Μέρος (I) Θεωρητική Επεξεργασία

Δίνεται πίνακας $A \in \Re^{n \times n}$. Εφαρμόζουμε σ' αυτόν μετασχηματισμούς Gauss μέχρι να γίνει άνω τριγωνικός .

(i) Αποδείξτε ότι :

$$a_{ij}^{(r)} = \frac{A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r & i \\ 1 & 2 & \dots & r & j \end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \end{pmatrix}}, 1 \le r \le n-1$$

όπου :

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ j_1 & j_2 & \dots & j_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_p j_1} & \dots & a_{i_p j_p} \end{vmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ i_1 & \dots & i_p \end{pmatrix}$$

(ii) Ένας πίνακας λέγεται Completely Pivoted (CP) εάν κατά τη διάρκεια των μετασχηματισμών Gauss με ολική οδήγηση δεν απαιτούνται εναλλαγές των γραμμών ή των στηλών του . Αποδείξτε ότι εάν ο A είναι CP και εφαρμοσθούν σ' αυτόν μετασχηματισμοί Gauss τότε :

$$g(n, A) = \max\left\{1, \max_{1 \le r \le n-1}\left|\frac{A\begin{pmatrix} 1 & \dots & r+1 \end{pmatrix}}{a_{11} \cdot A\begin{pmatrix} 1 & \dots & r \end{pmatrix}}\right|\right\}$$

όπου $g(n, A)$ το growth factor του πίνακα A .

(iii) Εάν εφαρμοσθεί Gauss με ολική οδήγηση σ' έναν CP πίνακα A , τότε :

$$g(n, A) = \frac{1}{|a_{11}|}\max\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$$

όπου $p_1, p_2, \dots, p_n$ είναι τα οδηγά στοιχεία του A .

Μέρος (II) Εργαστηριακή Άσκηση

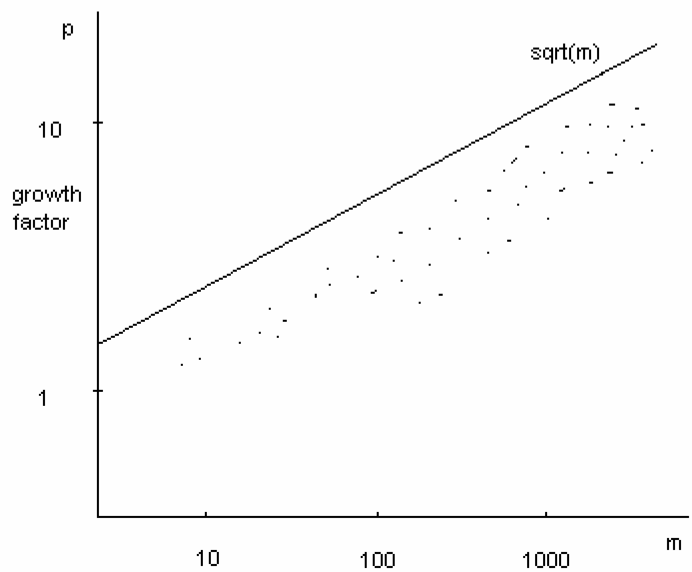
(i) Έστω $A \in \Re^{n \times n}$. Να κατασκευάσετε τη ρουτίνα GECP της MATLAB η οποία μετατρέπει τον A σε άνω τριγωνικό εφαρμόζοντας απαλοιφή Gauss με ολική οδήγηση .

(ii) Ορίζουμε έναν τυχαίο πίνακα (random matrix) να είναι ένας πίνακας του οποίου οι είσοδοι είναι τιμές από την πραγματική κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση $m^{-1/2}$. (Στη MATLAB , $A = randn(m,m)/sqrt(m)$)

(Ο παράγοντας $\sqrt{m}$ εισάγεται για να είναι σαφής η οριακή συμπεριφορά καθώς $m \to \infty$)

Για ένα αρκετά μεγάλο δείγμα τέτοιων πινάκων να υπολογισθεί ο συντελεστής μεγέθυνσης που προκύπτει από την εφαρμογή απαλοιφής Gauss με ολική οδήγηση σ' αυτούς .

Να γίνει η γραφική παράσταση (scatter plot) αυτών των τιμών .



Να γίνει σύγκριση του υπολογιζόμενου συντελεστή μεγέθυνσης p με το θεωρητικό φράγμα .

m	5	15	30	50
θεωρητικό φράγμα				
p				

(iii) (α) Να υπολογισθεί ο συντελεστής μεγέθυνσης για πίνακες Hadamard $H \in \Re^{n\times n}$. (Ορθογώνιοι πίνακες με στοιχεία ± 1) (Στη MATLAB , $H = hadamard(n)$)

(β) Τι παρατηρείτε εάν εφαρμόσουμε σ' αυτούς μετασχηματισμούς ισοδυναμίας (αλλαγές γραμμών – στηλών και πολλαπλασιασμούς με ± 1) και υπολογίσουμε τη δομή των οδηγών στοιχείων του ;