ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εργασία

Μέρος (Ι)

Δίνεται πίνακας $A \in \Re^{nxn}$. Εφαρμόζουμε σ' αυτόν μετασχηματισμούς Gauss μέχρι να γίνει άνω τριγωνικός.

(i) Αποδείξτε ότι :

$$a_{ij}^{(r)} = \frac{A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r & i \\ 1 & 2 & \dots & r & j \end{pmatrix}}{A(1 \quad 2 \quad \dots \quad r)}, 1 \le r \le n-1$$

όπου :

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & \cdots & a_{i_1,j_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_p,j_1} & \cdots & a_{i_p,j_p} \end{vmatrix}$$

$$A(i_1 \quad i_2 \quad \dots \quad i_p) = A\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ i_1 & \dots & i_p \end{pmatrix}$$

(ii) Ενας πίνακας λέγεται Completely Pivoted (CP) εάν κατά την διάρκεια των μετασχηματισμών Gauss με ολική οδήγηση δεν απαιτούνται εναλλαγές των γραμμών ή των στηλών του. Αποδείξτε ότι εάν ο Α είναι CP κι εφαρμοσθούν σ' αυτόν μετασχηματισμοί Gauss τότε :

$$g(n, A) = \max\left\{1, \max_{1 \le r \le n-1} \left| \frac{A(1 \quad \dots \quad r+1)}{a_{11} \cdot A(1 \quad \dots \quad r)} \right| \right\}$$

όπου g (n, A) το growth του πίνακα Α.

Μέρος (II)

<u>Ορισμός</u> :

Ένας πίνακας Hadamard τάξης n είναι ένας nxn πίνακας με στοιχεία ± 1 έτσι ώστε :

$$H \cdot H^T = n \cdot I$$

Η σχέση αυτή ισοδυναμεί με το γεγονός ότι οποιεσδήποτε δύο γραμμές (ή στήλες) του H είναι ορθογώνιες. Η ιδιότητα αυτή παραμένει αμετάβλητη εάν εναλλάξουμε τις γραμμές ή τις στήλες του καθώς κι εάν τις πολλαπλασιάσουμε με -1. Οι πίνακες που προκύπτουν ονομάζονται ισοδύναμοι. Συγκεκριμένα δύο πίνακες Hadamard H_1και H_2 λέγονται ισοδύναμοι εάν :

$$H_2 = P \cdot H_1 \cdot Q$$

όπου P,Q μεταθετικοί πίνακες με στοιχεία 0, ± 1 .

<u>Η ΕΙΚΑΣΙΑ ΤΟΥ GROWTH ΓΙΑ HADAMARD ΠΙΝΑΚΕΣ</u>

Έστω A ένας CP nxn Hadamard πίνακας. Εάν εφαρμόσουμε σ' αυτόν απαλοιφή Gauss τοτε:

(i) g(n,A) = n
(ii) Τα τέσσερα τελευταία pivots είναι : n/2 ή n/4 , n/2 , n/2, n.
(iii) Το πέμπτο από το τέλος pivot είναι n/3 ή n/2.
(iv) Το έκτο από το τέλος pivot είναι n/4 , n/10/3 ή n/8/3.
(v) Κάθε pivot πριν από το τελευταίο έχει μέγεθος το πολύ n/2.
(vi) Τα πρώτα 6 pivots είναι ίσα με 1, 2 , 2 ,4 ,2 ή 3, 10/3 ή 8/3 ή 4.
(vii) Το πέμπτο pivot μπορεί να είναι 2 σε τάξης 2^tκαι είναι 3 για όλες τις άλλες.
(viii) Το έκτο pivot μπορεί να είναι 4 σε τάξης 2^tκαι είναι 10/3 ή 8/3 για όλες τις άλλες.

<u>Εφαρμογή</u>

1) Μελετήστε την δομή των οδηγών στοιχείων που προκύπτουν από την εφαρμογή Gauss με ολική οδήγηση σε πίνακες Hadamard τάξης n = 24.
2) Καταγράψτε τις διαφορετικές δομές που εντοπίζονται. Για κάθε διαφορετική δομή καταγράψτε τη μορφή από την οποία προέκυψε.
3) Τι συμπεράσματα προκύπτουν ;
4) Εξετάστε εάν ή επιλογή του μεγίστου επηρεάζει την προκύπτουσα δομή των οδηγών στοιχείων.
   Προσδιορίστε εναλλακτικούς αλγορίθμους επιλογής του μεγίστου.