ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Διδακτική Απειροστικού Λογισμού

Ενότητα 5: Θέματα σχετικά με τη διδασκαλία της παραγώγου.

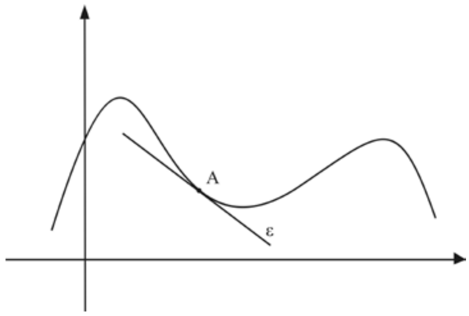
Ζαχαριάδης Θεοδόσιος

Τμήμα Μαθηματικών

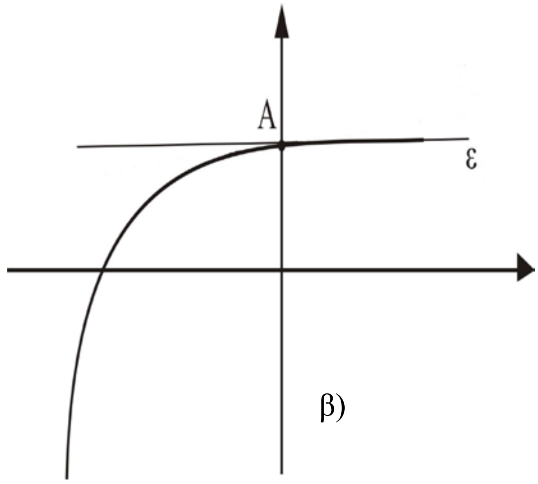
1. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

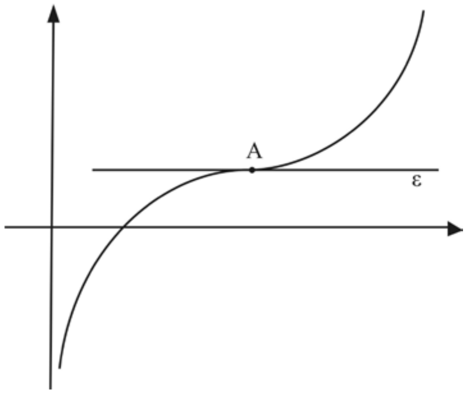
1. Στα Μαθηματικά κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου τέθηκε η ερώτηση:
« Ποιες από τις ευθείες στα παρακάτω σχήματα είναι εφαπτόμενες της αντίστοιχης καμπύλης στο σημείο Α. Αιτιολογείστε την απάντησή σας.»



α)



β)



γ)

Ένας/μια μαθητής/τρια απάντησε ως εξής:
«Στο σχήμα (α) η ευθεία δεν είναι εφαπτόμενη της καμπύλης γιατί έχει τουλάχιστον δυο κοινά σημεία με την καμπύλη. Στο σχήμα (β) η ευθεία δεν είναι εφαπτομένη της καμπύλης γιατί έχει άπειρα κοινά σημεία με την καμπύλη. Στο σχήμα (γ) η ευθεία, παρά το ότι έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την καμπύλη, δεν είναι εφαπτομένη της γιατί την κόβει.»

α) Τι είναι πιθανό να σκεφτόταν ο μαθητής για να οδηγηθεί στην απάντηση του σχετικά με το σχήμα (α); Τι θα ρωτάγατε τον μαθητή προκειμένου να βοηθηθείτε να κατανοήσετε το λόγο της απάντησης του;

β) Όμοια για την απάντηση του σχετικά με το σχήμα (β).

γ) Όμοια για την απάντηση του σχετικά με το σχήμα (γ).

δ) Πως θα διορθώνατε τις όποιες παρανοήσεις του μαθητή προκύπτουν από τις παραπάνω απαντήσεις του;

2. Στα Μαθηματικά κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου δόθηκε η παρακάτω άσκηση:
« Βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης:

$f(x) = x^2$ για x<0

$= x^3$ για $x \geq 0$ »

Ένας μαθητής απάντησε ως εξής:
« Επειδή $(x^2)' = 2x$ και $(x^3)'=3x^2$ έχουμε ότι $f'(x) = 2x$ για $x<0$ *και* $f'(x) = 3x^2$ για $x \geq 0$.»
α) Βαθμολογείστε την παραπάνω απάντηση στην κλίμακα 0-10 και αιτιολογείστε το βαθμό που βάλατε.
β) Τι σχόλια θα κάνατε στον μαθητή σχετικά με την απάντηση του

