ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Διδακτική Απειροστικού Λογισμού

Ενότητα 6: Θέματα σχετικά με τη διδασκαλία των ολοκληρωμάτων.

Ζαχαριάδης Θεοδόσιος

Τμήμα Μαθηματικών

6. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

1. Ένας μαθητής κατά την μελέτη της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες αντιμετώπισε το παρακάτω παράδοξο:

« Αφού $\varepsilon\phi x = \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ και $(\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x})' = \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ από το θεώρημα της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες προκύπτει:

$$\int \varepsilon\phi x dx = \int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} dx = -\int (\sigma\upsilon\nu x)' \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} dx = -1 + \int \sigma\upsilon\nu x (\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x})' dx =$$

$$= -1 + \int \sigma\upsilon\nu x \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = -1 + \int \varepsilon\phi x dx.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει 0=-1.
Αυτό βέβαια είναι λάθος, αλλά που έχω κάνει λάθος;»

α) Τι νομίζετε ότι αγνοεί ή δεν έχει καταλάβει ο μαθητής;
β) Πως θα βοηθούσατε αυτόν τον μαθητή στο πρόβλημα που αντιμετωπίζει;

2. Σε μια τάξη δόθηκε η παρακάτω άσκηση:
« Έστω συνάρτηση $f: R \to (0, +\infty)$ συνεχής και φθίνουσα. Θέτουμε

Α= $f(1) + f(2) + f(3)$ και Β= $\int_1^4 f(x)dx$.

Τότε
- i) Α=Β
- ii) Α<Β
- iii) Α>Β
- iv) Τα Α και Β δεν είναι συγκρίσιμα μεγέθη.
- v) Από τα δεδομένα δεν προκύπτει απάντηση.»

Στην τάξη αυτή υπήρξε ασυμφωνία ανάμεσα στους μαθητές όσον αφορά στη σωστή απάντηση. Ορισμένοι μαθητές θεώρησαν σωστή την απάντηση (i) άλλοι την (ii), άλλοι την (iii), άλλοι την (iv) και άλλοι την (v).

α) Ποιος θεωρείτε ότι ήταν ο στόχος της παραπάνω άσκησης;
β) Πως πιστεύετε ότι σκέφτηκαν οι μαθητές που έδωσαν την κάθε μια απάντηση.
γ) Πως θα αντιμετωπίζατε διδακτικά την παραπάνω άσκηση;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Εισαγωγή στο ορισμένο ολοκλήρωμα

Το θέμα

Η δραστηριότητα εισάγει τους μαθητές στο ολοκλήρωμα *Riemann* μέσω του υπολογισμού του εμβαδού ενός παραβολικού χωρίου.

Οι στόχοι

Με τη δραστηριότητα αυτή επιδιώκεται οι μαθητές:

- Να εισαχθούν στον υπολογισμό του εμβαδού ενός επιπέδου χωρίου.
- Να κατανοήσουν διαισθητικά τη διαδικασία προσέγγισης του ζητουμένου εμβαδού με τα αθροίσματα Riemann.
- Να χειριστούν την αριθμητικά, συμβολικά και γεωμετρικά την διαδικασία προσέγγισης.

