της γνώσης³⁸. Έτσι, το γεγονός της υποκειμενικής συγκρότησης της μαθηματικής γνώσης δεν μετριάζει την αντικειμενικότητα του περιεχομένου της.

Στην “Προέλευση...” γίνεται μια ριζική αναζήτηση της καταγωγής της Γεωμετρίας, με τρόπο *προγραμματικό* και *παραδειγματικό*. Η εξέταση της γεωμετρίας είναι παραδειγματική, καθώς επιτρέπει την εξαγωγή συμπεράσματος για την προέλευση όλων των επιστημών. Παράλληλα όμως, ο Husserl αναδεικνύει και την *ένταξη* των επιστημών στην ιστορία, θεωρώντας τη γεωμετρία συνυφασμένη με τον τρόπο δημιουργίας της *επιστημονικής παράδοσης*. Κατά αυτόν τον τρόπο δίδεται ένα πλαίσιο ώστε να μην αποκλειστεί η κανονιστική βάση της Μαθηματικής σκέψης αλλά και να μην περιοριστεί η αντικειμενικότητα των Μαθηματικών σε αυτή, Derrida.

Διαβάζοντας τον Derrida αντιλαμβανόμαστε ότι η Φαινομενολογία, μέσα στους αφορισμούς της, προτείνει ένα νέο τρόπο ανάγνωσης της ιστορίας, όπου σημασία έχει η αναζήτηση των αρχών κάθε επιστήμης, ώστε να *επανιδρυθεί* το κρυμμένο νόημά της. Ας πάρουμε όμως τα πράγματα από την αρχή:

“Ζώντας εν εγρηγόρσει μέσα στον κόσμο, έχουμε σταθερά, είτε το προσέχουμε είτε όχι, *συνείδηση του κόσμου*, έχουμε συνείδηση γι’ αυτόν ως ορίζοντα της ζωής μας, ως *ορίζοντα ‘πραγμάτων’* (πραγματικών αντικειμένων), των πραγματικών και δυνατών ενδιαφερόντων μας και δραστηριοτήτων. Μέσα στον *ορίζοντα του κόσμου* ίσταται πάντα διακεκριμένος ο *ορίζοντας των συνανθρώπων μας*, είτε κάποιος είναι παρών σε αυτόν είτε όχι”.

“...κάθε *ιδεατή αντικειμενικότητα* παράγεται από την πράξη μια *συμπαγούς* συνείδησης... Δεν υπάρχει πρώτα η υποκειμενική γεωμετρική απόδειξη η οποία μετά γίνεται αντικειμενική. Η γεωμετρική απόδειξη ξεκινά μόνο *τη στιγμή* που υπάρχει απόδειξη μιας ιδεατής αντικειμενικότητας”. Και η ιδεατή αντικειμενικότητα είναι τέτοια, μόνο μετά τη διακίνηση της μέσα στη διυποκειμενική κυκλοφορία. “Η ανθρωπότητα γίνεται εκ των προτέρων συνειδητή ως άμεση και έμμεση *γλωσσική κοινότητα*. Προφανώς, ο *ορίζοντας* της ανθρωπότητας μπορεί να είναι ανοιχτός και άπειρος (όπως πράγματι είναι πάντα για τους ανθρώπους) και *μόνο χάρη στη γλώσσα* και τις εκτενείς τεκμηριώσεις της ως δυνατές μορφές κοινοποίησης ...η *ανθρωπότητα* αποτελεί για κάθε άνθρωπο (για τον οποίο συνιστά το δικό του *ορίζοντα-του-εμείς*) μια κοινότητα του *δύνασθαι-εκφράζεσθαι* με τρόπο αμοιβαίο, ομαλό, και όλως κατανοητό”. “Το *κάθε τι* έχει το όνομά του ή δύναται να ονομασθεί υπό μια ευρύτερη έννοια, είναι

³⁸ Husserl E.: 1982, Logical Investigations, Routledge & Kegan Paul, London. See also The Cambridge Companion to Husserl, 1995.