3. Ένας καθηγητής ρώτησε τους μαθητές του την παρακάτω ερώτηση:
«Αν f (x)= x+sinxcosx και g (x)= $e^{-\sin x}$ (x+sinxcosx) να υπολογισθεί το όριο
$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$»

Δυο μαθητές έδωσαν τις εξής λύσεις:

Μαθητής 1: Είναι φανερό ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} e^{\sin x}$. Το τελευταίο όριο δεν υπάρχει εφόσον το όριο του εκθέτη δεν υπάρχει. Άρα και το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

Μαθητής 2: Παρατηρούμε ότι *f*(x) > x-1, και g(x) > e^{-1} (x-1) για x>1.

Εφόσον $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x+\sin x\cos x) = +\infty = \lim_{x\to+\infty} e^{-\sin x}(x+\sin x\cos x) = \lim_{x\to+\infty} g(x)$ μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα De l'Hospital για τον υπολογισμό του ορίου.

Έχουμε $f'(x) = 2(\cos x)^2$, $g'(x) = [e^{-\sin x}\cos x].[2\cos x - f(x)]$

οπότε: $f'(x) / g'(x) = [2e^{\sin x}\cos x]/[2\cos x - f(x)]$ (για $\cos x \neq 0$).

Επειδή $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$ άρα και $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Ο καθηγητής προβληματίστηκε αρκετά με την απάντηση των δυο μαθητών. Αρχικά είπε ότι η απάντηση του δεύτερου μαθητή είναι λανθασμένη αλλά δεν μπόρεσε να προσδιορίσει το λάθος. Στη συνέχεια, είπε στους μαθητές ότι θα το κοιτάξει στο σπίτι και θα το συζητήσουν την επόμενη ημέρα. Την επόμενη ημέρα είπε στην τάξη ότι υπάρχει μια παράλειψη στην διατύπωση του θεωρήματος De l'Hospital στο σχολικό βιβλίο και προχώρησε στη συνέχεια του μαθήματος.

α) Ποιος πιστεύετε ότι ήταν ο στόχος του καθηγητή με την παραπάνω άσκηση; Νομίζετε ότι ήταν επιτυχής η επιλογή της συγκεκριμένης άσκησης για την επίτευξη αυτού του στόχου; Δικαιολογήστε την άποψη σας. Αν δεν θεωρείτε την επιλογή πετυχημένη, αναφέρετε ένα παράδειγμα που θα επιλέγατε εσείς για την επίτευξη του ίδιου στόχου.
β) Πως κρίνετε την στάση του καθηγητή σχετικά με την διχογνωμία που εμφανίστηκε. Περιγράψτε τον τρόπο που θα εσείς θα αντιμετωπίζατε την παραπάνω κατάσταση στην τάξη.

4. Ένας καθηγητής στην Γ΄ Λυκείου ζήτησε από τους μαθητές του να αποδείξουν τον κανόνα της αλυσίδας: $(f\circ g)'(x) = f(g(x))'\, g'(x)$ για τις συναρτήσεις g και f που είναι παραγωγίσιμες στα x και g(x) αντίστοιχα. Οι παρακάτω απαντήσεις προέρχονται από δυο μαθητές:
Μαθητής 1: Ισχύει $(f\circ g)'(x)=d(f\circ g)/dx = d(f\circ g)/dx \cdot dg(x)/dg(x) =$
$d(f\circ g) / dg(x) \cdot dg(x)/ dx = f(g(x))'\, g'(x)$.
Μαθητής 2: Αν η συνάρτηση g είναι σταθερή τότε η σχέση είναι προφανής. Αν η συνάρτηση g δεν είναι σταθερή τότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε $g(t) \neq g(x)$ για κάθε t στο $(x-\delta, x+\delta)$ και έχουμε
$(f\circ g)'(x)=$

$$\lim_{t\to x}\frac{f(g(t)-f(g(x))}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{f(g(t)-f(g(x))}{g(t)-g(x)}\,\frac{g(t)-g(x)}{t-x} = \lim_{u\to g(x)}\frac{f(u)-f(g(x))}{u-g(x)}\lim_{t\to x}\frac{g(t)-g(x)}{t-x}$$