Η Λογική της Δραστηριότητας

Ερευνητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι πολλοί μαθητές και φοιτητές, ενώ είναι ικανοί να υπολογίζουν ορισμένα ολοκληρώματα, δεν έχουν κατανοήσει την έννοια αυτή. Με αυτή τη δραστηριότητα, που αφορά στον υπολογισμό του εμβαδού ενός επιπέδου χωρίου το οποίο δεν μπορεί να υπολογιστεί με τις γνωστές στους μαθητές μεθόδους υπολογισμού εμβαδού, γίνεται προσπάθεια οι μαθητές να προσεγγίσουν διαισθητικά την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος συνεχούς συνάρτησης. Τα αθροίσματα *Riemann* εισάγονται και χρησιμοποιούνται για την επίτευξη αυτού του στόχου. Η δραστηριότητα αποτελείται από δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος η αντιμετώπιση του προβλήματος υπολογισμού του εμβαδού υποστηρίζεται από το δυναμικό περιβάλλον. Η χρήση δυναμικών εργαλείων, όπως η μεταβολή της παραμέτρου για το πλήθος των ορθογωνίων κάλυψης και η μεγέθυνση, βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν και να απαντήσουν στις ερωτήσεις καθώς και να κατανοήσουν διαισθητικά την όλη διαδικασία. Στο δεύτερο μέρος ζητείται ο υπολογισμός ενός εμβαδού ο οποίος μπορεί να γίνει από τους μαθητές. Δηλαδή οι μαθητές μπορούν να υπολογίσουν τα αθροίσματα Riemman και να βρουν το όριο τους. Με τον τρόπο αυτό υλοποιούν οι ίδιοι τη διαδικασία που έκαναν στην προηγούμενη φάση με τη βοήθεια του λογισμικού.

Συμπερασματικά, ο γενικότερος στόχος της δραστηριότητας συνίσταται στη διαμόρφωση ενός διδακτικού περιβάλλοντος, το οποίο στο σύνολό του συντελεί στην ανάπτυξη του μαθηματικού νοήματος του ορισμένου ολοκληρώματος μέσα από τη διαμόρφωση και τον έλεγχο εικασιών.

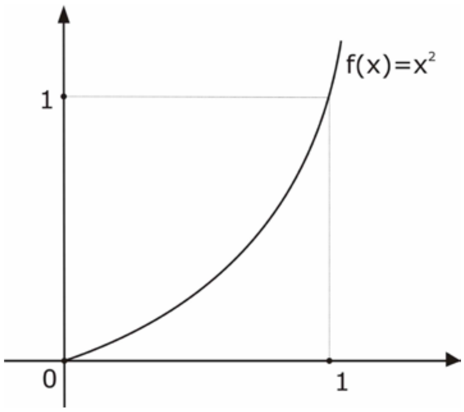
Δραστηριότητα και Αναλυτικό Πρόγραμμα

Η δραστηριότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εισαγωγή της έννοιας του εμβαδού μη ευθυγράμμου επιπέδου χωρίου και του ολοκληρώματος *Riemann*. Ο σχεδιασμός λαμβάνει υπόψη τις πρότερες γνώσεις των μαθητών σχετικά με τον υπολογισμό εμβαδών ευθυγράμμων γεωμετρικών σχημάτων και την εύρεση ορίου ρητής συνάρτησης. Η εκτέλεσή της εκτιμάται ότι απαιτεί 1-2 διδακτικές ώρες.

Φύλλο εργασίας

Πρόβλημα :

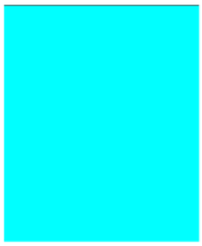
Αναζητούμε ένα τρόπο υπολογισμού του εμβαδού του χωρίου το οποίο περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$, τον άξονα xx΄ και τις ευθείες x=1 και x=2.

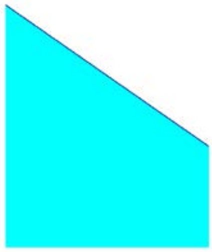


Ε1 : Πως μπορούμε να σκεφτούμε για παρόμοια απλούστερα προβλήματα;

Εάν για παράδειγμα αντί για μια παραβολή είχαμε μια γραμμική συνάρτηση, πως θα μπορούσατε να υπολογίσετε τα παρακάτω εμβαδά;

i. $y=c$ ή ii. $y=\alpha x+\beta$





Ε2: i. Για ποια γνωστά σας ευθύγραμμα γεωμετρικά σχήματα του επιπέδου γνωρίζετε τύπους υπολογισμού του εμβαδού τους;
ii. Να γράψετε αυτούς τους τύπους για τα εμβαδά των σχημάτων στα οποία αναφερθήκατε προηγουμένως.

