



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Διδακτική Απειροστικού Λογισμού

Ενότητα 2: Προβλήματα σχετικά με τη διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού

Ζαχαριάδης Θεοδόσιος

Τμήμα Μαθηματικών

2. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Ο Απειροστικός Λογισμός αποτελεί τη βάση της Μαθηματικής Ανάλυσης, μιας σημαντικής περιοχής των Μαθηματικών με πολλές εφαρμογές τόσο στις Θετικές όσο και στις Θεωρητικές Επιστήμες. Η διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού αρχίζει στις τελευταίες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε όλες τις χώρες και η εξέταση του αποτελεί ένα σημαντικό κομμάτι των εξετάσεων για την εισαγωγή στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Στην Ελλάδα σήμερα η ύλη των εξετάσεων του μαθήματος των Μαθηματικών για την εισαγωγή στα ΑΕΙ και στα ΤΕΙ καλύπτεται σχεδόν αποκλειστικά από τον Απειροστικό Λογισμό.

Όπως προκύπτει από πολλές έρευνες, η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών αντιμετωπίζει σοβαρές δυσκολίες στην προσπάθεια κατανόησης των βασικών εννοιών του Απειροστικού Λογισμού. Η M. Artigue (1998) θεωρεί ότι τρεις είναι οι βασικές αιτίες που προκαλούν αυτές τις δυσκολίες και τα εμπόδια.

Το αντικείμενο μελέτης του Απειροστικού Λογισμού είναι οι πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής. Δηλαδή, συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών και τιμές στους πραγματικούς αριθμούς. Σύμφωνα με την M. Artigue, η πρώτη αιτία η οποία δημιουργεί προβλήματα στους μαθητές κατά την μελέτη του Απειροστικού Λογισμού, είναι η ελλιπής κατανόηση που αυτοί έχουν σχετικά με τη δομή των πραγματικών αριθμών και την έννοια της συνάρτησης. Σε προηγούμενες τάξεις οι μαθητές έχουν διδαχθεί τους πραγματικούς αριθμούς, τα βασικά υποσύνολα τους (φυσικούς, ακέραιους, ρητούς, άρρητους), τις σχέσεις αυτών των υποσυνόλων, τις διάφορες αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών καθώς και τις ιδιότητες της σχέσης διάταξης αυτού του συνόλου. Επίσης, έχουν διδαχθεί την έννοια της συνάρτησης και έχουν μελετήσει αλγεβρικά ορισμένα είδη συναρτήσεων, όπως γραμμικές συναρτήσεις, παραβολές και υπερβολές. Εντούτοις, όπως προκύπτει από ερευνητικά δεδομένα, η γνώση αυτών των εννοιών φαίνεται να παρουσιάζει κενά και να υπάρχουν βασικές παρανοήσεις όταν οι μαθητές αρχίζουν να μελετάνε στοιχεία του Απειροστικού Λογισμού.

Μελέτες σχετικά με τις αντιλήψεις των μαθητών για τους πραγματικούς αριθμούς δείχνουν ότι ο διαχωρισμός μεταξύ των διαφόρων υποσυνόλων του συνόλου των πραγματικών αριθμών, ιδιαίτερα μεταξύ των ρητών και των αρρήτων, παραμένει αρκετά συγκεχυμένος (π.χ. Fischbein E., Jehiam R., and Cohen D. 1995). Η απόφαση αν ένας αριθμός είναι ρητός ή άρρητος πολλές φορές καθορίζεται από την αναπαράσταση του αριθμού. Π.χ. για πολλούς μαθητές ο αριθμός $\frac{2}{3}$ είναι ρητός αλλά ο $0,666\dots$ είναι άρρητος (Gianakoulias, Sougioul, and Zachariades, 2007). Επίσης, για πολλούς η πυκνότητα των ρητών μέσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών δεν είναι σαφής. Π.χ. για αρκετούς μαθητές μεταξύ του $\frac{3}{5}$ και του $\frac{4}{5}$ δεν υπάρχει άλλος ρητός αριθμός. Η συσχέτιση μεταξύ του συνόλου των πραγματικών αριθμών και των σημείων της πραγματικής ευθείας καθώς και η χρήση αυτής είναι ελλιπής.