$= f(g(x))'\, g'(x)$

α) Σχολιάστε τις απαντήσεις των δύο μαθητών.
β) Τι συμπέρασμα θα μπορούσατε να βγάλετε σχετικά με την κατανόηση και τις πιθανές παρανοήσεις κάθε μαθητή μέσα από την απάντηση του;
γ) Ποιος πιστεύετε ότι ήταν ο λόγος που ο καθηγητής ζήτησε την παραπάνω απόδειξη, δεδομένου ότι δεν διδάσκεται και δεν περιέχεται στο σχολικό βιβλίο;
δ) Θεωρείτε σκόπιμο να διδάσκεται κάτι που είναι εκτός ύλης ή να ακολουθείται διαφορετική σειρά στην διδασκαλία μιας έννοιας, θεωρήματος κλπ από την σειρά του σχολικού βιβλίου; Ποιοι στόχοι μπορεί να εξυπηρετηθούν καλύτερα και τι κινδύνους συνεπάγεται μια τέτοια μέθοδος;

5. Δύο μαθητές της Γ΄Λυκείου Θετικής Κατεύθυνσης, προβληματίζονται σχετικά με την συμπεριφορά μιας συνάρτησης γύρω από ένα τοπικό ακρότατο.
Μαθητής 1: Μια συνάρτηση $f\colon R\to R$ για να έχει τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο x_0 πρέπει να υπάρχει ένα διάστημα $(\alpha, x_0]$ στο οποίο η συνάρτηση να είναι φθίνουσα και ένα διάστημα $[x_0, \beta)$ στο οποίο η συνάρτηση να είναι αύξουσα.

Μαθητής 2: Το θεώρημα που ξέρουμε λέει το αντίστροφο. Δεν ξέρω κάποιο θεώρημα από το οποίο να προκύπτει αυτό που λες. Δεν μπορώ όμως να σκεφτώ και ότι μπορεί να συμβαίνει κάτι διαφορετικό.

Αν οι μαθητές αυτοί ζητούσαν τη βοήθεια σας για να λύσουν την απορία τους πώς θα χειριζόσασταν το θέμα;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Θεώρημα Μέσης Τιμής

Το θέμα της δραστηριότητας

Η δραστηριότητα αυτή εισάγει το θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού χωρίς την απόδειξή του.

Οι στόχοι της δραστηριότητας

Μέσω αυτής της δραστηριότητας στοχεύουμε, ώστε οι μαθητές:

- Μέσα από τη διερεύνηση μιας ειδικής περίπτωσης και τη δυνατότητα επέκτασής της να οδηγηθούν στην εικασία του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.
- Να εξετάσουν τις αναγκαίες υποθέσεις για το Θ.Μ.Τ. και να αντιληφθούν ότι το σημείο ξ του συμπεράσματος δεν είναι μοναδικό.
- Να δώσουν την τυπική διατύπωση του θεωρήματος.

Η λογική της δραστηριότητας

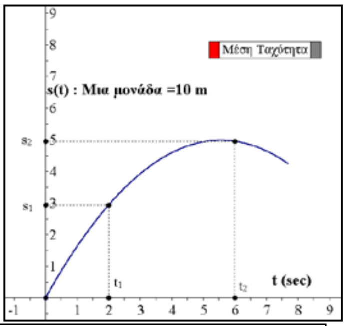
Αρχικά μελετάται η σχέση μέσης και στιγμιαίας ταχύτητας σε ένα πρόβλημα κίνησης. Μέσω της γραφικής ερμηνείας αυτής της σχέσης συνδέεται η κλίση της χορδής με την κλίση της εφαπτομένης σε κάποιο σημείο. Ακολούθως εξετάζονται οι προϋποθέσεις γενίκευσης αυτής της σύνδεσης καθώς και εάν το σημείο που προκύπτει είναι μοναδικό. Τα παραπάνω οδηγούν στην πλήρη τυπική διατύπωση του θεωρήματος. Η απόδειξη του θεωρήματος δεν περιλαμβάνεται στη δραστηριότητα.

Δραστηριότητα και αναλυτικό πρόγραμμα

Η δραστηριότητα εισάγει το Θεώρημα Μέσης Τιμής χωρίς την απόδειξή του και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διδασκαλία του στο επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Η ολοκλήρωσή της εκτιμάται ότι απαιτεί μία διδακτική ώρα.

Φύλλο εργασίας

Η κίνηση ενός τρένου περιγράφεται από τη συνάρτηση y = s(t), της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα. Η ανεξάρτητη μεταβλητή t εκφράζει το χρόνο κίνησης του τραίνου και η εξαρτημένη μεταβλητή s(t) την απόσταση που έχει διανύσει το τρένο μέχρι τη χρονική στιγμή t.