Ε3: Θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε αυτά τα σχήματα και τους αντίστοιχους τύπους για να υπολογίσετε το ζητούμενο εμβαδόν; Γιατί;

Ε4: Θα μπορούσατε να βρείτε ένα ορθογώνιο με βάση το διάστημα [1, 3] που να έχει εμβαδόν μικρότερο από το παραβολικό χωρίο και ένα άλλο ορθογώνιο με την ίδια βάση και εμβαδόν μεγαλύτερο αντίστοιχα από το ίδιο χωρίο;

Ανοίξτε το αρχείο Geogebra.
Η παράμετρος ν καθορίζει το πλήθος των άνω και κάτω ορθογωνίων κάλυψης, τα οποία κατασκευάζονται από το λογισμικό. Δώστε σε αυτή την παράμετρο την τιμή $\nu = 2$ για να κατασκευάσετε δύο αντίστοιχα τέτοια ορθογώνια.
Οι μετρητές εμβαδών στην οθόνη, παρέχουν το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων τόσο πάνω από τη καμπύλη, όσο και κάτω αντίστοιχα. Αυτά ονομάζονται *Αθροίσματα Riemann*.

Ε5: Θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε τους μετρητές εμβαδών πάνω στην οθόνη, για να πάρετε μια πρώτη προσέγγιση (να γράψετε μια διπλή ανισότητα) για το ζητούμενο εμβαδόν Ε;

Συμπληρώστε τα κενά με τους αριθμούς που βρήκατε προηγουμένως:
i. .... < Ε < ....
ii. Η διαφορά ανάμεσα στα εμβαδά του άνω και του κάτω ορθογωνίου είναι:

$$\Delta_1 = S_1 - s_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ε6: Πώς θα μπορούσατε να πάρετε μια καλύτερη προσέγγιση για το ζητούμενο εμβαδόν Ε;
(Με ποιο τρόπο μπορείτε να προχωρήσετε ώστε να μειώσετε τη διαφορά ανάμεσα στο πάνω και το κάτω φράγμα για το ζητούμενο εμβαδόν Ε;)

Ε7: Θα μπορούσατε να βρείτε μια δεύτερη ακόμη καλύτερη προσέγγιση για το ζητούμενο εμβαδόν;
Χρησιμοποιείστε τους μετρητές στην οθόνη για να πάρετε το άνω και το κάτω άθροισμα Riemann.

Συμπληρώστε τα κενά με τους αριθμούς που βρήκατε προηγουμένως:

i. .... < Ε < ....

ii. Η διαφορά ανάμεσα στο πάνω και το κάτω άθροισμα είναι:

Ε8: Πώς θα μπορούσατε να πάρετε μια ακόμη καλύτερη προσέγγιση για το ζητούμενο εμβαδόν Ε;
(Με ποιο τρόπο μπορείτε να προχωρήσετε με την ίδια διαδικασία, ώστε να μειώσετε ακόμη περισσότερο τη διαφορά ανάμεσα στο πάνω και το κάτω φράγμα για το ζητούμενο εμβαδόν Ε;)

Ε9: Θα μπορούσατε να βρείτε μια τρίτη (ακόμη καλύτερη) προσέγγιση για το ζητούμενο εμβαδόν;
Χρησιμοποιείστε τους μετρητές στην οθόνη για να πάρετε το άνω και το κάτω άθροισμα Riemann.