δηλαδή *γλωσσικά εκφράσιμο*”. Έτσι, “από τη μια οι *άνθρωποι* ως *άνθρωποι*, η *συν-ανθρωπότητα*, και ο *κόσμος* (ο κόσμος για τον οποίο πάντα μιλούν και μπορούν να μιλήσουν οι *άνθρωποι*, εμείς) και, από την άλλη, η *γλώσσα*, είναι *συναρμωσμένα* μεταξύ τους *με αδιάσπαστο τρόπο*”

“...η *γλώσσα* και η *συνείδηση* της *συν-ανθρωπότητας* είναι *αλληλο-σχετιζόμενες* δυνατότητες και έχουν ήδη δοθεί τη στιγμή που η *δυνατότητα της επιστήμης* θεμελιώνεται. Η *συνείδηση της ύπαρξης-σε-μια κοινότητα*, μέσα σε ένα και τον ίδιο κόσμο θεμελιώνει τη δυνατότητα μιας *καθολικής γλώσσας*. Το ανθρώπινο είδος έχει πρώτα τη *συνείδηση του εαυτού του ως μιας άμεσης και διαμεσολαβούσης γλωσσικής κοινότητας*. Μόνο μια *υποκειμενικότητα*, που προκύπτει στον άνθρωπο που ζει μέσα στην κοινότητα, μπορεί να δημιουργήσει το *ιστορικό σύστημα της αλήθειας* και να είναι εντελώς *υπεύθυνη* γι’ αυτό”.

“Κάθε *επιστήμη* σχετίζεται με μια *ανοικτή αλυσίδα* των γενεών από εκείνους που δούλεψαν ο ένας για και με τον άλλο, ερευνητές που *γνώριζαν* ή *δεν γνώριζαν* ο ένας τον άλλο, οι οποίοι είναι η *παραγωγική υποκειμενικότητα* της συνολικής ζώσας επιστήμης”.

“Το *ερώτημα* που θέτει και δίνει απάντηση ο Husserl στην ‘*Προέλευση της Γεωμετρίας*’ είναι: “*πώς μπορεί το υποκειμενικό εγωλογικό στοιχείο της αίσθησης να μετατραπεί σε αντικειμενικό και διυποκειμενικό; Πώς μπορεί να ανυψωθεί σε ιδεατό και αληθές αντικείμενο, με όλα τα χαρακτηριστικά που γνωρίζουμε ότι έχει: διαχρονική εγκυρότητα, κατανοησιμότητα από ‘όλους’, χειραφέτηση από όλα τα ‘εδώ και τώρα’;*”.

Η ερώτηση αναφέρεται σε αυτό που στη Φαινομενολογία λέγεται (Objectification) *εξαντικειμενίκευση*. Γιατί, “*μια ουσία εισέρχεται στην ιστορία μόνο όταν γίνει ένα απόλυτο αντικείμενο* δηλαδή ένα *ιδεατό αντικείμενο* το οποίο θα έχει σπάσει όλα τα δεσμά του με το *εμπειρικό έδαφος* της ιστορίας. Γνωρίζουμε ότι η *ανθρωπότητα* έχει ένα *παρελθόν* και, από αυτό το γεγονός, είναι στο *παρελθόν* που οι ‘*πρώτοι γεωμέτρεις*’ βρίσκονται: και *παρόλο που έχουν θεμελιώσει νέες μορφές, κατάφεραν να το κάνουν μόνο με την έκθεση βιωματικών ακόμη και ακατέργαστων, ήδη μέρος της παράδοσης, πνευματικά σχηματισμένων υλικών*”.... Αυτό συμβαίνει διότι η *ιδεατότητα της ουσίας, θεωρούμενη μέσα στον εαυτό της και σε αυτή της γλώσσας, είναι εδώ μια ‘δεσμευμένη ιδεατότητα*”³⁹ και όχι μια ‘*ελεύθερη*’.

Αυτός ο διαχωρισμός μεταξύ ‘*ελεύθερων ιδεατοτήτων*’ και ‘*δεσμευμένων ιδεατοτήτων*’ ... μας κάνει ικανούς να κατανοήσουμε τι μπορεί να είναι η *απόλυτη ιδεατή Εξαντικειμενίκευση του γεωμετρικού αντικειμένου* και τι το διακρίνει από αυτό της *γλώσσας* και από το περιεχόμενο των *αισθήσεων*. Η *ιδεατή*

Αντικειμενικότητα της γεωμετρίας είναι απόλυτη και χωρίς κανένα περιορισμό. Η ιδεατότητά της –τριτογενής- δεν είναι πλέον αυτή της έκφρασης ή του περιεχομένου της απόβλεψης: είναι αυτή του ίδιου του αντικειμένου.