Ε1: Μπορείτε να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του οχήματος ανάμεσα στις χρονικές στιγμές $t_1 = 2$ *sec* και $t_2 = 6$ *sec* ;

Τι σημαίνει γεωμετρικά η μέση ταχύτητα που υπολογίσατε στο προηγούμενο σχήμα;

Ε2: Ποια είναι η κοινή μαθηματική έννοια που υπάρχει σε όλες τις παρακάτω εκφράσεις:
Στιγμιαία ταχύτητα,
Στιγμιαίος (ή οριακός) ρυθμός μεταβολής,
Κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης σε ένα σημείο;

Είναι επιθυμητό οι μαθητές να οδηγηθούν στην έννοια του παράγωγου αριθμού $f'(x_0)$.

Ε3: Τι σημαίνει γραφικά το μέτρο της στιγμιαίας ταχύτητας του τρένου κατά τη χρονική στιγμή 4 *sec* ;

Η επιθυμητή απάντηση είναι η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης στο σημείο $(4, s(4))$.

Ε4: Νομίζετε ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης του τρένου από τη χρονική στιγμή t_1 = *2 sec* έως τη χρονική στιγμή t_2 = *6 sec* υπάρχει χρονική στιγμή t_0 , όπου το μέτρο της στιγμιαίας ταχύτητας ισούται με τη μέση ταχύτητα που βρήκατε προηγουμένως για το χρονικό διάστημα $[t_1 , t_2]$;

Μια διαισθητική απάντηση από την πλευρά των μαθητών θα ήταν ικανοποιητική.

Ε5: Ισχύει το συμπέρασμα της Ε4 για οποιεσδήποτε χρονικές στιγμές t_1 και t_2 ; Μπορείτε να εκφράσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια συμβόλων;

Ο στόχος είναι οι μαθητές να οδηγηθούν στο συμπέρασμα ότι σε οποιοδήποτε διάστημα $[t_1, t_2]$ υπάρχει χρονική στιγμή t_0, ώστε $s'(t_0) = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ ή αλλιώς ότι $v(t_0) = v_\mu$, όπου $v(t_0)$ η στιγμιαία ταχύτητα στο t_0 και v_μ η μέση ταχύτητα στο διάστημα $[t_1, t_2]$.

Ε6: Προσπαθήστε να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία της απάντησης στην Ε5;

Εδώ, με τη βοήθεια των προηγουμένων ερωτημάτων αλλά και τη συμβολή του καθηγητή, αναμένεται οι μαθητές να οδηγηθούν στη γεωμετρική ερμηνεία του Θ.Μ.Τ. με όρους της υπάρχουσας κατάστασης (μέση ταχύτητα, στιγμιαία ταχύτητα-κλίση τέμνουσας, κλίση εφαπτομένης).

Ο καθηγητής θα μπορούσε με αφετηρία τις δύο διαφορετικές έννοιες της μέσης και στιγμιαίας ταχύτητας, αξιοποιώντας ενδεχομένως και κάποιες από τις διαισθητικές απαντήσεις των μαθητών, να συμβάλει στη διαμόρφωση μιας εικασίας για το Θ.Μ.Τ. Αυτό μπορεί να αποτελέσει για κάποιους από τους μαθητές το έναυσμα που μπορεί να οδηγήσει σε περαιτέρω διερεύνηση.

Ε7: Θα μπορούσατε να γενικεύσετε το συμπέρασμα της Ε5 για μια συνάρτηση *f* ορισμένη σε ένα διάστημα [x_1 , x_2];
Ποια είναι η αντίστοιχη διατύπωση;

Ανοίξτε το του Geogebra και πατήστε τα κουμπιά εμφάνισης, για να δείτε το περιβάλλον:

Μεταβάλλοντας την τιμή της τετμημένης του Ε μπορείτε να μετακινήσετε το σημείο Ε πάνω στη γραφική παράσταση και να κάνετε παρατηρήσεις για τις κλίσεις της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης και της χορδής ΑΒ.

Ε8: Μετακινώντας το σημείο επαφής Ε ανάμεσα στα σημεία *Α* και *Β*, μπορείτε να εξετάσετε, εάν υπάρχει κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης, το οποίο να ικανοποιεί την εικασία της Ε6 ;

Οι μαθητές πειραματίζονται με τη γραφική παράσταση της συγκεκριμένης συνάρτησης, προσπαθώντας να εξακριβώσουν εάν υπάρχει κάποιο σημείο της ανάμεσα στα Α και Β, στο οποίο η εφαπτομένη να γίνει παράλληλη με τη χορδή ΑΒ. Αναμένεται να κάνουν μια γραφική διαπίστωση για το Θ.Μ.Τ. που θα βοηθήσει στη συνέχεια της δραστηριότητας.
Στη συνέχεια οι μαθητές μπορούν να μεταβάλουν τη μορφή της συνάρτησης επεμβαίνοντας σε κάποιες από τις παραμέτρους της ή τα άκρα x_1, x_2, ώστε να διαπιστώσουν ότι οι κλίσεις γίνονται ίσες σε όλες αυτές τις διαφορετικές περιπτώσεις.