Όσον αφορά στην έννοια της συνάρτησης, πολλοί μαθητές για να ελέγξουν αν μία σχέση ορίζει συνάρτηση χρησιμοποιούν κριτήρια που έρχονται σε αντίθεση με τον ορισμό της έννοιας, αν και οι περισσότεροι από αυτούς είναι σε θέση να τον αναπαράγουν. Τα κριτήρια αυτά δημιουργούνται από τυπικά παραδείγματα που θεωρούνται ως πρότυπα και καθορίζουν την εικόνα της έννοιας. Έτσι το ίδιο αντικείμενο μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση ή όχι ανάλογα με τη σημειακή του αναπαράσταση. Π.χ. η συνάρτηση $f(x)=2$ για κάποιους μαθητές δεν είναι συνάρτηση διότι η δοθείσα αλγεβρική έκφραση δεν εξαρτάται από το x . Είναι όμως συνάρτηση αν δοθεί η γραφική της παράσταση που είναι ευθεία. Ένα άλλο σημαντικό πρόβλημα των μαθητών είναι η αδυναμία συνδυασμού των διαφορετικών αναπαραστάσεων μιας

συνάρτησης και η μετάβαση από μια αναπαράσταση σε άλλη. Επίσης παρουσιάζεται αδυναμία στην θεώρηση της συνάρτησης όχι μόνο ως διαδικασία, αλλά και ως αντικείμενο.

Η δεύτερη αιτία είναι προβλήματα που συνδέονται με τη διάσταση που υπάρχει μεταξύ του «αλγεβρικού» και του «αναλυτικού» τρόπου σκέψης. Η Μαθηματική Ανάλυση απαιτεί από τον μαθητή να έχει αλγεβρικές δεξιότητες και ικανότητες αλλά ταυτόχρονα απαιτεί και την ανάπτυξη ενός διαφορετικού τρόπου σκέψης. Για να διεισδύσουμε στην αναλυτική σκέψη και να είμαστε αποτελεσματικοί σε αυτήν πρέπει να αναπτύξουμε νέες τεχνικές. Για παράδειγμα στην Άλγεβρα για να αποδείξουμε ότι δύο ποσότητες α και β είναι ίσες μετασχηματίζουμε τη μία ή και τις δύο σχέσεις με διαδοχικές ισότητες μέχρι να καταλήξουμε σε μια προφανή ισότητα.

Στον Απειροστικό Λογισμό συνήθως τέτοιες στρατηγικές δεν είναι αποτελεσματικές. Συνήθως την ισότητα δύο ποσοτήτων την αποδεικνύουμε είτε χρησιμοποιώντας την αρχή της τριχοτομίας, δηλαδή αποδεικνύουμε ότι δεν μπορεί η μια να είναι μεγαλύτερη της άλλης, ή χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία $\alpha = \beta$ αν και μόνον αν $|\alpha - \beta| < \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$. Δηλαδή, αποδεικνύουμε την ισότητα χρησιμοποιώντας ανισότητες.

Η βαθύτερη αιτία της διαφοράς μεταξύ των «αλγεβρικών» και «αναλυτικών» τεχνικών οφείλεται στο ότι στον Απειροστικό Λογισμό τις ποσότητες που χρησιμοποιούμε τις γνωρίζουμε προσεγγιστικά, δηλαδή ως όρια γνωστών ποσοτήτων. Έτσι για να αποδείξουμε μια ιδιότητα τους χρησιμοποιούμε ιδιότητες των γνωστών ποσοτήτων που τις προσεγγίζουν.

Η τρίτη αιτία είναι η δυσκολία κατανόησης της έννοιας του ορίου. Η έννοια του ορίου, η οποία είναι η θεμελιώδης έννοια του Απειροστικού Λογισμού και στην οποία στηρίζονται όλες οι άλλες έννοιες, είναι ιδιαίτερα δύσκολη. Διεθνείς και εθνικές έρευνες αναδεικνύουν σαφέστατα ότι η πλειοψηφία των μαθητών δεν κατανοεί πλήρως την έννοια του ορίου, ακόμη και σε ανώτερο στάδιο των σπουδών τους (π.χ. Κορνού, 1991, Ελιά, Γαγάτσης, Παναούρα, Ζαχαριάδης και Ζουλινακί 2009). Αυτό βέβαια δεν τους αποτρέπει από το να λύνουν ασκήσεις, να επιλύουν προβλήματα και να επιτυγχάνουν στις εξετάσεις τους.

Στη συνέχεια, θα αναφέρουμε κάποια από τα εμπόδια που παρουσιάζονται στους μαθητές στην προσπάθεια τους να κατανοήσουν την έννοια του ορίου.

Για τις περισσότερες μαθηματικές έννοιες, η διδασκαλία δεν ξεκινά σε παρθένο έδαφος. Στην περίπτωση των ορίων, πριν από οποιαδήποτε διδασκαλία γι' αυτό το θέμα ο μαθητής έχει ήδη ορισμένες ιδέες, διαισθήσεις, εικόνες και γνώσεις που προέρχονται από την καθημερινή του εμπειρία, όπως π.χ. οι κοινές σημασίες των όρων που χρησιμοποιούνται. Αυτές οι αντιλήψεις μιας έννοιας, που εμφανίζονται πριν από την τυπική διδασκαλία, ονομάζονται αυθόρμητες αντιλήψεις (spontaneous conceptions).

Όταν ένας μαθητής συμμετέχει σ' ένα μάθημα μαθηματικών αυτές οι ιδέες δεν εξαφανίζονται. Αντίθετα, αναμιγνύονται με την νεοαποκτηθείσα γνώση, τροποποιούνται και προσαρμόζονται για να σχηματίσουν τις προσωπικές αντιλήψεις των μαθητών. Έχει αποδειχθεί ότι προκειμένου να επιλυθεί ένα πρόβλημα, γενικά δε στηριζόμαστε μόνο στην επιστημονική θεωρία, αλλά και στο φυσιολογικό ή αυθόρμητο συλλογισμό ο οποίος είναι θεμελιωμένος σε αυτές τις αυθόρμητες ιδέες.

Στην περίπτωση της έννοιας του ορίου οι λέξεις «τείνει» και «όριο» έχουν μια σημασία για τους μαθητές πριν αυτοί έλθουν σε επαφή με αυτές στο μάθημα των Μαθηματικών και οι μαθητές συνεχίζουν να βασίζονται σ' αυτές τις σημασίες και αφότου τους έχει δοθεί ένας τυπικός μαθηματικός ορισμός.

Οι έρευνες έχουν αποκαλύψει πολλές διαφορετικές σημασίες που έχουν οι μαθητές για την έκφραση «τείνει προς», όπως: πλησιάζει (μένοντας τελικά μακριά του), πλησιάζει ... χωρίς να το φθάσει, πλησιάζει ... μέχρι σχεδόν να το φθάσει, μοιάζει.

Η ίδια η λέξη όριο μπορεί να έχει διαφορετική σημασία για ένα μαθητή σε διαφορετικές στιγμές. Συχνότερα θεωρείται ως ένα «αξεπέραστο όριο», αλλά μπορεί επίσης να είναι: ένα αξεπέραστο όριο το οποίο μπορούμε να φθάσουμε, ένα αξεπέραστο όριο το οποίο είναι αδύνατο να φθάσουμε, ένα σημείο το οποίο πλησιάζουμε, χωρίς να το φθάνουμε, ένα σημείο το οποίο πλησιάζουμε και το φθάνουμε, ένα άνω ή κάτω φράγμα, ένα μέγιστο ή ένα ελάχιστο, ένα διάστημα, αυτό που έπεται «αμέσως μετά από» εκείνο ως το οποίο μπορούμε να φθάσουμε, ένας περιορισμός, μια απαγόρευση, ένας κανόνας, το τέλος, το τέρμα.

Από τον ένα μαθητή στον άλλο η σημασία που αποδίδεται στις λέξεις ποικίλει. Για ένα μαθητή μια λέξη μπορεί να έχει διάφορες σημασίες, ανάλογα με τις περιστάσεις. Οι αυθόρμητες ιδέες παραμένουν για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα.

Οι έρευνες δείχνουν ότι μπορούν να παραμείνουν και σε μαθητές σε πολύ πιο προχωρημένο στάδιο μάθησης.

Η Aline Robert (1982) μελέτησε τα διαφορετικά πρότυπα που οι μαθητές έχουν για την έννοια του ορίου μιας ακολουθίας. Το συμπέρασμα αυτής της μελέτης ήταν ότι, παρά το γεγονός ότι στους μαθητές έχει δοθεί ένας τυπικός ορισμός της συγκλίνουσας ακολουθίας, όταν τους ζητείται να περιγράψουν την έννοια, ενεργούν σα να μη τους είχε δοθεί και έχουν την τάση να δημιουργούν αντιλήψεις που σχετίζονται με διάφορες πτυχές της πρότερης εμπειρίας τους.

Η Robert κατηγοριοποίησε σε πέντε ομάδες τα μοντέλα των μαθητών για την έννοια του ορίου και της συγκλίνουσας ακολουθίας. Ορισμένοι μαθητές πρότειναν **πρωτογενή, στοιχειώδη μοντέλα**, που θυμίζουν εκείνα που μπορεί να προκληθούν αυθόρμητα, όπως: *σταθερή* (οι τελικοί όροι έχουν πάντα την ίδια τιμή) ή *φράγμα* (οι τιμές δεν μπορούν να περάσουν το l). Άλλοι μαθητές πρότειναν **μονοτονικά και δυναμικά-μονοτονικά μοντέλα** (μια συγκλίνουσα ακολουθία είναι μια αύξουσα ακολουθία άνω φραγμένη ή φθίνουσα κάτω φραγμένη, μια συγκλίνουσα ακολουθία είναι μια αύξουσα ή φθίνουσα ακολουθία που πλησιάζει ένα όριο κ.α.). Η τρίτη κατηγορία είναι τα **δυναμικά μοντέλα** (η u_n τείνει στο l , η u_n πλησιάζει το l , η απόσταση της u_n από το l γίνεται μικρή, οι τιμές πλησιάζουν έναν αριθμό όλο και περισσότερο κ.α.). Η τέταρτη κατηγορία είναι τα **στατικά μοντέλα** (τα u_n βρίσκονται σ' ένα διάστημα κοντά στο l , τα u_n είναι συγκεντρωμένα γύρω από το l , τα στοιχεία της ακολουθίας καταλήγουν να βρίσκονται σε μια γειτονιά γύρω από το l κ.α.). Η τελευταία κατηγορία είναι τα **μικτά μοντέλα** τα οποία αποτελούν ένα μίγμα των ανωτέρω

Η Robert διαπίστωσε ότι αυτά τα μοντέλα επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο φοιτητές του πανεπιστημίου έλυναν τα προβλήματα.

Η μελέτη έδειξε ότι δεν υπάρχει μια μοναδική εικόνα για την έννοια του ορίου στο νου των μαθητών και ότι αυτοί διαθέτουν ποικίλες εικόνες της έννοιας.

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Ζαχαριάδης Θεοδόσιος, 2014.
Ζαχαριάδης Θεοδόσιος. «Διδακτική Απειροστικού Λογισμού. Ενότητα 2: Προβλήματα σχετικά με τη διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/MATH127/>.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