“Το Πυθαγόρειο Θεώρημα και μάλιστα ολόκληρη η γεωμετρία, υπάρχει μόνο μία φορά, χωρίς να έχει σημασία πόσο συχνά ή σε ποια γλώσσα μπορεί να εκφραστεί. Είναι ταυτοτικά το ίδιο στη γλώσσα του Ευκλείδη και σε όλες τις μεταφράσεις και μέσα σε κάθε γλώσσα είναι και πάλι το ίδιο, χωρίς να έχει σημασία πόσες φορές έχει εκφραστεί διαφορετικά από την αρχική του έκφραση και καταγραφή... αυτή η ουσία του μόνο μία φορά και μια για πάντα, είναι ο ουσιαστικός τρόπος για την ιδεατή ύπαρξη ενός αντικειμένου. Η προφορική επικοινωνία ... μεταξύ των πρωτογεωμετρών δεν είναι αρκετή να δώσει στις ιδεατές αντικειμενικότητες τη συνέχειά τους στην ύπαρξη, χάρη στην οποία θα διατηρηθούν ακόμη και όταν ο εφευρέτης και οι γνωστοί του ...δεν θα είναι πια ζωντανοί... Για να είναι απόλυτα ιδεατό, το αντικείμενο θα πρέπει να απελευθερωθεί από κάθε δεσμό με οποιαδήποτε παρούσα υποκειμενικότητα.”

“Η δυνατότητα της καταγραφής θα εξασφαλίσει την απόλυτη ένταξη στην Παράδοση του αντικειμένου, την απόλυτη ιδεατή του εξαντικειμενίκευση. Η καταγραφή θα το κάνει αυτό με τη χειραφέτηση της ουσίας από την πραγματική παρουσία στοιχείων για ένα πραγματικό αντικείμενο και την κυκλοφορία μέσα σε μια καθορισμένη κοινότητα ... κατά κάποιο τρόπο, η επικοινωνία γίνεται εικονική ...Μέσω αυτής, ανυψώνεται επίσης η κοινοτικοποίηση της ανθρωπότητας σε μια νέα βαθμίδα... μέσω της καταγραφής, επιτελείται μια μεταμόρφωση του πρωταρχικού οντολογικού τρόπου του νοηματικού μορφώματος όταν αυτό φτάνει στη διατύπωσή του. Το μόρφωμα μετατρέπεται σε ίζημα, ούτως ειπείν.”

“Ο αναγνώστης όμως μπορεί να το καταστήσει εκ νέου εναργές, μπορεί να επαν-ενεργοποιήσει⁴⁰ την ενάργεια. Διακρίνονται λοιπόν μεταξύ τους η παθητική κατανόηση της έκφρασης, από τη μια, και, από την άλλη, το καθιστάναι-εναργές που επαν-ενεργοποιεί το νόημά της. Η καταγραφή ως τόπος των απόλυτα μόνιμων ιδεατών αντικειμενικότητων κι επομένως της απόλυτης Εξαντικειμενίκευσης,

³⁹ Το νόημα της ιδεατότητας έχει ενδιαφέρον στον Husserl, καθόσον στέκεται σε νοητικές κατασκευές που δεν υπάρχουν στην εμπειρία όπως π.χ το ιδεατό σημείο ή ευθεία.

⁴⁰ Μία ενδεχόμενη πραγματοποίηση της Χουσερλιανής ιδέας της εξαντικειμενίκευσης από τους πρωτογεωμέτρους δίνεται στο Lappas & Spyrou (2006). Επίσης στο Λάππας Δ. 2009. Εξάλλου, στο Spyrou P. & Moutsios A. & Triantafyllou D. (2009), υλοποιείται μια ιδέα του προηγούμενου άρθρου για την εξαντικειμενίκευση της αίσθησης της κατακόρυφου (καθέτου) μέσω των πυθαγορείων τριάδων από μαθητές.

σίγουρα θεμελιώνει ένα τέτοιο υπερβατολογικό πεδίο. ”

Συμπέρασμα

Σε αυτή την προοπτική που προσφέρει η φαινομενολογία, δεν είναι αποδεκτή η τυχαία ή απλοϊκή συμβασιοκρατική ύπαρξη των Μαθηματικών. Η κατασκευή έχει από την γένεσή της ρεαλιστικά χαρακτηριστικά με το νόημα της εξαντικειμενίκευσης. Επίσης, προσφέρει την ιδέα της κατασκευής αλλά ως επανενεργοποίηση, ως ενότητας και συνάντησης του Ιστορικού και του Λογικού⁴¹ στην Βιγκοτσιανή μαρξιστική⁴² γλώσσα ή όπως ο Piaget εκφράζει ως socio-genesis & psychogenesis (Beth – Piaget, 1964, σελ. 161). Θα έλεγα λοιπόν ότι η αναφορά στον πλατωνισμό (ρεαλισμό) ή όχι των μαθηματικών αντικειμένων φαίνεται μάλλον ένα ψευδοπρόβλημα. Αυτό που μένει για τους κονστρουκτιβιστές της Διδακτικής των Μαθηματικών είναι η επινόηση της προσέγγισης που θα συμπεριλάβει και θα εγκλείσει το αντικείμενο. Ο σχεδιασμός της δραστηριότητας που θα ενθαρρύνει την επανακάλυψη του αντικειμένου από τους μαθητές. Η αναφορικότητα (intentionality) και το πλαίσιο (π.χ. απαιτήσεις για Ευκλείδεια ή μη Ευκλείδεια Γεωμετρία) διαμορφώνουν στην πορεία τις *αναπαραστάσεις* και τα *νοητικά ενεργήματα* που περικλείουν το μαθηματικό συγκεκριμένο μαθηματικό αποβλεπτικό *αντικείμενο* το οποίο ως προϊόν της αναφορικότητας δεν ταυτίζεται με τον *αναπαραστάτη* που το αποδίδει αλλά είναι πίσω από αυτόν και τον ξεπερνά καθώς μπορεί να καταδειχθεί ενδεχομένως και με άλλες αναπαραστάσεις.

Στις Διδακτικές Καταστάσεις του Brousseau⁴³, στη φάση της θεσμοποίησης⁴⁴, έρχεται η σειρά του δασκάλου να συνοψίσει. Οι μαθητές έχουν κάνει τις προσεγγίσεις τους, τις κατασκευές τους, το μισό δρόμο με διάφορες συγκλίσεις και επινοήσεις προς τον στόχο της αντικειμενικής γνώσης, που πρέπει να κατατεθεί αφού διαμεσολαβηθεί από τα πολιτισμικά εργαλεία και να αποτιμηθεί στη βάση κοινωνικά σταθμισμένων (normatives) κριτηρίων με την πολιτισμική και θεσμική της βαρύτητα. Η κατασκευή, εν προκειμένω, σημαίνει την εξατομικευμένη πορεία του κάθε μαθητή και της επικοινωνιακής λειτουργίας της τάξης, ούτως ώστε η διαδικασία να καταστεί εναργής στο νου τους και να οδηγήσει στην επανενεργοποίηση προϋπαρχόντων μαθηματικών αντικειμένων.

⁴¹ Σπύρου Π. & Μυτιληναίος Μ., (1977) Η Ενότητα του Ιστορικού και του Λογικού, *Άνθρωπος*, τόμος 4ος, Αθήνα, σελ. 338–358.

⁴² Vygotsky 1981.

⁴³ Henry M. (2008), Διδακτική των Μαθηματικών (μετάφραση Κοντογιάννη, Πρίντζη, Σπύρου) εσωτερική έκδοση πανεπιστημίου πολυγραφημένη.

⁴⁴ Τον όρο αποδίδω θεσμοποίηση και όχι θεσμοθέτηση. Ο δεύτερος όρος αποδίδει καλύτερα την ίδρυση θεσμών ενώ ως θεσμοποίηση αποδίδεται καλύτερα η ψυχολογική κατασκευή μιας έννοιας σε συγκεκριμένα χωροχρονικά πλαίσια όπως την απαιτεί ο θεσμός της εκπαίδευσης.