Ε9: Νομίζετε ότι το σημείο που προκύπτει στην προηγούμενη ερώτηση Ε8 είναι το μοναδικό με τη συγκεκριμένη ιδιότητα;

Θα πρέπει ίσως να τονιστεί από τον καθηγητή ότι γενικά η ύπαρξη κάποιου αντικειμένου δε συνεπάγεται άμεσα και μοναδικότητα. Όλα αυτά θα μπορούσαν να βοηθήσουν το μαθητή να αποσαφηνίσει τη χρήση της έκφρασης «*τουλάχιστον ένα σημείο*», που χρησιμοποιείται στον τυπικό ορισμό.

Ε10: Ποιες ιδιότητες νομίζετε ότι πρέπει να έχει η συνάρτηση *f*, ώστε να ισχύει η παραπάνω εικασία;

Εδώ είναι επιθυμητή μια γενική διατύπωση του Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση *f*, με τη βοήθεια της γεωμετρικής ερμηνείας. Με τη βοήθεια των επόμενων ερωτήσεων στοχεύουμε σε μια συζήτηση πάνω στις προϋποθέσεις του θεωρήματος και την τυπική του διατύπωση. Μέσω των παραδειγμάτων που ακολουθούν δίνεται έμφαση στις υποθέσεις του θεωρήματος: Η παραγωγισιμότητα στο εσωτερικό του διαστήματος και η συνέχεια στα άκρα είναι απολύτως αναγκαίες.

Ε11: Αν η συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε ένα από τα δύο άκρα του πεδίου ορισμού της ή δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου

ορισμού υπάρχει κάποιος πραγματικός αριθμός ξ στο εσωτερικό του αντίστοιχου διαστήματος, ο οποίος να ικανοποιεί την εικασία της Ε6;

Οι μαθητές καλούνται στη συνέχεια, με τη βοήθεια των μετρητών του προγράμματος, να διαπιστώσουν ότι η κλίση του AB σε κάθε περίπτωση βρίσκεται πολύ έξω από το εύρος μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης και επομένως είναι αδύνατο να γίνουν ίσες οι δύο κλίσεις για οποιαδήποτε τετμημένη $\xi \in (\alpha, \beta)$ του σημείου επαφής $(\xi, f(\xi))$.

Εδώ ίσως θα πρέπει να γίνει κάποιο σχόλιο από τον καθηγητή σχετικά με την υπολογιστική ανεπάρκεια, η οποία δίνει κλίση ακόμη και στο γωνιακό σημείο, ενώ αυτό δεν είναι σωστό.

Ε12: Για ποιο λόγο νομίζετε ότι δεν ισχύει η εικασία της Ε6 σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις;

Η απόλυτη αναγκαιότητα των προϋποθέσεων του Θ.Μ.Τ. θα πρέπει να τονιστεί από τον καθηγητή, ο οποίος θα μπορούσε ίσως να συμπεριλάβει κάποιες ερωτήσεις, όπως:
Ποια είναι τα «προβληματικά» σημεία των γραφικών παραστάσεων σε κάθε περίπτωση; Για ποιο λόγο; κ.λ.π.

Ε13: Με τη βοήθεια μαθηματικών όρων και συμβόλων, πώς θα μπορούσατε να διατυπώσετε την εικασία που προέκυψε στα προηγούμενα ερωτήματα;

Σε αυτό το στάδιο πλέον ο καθηγητής μπορεί να ενισχύσει τους μαθητές στη διαμόρφωση του νοήματος του Θ.Μ.Τ. σε αυστηρή μαθηματική γλώσσα, καθώς επίσης και να δώσει το όνομα του θεωρήματος. Έτσι μπορεί να επαναφέρει κάποια ερωτήματα, όπως:
Νομίζετε ότι το Θ.Μ.Τ. θα μπορούσε να εφαρμοστεί σε κάθε συνάρτηση;
Τι είδους ιδιότητες θα πρέπει να έχει μια συνάρτηση, ώστε αυτό να μπορεί να εφαρμοστεί; (Έμφαση στις υποθέσεις του θεωρήματος).

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης