Ο Αλγόριθμος Gauss-Jordan

Ο αλγόριθμος Gauss-Jordan χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του αντιστρόφου ενός δοσμένου πίνακα καθώς επίσης και για την επίλυση του γραμμικού συστήματος $Ax = b$ εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο αυτό στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος $[A|b]$.

Αλγόριθμος Gauss-Jordan
Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
$for\ k = 1, 2, \cdots, n$
B.1) Δημιουργία πολλαπλασιαστών

$$m_{ik} = \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{kk}},\ i = 1, \cdots, n,\ i \neq k$$

B.2) Ενημέρωση των εισόδων του πίνακα

$$\alpha_{ij} \equiv \alpha_{ij} - m_{ik}\alpha_{kj},\ i = 1, \cdots, n,\ i \neq k,\ j = k+1, \cdots, n$$

Πολυπλοκότητα

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(n-1) + \sum_{k=1}^{n}(n-1)(n-k) \\
&= (n-1)n + n^2(n-1) - (n-1)\sum_{k=1}^{n} k \\
&= n^2 - n + n^3 - n^2 - (n-1)\frac{n(n+1)}{2} \\
&= n^3 - n - \frac{n(n^2-1)}{2} \\
&= \frac{n^3}{2} - \frac{n}{2} \\
&= O(\frac{n^3}{2})
\end{aligned}$$

Παράδειγμα
Να λυθεί το παρακάτω σύστημα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Gauss-Jordan:

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5$$

$$-3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3$$

$$-x_1 - 5x_2 + x_3 = -4$$

Λύση:
Θα χρησιμοποιήσουμε τον επαυξημένο πίνακα:
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & | & 5 \\ -3 & 3 & -2 & | & 3 \\ -1 & -5 & 1 & | & -4 \end{bmatrix}$$
Στόχος μας είναι να φέρουμε τον παραπάνω πίνακα στη μορφή:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & * \\ 0 & 1 & 0 & | & * \\ 0 & 0 & 1 & | & * \end{bmatrix}$$

ώστε η τελευταία στήλη του επαυξημένου πίνακα, δηλαδή η στήλη με τα *, να είναι η λύση του αρχικού γραμμικού συστήματος.

$\diamond$ Δημιουργία μονάδας στο στοιχείο α_{11}
Διαιρούμε την πρώτη γραμμή με το $\alpha_{11} = 2$ και ο επαυξημένος πίνακας γίνεται

$$A \equiv \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3/2 & | & 5/2 \\ -3 & 3 & -2 & | & 3 \\ -1 & -5 & 1 & | & -4 \end{bmatrix}$$

$\diamond$ Μηδενίζουμε τα στοιχεία α_{21} και α_{31} του πίνακα.
Δημιουργία πολλαπλασιαστών:
$m_{21} = \dfrac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} = \dfrac{-3}{1} = -3$
$m_{31} = \dfrac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}} = \dfrac{-1}{1} = -1$

Ενημέρωση εισόδων:
$\alpha_{22}^{(1)} = \alpha_{22} - m_{21}\alpha_{12} = 3 - (-3)2 = 9$
$\alpha_{23}^{(1)} = \alpha_{23} - m_{21}\alpha_{13} = -2 - (-3)3/2 = 5/2$
$\alpha_{24}^{(1)} = \alpha_{24} - m_{21}\alpha_{14} = 3 - (-3)5/2 = 21/2$

$\alpha_{32}^{(1)} = \alpha_{32} - m_{31}\alpha_{12} = -5 - (-1)2 = -3$
$\alpha_{33}^{(1)} = \alpha_{33} - m_{31}\alpha_{13} = 1 - (-1)3/2 = 5/2$
$\alpha_{34}^{(1)} = \alpha_{34} - m_{31}\alpha_{14} = -4 - (-1)5/2 = -3/2$

Άρα,

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3/2 & | & 5/2 \\ 0 & 9 & 5/2 & | & 21/2 \\ 0 & -3 & 5/2 & | & -3/2 \end{bmatrix}$$

$\diamond$ Δημιουργία μονάδας στο στοιχείο $\alpha_{22}^{(1)}$
Διαιρούμε την δεύτερη γραμμή του $A^{(1)}$ με το $\alpha_{22}^{(1)} = 9$ και ο πίνακας γίνεται

$$A^{(1)} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3/2 & | & 5/2 \\ 0 & 1 & 5/18 & | & 21/18 \\ 0 & -3 & 5/2 & | & -3/2 \end{bmatrix}$$

$\diamond$ Μηδενίζουμε τα στοιχεία $\alpha_{12}^{(1)}$ και $\alpha_{32}^{(1)}$ του πίνακα $A^{(1)}$.
Δημιουργία πολλαπλασιαστών:
$m_{12}^{(1)} = \dfrac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} = \dfrac{2}{1} = 2$
$m_{32}^{(1)} = \dfrac{\alpha_{32}}{\alpha_{22}} = \dfrac{-3}{1} = -3$

Ενημέρωση εισόδων:
$\alpha_{13}^{(2)} = \alpha_{13}^{(1)} - m_{12}\alpha_{23}^{(1)} = 3/2 - 2 \ . \ 5/18 = 17/18$
$\alpha_{14}^{(2)} = \alpha_{14}^{(1)} - m_{12}\alpha_{24}^{(1)} = 5/2 - 2 \ . \ 21/18 = 1/6$

$\alpha_{33}^{(2)} = \alpha_{33}^{(1)} - m_{32}\alpha_{23}^{(1)} = 5/2 - (-3) \ . \ 5/18 = 10/3$
$\alpha_{34}^{(2)} = \alpha_{34}^{(1)} - m_{32}\alpha_{24}^{(1)} = -3/2 - (-3) \ . \ 21/18 = 2$

Άρα,

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 17/18 & | & 1/6 \\ 0 & 1 & 5/18 & | & 21/18 \\ 0 & 0 & 10/3 & | & 2 \end{bmatrix}$$

$\diamond$ Δημιουργία μονάδας στο στοιχείο $\alpha_{33}^{(2)}$
Διαιρούμε την τρίτη γραμμή του $A^{(2)}$ με το $\alpha_{33}^{(2)} = 10/3$ και ο πίνακας γίνεται

$$A^{(2)} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 17/18 & | & 1/6 \\ 0 & 1 & 5/18 & | & 21/18 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3/5 \end{bmatrix}$$

$\diamond$ Μηδενίζουμε τα στοιχεία $\alpha_{13}^{(2)}$ και $\alpha_{23}^{(2)}$ του πίνακα $A^{(2)}$.
Δημιουργία πολλαπλασιαστών:

$m_{13}^{(2)} = \dfrac{\alpha_{13}^{(2)}}{\alpha_{33}^{(2)}} = 17/18$

$m_{23}^{(2)} = \dfrac{\alpha_{23}^{(2)}}{\alpha_{33}^{(2)}} = 5/18$

Ενημέρωση εισόδων:

$\alpha_{14}^{(3)} = \alpha_{14}^{(2)} - m_{13}\alpha_{34}^{(2)} = 1/6 - 17/18\ .\ 3/5 = -2/5$

$\alpha_{24}^{(3)} = \alpha_{24}^{(2)} - m_{33}\alpha_{34}^{(2)} = 21/18 - 5/18\ .\ 3/5 = 1$

Οπότε, ο επαυξημένος πίνακας A εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο Gauss-Jordan γίνεται

$$A \equiv A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3/5 \end{bmatrix}$$

και έτσι η λύση του συστήματος είναι:

$$x_1 = -2/5$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 3/5$$