Συμπληρώστε τα κενά με τους αριθμούς που βρήκατε προηγουμένως:

i. .... < Ε < ....

ii. Η διαφορά ανάμεσα στο πάνω και το κάτω άθροισμα είναι:

$$\Delta_3 = S_3 - s_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ε10: Για ποιο πλήθος *ν ορ*θογωνίων θα μπορούσατε να βρείτε τον αριθμό Ε με προσέγγιση ακεραίας μονάδας;

Συμπληρώστε τα κενά με τους αριθμούς που βρήκατε προηγουμένως:

i. .... < Ε < ....

ii. Η διαφορά ανάμεσα στο πάνω και το κάτω άθροισμα είναι:

$$\Delta_{\ldots} = S_{\ldots} - s_{\ldots} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

E11: Τι παρατηρείτε σχετικά με τις διαφορές ανάμεσα στα αντίστοιχα εμβαδά των άνω και κάτω ορθογωνίων, όπως αυτά εμφανίζονται στο παράθυρο μεγέθυνσης, καθώς αυξάνετε το πλήθος *ν* των ορθογωνίων;

E12: Θα μπορούσατε να βρείτε το ζητούμενο εμβαδόν Ε με προσέγγιση δεκάτου;

Συμπληρώστε τα κενά με τους αριθμούς που βρήκατε προηγουμένως:

i. .... < Ε < ....

ii. Η διαφορά ανάμεσα στο πάνω και το κάτω άθροισμα είναι:

Error! Objects cannot be created from editing field codes.

E13: Συμπληρώστε τα κενά στον παρακάτω πίνακα με τους αριθμούς που βρήκατε προηγουμένως.

ν	S_ν	s_ν	Διαφορά : $\Delta_\nu = S_\nu - s_\nu$
1	17.9999	2	15.9999
2			
5			
115			
809			
2516			
11096			
281068			

Καθώς αυξάνετε το πλήθος *ν* των ορθογωνίων κάλυψης:

E14: Πως μεταβάλλονται οι τιμές για το άνω και το κάτω άθροισμα *Riemann*, οι οποίες περιέχονται στον προηγούμενο πίνακα;

E15: Πως μεταβάλλεται η διαφορά $\Delta_\nu = S_\nu - s_\nu$;

Ε16: Νομίζετε ότι αυτή η διαδικασία μπορεί να οδηγήσει στον υπολογισμό του ζητούμενου εμβαδού με απόλυτη ακρίβεια;

Ε17: Ποιον αριθμό νομίζετε ότι προσεγγίζει η διαφορά των αθροισμάτων $\Delta_\nu = S_\nu - s_\nu$;

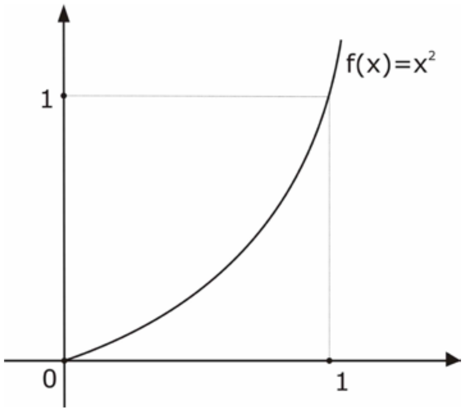
Ε18: Πόσο κοντά στο 0 νομίζετε ότι μπορεί να φτάσει η διαφορά Δ_ν ;

Ε19: Πόσο κοντά στο ζητούμενο εμβαδόν νομίζετε ότι μπορούμε να φτάσουμε μέσω αυτής της διαδικασίας;

Ε20: Νομίζετε ότι η παραπάνω διαδικασία μπορεί πράγματι να αποτελέσει ένα τρόπο μέτρησης για το άγνωστο εμβαδόν Ε;

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
Κατασκευή – Υπολογισμός – Αλγεβρική επεξεργασία - Όριο ακολουθίας

Θα προσεγγίσουμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$, την ευθεία $x = 1$ και τον άξονα $x'x$.



1. Χωρίστε το διάστημα [0,1] σε δύο ίσα μέρη.
Το μήκος καθενός από τα διαστήματα [0,1/2] και [1/2,1] είναι …………

Η μέγιστη τιμή της f στο διάστημα [0,1/2] είναι …….. και η ελάχιστη ……..
Η μέγιστη τιμή της f στο διάστημα [1/2,1] είναι …….. και η ελάχιστη ………

Το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με βάση το διάστημα [0,1/2] και ύψος τη μέγιστη τιμή στο διάστημα [0,1/2] είναι ……………………
Το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με βάση το διάστημα [0,1/2] και ύψος την ελάχιστη τιμή στο διάστημα [0,1/2] είναι ……………………

Το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με βάση το διάστημα [1/2,1] και ύψος την μέγιστη τιμή της f στο διάστημα [1/2,1] είναι ……………….
Το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με βάση το διάστημα [1/2,1] και ύψος την ελάχιστη τιμή της f στο διάστημα [1/2,1] είναι ……………….

Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων παραλληλογράμμων που προέκυψαν από τη μέγιστη τιμή σε κάθε διάστημα είναι S_2 = ………………..
Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων παραλληλογράμμων που προέκυψαν από την ελάχιστη τιμή σε κάθε διάστημα είναι s_2 = ………………..

Η διαφορά των δύο εμβαδών είναι S_2 - s_2 = ………………..

2. Χωρίστε το διάστημα [0,1] σε τρία ίσα μέρη.

Τα διαστήματα στα οποία χωρίσαμε το [0,1] είναι τα

[,] [,] [,]

Κάθε ένα από αυτά έχει μήκος ……………………

Η μέγιστη τιμή της f στο 1ο διάστημα είναι ……………….. και η ελάχιστη ………..
Η μέγιστη τιμή της f στο 2ο διάστημα είναι ……………….. και η ελάχιστη ………..
Η μέγιστη τιμή της f στο 3ο διάστημα είναι ……….. και η ελάχιστη ………..

Το μεγάλο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στο 1ο διάστημα
έχει εμβαδόν …………. και το μικρό ………..

Το μεγάλο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στο 2ο διάστημα
έχει εμβαδόν …………. και το μικρό ………..

Το μεγάλο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στο 3ο διάστημα
έχει εμβαδόν …………. και το μικρό ………..

Το άθροισμα των τριών μεγάλων ορθογωνίων παρ/μων είναι S_3 =……...…
Και το άθροισμα των τριών μικρών ορθογωνίων παρ/μων είναι s_3 = ..………

Η διαφορά των δύο εμβαδών είναι $S_3 - s_3$ = ………………..

3. Χωρίστε το διάστημα [0,1] σε ν ίσα μέρη.

Τα διαστήματα που θα δημιουργηθούν θα είναι τα
[,] [,] [,] … [,]

Κάθε ένα από αυτά έχει μήκος ………

Η μέγιστη τιμή της f στο 1ο διάστημα είναι …….. και η ελάχιστη ……..
Η μέγιστη τιμή της f στο 2ο διάστημα είναι …….. και η ελάχιστη …..…
Η μέγιστη τιμή της f στο ν-στο διάστημα είναι ….…… και η ελάχιστη ………..

Το μεγάλο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στο 1ο διάστημα
έχει εμβαδόν …………. και το μικρό ………..

Το μεγάλο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στο 2ο διάστημα
έχει εμβαδόν …………. και το μικρό ………..

…
Το μεγάλο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στο ν-στο διάστημα
έχει εμβαδόν …………. και το μικρό ………..

Το άθροισμα των ν μεγάλων ορθογωνίων παρ/μων είναι $S_ν$ =…………
και το άθροισμα των ν μικρών ορθογωνίων παρ/μων είναι $s_ν$ = …...……

Η διαφορά των δύο εμβαδών είναι $S_ν$ - $s_ν$ = ………………..

Ποιον αριθμό πλησιάζει η διαφορά $S_ν$ - $s_ν$ καθώς το ν μεγαλώνει; …………..

Ποιον αριθμό πλησιάζει το $S_ν$ καθώς το ν μεγαλώνει; …………………

Ποιον αριθμό πλησιάζει το $s_ν$ καθώς το ν μεγαλώνει; …………………

Μπορούμε από την παραπάνω διαδικασία να έχουμε συμπεράσματα για το εμβαδόν ανάμεσα στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$ και τον άξονα $x'x$ στο διάστημα [0,1];

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.